Parte I
Conceitos básicos de Demografia

Capítulo 2:
INTRODUÇÃO A MÉTODOS DE ESTIMATIVAS E INTERPOLAÇÕES POPULACIONAIS

Gustavo Henrique Naves Givisiez*

Este capítulo trata, inicialmente, de interpolações de dados populacionais. São apresentados vários métodos matemáticos e gráficos úteis na adequação do denominador populacional usado na maioria das razões dos estudos demográficos. Em seguida, são abordados os métodos mais utilizados para a estimativa de dados por idade e sexo, a partir de dados de população total ou agregados em grupos de idade diferentes daqueles necessários a estudos específicos. Por fim, fazem-se algumas considerações introdutórias sobre projeções populacionais e explica-se, brevemente, o Método das Componentes Demográficas.

Introdução

Shryock e Siegel (1980) definem interpolação como "a arte de inferir valores intermediários a partir de uma série de dados conhecidos, com o uso de fórmulas matemáticas ou procedimentos gráficos". Extrapolação, por sua vez, é definida como a "arte de inferir valores que estão além de uma série de dados conhecidos, a partir do uso de fórmulas matemáticas ou procedimentos gráficos". Várias técnicas podem ser usadas para a interpolação e extrapolação de séries matemáticas; entretanto, é importante ressaltar que extrapolar dados populacionais não é o mesmo que projetar uma população.

A aplicação destas técnicas permite a estimativa de dados de população em datas não cobertas por censos; a desagregação de grupos populacionais qüinqüenais ou decenais por idade simples; a suavização de curvas matemáticas, dentre outras aplicações. Estes procedimentos possibilitam estimar com precisão matemática pontos intermediários em uma curva de pontos conhecidos, e seus resultados, apesar de sujeitos a erros de estimativa, são confiáveis na maioria das vezes.

---

* Doutorando e pesquisador do Centro de Desenvolvimento e Planejamento Regional (Cedeplar) da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG).

A próxima seção discute as metodologias de interpolação de dados populacionais, apresentando vários métodos matemáticos e gráficos. A seção seguinte trata de estimativas de população por idade e sexo e tece considerações sobre os métodos mais indicados para este fim. A última seção aborda as projeções populacionais e explica, brevemente, o Método das Componentes Demográficas.

Interpolação de dados populacionais

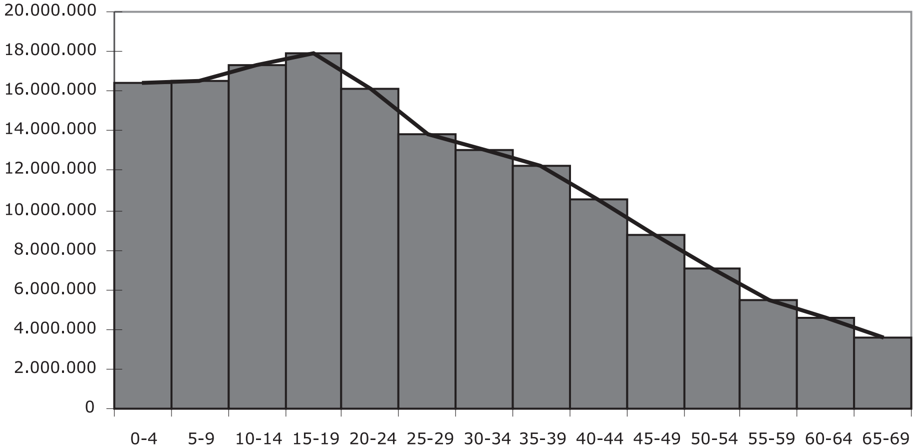
Interpolação gráfica

A interpolação gráfica pode ser usada para subdividir dados agrupados ou estimar a população em pontos do tempo para os quais não existem dados observados. Entretanto, trata-se de um método de complexa automatização computacional, uma vez que exige a elaboração de fórmulas e gráficos específicos para cada conjunto de dados a serem interpolados. Apesar da difícil replicação, esta metodologia é útil para exemplificar o princípio inerente a todas as demais metodologias, pois, em linhas gerais, todos os procedimentos ajustam uma função que passa por coordenadas cartesianas.

