第3章　随机过程

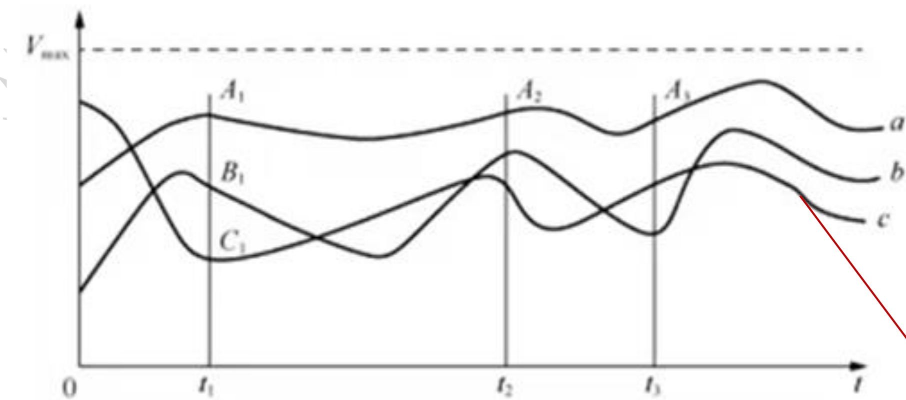
湘潭大学自动化与电子信息学院
湘潭大学自动化与电子信息学院

博学笃行　盛德日新

§3.1 随机过程的基本概念

定义： 随机过程是一类随时间作随机变化的过程。

- 所有样本函数$\xi_i(t)$的集合构成随机过程$\xi(t)$；
- 随机变量$\xi(t_i)$的集合



n台性能完全相同的接收机，在相同工作条件下输出的信号波形

测试结果的一个记录$\xi_i(t)$

- 样本函数
- 随机过程的一次实现

随机过程的两个属性：

- 是一个时间函数；
- 在任一观察时刻，是一个随机变量。

湘潭大学自动化与电子信息学院

随机过程的特性描述（统计规律）有两种方法：

※ 概率分布函数以及概率密度函数（概率统计法）

※ 随机变量的数字特征 —— 矩（统计平均法）

湘潭大学自动化与电子信息学院

湘潭大学自动化与电子信息学院

§3.1.1 随机过程的分布函数

设$\xi(t)$为一个随机过程，在任意给定的时刻 t_1，$\xi(t_1)$小于或等于某一数值x_1的概率

$$F_1(x_1, t_1) = P[\xi(t_1) \le x_1]$$

称$F_1(x_1,t_1)$为随机过程$\xi(t)$的一维分布函数。---描述孤立时刻的统计特性

如果存在 $$\frac{\partial F_1(x_1, t_1)}{\partial x_1} = f_1(x_1, t_1)$$

则称$f_1(x_1,t_1)$为$\xi(t)$的一维概率密度函数

同样的二维分布函数和概率密度函数分别为

$$F_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = P\{\xi(t_1) \le x_1, \xi(t_2) \le x_2\}$$

$$\frac{\partial^2 F_2(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = f_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$$

湘潭大学自动化与电子信息学院

§3.1.1 随机过程的分布函数

n维分布函数和n维概率密度函数

$$F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)$$
$$=P\{\ \xi(t_1)\le x_1,\xi(t_2)\le x_2,\cdots,\xi(t_n)\le x_n\}$$

$$f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)$$
$$=\frac{\partial^n F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)}{\partial x_1\cdot\partial x_2\cdots\cdots\partial x_n}$$

注意：维数n 越大，对随机过程统计特性的描述就越充分

实际中，随机过程的n维分布函数往往很难获得，用得较多的是随机过程的数字特征。

※原点矩：随机变量与原点差值（即变量自身）的各次方的平均

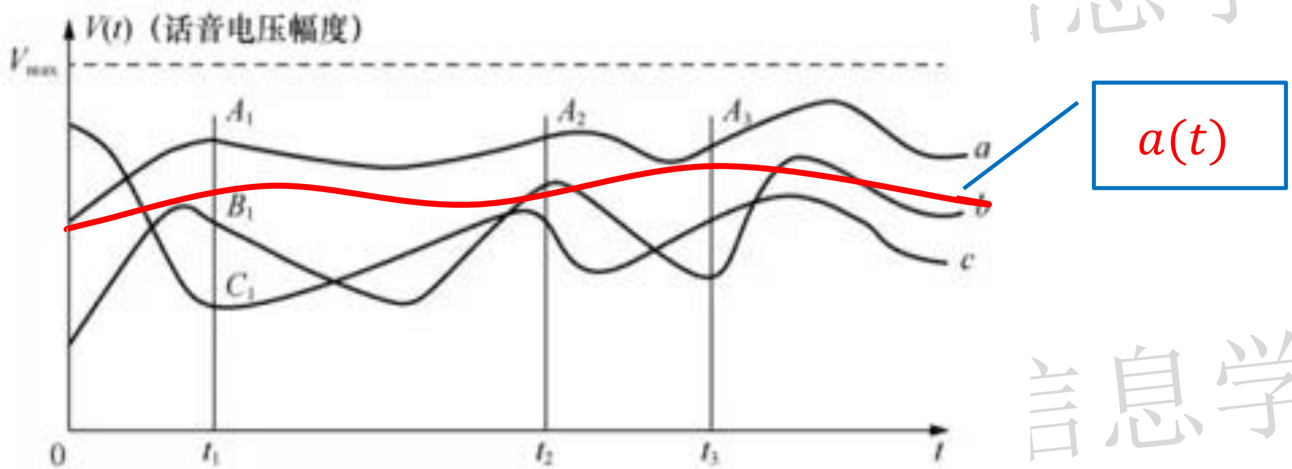
※中心矩：随机变量与自身均值的差值各次方的平均

湘潭大学自动化与电子信息学院

§3.1.2 随机过程的数字特征

（1）一阶原点矩，均值，数学期望（摆动中心）。

$$E[\xi(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x,t)dx = a(t)$$



（2）二阶中心矩（方差:反映随机变量对均值的偏离程度）

$$D[\xi(t)] = E\left\{[\xi(t)-a(t)]^2\right\} = E[\xi^2(t)] - [a(t)]^2 = \sigma^2(t)$$

当$a(t)=0$时　　$\sigma^2(t) = E\left[\xi^2(t)\right]$

（3）自相关函数:如果两个随机变量来自同一随机过程的不同位置$\xi(t_1)$和$\xi(t_2)$，则二阶联合原点矩定义为自相关函数

$$R(t_1,t_2)=\boxed{E[\xi(t_1)\,\xi(t_2)]}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2$$

