第2章　确知信号

2.1　确知信号的类型

2.2　确知信号的频域特性

2.3　确知信号的时域性质

博学笃行　盛德日新

§2.1 确知信号的类型

确知信号定义：信号取值在任何时间都是确定的和可预知的信号。

例如：振幅、频率和相位都是确定的一段正弦波。

- 信号类型

  周期~非周期型 能量~功率型

- 信号频率性质

  频谱 频谱密度 能量谱密度 功率谱密度

- 信号时域性质

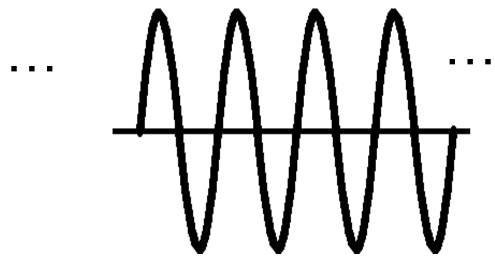
  自相关函数 互相关函数

§2.1 确知信号的类型

周期信号与非周期信号:

- 周期信号：数学上，信号$s(t)$满足

$$s(t) = s(t + T_0) \qquad -\infty < t < \infty \quad T_0 > 0$$



两个重要参数:

周期：T（最小的T_0）

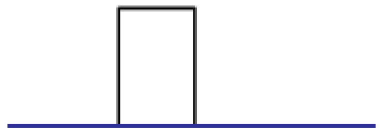
频率：$f = 1/\mathrm{T}$

【例】$8\sin(5t + 1), -\infty < t < \infty \Longrightarrow \mathrm{T} = 2\pi/5$

$$A\cos(2\pi f_0 t + \theta) \Longrightarrow \mathrm{T} = 1/f_0$$

湘潭大学自动化与电子信息学院

- 非周期信号:



能量信号与功率信号:

信号功率：电流在**单位电阻**（1欧）上消耗的功率（归一化功率）

$$P\text{（W）} = V^2/R = I^2R = V^2 = I^2$$

信号$s(t)$：表示随时间t变化的电压或电流

信号能量：在无穷小时间区间$[t, t+\Delta]$内的能量是$s^2(t)\Delta$

在$(-\infty, \infty)$内的总能量是： $E(J) = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt$

信号平均功率： $P = \overline{s^2(\mathrm{t})} = \lim\limits_{\mathrm{T}\to\infty} \frac{1}{\mathrm{T}} \int_{-T/2}^{\mathrm{T}/2} s^2(t)dt$

§2.1 确知信号的类型

$$E(J)=\int_{-\infty}^{\infty}s^2(t)dt \qquad P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}s^2(t)dt$$

能量信号： 能量等于一个有限的正值，但平均功率为零。

$$0<E<\infty \qquad P\to 0$$

例如，单个矩形脉冲。

功率信号： 平均功率为一个有限的正值，但能量为无穷大。

$$0<P<\infty \qquad E\to\infty$$

例如：直流信号、周期信号

注意

能量信号与功率信号的分类对随机信号也适应

【例】

（1）直流信号$s(t)=$A的功率是A^2

（2）正弦信号$s(t)=A\cos(2\pi f_0 t + \theta)$的平均功率是$A^2/2$

（3）信号$\mathrm{s(t)}=\sqrt{2}\cos(200\pi\mathrm{t})$的平均功率是？

（4）确定信号$g(t)=\begin{cases}A, & 0\le t\le T_b\\ 0, & else\end{cases}$的能量是？功率是？

第2章　确知信号

§2.2 信号的频域特性

频域特性

—— 信号最重要、最本质的性质之一

—— 反映信号各频率分量的分布情况

—— 涉及占用的频带宽度、滤波性能等

信号频域特性有四种

- ※ 功率信号的频谱
- ※ 能量信号的频谱密度
- ※ 能量信号的能量谱密度
- ※ 功率信号的功率谱密度

§2.2.1 功率信号的频谱

（1）周期性功率信号的频谱

对于周期（T_0）功率信号$s(t)$，可展成指数型傅里叶级数

$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{j2\pi nt/T_0}$$

其中，傅里叶级数的系数：

$$C_n=C(nf_0)=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}s(t)\,e^{-2\pi nf_0 t}dt$$

称为周期信号的频谱。它反映了信号各次谐波的幅度值和相位值。

一般而言，C_n是一个复数，表示复振幅

幅度谱：幅度随频率变化特性

$$C(nf_0)=|C_n|e^{j\theta_n}$$

相位谱：相位随频率的变化特性

$$C_n = C(nf_0) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t)\, e^{-2\pi n f_0 t}\, dt$$