O Gráfico 1 ilustra a distribuição da população de acordo com os grupos de idade de cinco anos, e a linha traçada, que une as diversas barras dos gráficos, pode ser utilizada para estimar as populações por idade simples. Num exemplo simplificado, os grupos etários imediatamente inferior e imediatamente superior

GRÁFICO 1

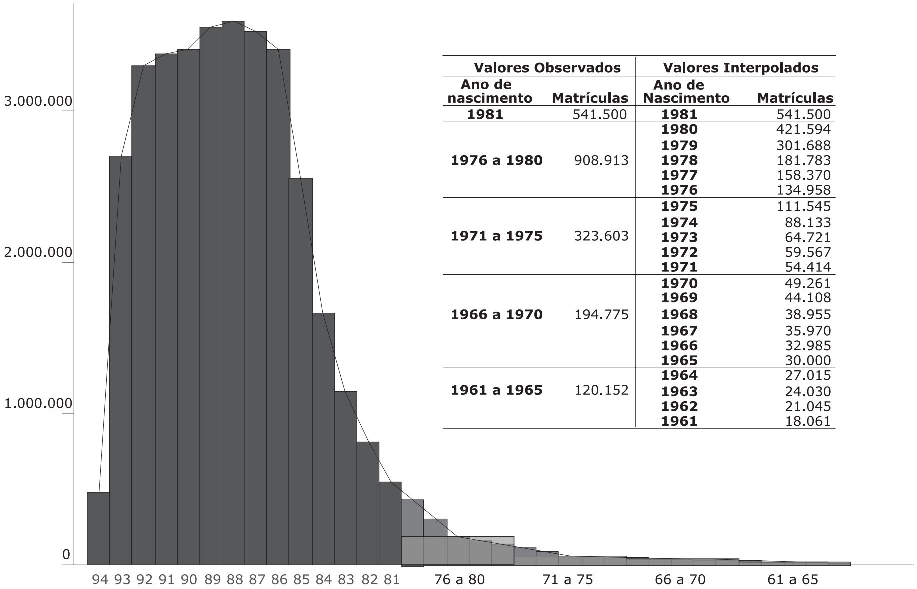
Interpolação gráfica de dados qüinqüenais de população – Brasil, 1996



Fonte: Censo Demográfico de 2000.

GRÁFICO 2

Total de matrículas do Ensino Fundamental, segundo ano de nascimento – Brasil, 2000*



Valores Observados		Valores Interpolados	
Ano de nascimento	**Matrículas**	**Ano de Nascimento**	**Matrículas**
1981	541.500	**1981**	541.500
1976 a 1980	908.913	**1980**	421.594
		1979	301.688
		1978	181.783
		1977	158.370
		1976	134.958
1971 a 1975	323.603	**1975**	111.545
		1974	88.133
		1973	64.721
		1972	59.567
		1971	54.414
1966 a 1970	194.775	**1970**	49.261
		1969	44.108
		1968	38.955
		1967	35.970
		1966	32.985
		1965	30.000
1961 a 1965	120.152	**1964**	27.015
		1963	24.030
		1962	21.045
		1961	18.061

Fonte: Censo Escolar 2000.
* Interpolação gráfica de dados agrupados em grupos de dimensão não constante.

àquele grupo que se deseja estimar trariam subsídios para o cálculo das inclinações dos segmentos de reta e, conseqüentemente, da população por idade simples dentro dos grupos de idade.

A vantagem da interpolação gráfica é observada também quando os dados em questão estão agrupados em grupos de idade não constantes, como é exemplificado pelo Gráfico 2. A interpolação gráfica que está representada pelos dados listados no gráfico, assim como a linha que une as barras do gráfico, ilustra a função matemática que melhor se adapta aos dados.