令 $\tau=t_2-t_1$ 则有: $R(t_1,t_2)=R(t_1,t_1+\tau)$

（4）互相关函数 $R_{\xi\eta}(t_1,t_2)=E[\xi(t_1)\eta(t_2)]$

相关函数反映了随机变量在不同时刻取值的关联程度

自相关函数——同一过程的关联程度

互相关函数——两个过程的关联程度

湘潭大学自动化与电子信息学院

（5）自协方差函数

$$B(t_1,\ t_2)=E\{[\xi(t_1)-a(t_1)][\xi(t_2)-a(t_2)]\}$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x_1-a(t_1)][x_2-a(t_2)]f_2(x_1,\ x_2;\ t_1,\ t_2)dx_1x_2$$

$$B(t_1,t_2)=R(t_1,t_2)-a(t_1)a(t_2)$$

（6）互协方差函数

$$B_{\xi\eta}(t_1,\ t_2)=E\{[\xi(t_1)-a_\xi(t_1)][\eta(t_2)-a_\eta(t_2)]\}$$

湘潭大学自动化与电子信息学院

第3章　随机过程

湘潭大学自动化与电子信息学院

湘潭大学自动化与电子信息学院

博学笃行　盛德日新

1. 狭义平稳

对任意的n和τ，随机过程$\xi(t)$的n维概率密度函数满足

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)=F(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1+\tau,t_2+\tau,\cdots,t_n+\tau)$$

湘潭大学自动化与电子信息学院

含义

- 随机过程$\xi(t+\tau)$与$\xi(t)$（$\tau\in T$）有相同的分布
- 随机过程的任意n维分布与时间起点无关

湘潭大学自动化与电子信息学院

一维分布与时间t无关 $f_1(x_1,t_1)=f_1(x_1)$

二维分布只与时间间隔τ有关 $f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)=f_2(x_1,x_2;\tau)$

$E[\xi(t)]=a$ $R_\xi(t,t+\tau)=R_\xi(\tau)$

2. 广义平稳过程 ——只考虑一阶矩和二阶矩

随机过程$\xi(t)$的数学期望与自相关函数满足

- $R_{\xi}(t,t+\tau)=R_{\xi}(\tau)$，只与时间间隔有关，而与起点无关。
- $E[\xi(t)]=a$，为常数，与时间无关。

注意

- 宽平稳过程不一定是严平稳过程；
- 严平稳过程也不一定是宽平稳过程，因为宽平稳过程必须是二阶矩过程。

$$\text{狭义平稳} \underset{\text{不一定}}{\overset{\text{均方值有界}}{\rightleftarrows}} \text{广义平稳}$$

湘潭大学自动化与电子信息学院

§3.2.2 各态历经性

设$x(t)$是平稳随机过程$\xi(t)$的任意一个实现，若$\xi(t)$的数字特征可由$x(t)$ 的时间平均替代，即

$$\overline{x(t)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)dt = \bar{a} = a$$

$$\overline{R(\tau)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)x(t+\tau)dt = R(\tau)$$

则$\xi(t)$具有各态历经性（遍历性）

任一样本经历了平稳过程的所有可能状态

意义

用时间平均代替统计平均

统计平均$\Rightarrow$当样本数趋于无穷时的集合平均，集合平均$\Rightarrow$各个样本函数在某一时刻的平均

时间平均$\Rightarrow$某一样本函数在不同时刻的平均

湘潭大学自动化与电子信息学院

§3.2.2 各态历经性

【例】设相位随机的正弦波为 $\xi(t)=A\cos(\omega_c t+\theta)$

其中，**A**和 ω_c均为常数；**θ**是在**(0,2π)**内均匀分布的随机变量。试讨论$\xi(t)$是否具有各态历经性。

解题思路： 第1步：判断ξ(t) 是否平稳，即求其统计平均值

若均值为常数，且自相关函数只与时间间隔τ 有关，则ξ(t) 是广义平稳的。

第2步：求ξ(t) 的时间平均值

第3步：比较统计平均值和时间平均值

若二者相等，则各态历经

湘潭大学自动化与电子信息学院
湘潭大学自动化与电子信息学院

数学期望

统计平均值:

$$a(t) = E[\xi(t)] = E[A\cos(\omega_c t + \theta)] = AE(\cos\omega_c t\cos\theta - \sin\omega_c t\sin\theta)$$

$$= A\cos\omega_c t E[\cos\theta] - A\sin\omega_c t\, E[\sin\theta] = 0$$

时间平均值:

$$\mathrm{E}[\cos\theta] = \int_0^{2\pi}\cos\theta\frac{1}{2\pi}d\theta = 0$$

$$\bar{a} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A\cos(\omega_c t + \theta)dt = 0$$