式中，$f_0 = 1/T_0$ 称为信号的基频；

nf_0（n=0，±1, ±2， ±3， …）称为信号的n次谐波频率 。

$n = 0$时： $$C_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t)\, dt$$

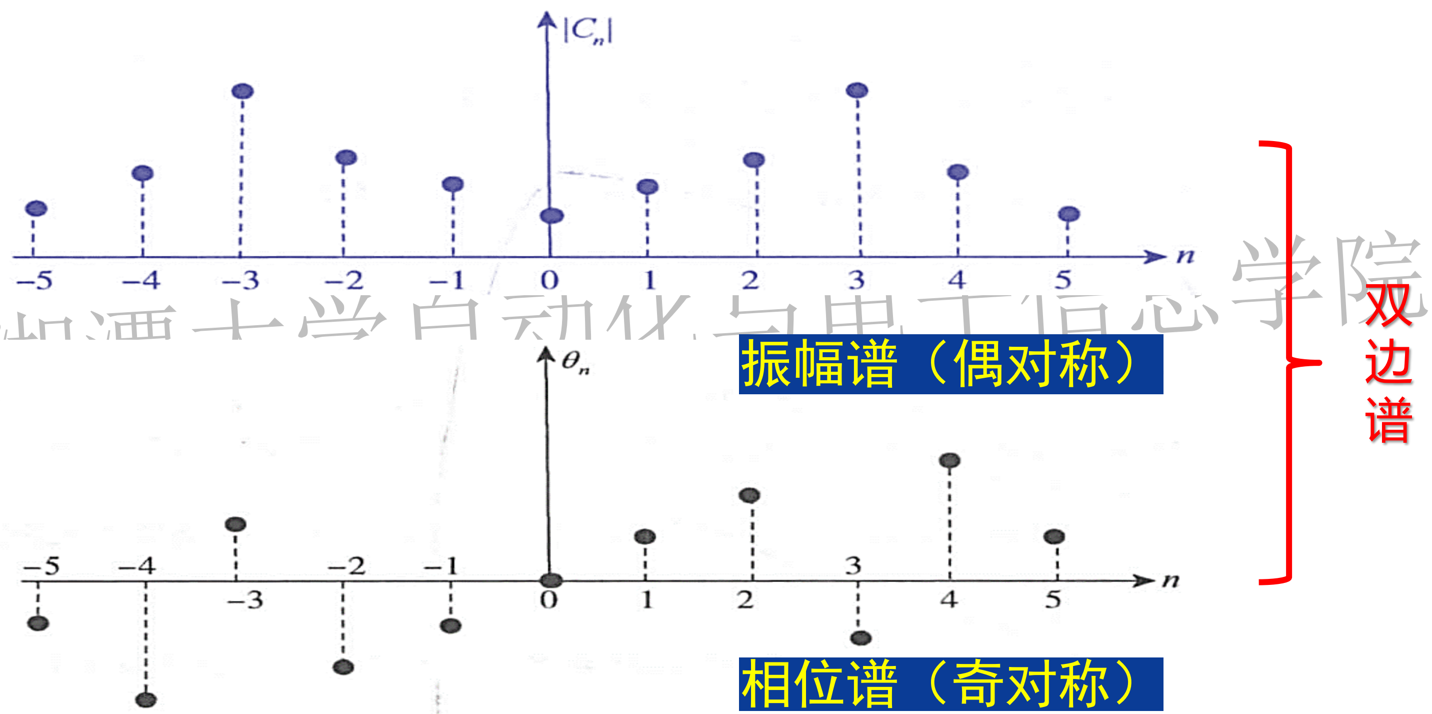
为$s(t)$的时间平均值，直流分量

§2.2.1 功率信号的频谱

对于物理可实现的实信号，有

$$C_{-n} = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t)e^{+j2\pi n f_0 t}dt = \left[\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t)e^{-j2\pi n f_0 t}dt\right]^* = C_n^*$$

含义：**正**频率部分和**负**频率部分间存在**复数共轭**关系，即：



§ 2.2.1 功率信号的频谱

双边谱的负频率仅在数学上有意义⇒物理上实信号频谱与数学上频谱的关系?

将式: $$C_{-n}=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}s(t)e^{+j2\pi nf_0t}dt=\left[\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}s(t)e^{-j2\pi nf_0t}dt\right]^*=C_n^*$$

令: $$C_n=\frac{1}{2}(a_n-jb_n)$$ 代入式: $$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_ne^{j2\pi nt/T_0}$$

可得$s(t)$的三角形式的傅里叶级数:

$$s(t)=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(2\pi nt/T_0\right)+b_n\sin\left(2\pi nt/T_0\right)\right]$$

$$=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sqrt{a_n^2+b_n^2}\cos\left(2\pi nt/T_0+\theta\right)\right]$$

式中 $\theta=\tan^{-1}\left(b_n/a_n\right)$ $\quad |C_n|=\frac{1}{2}\sqrt{a_n^2+b_n^2}$

§2.2.1 功率信号的频谱

$$s(t)=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sqrt{a_n^2+b_n^2}\cos\left(2\pi nt/T_0+\theta\right)\right]$$