Interpolação polinomial

Interpolação polinomial é a interpolação em que as séries matemáticas dadas são assumidas como parte de equações gerais como $f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + ... + \eta x^n$, sendo que menos ou mais termos podem ser usados na interpolação. A equação $f(x) = A + Bx$, por exemplo, é uma equação linear que ajusta uma reta que poderia passar por dois pontos conhecidos. Já a equação $f(x) = A + Bx + Cx^2$ representa uma parábola ou uma equação quadrática, que poderia passar por três pontos. Generalizando, a equação polinomial de *enésimo* grau poderia passar por $n + 1$ pontos conhecidos. A escolha do número de graus a ser usado na função polinomial dependeria da natureza dos dados a serem interpolados. Usualmente, equações simples descrevem os dados de maneira razoável e produzem a série suavizada, mas, em alguns casos, funções cúbicas, usando quatro pontos, ou quadráticas, usando três pontos, trazem os mesmos resultados de funções retas, que usam dois pontos apenas.

Existem vários métodos para os ajustes das funções polinomiais aos pontos conhecidos, embora não existam diferenças entre os resultados dos procedimentos. No passado, a interpolação com polinômios empregava o método das diferenças, pois o resultado era facilmente encontrado com uma máquina de calcular simples. Entretanto, com o advento dos computadores e de máquinas de calcular mais sofisticadas, outros métodos passaram a ser mais utilizados, dentre eles (a) o uso de coeficientes de interpolação, como, por exemplo, a interpolação osculatória, e (b) iterações sucessivas como o uso de funções *spline*, processo iterativo de Aitken, fórmulas de Waring, dentre outros.

No desenvolvimento desta seção, dois exemplos serão desenvolvidos. O primeiro simula a mudança na data de referência de dados populacionais baseado em três metodologias: (a) interpolação através da estimativa da taxa geométrica de crescimento médio anual, a partir de dois pontos conhecidos; (b) interpolação através da estimativa da taxa exponencial de crescimento médio anual, a partir de dois pontos conhecidos; (c) interpolação polinomial baseada em quatro pontos conhecidos. O segundo exemplo simula a desagregação de dados populacionais a partir de coeficientes de interpolação osculatória, a partir de coeficientes de Sprague.

Mudança na data de referência de estimativas populacionais – interpolação da população total

Interpolar a população entre dois ou mais pontos tem grande utilidade quando se deseja mudar a data de referência de uma pesquisa censitária ou quando se deseja estimar a população em um período não coberto por pesquisas demográficas. Estas modificações são necessárias no cálculo de taxas e probabilidades de eventos demográficos como, por exemplo, mortalidade, matrículas, incidência de doenças, dentre outros.

Estimativa da população a partir da taxa média de crescimento anual entre dois pontos

Por motivos didáticos, a descrição a seguir será exemplificada a partir da população recenseada para o Estado de Rondônia, de 1970 a 2000 (Tabela 1).

TABELA 1
População observada, data de referência da pesquisa censitária, taxa média de crescimento geométrico e taxa média de crescimento exponencial – Rondônia, 1970, 1980, 1991 e 2000

Censo Demográfico	Data de referência	População observada	T (Anos)	Taxa média de crescimento anual no decênio	
				geométrica	exponencial
1970	1/9/1970	111.064			
1980	1/9/1980	491.025	10,00	16,03%	14,86%
1991	1/9/1991	1.132.931	11,00	7,90%	7,60%
2000	1/8/2000	1.380.952	8,92	2,24%	2,22%
Taxa média de crescimento anual de 1970 a 2000				8,79%	8,42%

Fonte: Censos Demográficos de 1970, 1980, 1991 e 2000.