有 $a = \bar{a}$

自相关函数的求解参阅课本例3-1

湘潭大学自动化与电子信息学院
湘潭大学自动化与电子信息学院

§3.2.3 平稳过程的自相关函数

设 $\xi(t)$为实平稳过程，则其自相关函数为

$$R(\tau)=E\left[\xi(t)\xi(t+\tau)\right]$$

$R(0)=E[\xi^2(t)]=S\geq 0$ -----平均功率

$R(\infty)=E^2[\xi(t)]=a^2$ -----直流功率

$R(0)-R(\infty)=\sigma^2$ -----交流功率（方差）

$R(-\tau)=R(\tau)$ -----偶函数

$|R(\tau)|\leq R(0)$ -----上界

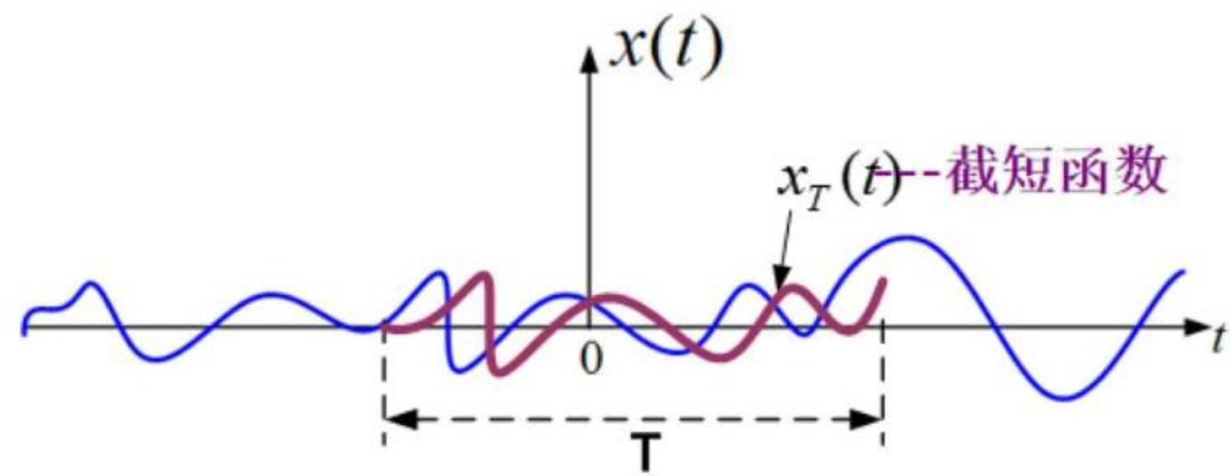
$$R(\infty)=\lim_{\tau\to\infty}E[\xi(t)\xi(t+\tau)]=E\,[\xi(t)]E[\xi(t+\tau)]=E^2[\xi(t)]$$

$$E\left\{[[\xi(t)\pm\xi(t+\tau)]]^2\right\}\geq 0\Rightarrow 2R(0)\pm 2R(\tau)\geq 0$$

湘潭大学自动化与电子信息学院

§3.2.4 平稳过程的功率谱密度

样本的功率谱(确定信号)：$\mathrm{P}_x(f) = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T}$



过程的功率谱：应看作是对所有样本功率谱的统计平均

$$P_\xi(f) = E[P_x(f)] = \lim_{T\to\infty} \frac{E|X_T(f)|^2}{T}$$

如何方便求解功率谱

§3.2.4 平稳过程的功率谱密度

$$\begin{cases} P_\xi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_\xi(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \end{cases}$$

维纳-辛钦定理：平稳过程的自相关函数与功率谱密度是一对傅里叶变换

$$R(\tau) \Leftrightarrow P_\xi(\omega)$$

当$\tau = 0$时，

$$R(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_\xi(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} P_\xi(f) df$$

平稳随机过程的平均功率

非负性 $P_\xi(\omega) \geq 0$

偶函数 $P_\xi(-\omega) = P_\xi(\omega)$

单边功率谱密度 $P_{\xi_1}(\omega) = \begin{cases} 2P_\xi(\omega) & \omega \geq 0 \\ 0 & \omega < 0 \end{cases}$

湘潭大学自动化与电子信息学院

第3章　随机过程

湘潭大学自动化与电子信息学院

湘潭大学自动化与电子信息学院

博学笃行　盛德日新

§3.3.1 定义

若随机过程 $\xi(t)$的任意n维分布都服从正态分布，则称它为高斯过程

$$f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n|\boldsymbol{B}|^{1/2}}\exp\left[\frac{-1}{2|\boldsymbol{B}|}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|\boldsymbol{B}|_{jk}\left(\frac{x_j-a_j}{\sigma_j}\right)\left(\frac{x_k-a_k}{\sigma_k}\right)\right]$$

$$a_j=E[\xi(t_j)] \qquad \sigma_j^2=E[\xi(t_j)-a_j]^2$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}1 & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & 1 & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

$|\boldsymbol{B}|$：归一化协方差矩阵的行列式

$|\boldsymbol{B}|_{\mathrm{jk}}$：行列式$|\boldsymbol{B}|$中的元素$b_{jk}$的代数余因子

$$b_{jk}=\frac{E\{[\xi(t_j)-a_j][\xi(t_k)-a_k]\}}{\sigma_j\sigma_k}$$

为归一化协方差函数

湘潭大学自动化与电子信息学院

§3.3.2 重要性质

- 若高斯过程是广义平稳的，则也是狭义平稳的。
- 若高斯过程在不同时刻的取值互不相关，则它们也是统计独立的。

即对所有j ≠ k有$b_{jk}=0$

$$f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k}\exp\left[-\frac{(x_k-a_k)^2}{2\sigma_k^2}\right]$$

$$=f(x_1,t_1)f(x_2,t_2)\cdots f(x_n,t_n)$$

湘潭大学自动化与电子信息学院
湘潭大学自动化与电子信息学院

- 高斯过程经过线性变换（或线性系统）后的过程仍是高斯过程

§3.3.3 高斯随机变量

1. 一维概率密度函数

高斯过程在任一时刻上的取值是一个正态分布的随机变量，也称高斯随机变量

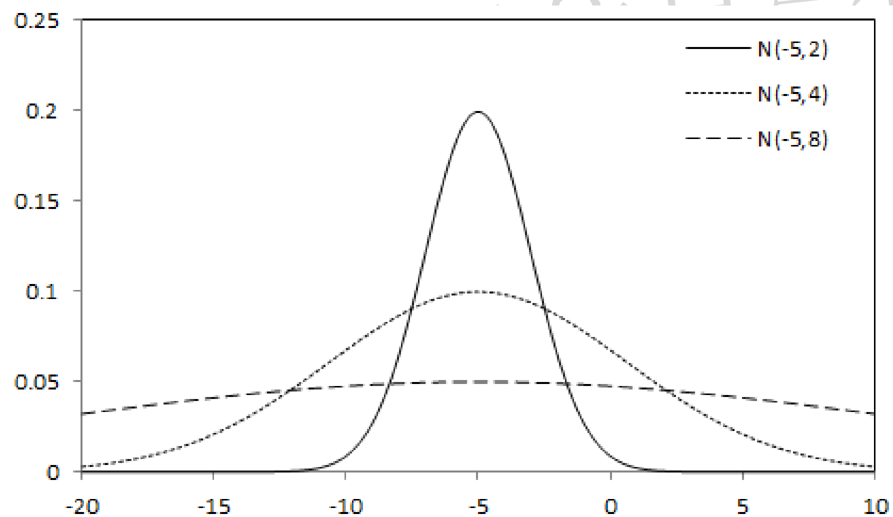
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]$$

简记为:$\mathcal{N}(a,\sigma^2)$

a：数学期望

σ^2：方差

- 对称性
- 单调性
- a表示分布中心，σ^2表示集中程度



湘潭大学自动化与电子信息学院

正态分布函数

$$F(b)=(x\le b)=\int_{-\infty}^{b}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]dx$$