表明：

① 实周期信号可分解为直流分量C_0、基波(n = 1时)和各次谐波(n = 1, 2, 3, …)分量的线性叠加；

② 实信号$s(t)$的各次谐波的振幅等于 $\sqrt{a_n^2+b_n^2}$

③ 实信号$s(t)$的各次谐波的相位等于θ $\theta=\tan^{-1}(b_n/a_n)$

称为单边谱

④ 频谱函数 C_n 又称为双边谱， $|C_n|$ 的值是单边谱的振幅之半。

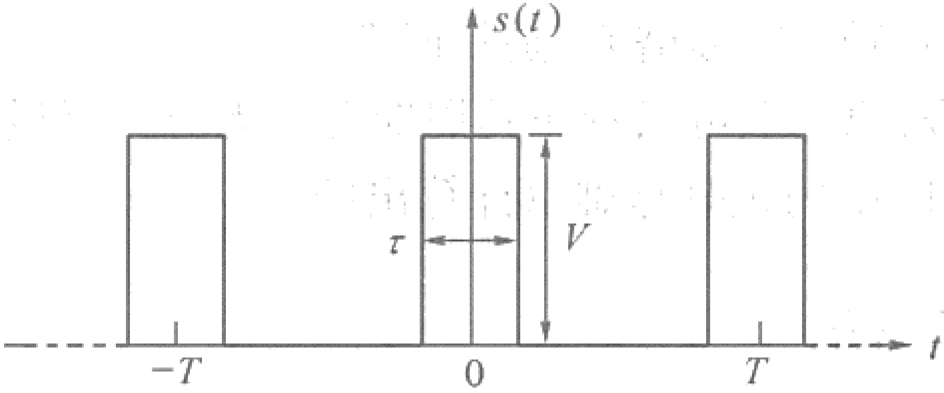
$$|C_n|=\frac{1}{2}\sqrt{a_n^2+b_n^2}$$

§2.2.1 功率信号的频谱

【例】周期性方波的周期T，脉宽τ，脉福V。求其频谱

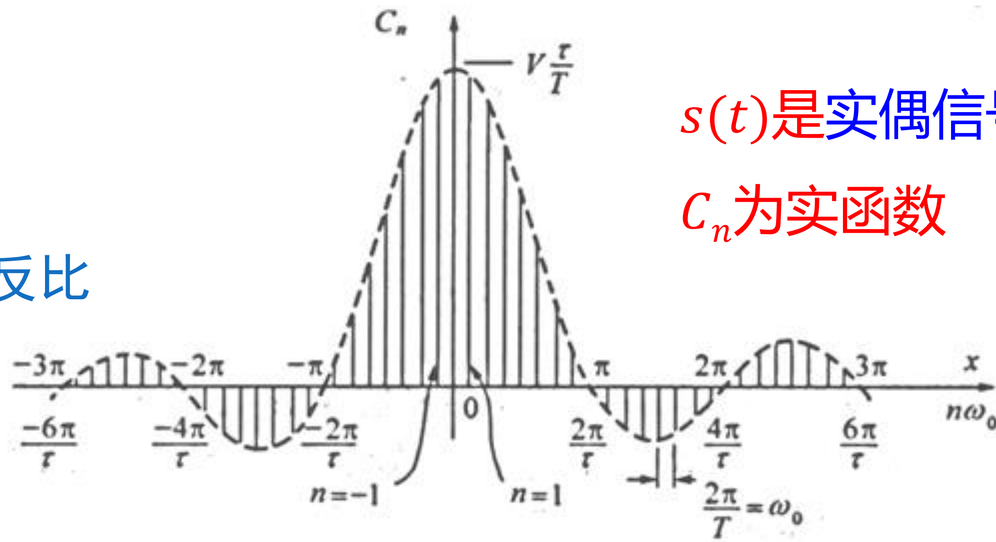
$$s(t)=\begin{cases}V, & -\tau/2\le t\le \tau/2\\ 0, & \tau/2<t<(T-\tau/2)\end{cases}$$

$$s(t)=s(t-T),\qquad -\infty<t<\infty$$



$$C_n=\frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}Ve^{-j2\pi nf_0t}dt=\frac{1}{T}\left[-\frac{V}{j2\pi nf_0}e^{-j2\pi nf_0t}\right]_{-\tau/2}^{\tau/2}$$

$$=\frac{V\tau}{T}Sa\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)$$



$s(t)$是实偶信号，

C_n为实函数

频率分辨率与信号周期成反比

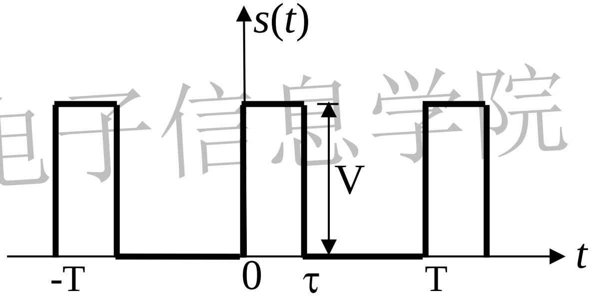
$\omega_0=\frac{2\pi}{T}$：周期T确定了，ω_0就确定了，基波频率

§2.2.1 功率信号的频谱

【例】周期性方波的周期T，脉宽τ，脉福**V**。求其频谱

$$s(t)=\begin{cases} V, & 0\le t\le \tau \\ 0, & \tau<t<T \end{cases}$$

$$s(t)=s(t-T), \qquad -\infty<t<\infty$$



其频谱：

$$C_n=\frac{1}{T}\int_0^{\tau} Ve^{-j2\pi n f_0 t}dt=\frac{1}{T}\left[-\frac{V}{j2\pi n f_0}e^{-j2\pi n f_0 t}\right]_0^{\tau}$$

$$=\frac{V}{T}\frac{1-e^{-j2\pi n f_0\tau}}{j2\pi n f_0}=\frac{V}{j2\pi n}\left(1-e^{-j2\pi n\tau/T}\right)$$