Uma metodologia muito utilizada para estimar a população em um tempo *t* qualquer consiste em estimar a taxa média de crescimento (*r*) da população entre dois pontos conhecidos. Esta taxa de crescimento entre as duas datas de referência pode ser calculada por aproximação geométrica ou exponencial, representadas, respectivamente, nas Fórmulas 1 e 2.

$$r_g = \left(\sqrt[t]{\frac{P^{final}}{P^{inicial}}} \right) - 1$$ *Fórmula 1*

$$r_e = \frac{1}{t}.\ln\left(\frac{P^{final}}{P^{inicial}}\right)$$ *Fórmula 2*

onde:
r_g = taxa de crescimento geométrico;
r_e = taxa de crescimento exponencial;
t = tempo transcorrido entre as duas datas de referência dos censos;
$P^{inicial}$ = população no início do período e
P^{final} = população no fim do período.

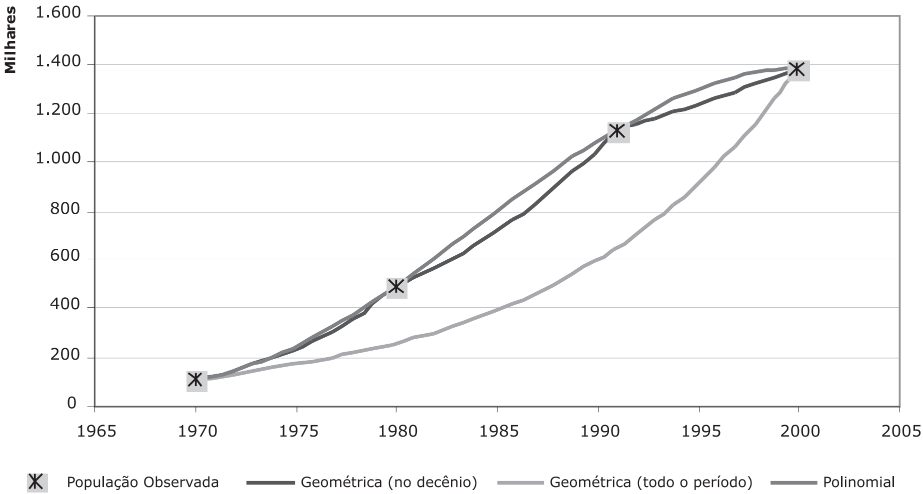
A partir das Fórmulas 1 e 2 deduz-se as Fórmulas 3 e 4, para a estimativa de uma população em um tempo *t* qualquer:

$$P^t = P^{inicial} * (1 + r_g)^t$$ *Fórmula 3*

$$P^t = P^{inicial} * e^{r_e t}$$ *Fórmula 4*

onde:
P^t = população em um momento *t.*

GRÁFICO 3
População observada e estimada, segundo metodologia de estimativa
– Rondônia, 1970 a 2000



Fonte: Censos Demográficos de 1970, 1980, 1991 e 2000.

TABELA 2
População estimada e observada, segundo metodologia de estimativa
– Rondônia, 1/7/1970 a 1/9/2000

Data da estimativa	t (Anos)	Metodologia de interpolação				
		geométrica no decênio	exponencial no decênio	geométrica em todo o período	exponencial em todo o período	polinomial
1/7/1970	-0,17	108.297	108.297	109.515	109.515	112.951
1/9/1970	**0,00**	**111.064**	**111.064**	**111.064**	**111.064**	**111.064**
1/7/1975	4,83	227.686	227.686	166.885	166.885	236.727
1/7/1980	9,83	478.888	478.888	254.308	254.308	481.572
1/9/1980	**10,00**	**491.025**	**491.025**	**491.025**	**491.025**	**491.025**
1/7/1985	14,83	708.799	708.799	387.527	387.527	781.167
1/7/1990	19,83	1.036.445	1.036.445	590.534	590.534	1.072.764
1/7/1991	20,83	1.118.234	1.118.234	642.441	642.441	1.124.602
1/9/1991	**21,00**	**1.132.931**	**1.132.931**	**1.132.931**	**1.132.931**	**1.132.931**
1/7/1995	24,83	1.233.488	1.233.488	899.885	899.885	1.293.618
1/7/2000	29,83	1.378.368	1.378.368	1.371.290	1.371.290	1.380.984
1/8/2000	**29,92**	**1.380.952**	**1.380.952**	**1.380.952**	**1.380.952**	**1.380.952**
1/9/2000	30,00	1.383.572	1.383.572	1.380.865	1.390.681	1.380.865