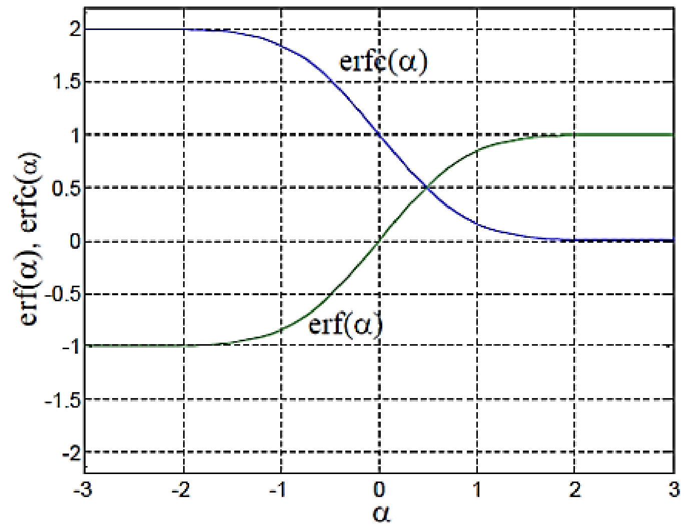
误差函数：

$$erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt \qquad erf(0)=0 \qquad erf(\infty)=1$$

补误差函数：

$$erfc(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty} e^{-t^2}\,dt \qquad erfc(0)=1 \qquad erfc(\infty)=0$$

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}erf\left(\frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma}\right), & x\ge a\\ 1-\frac{1}{2}erfc\left(\frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma}\right), & x<a\end{cases}$$



湘潭大学自动化与电子信息学院

第3章　随机过程

湘潭大学自动化与电子信息学院
湘潭大学自动化与电子信息学院

博学笃行　盛德日新

设线性系统的冲激响应为

$$h(t) \Leftrightarrow H(\omega)$$

若输入随机过程为$\xi_i(t)$

$$\xi_o(t) = \xi_i(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_i(\tau)\, h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, \xi_i(t-\tau) d\tau$$

若系统是物理可实现的，则

$$\xi_o(t) = \int_{-\infty}^{t} \xi_i(\tau)\, h(t-\tau) d\tau$$

$$\xi_o(t) = \int_{0}^{\infty} h(\tau)\, \xi_i(t-\tau) d\tau$$

若给定$\xi_i(t)$的统计特性，则可求得ξ_o的统计特性

湘潭大学自动化与电子信息学院
湘潭大学自动化与电子信息学院

§3.4 平稳随机过程通过线性系统

（1）设输入过程是平稳的， 均值为 a

通过线性系统， 输出过程的均值

$$E[\xi_0(t)] = a \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau = a \cdot H(0)$$

$H(0) = \int_0^{\infty} h(t)\,dt$：线性系统在$f = 0$的频率响应（直流增益）

（2）输出过程的自相关函数

$$R_0(t_1, t_1 + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) h(\beta) R_i(\tau + \alpha - \beta) d\alpha d\beta = R_0(\tau)$$

仅是时间间隔 τ 的函数。由此可知，若线性系统的输入是平稳的，则输出也是平稳的

（3）输出过程的功率谱密度是输入过程的功率谱密度乘以系统频率响应模值的平方。

$$P_0(f) = H^*(f) \cdot H(f) \cdot P_i(f) = |H(f)|^2 P_i(f)$$

湘潭大学自动化与电子信息学院

	输入过程 $\xi_i(t)$	输出过程 $\xi_o(t)$
概率分布	平稳、高斯	平稳、高斯
均值	$E[\xi_i(t)]=a$ 常数	$E[\xi_o(t)]=a\cdot H(0)$ 常数
功率谱密度	$P_i(f)$	$P_o(f)=\lvert H(f)\rvert^2 P_i(f)$
自相关函数	$R_i(\tau)\Leftrightarrow P_i(f)$	$R_o(\tau)\Leftrightarrow P_o(f)$

$|H(f)|^2$：功率增益

第3章　随机过程

3. 1　随机过程的基本概念

3. 2　平稳随机过程

3. 3　高斯随机过程

3. 4　平稳随机过程通过线性系统

3. 5　窄带随机过程

3. 6　正弦波加窄带高斯噪声

3. 7　高斯白噪声和带限白噪声

湘潭大学自动化与电子信息学院
湘潭大学自动化与电子信息学院

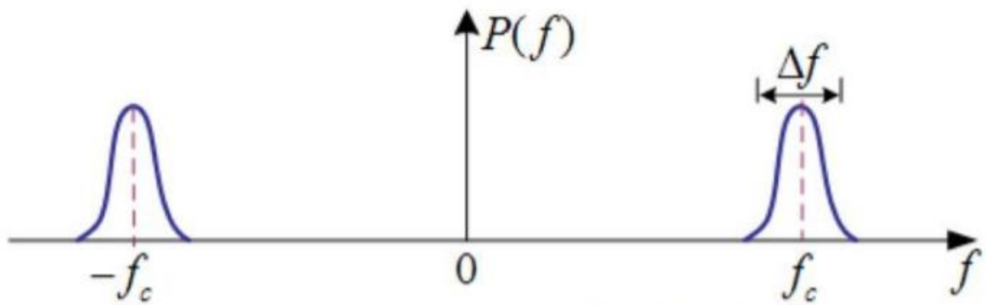
博学笃行　盛德日新

窄带随机过程：

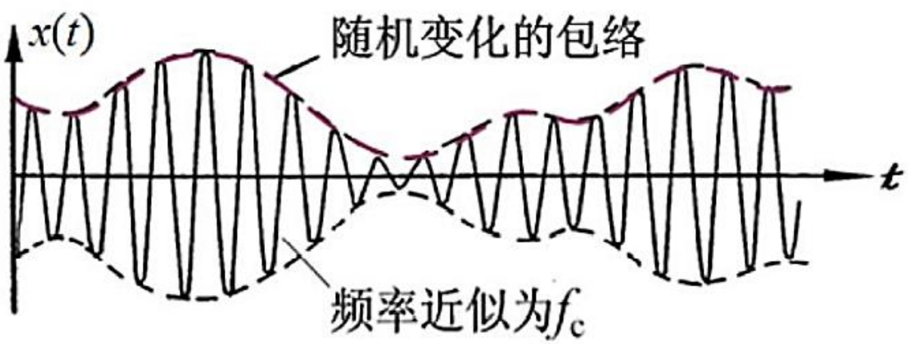
若随机过程$\xi(t)$的谱密度集中在中心频率f_c附近相对窄的频带范围Δf内，且满足