此信号不是偶函数，其频谱C_n是 复函数 。

湘潭大学自动化与电子信息学院

§2.2.2 能量信号的频谱密度

设$s(t)$为一个能量信号，则它的傅里叶变换定义为频谱密度函数（简称频谱函数）

$$S(f) = F[s(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

其傅里叶反变换就是原信号

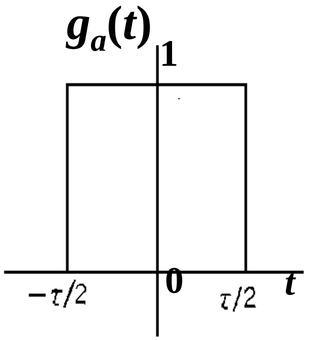
$$s(t) = F^{-1}[S(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi f t} dt$$

将频率f换成角频率ω

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \Leftrightarrow s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

【例】试求单位门函数的频谱密度。

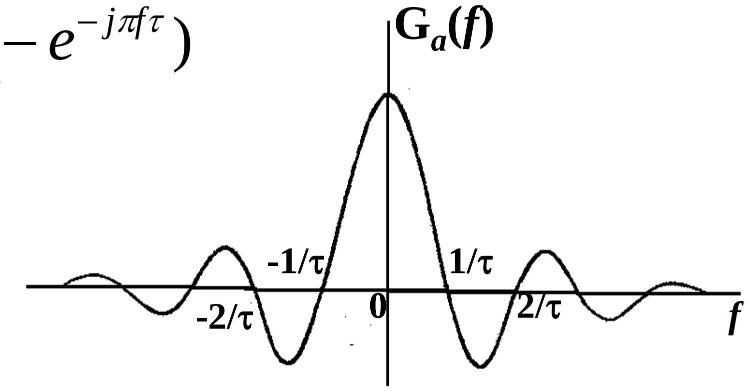
$$g_a(t)=\begin{cases}1 & |t|\le \tau/2\\ 0 & |t|>\tau/2\end{cases}$$



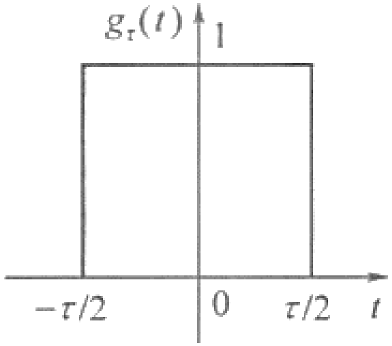
解：其傅里叶变换为

$$G_a(f)=\int_{-\tau/2}^{\tau/2}e^{-j2\pi ft}dt=\frac{1}{j2\pi f}(e^{j\pi f\tau}-e^{-j\pi f\tau})$$

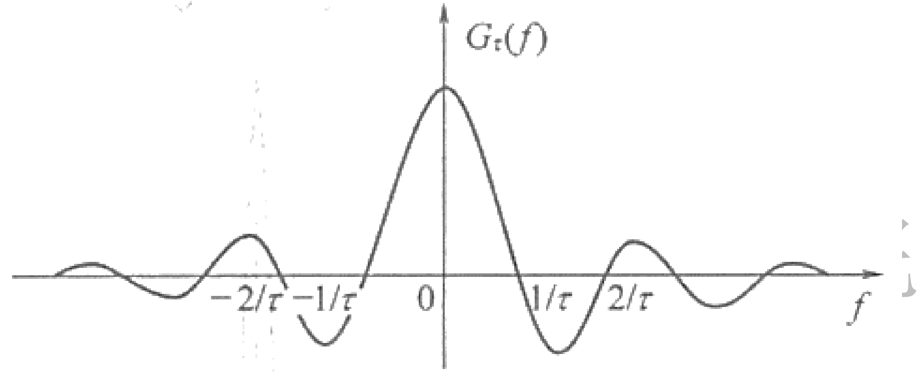
$$=\tau\frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau}=\tau Sa(\pi f\tau)$$