Fonte: Censos Demográficos de 1970, 1980, 1991 e 2000.
Notas:
(1) Populações observadas em negrito.
(2) O tempo transcorrido, em anos, considera as diferenças existentes entre os meses das datas de referência.

Os resultados destas estimativas estão representados no Gráfico 3 e na Tabela 2. As duas formas de estimativas, apesar das pequenas diferenças entre as taxas médias de crescimento, produzem resultados muito similares. É importante observar que o uso destas taxas médias tem como pressuposto que o crescimento da população no período segue uma curva geométrica ou exponencial. Este pressuposto, apesar de mais razoável que a suposição de crescimento linear, não é capaz de refletir inversões na tendência de crescimento da curva. A título de exemplo, o Gráfico 3 apresenta um ajuste considerando a população em apenas dois pontos, 1970 e 2000, demonstrando que o pressuposto de crescimento geométrico ou exponencial está sujeito a erros.

Estimativas de população total a partir de curvas polinomiais

Uma alternativa para a mudança da data de referência de uma população aplicável para o caso de existirem dados de três ou mais pontos no tempo são as interpolações polinomiais de dois ou mais graus. Para a implementação deste método sugere-se o uso da Fórmula de Waring ou do processo iterativo de Aitken[1].

Fórmula de Waring

A fórmula de Waring, também conhecida como fórmula de Lagrange ou fórmula de Lagrange-Waring, é usada para derivar os multiplicadores da interpolação para a função *f(x)*. Como exemplo deste procedimento, para um ajuste da interpolação a partir de quatro pontos conhecidos – *f(a), f(b), f(c)* e *f(d)* –, o ajuste cúbico seria dado pela relação:

$$f(x) = f(a)\frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)} + f(b)\frac{(x-a)(x-c)(x-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)} +$$
$$+ f(c)\frac{(x-a)(x-b)(x-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)} + f(d)\frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)}$$

que é equivalente ao polinômio $f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$, passando pelos mesmos quatro pontos *f(a)*, *f(b)*, *f(c)* e *f(d)*.

Ou, no caso de um polinômio quadrático:

$$f(x) = f(a)\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + f(b)\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + f(c)\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} \quad ,$$

que é equivalente ao polinômio $f(x) = A + Bx + Cx^2$, passando por três pontos: *f(a)*, *f(b)* e *f(c)*.

[1] Grande parte dos *softwares* estatísticos possui funções que calculam interpolações polinomiais, através de curvas *spline*, dentre outras formas, de maneira automática.

Finalmente, no caso de uma linha reta, a relação:

$$f(x) = f(a)\frac{(x-b)}{(a-b)} + f(b)\frac{(x-a)}{(b-a)} ,$$

que é equivalente ao polinômio $f(x) = A + Bx$, passando por dois pontos: *f(a)* e *f(b)*.