$$\Delta f << f_c \qquad f_c >> 0$$

则称该$\xi(t)$为窄带随机过程。通过窄带系统的随机信号或噪声是窄带随机过程。



窄带过程的功率谱密度



窄带过程的样本函数

可视为包络和相位随机缓慢变化的正弦波

湘潭大学自动化与电子信息学院

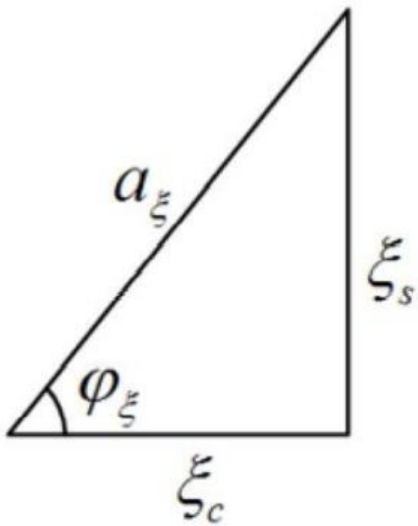
数学表示

随机包络　　随机相位

1. 包络相位表示　$\xi(t)=a_\xi(t)\cos[\omega_c t+\varphi_\xi(t)],\qquad a_\xi(t)\ge 0$

正弦波中心角频率

2. 同相正交表示　$\xi(t)=\xi_c(t)\cos\omega_c t-\xi_s(t)\sin\omega_c t$



$\xi_c(t)=a_\xi(t)\cos\varphi_\xi(t)$　同相分量

$\xi_s(t)=a_\xi(t)\sin\varphi_\xi(t)$　正交分量

$$a_\xi(t)=\sqrt{\xi_c^2(t)+\xi_s^2(t)}$$

$$\varphi_\xi(t)=\arctan[\xi_s(t)/\xi_c(t)]$$

窄带过程$\xi(t)$的统计特性 $\xleftrightarrow{\text{确定}}$ 同相/正交、包络/相位的统计特性

湘潭大学自动化与电子信息学院

§3.5.1 同相和正交分量的统计特性

由 $\xi(t)=\xi_c(t)\cos\omega_c t-\xi_s(t)\sin\omega_c t$ 结合窄带过程的统计特性，可得：

对于均值为0，方差为σ_ξ^2的平稳高斯窄带随机过程

※ 其同相$\xi_c(t)$和正交分量$\xi_s(t)$同样也是平稳、高斯过程；

※ 同相、正交分量的均值为零，方差也相等；

$$\sigma_\xi^2=\sigma_{\xi_c}^2=\sigma_{\xi_s}^2 \xrightarrow{\text{均值为0}} \text{平均功率相等}$$

※ 同相、正交分量互不相关；

$$R_{CS}(0)=0$$

因为是高斯过程，所以同相、正交分量也统计独立。

湘潭大学自动化与电子信息学院
湘潭大学自动化与电子信息学院

§3.5.2 包络和相位的统计特性

根据同相和正交分量的统计特性，结合：

$$\xi_c(t)=a_\xi(t)\cos\varphi_\xi(t)$$
$$\xi_s(t)=a_\xi(t)\sin\varphi_\xi(t)$$

$$\left.\begin{array}{l}\xi_c(t)\xrightarrow{\text{高斯}}\\ \xi_s(t)\xrightarrow{\text{高斯}}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{统计独立}} f(\xi_c,\xi_s)\xrightarrow{|J|} f(a_\xi,\varphi_\xi)\xrightarrow{\text{边际分布}}\left\{\begin{array}{l}f(a_\xi)\\ f(\varphi_\xi)\end{array}\right.$$

$$f(\xi_c,\xi_s)=f(\xi_c)f(\xi_s)=\frac{1}{2\pi\sigma_\xi^2}exp\left(-\frac{\xi_c^2+\xi_s^2}{2\sigma_\xi^2}\right)$$

$$f(a_\xi,\varphi_\xi)=f(\xi_c,\xi_s)|J|$$

$$|J|=\begin{vmatrix}\frac{\partial\xi_c}{\partial a_\xi} & \frac{\partial\xi_s}{\partial a_\xi}\\ \frac{\partial\xi_c}{\partial\varphi_\xi} & \frac{\partial\xi_s}{\partial\varphi_\xi}\end{vmatrix}=a_\xi$$

$$f(a_\xi,\varphi_\xi)=\frac{a_\xi}{2\pi\sigma_\xi^2}\exp\left(-\frac{a_\xi^2}{2\sigma_\xi^2}\right)$$

湘潭大学自动化与电子信息学院

$$f(a_\xi,\varphi_\xi)=\frac{a_\xi}{2\pi\sigma_\xi^2}\exp\left(-\frac{a_\xi^2}{2\sigma_\xi^2}\right)$$

边际分布

$$f(a_\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}f(a_\xi,\varphi_\xi)d\,\varphi_\xi$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{a_\xi}{2\pi\sigma_\xi^2}\exp\left(-\frac{a_\xi^2}{2\sigma_\xi^2}\right)d\varphi_\xi=\frac{a_\xi}{\sigma_\xi^2}\exp\left(-\frac{a_\xi^2}{2\sigma_\xi^2}\right)\qquad a_\xi\geq 0$$

$$f(\varphi_\xi)=\int_0^{\infty}f(a_\xi,\varphi_\xi)d\,a_\xi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{a_\xi}{\sigma_\xi^2}\exp\left(-\frac{a_\xi^2}{2\sigma_\xi^2}\right)da_\xi=\frac{1}{2\pi}\qquad 0\leq\varphi_\xi\leq 2\pi$$

湘潭大学自动化与电子信息学院
湘潭大学自动化与电子信息学院

§3.5.2 包络和相位的统计特性

对于均值为0，方差为σ_ξ^2的平稳高斯窄带随机过程

※ 其包络服从瑞利分布；

$$f(a_\xi)=\frac{a_\xi}{\sigma_\xi^2}\exp\left(-\frac{a_\xi^2}{2\sigma_\xi^2}\right) \qquad a_\xi \ge 0$$