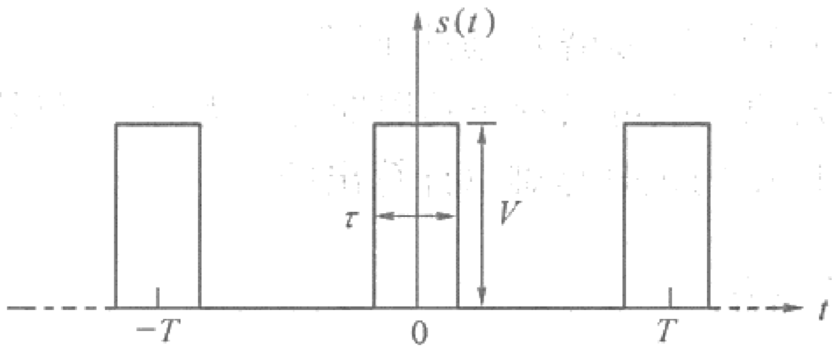
§2.2.2 能量信号的频谱密度

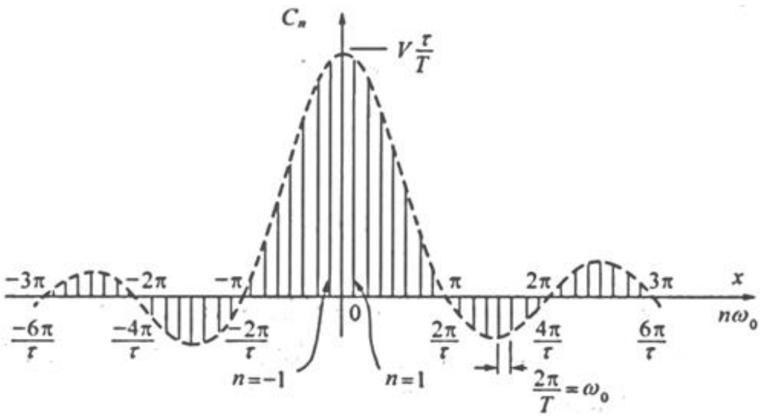


(a) $g_\tau(t)$



(b) $G_\tau(f)$





频谱C_n与频谱密度S(f)的区别：

- S(f)是连续谱， C_n是离散谱；
- S(f)的单位是伏/赫（V/Hz），而C_n的单位是伏（V）。

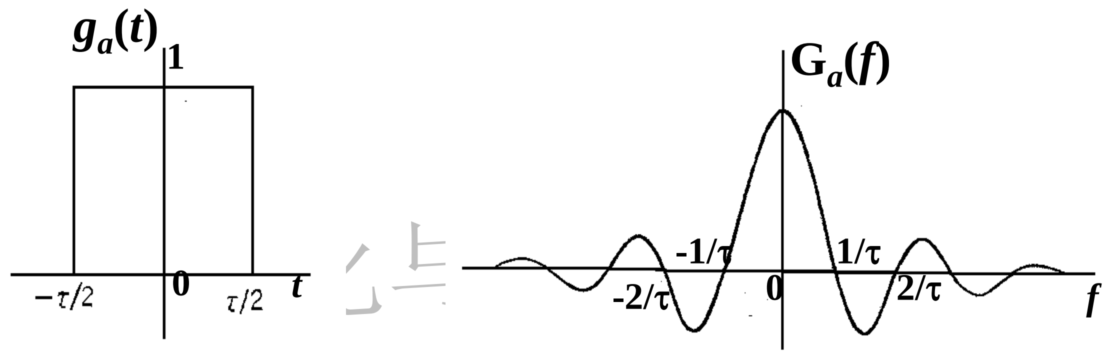
§2.2.2 能量信号的频谱密度

■ 实能量信号频谱密度和实功率信号频谱的共同特性：

—— 负频谱和正频谱的模偶对称，相位奇对称，即复数共轭。因为：

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j2\pi ft}dt = \left[\int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{+j2\pi ft}dt\right]^*, \qquad S(f) = [S(-f)]^*$$

