Einführung in die Informatik 2 - Repetitorium WS 2016/17
Technische Universität München

Kevin Kappelmann 16. Mai 2017

Grundlagen der Logik

1 Theorie

Zum Start des Repetitoriums werden wir unsere Logikkenntnisse auffrischen. Hierfür zunächst eine Tabelle der wichtigsten Umformungsregeln:

Quelle: http://userpages.uni-koblenz.de/~sofronie/logik-ss-2012/slides/aussagenlogik-04.pdf

Wichtige Äquivalenzen (Zusammengefasst)

$(F \wedge F) \equiv F$	$(F \vee F) \equiv F$	(Idempotenz)
$(F \wedge G) \equiv (G \wedge F)$	$(F \vee G) \equiv (G \vee F)$	(Kommutativität)
$(F \wedge (G \wedge H)) \equiv ((F \wedge G) \wedge H)$ $(F \vee (G \vee H)) \equiv ((F \vee G) \vee H)$		(Assoziativität)
$(F \wedge (F \vee G)) \equiv F$ $(F \vee (F \wedge G)) \equiv F$		(Absorption)
$(F \wedge (G \vee H)) \equiv ((F \wedge G) \vee (F \wedge H))$ $(F \vee (G \wedge H)) \equiv ((F \vee G) \wedge (F \vee H))$		(Distributivität)
$(\neg\neg F) \equiv F$		(Doppelte Negation)
$\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G)$ $\neg(F \vee G) \equiv (\neg F \wedge \neg G)$		(De Morgan's Regeln)
$(F \rightarrow G) \equiv (\neg G \rightarrow \neg F)$		(Kontraposition)
$(F \rightarrow G) \equiv (\neg F \vee G)$		(Elimination Implikation)
$F \leftrightarrow G \equiv (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$		(Elimination Äquivalenz)

Ergänzend seien $F \wedge true \equiv F \equiv F \vee false$ (Identität) und $F \wedge false \equiv false$ bzw. $F \vee true \equiv true$ (Dominanz) genannt.
Da fragt sich vielleicht manch einer: Was war denn nochmal der Unterschied zwischen diesem '$\equiv$' und einem '$=$'? Hierfür müssen wir uns an die zwei Begriffe **Syntax** und **Semantik** erinnern:

- Syntax: Die Syntax beschäftigt sich mit der Grammatik und daraus resultierender Wohlgeformtheit von Zeichenketten. Beispielsweise erlaubt es uns die Grammatik der Aussagenlogik die Zeichenkette $A \wedge B$ als (syntaktisch korrekte) Formel zu bezeichnen. Die Zeichenkette $A \rightarrow B\vee$ hingegen ist keine Formel. Besteht zwischen zwei Formeln F und G eine syntaktische Gleichheit (d.h. Gleichheit auf Zeichenebene), so wird dies durch $F = G$ gekennzeichnet. Beispielsweise gilt $A \wedge B = A \wedge B$ und $A \wedge B \neq B \wedge A$. Achtung: "=" ist nicht immer gleich "=". In der Arithmetik gilt beispielsweise $1 + 2 = 3$. Mit "=" ist dort semantische Gleichheit zu verstehen.

- Semantik: Die Semantik beschäftigt sich mit der Bedeutung von Zeichenketten. Zwei Formeln F und G sind semantisch äquivalent, wenn sie sich für jede zu beiden passenden Belegung zum selben Wert auswerten. In diesem Fall schreiben wir $F \equiv G$. Als ergänzendes Beispiel zur Tabelle oben sei $x > 41 \equiv x \geq 42$ genannt.
  Um zu zeigen, dass zwei Formeln F und G semantisch äquivalent sind, können wir Äquivalenzregeln verwenden und versuchen F und G ineinander zu überführen oder, falls der Wertebereich der Formeln endlich ist, eine Wahrheitstabelle aufstellen und die Gleichheit überprüfen.

Besonders wichtig in der Beweisführung ist der Implikationsoperator $\rightarrow$. Wir betrachten die Wahrheitstabelle des binären Operators:

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Betrachten wir eine Formel $A \rightarrow B$, so wird A als **Prämisse** und B als **Konklusion** bezeichnet.
Merke: Ist die Prämisse falsch, so ist die Implikation wahr. Ist die Konklusion wahr, so ist die Implikation ebenfalls wahr. Der einzig interessante Fall ist der, in dem die Prämisse wahr und die Konklusion falsch ist. Deswegen wird bei Beweisen von Implikationen stets die Prämisse als wahr angenommen und dann untersucht, ob die Konklusion ebenfalls wahr ist. Dies werden wir vor allem bei der Berechnung und Verifizierung von Weakest-Preconditions später benötigen.

2 Übungen

Semester 2016/17

- Blatt 1: Aufgabe 1, (2), 5, 6
- Blatt 2: Aufgabe 1, 4, 5

Semester 2015/16

- Blatt 2: Aufgabe 1