最可几值

※ 相位服从均匀分布；

$$f(\varphi_\xi)=\frac{1}{2\pi} \qquad 0 \le \varphi_\xi \le 2\pi$$

※ 包络和相位统计独立；

$$f(a_\xi,\varphi_\xi)=f(a_\xi)f(\varphi_\xi)$$

湘潭大学自动化与电子信息学院
湘潭大学自动化与电子信息学院

第3章　随机过程

湘潭大学自动化与电子信息学院

湘潭大学自动化与电子信息学院

博学笃行　盛德日新

§3.6 正弦波加窄带高斯噪声

- 在许多调制系统中，传输的信号是用一个正弦波作为载波的已调信号。
- 为了减小噪声的影响，通常在解调器前端设置一个带通滤波器。
- 这样带通滤波器的输出是已调信号与窄带高斯噪声的混合波形，这是通信系统中常会遇到的一种情况。

因此了解正弦波加窄带高斯噪声的混合波形的统计特性具有很大的实际意义。

湘潭大学自动化与电子信息学院

湘潭大学自动化与电子信息学院

§3.6 正弦波加窄带高斯噪声

随机相位正弦波 + 窄带高斯噪声：

$$r(t)=A\cos(\omega_c t+\theta)+n(t)$$

窄带高斯噪声 $(0,\sigma_\xi^2)$

（常数）（随机相位， θ~U(0,2π) ）

$$n(t)=n_c(t)\cos\omega_c t-n_s(t)\sin\omega_c t \qquad n\sim(0,\sigma_\xi^2)$$

$$r(t)=\left[A\cos\theta+n_c(t)\right]\cos\omega_c t-\left[A\sin\theta+n_s(t)\right]\sin\omega_c t$$

$$=z_c(t)\cos\omega_c t-z_S(t)\sin\omega_c t$$

$$=z(t)\cos[\omega_c t+\varphi(t)]$$

$$z_c(t)=A\cos\theta+n_c(t)$$

$$z_s(t)=A\sin\theta+n_s(t)$$

合成信号的包络和相位为：

$$z(t)=\sqrt{z_c^2(t)+z_s^2(t)},\ \ z\geq 0 \qquad \varphi(t)=\arctan\frac{z_s(t)}{z_c(t)},\ \ 0\leq\varphi\leq 2\pi$$

湘潭大学自动化与电子信息学院

1.包络的统计特性

若θ给定

$$z_c(t)=A\cos\theta+n_c(t)$$
$$z_s(t)=A\sin\theta+n_s(t)$$

$$E[Z_c]=A\cos\theta$$
$$E[Z_S]=A\sin\theta$$
$$\sigma_c^2=\sigma_s^2=\sigma_n^2$$

Z_c、Z_S的联合分布为

$$f(z_c,z_S|\theta)=\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_n^2}\left[(z_c-A\cos\theta)^2+(z_S-A\sin\theta)^2\right]\right\}$$

$$f(z,\varphi|\theta)=f(z_c,z_S|\theta)\left|\frac{\partial(z_c,z_S)}{\partial(z,\varphi)}\right|$$

$$=\frac{z}{2\pi\sigma_n^2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_n^2}\left[z^2+A^2-2Az\cos(\theta-\varphi)\right]\right\}$$

湘潭大学自动化与电子信息学院

§3.6 正弦波加窄带高斯噪声

$$f(z,\varphi/\theta)=\frac{z}{2\pi\sigma_n^2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_n^2}[z^2+A^2-2Az\cos(\theta-\varphi)]\right\}$$

$$f(z/\theta)=\int_0^{2\pi}f(z,\varphi/\theta)d\varphi$$

$$=\frac{z}{\sigma_n^2}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_n^2}(z^2+A^2)\right]I_0\left(\frac{Az}{\sigma_n^2}\right)$$

$$f(z)=\frac{z}{\sigma_n^2}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_n^2}(z^2+A^2)\right]I_0\left(\frac{Az}{\sigma_n^2}\right)\quad z>0$$

$$I_0(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp(x\cos\theta)d\theta$$

零阶修正贝塞尔函数

结论：正弦波加窄带高斯过程的包络服从广义瑞利分布，也称莱斯分布。

湘潭大学自动化与电子信息学院

§ 3. 6 正弦波加窄带高斯噪声

$$f(z)=\frac{z}{\sigma_n^2}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_n^2}(z^2+A^2)\right]I_0\left(\frac{Az}{\sigma_n^2}\right)\quad z>0$$

讨论： 信噪比$r=\dfrac{A^2}{2\sigma_\xi^2}$

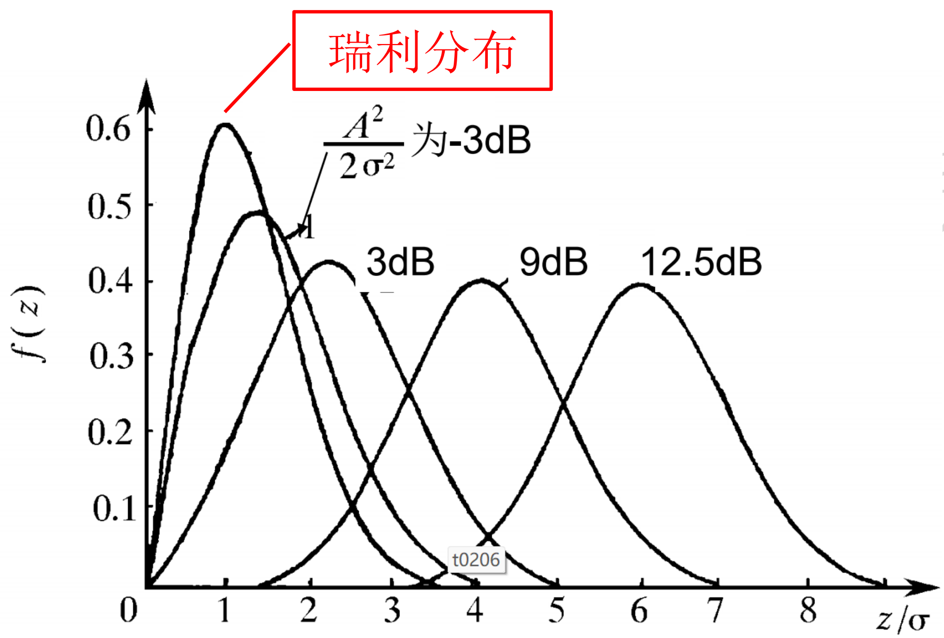
$\underbrace{A\cos(\omega_c t+\theta)}_{\text{信号功率}A^2/2}+\underbrace{n(t)}_{\text{噪声功率}\sigma_\xi^2}$