单位门函数

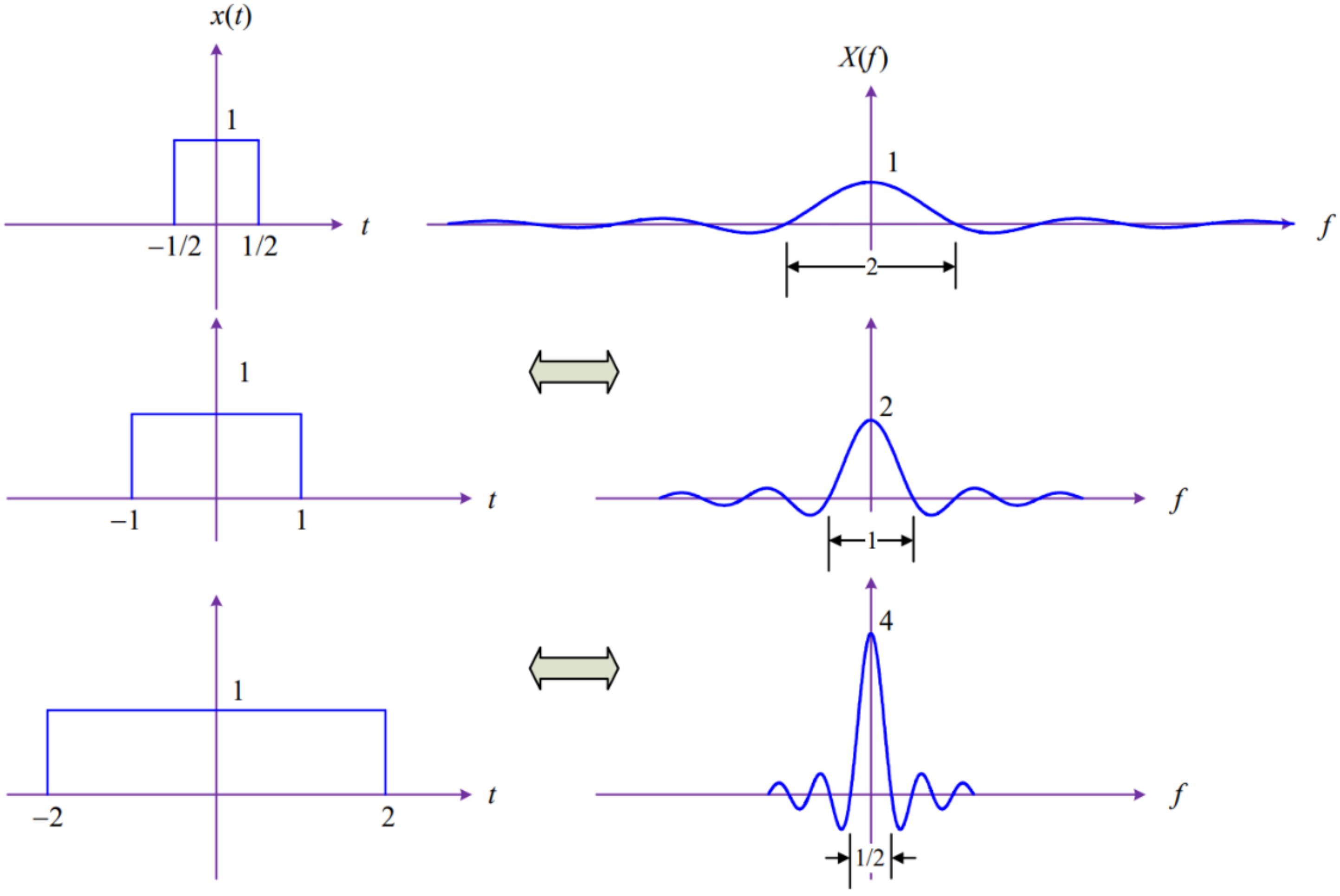


1. 频谱密度零点的间隔为$1/\tau$；

2. 矩形脉冲的带宽等于其脉冲持续时间的倒数，即（ $1/\tau$ ）Hz 。

§2.2.2 能量信号的频谱密度

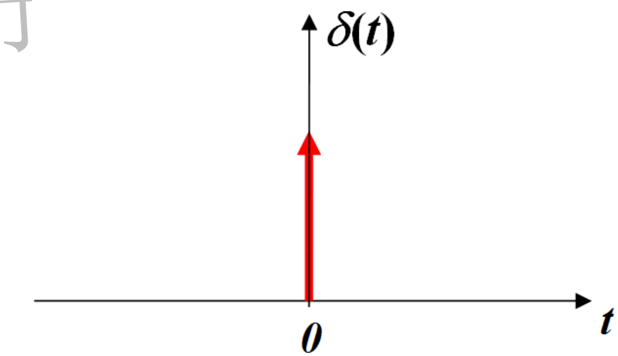
时域越宽，频域越窄；频域越宽，时域越窄



§2.2.2 能量信号的频谱密度

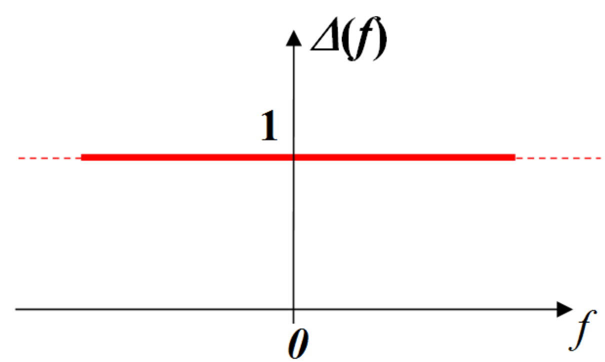
δ函数的定义： $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt = 1$　　且 $\delta(t) = 0, \quad t \neq 0$

δ函数的物理意义：



一个高度为无穷大、宽度为无穷小、面积为1的脉冲。

δ函数的频谱密度：

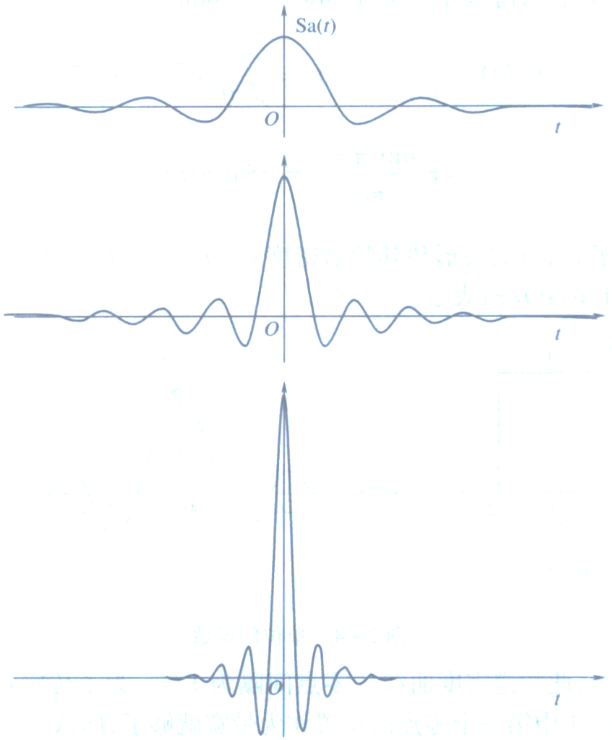


$$\Delta(f) = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j2\pi ft}dt = 1\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt = 1$$

δ 函数的性质

① δ 函数可用抽样函数的极限表示

$$\delta(t)=\lim_{k\to\infty}\frac{k}{\pi}Sa(kt)$$



② δ 函数性质2

$$f(t_0)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-t_0)dt$$

可看作是δ 函数在$t=t_0$时刻对$f(t)$抽样

③ δ 函数可视为单位阶跃函数的导数

$$u(t)=\begin{cases}0, & \text{当} t<0,\\ 1, & \text{当} t\geq 0\end{cases}\qquad u'(t)=\delta(t)$$