No exemplo aqui sugerido, uma curva de 4° grau foi ajustada aos dados apresentados na Tabela 1, e a data de referência do Censo Demográfico de 1970 foi considerada como o tempo inicial (*t* = 0). Substituindo os valores conhecidos na fórmula de Waring de 4° grau, para uma data *t* qualquer, temos:

$$P(t) = P(0) * \frac{(t-10)(t-21)(t-29{,}917)}{(0-10)(0-21)(0-29{,}917)} + P(10) * \frac{(t-0)(t-21)(t-29{,}917)}{(10-0)(10-21)(10-29{,}917)} +$$
$$+ P(21) * \frac{(t-0)(t-10)(t-29{,}917)}{(21-10)(21-10)(21-29{,}917)} + P(29{,}917) * \frac{(t-0)(t-10)(t-21)}{(29{,}917-0)(29{,}917-10)(29{,}917-21)}$$

Os resultados desta interpolação são apresentados no Gráfico 3 e na Tabela 2.

PROCEDIMENTO ITERATIVO DE AITKEN

Este processo considera um sistema de sucessivas interpolações lineares equivalente a uma interpolação por um polinômio de qualquer grau. Este método, a partir do advento dos computadores, tornou obsoletos os métodos clássicos que vinham sendo empregados por mais de dois séculos. Desta forma, a metodologia sugere que

$f(x) = f(a)\dfrac{(x-b)}{(a-b)} + f(b)\dfrac{(x-a)}{(b-a)}$ pode ser escrita como

$$f(x) = \frac{f(a).(b-x) - f(b).(a-x)}{(b-x)-(a-x)} .$$

O formato básico para quatro pontos dados para os valores de *f(x)* é descrito conforme a Tabela 3.

TABELA 3

Simulação dos estágios computacionais utilizados no processo iterativo de Aitken

Ordenadas dadas	**Estágio computacional (1)**	**(2)**	**(3)**	**Partes proporcionais**
f(a)				(a-x)
f(b)	f(x;a,b)			(b-x)
f(c)	f(x;a,c)	f(x;a,b,c)		(c-x)
f(d)	f(x;a,d)	f(x;a,b,d)	f(x;a,b,c,d)	(d-x)

Fonte: Shryock e Siegel (1980).

No caso de um ajuste linear, consideram-se apenas as duas primeiras linhas e o primeiro estágio computacional. No caso de uma interpolação usando três pontos, consideram-se as três primeiras linhas e os dois primeiros estágios computacionais. Para mais pontos, linhas e estágios computacionais adicionais devem ser acrescentados à tabela. Na primeira coluna estão os valores conhecidos – no caso, as quatro observações. Na última coluna à direita – as partes proporcionais – estão as diferenças entre a abscissa dada e aquela para a qual a interpolação é desejada.

As entradas no estágio computacional (1) são obtidas como sugere a formulação a seguir:

$$f(x;a,b)=\frac{f(a).(b-x)-f(b).(a-x)}{(b-x)-(a-x)};$$

$$f(x;a,c)=\frac{f(a).(c-x)-f(c).(a-x)}{(c-x)-(a-x)};$$

$$f(x;a,d)=\frac{f(a).(d-x)-f(d).(a-x)}{(d-x)-(a-x)}.$$

Ou seja, cada expressão do estágio (1) corresponde à estimativa de *f(x)* baseado na interpolação linear entre o valor conhecido *f(a)* e um dos pontos *f(b)*, *f(c)* e *f(d)* também conhecidos. O processo de sucessivas interpolações lineares é repetido no estágio computacional (2), mas neste caso utilizando os valores encontrados no estágio (1). Então:

$$f(x;a,b,c)=\frac{f(x;a,b).(c-x)-f(x;a,c).(b-x)}{(c-x)-(b-x)} \text{ e}$$

$$f(x;a,b,d)=\frac{f(x;a,b).(d-x)-f(x;a,d).(b-x)}{(d-x)-(b-x)}.$$

O resultado do estágio (2) é equivalente a passar um polinômio de segundo grau pelos três pontos *f(a)*, *f(b)* e *f(c)* e outro, pelos pontos *f(a)*, *f(b)* e *f(d)*. Este processo geral é replicado pelo número de processos computacionais que se fizerem necessários, utilizando-se os resultados do estágio computacional anterior para o novo estágio. No terceiro estágio,