※ $A\to 0$时，即$r\to 0$时，

$f(z)$退化为瑞利分布

※ 信噪比r比较大时，

$f(z)$近似为高斯分布



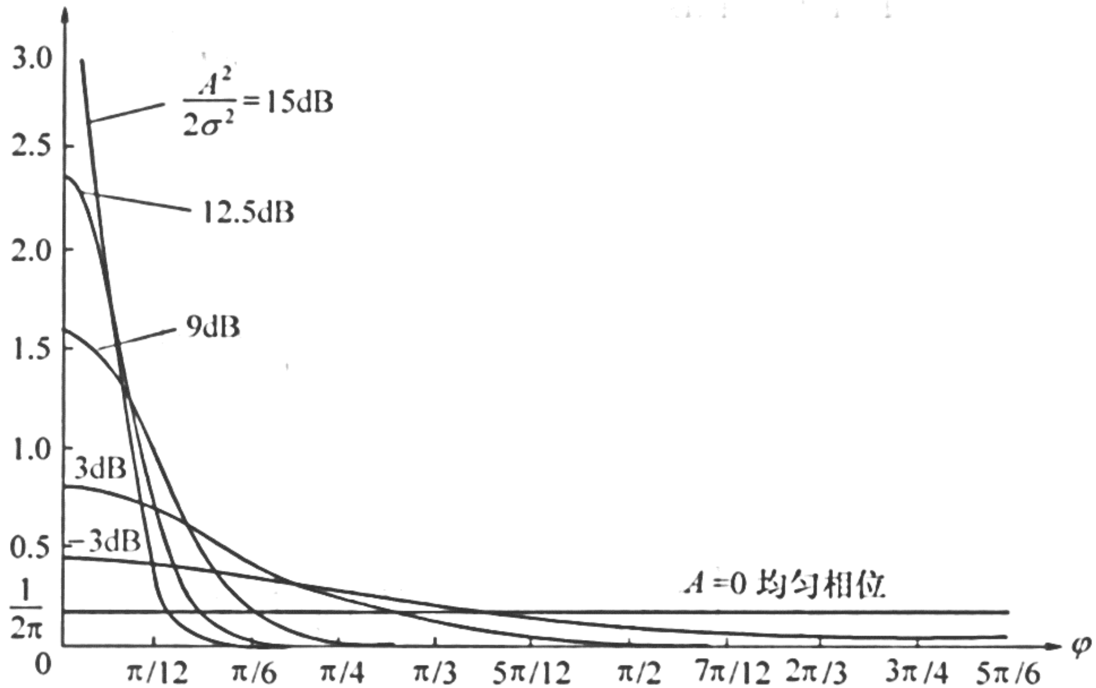
包络的概率分布

湘潭大学自动化与电子信息学院

2.相位的统计特性

$f(\varphi)$不再服从均匀分布

也与信噪比有关



相位的概率分布

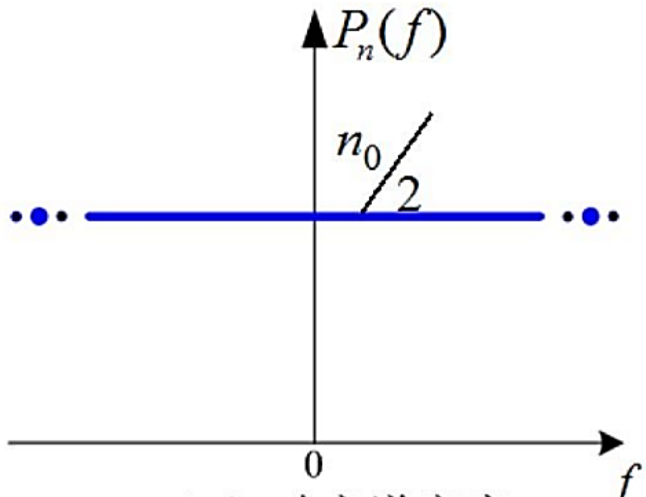
第3章　随机过程

湘潭大学自动化与电子信息学院

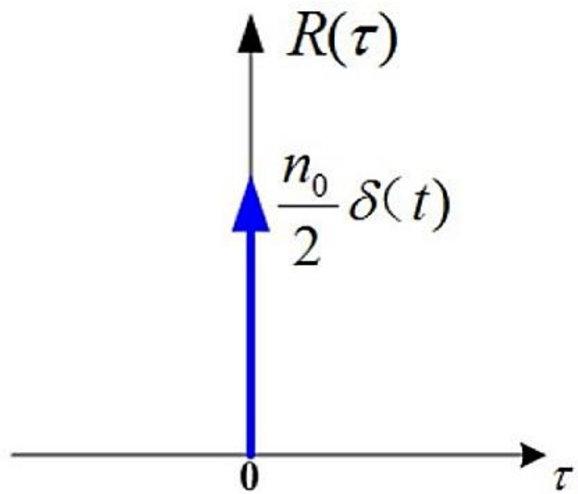
湘潭大学自动化与电子信息学院

博学笃行　盛德日新

1.白噪声 ——理想的宽带过程



（a）功率谱密度



（b）自相关函数

湘潭大学自动化与电

功率谱密度均匀分布在整个频率范围内：

$$P_\xi(\omega)=\frac{n_0}{2}$$

单边功率谱密度： $P_\xi(\omega)=n_0$

仅在同一时刻$\tau=0$才相关

$$R(\tau)=\frac{n_0}{2}\delta(\tau)$$

n_0—常数（W/Hz）

§3.7 高斯白噪声和带限白噪声

2. 高斯白噪声

——指概率分布服从高斯分布的白噪声

高斯白噪声在任意两个不同时刻的取值，不仅是互不相关的，而且是统计独立的。

3. 带限白噪声（频谱在带限范围内仍具有白色特性）

——白噪声通过带宽有限的信道或滤波器的情形

白噪声通过**LPF**---低通白噪声

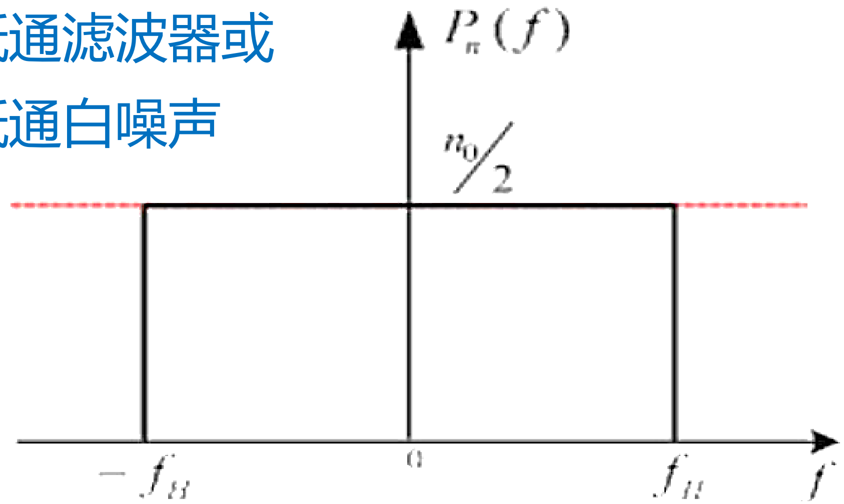
白噪声通过**BPF**---带通白噪声

湘潭大学自动化与电子信息学院