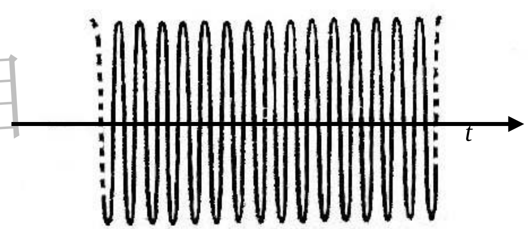
【例】试求无限长余弦波的频谱密度。

解：设余弦波的表示式为 $s(t)=\cos 2\pi f_0 t$，则其频谱密度$S(f)$为

$$S(f)=\lim_{\tau\to\infty}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}\cos 2\pi f_0 t e^{-j2\pi ft}dt=\lim_{\tau\to\infty}\frac{\tau}{2}\left\{\frac{\sin[\pi(f-f_0)\tau]}{\pi(f-f_0)\tau}+\frac{\sin[\pi(f+f_0)\tau]}{\pi(f+f_0)\tau}\right\}$$

$$=\lim_{\tau\to\infty}\frac{\tau}{2}\{Sa[\pi\tau(f-f_0)]+Sa[\pi\tau(f+f_0)]\}$$

利用 $\delta(t)=\lim_{k\to\infty}\frac{k}{\pi}Sa(kt)$ 则有 $S(f)=\frac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$



(a) 余弦波形

(b) 频谱密度

可见： 利用**冲激函数**，可以把**频谱密度**的概念**推广**到**功率信号**上。

§2.2.3 能量信号的能量谱密度

——用来描述信号的**能量**在频域上的分布情况

设$s(t)$为一个能量信号，能量为E $\quad E(J) = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt$

由帕塞瓦尔定理得：

实函数，$|S(f)|$为偶函数

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)df = 2\int_{0}^{\infty} G(f)df$$

可知：$G(f) = |S(f)|^2$在频率轴上得积分等于信号能量

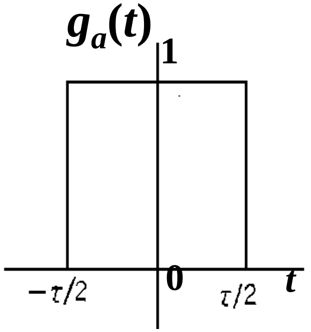
定义：$G(f) = |S(f)|^2$为能量谱密度

表示：在频率f处宽度为df的频带内的信号能量，或者是单位频带内的信号能量。

湘潭大学自动化与电子信息学院

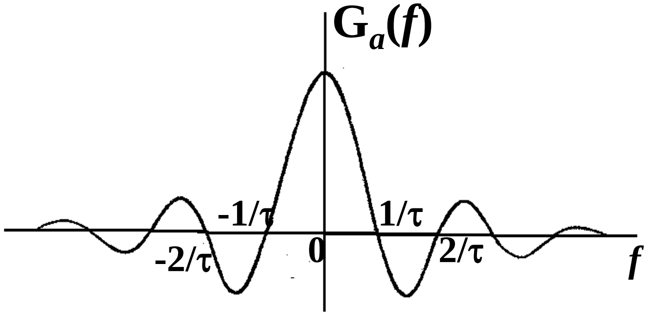
【例】试求矩形脉冲的能量谱密度。

$$g_a(t)=\begin{cases}1 & |t|\le \tau/2\\ 0 & |t|>\tau/2\end{cases}$$



解：前面已经求出其频谱密度：

$$S(f)=G_a(f)=\tau Sa(\pi f\tau)$$



故其能量谱密度为：

$$G(f)=|S(f)|^2=|\tau Sa(\pi f\tau)|^2=\tau^2|Sa(\pi f\tau)|^2$$

§2.2.4 功率信号的功率谱密度

——用来描述信号的**功率**在频域上的分布情况。

功率信号能量无限大 ⇒ 不能计算功率信号的能量谱 ⇒ 计算其功率谱

将功率信号$s(t)$截短为长度为T的信号$s_T(t)$ $-T/2 < t < T/2$

$$s_T(t) \xrightarrow{\text{能量谱}} S_T(f)$$

$$E = \int_{-T/2}^{T/2} s_T^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left|S_T^2(f)\right|^2 df$$

- **定义：** 信号$s(t)$的**功率谱密度** $P(f)$定义为：

$$P(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left|S_T(f)\right|^2$$

则信号功率为：

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} P(f)df$$

§2.2.4 功率信号的功率谱密度

- 对于周期信号

将T取为信号周期T_0

$$P = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} s^2(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2$$

第n次谐波的功率

若用连续的功率谱密度表示离散谱，则可得

周期信号的功率谱密度

$$\mathrm{P}(f) = \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|C(f)|^2\delta(f-nf_0)df$$

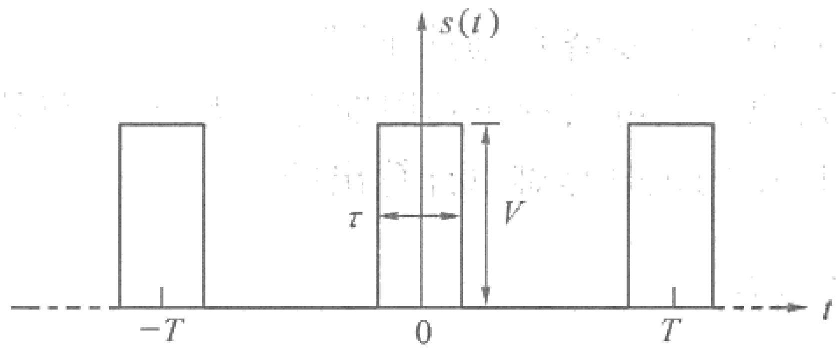
$$|C(f)| = \begin{cases} C_n & f = nf_0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

§2.2.4 功率信号的功率谱密度

【例】求周期性信号的功率谱密度

解：该信号的频谱：

$$C_n = \frac{V\tau}{T} Sa\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)$$



由式 $$P(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \delta(f - nf_0)$$

可得该信号的功率谱密度：

$$P(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{V\tau}{T}\right)^2 Sa^2(\pi\tau f)\delta(f - nf_0)$$

第2章　确知信号

§2.3.1 能量信号的自相关函数

- **定义：** $R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t+\tau)dt \qquad -\infty<\tau<\infty$
- **意义：** 反映了一个信号与延迟 τ 后同一信号的关联程度
- **性质：**
  - 自相关函数 $R(\tau)$ 和时间 t 无关，只和时间差 τ 有关；
  - 当 τ = 0 时，$R(0)$ 等于信号的能量：

$$R(0)=\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt=E$$

  - $R(\tau)$是τ的偶函数: $R(\tau)=R(-\tau)$
  - $R(\tau)$ 和其能量谱密度 $|S(f)|^2$ 是一对傅里叶变换：

$$|S(f)|^2=\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \qquad R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 e^{j2\pi f\tau}df$$

§2.3.2 功率信号的自相关函数

- **定义：**

$$R(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}s(t)s(t+\tau)dt \qquad -\infty<\tau<\infty$$

对于周期功率信号 $R(\tau)=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}s(t)s(t+\tau)dt \qquad -\infty<\tau<\infty$

- **性质：**
  - 当τ = 0 时，$R(0)$ 等于信号的平均功率：

$$R(0)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}s^2(t)dt=P$$

  - $R(\tau)$也是τ的偶函数；
  - $R(\tau)$ 和 功率谱密度 $P(f)$ 是一对傅里叶变换：

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}P(f)e^{j2\pi f\tau}df \qquad P(f)=\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

§2.3.2 功率信号的自相关函数

【例】试求周期性余弦信号$s(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta)$的自相关函数、功率谱密度和平均功率。

解　自相关函数：

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi / T_0$$

$$R(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t)s(t+\tau)dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} A^2\cos(\omega_0 t+\theta)\cos[\omega_0(t+\tau)+\theta]dt$$

利用积化和差三角函数公式，上式变为：

$$R(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau \cdot \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} dt + \frac{A^2}{2}\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\cos(2\omega_0 t+\omega_0\tau+2\theta)dt = \frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau$$

对上式作傅里叶变换，则可得此余弦信号的功率谱密度：

$$P(\omega) = \frac{A^2}{2}\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)] \qquad P(f) = \frac{A^2}{4}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$$

信号的平均功率：　$P = R(0) = \frac{A^2}{2}$

§2.3.3 能量信号的互相关函数

■ 定义：

$$R_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}s_1(t)s_2(t+\tau)dt, \qquad -\infty<\tau<\infty$$

■ 性质：

◆ $R_{12}(\tau)$和时间 t 无关，只和时间差τ 有关；

◆ $R_{12}(\tau)$ 和两个信号相乘的前后次序有关：

$$R_{21}(\tau)=R_{12}(-\tau)$$

◆ 互相关函数$R_{12}(\tau)$ 和互能量谱密度$S_{12}(f)$是一对傅里叶变换：

$$R_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}S_{12}(f)e^{j2\pi f\tau}df \qquad S_{12}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{12}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

互能量谱密度的定义： $S_{12}(f)=S_1^*(f)S_2(f)$

§2.3.4 功率信号的互相关函数

- 定义：

$$R_{12}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}s_1(t)s_2(t+\tau)dt,\qquad -\infty<\tau<\infty$$

- 性质：
  - $R_{12}(\tau)$和时间 t 无关，只和时间差τ 有关；
  - $R_{12}(\tau)$ 和两个信号相乘的前后次序有关：　$R_{21}(\tau)=R_{12}(-\tau)$
  - 若两个周期性功率信号的周期相同，则其互相关函数可以写为：

$$R_{12}(\tau)=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}s_1(t)s_2(t+\tau)dt,\qquad -\infty<\tau<\infty$$

  - $R_{12}(\tau)$和其互功率谱C_{12}之间也有傅里叶变换关系：

$$R_{12}(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[C_{12}]e^{j2\pi nf_0\tau}\qquad R_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}C_{12}(f)\delta(f-nf_0)e^{j2\pi nf_0}df$$

互功率谱定义：　$C_{12}=(C_n)_1^*(C_n)_2$

小结

※ 掌握信号的分类及其特征

※ 熟悉傅里叶级数和傅里叶变换相关公式及计算方法

※ 掌握信号能量谱和功率谱的公式及计算方法

※ 掌握相关函数的定义、性质及相关函数与谱密度之间的关系