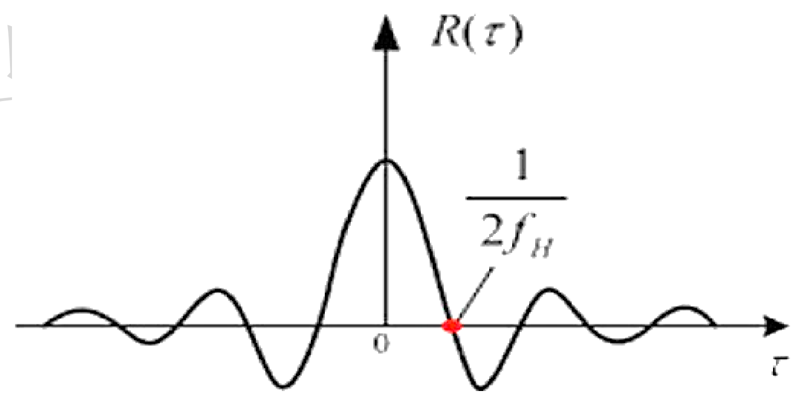
1.低通高斯白噪声

定义：如果白噪声通过理想矩形的低通滤波器或理想低通信道，则输出的噪声称为低通白噪声

$$P_n(f)=\begin{cases}\dfrac{n_0}{2}, & |f|\le f_H\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$



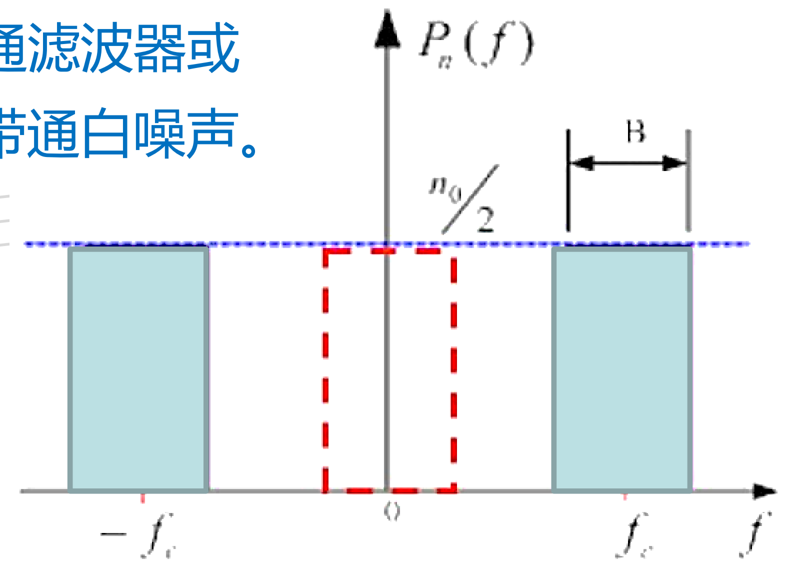
$$R(\tau)=n_0 f_H\frac{\sin 2\pi f_H\tau}{2\pi f_H\tau}$$



注：带限白噪声只有在$\tau=k/2f_H$上得到的随机变量才不相关

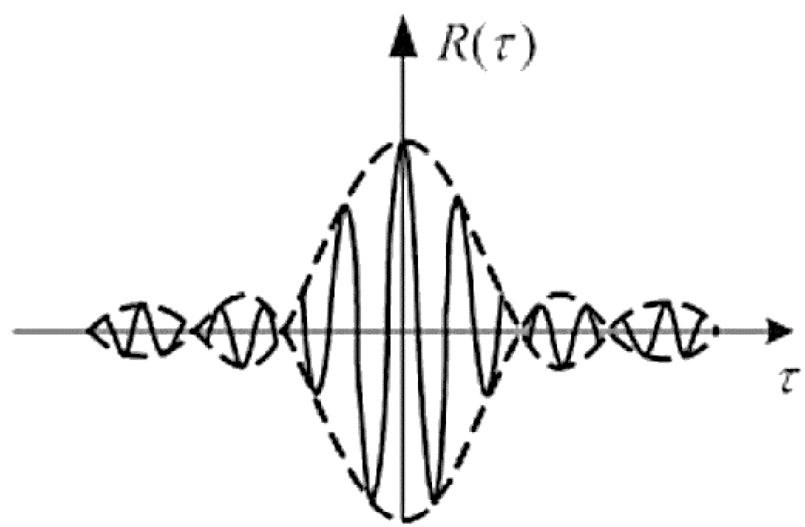
2.带通高斯白噪声

定义：如果白噪声通过理想矩形的带通滤波器或理想带通信道，则其输出的噪声称为带通白噪声。



$$P_n(f)=\begin{cases}\dfrac{n_0}{2}, & f_c-\dfrac{B}{2}\le |f|\le f_c+\dfrac{B}{2}\\ 0, & \text{其他频率}\end{cases}$$

湘潭大学自动化



$$R(\tau)=n_0B\frac{\sin \pi B\tau}{\pi B\tau}\cos 2\pi f_c\tau$$

小结

※ 熟悉随机过程的定义及其数字特征

※ 掌握平稳随机过程的定义、各态历经性、相关函数和功率谱密度

※ 掌握高斯随机过程的定义、性质、掌握窄带随机过程的表达式和统计特征

※ 掌握高斯白噪声通过低通（高通）滤波器的模型

湘潭大学自动化与电子信息学院
湘潭大学自动化与电子信息学院