$$f(x;a,b,c,d)=\frac{f(x;a,b,c).(d-x)-f(x;a,b,d).(c-x)}{(d-x)-(c-x)}.$$

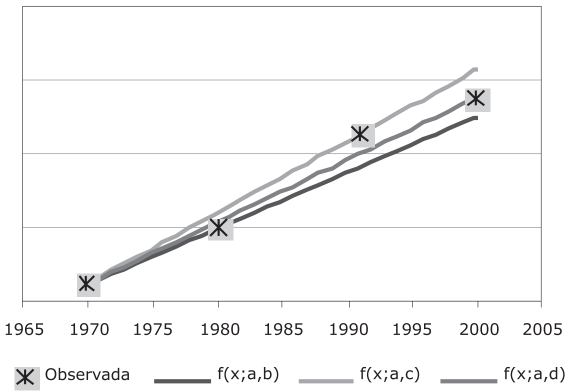
TABELA 4
Simulação dos estágios computacionais utilizados no processo iterativo de Aitken, para a data de 1/7/1985 – Rondônia

	Abscissas dadas		Ordenadas dadas	Estágio computacional (1)	(2)	(3)	Partes proporcionais	
a	1/9/1970	0,00	111.064				-14,83	a-x
b	1/9/1980	10,00	491.025	674.673			-4,83	b-x
c	1/9/1991	21,00	1.132.931	832.859	744.179		6,17	c-x
d	1/8/2000	29,92	1.380.952	740.702	690.697	781.167	15,08	d-x
x	1/7/1985	14,83						

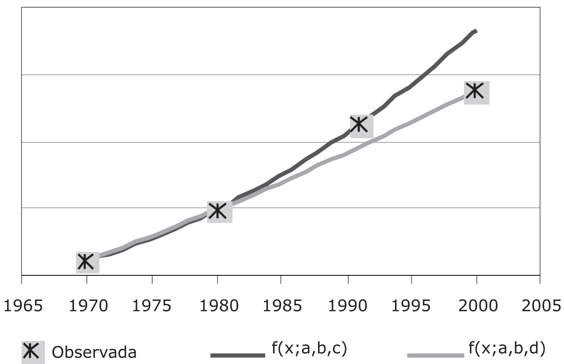
Fonte: Censos Demográficos de 1970, 1980, 1991 e 2000.

GRÁFICO 4
Simulação dos estágios computacionais pelo processo iterativo de Aitken – Rondônia, 1970 a 2000

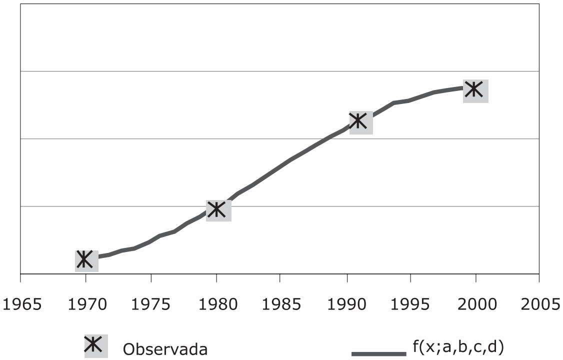
Primeiro Estágio Computacional



Segundo Estágio Computacional



Terceiro Estágio Computacional



Fonte: Censos Demográficos de 1970, 1980, 1991 e 2000.

O processo iterativo de Aitken deve ser repetido para cada ponto do tempo a ser estimado. As vantagens deste método são visíveis quando ele é utilizado em programas computacionais, pois, através de programação recursiva, são produzidas linhas de código simples e ágeis.

Exemplificando, a aplicação do processo iterativo de Aitken para a data de 1º de julho de 1985 é apresentada na Tabela 4 e no Gráfico 4. Vale destacar que os valores encontrados são os mesmos a que se chegou pela fórmula de Waring.

Desagregação de grupos etários – aplicação de interpolações osculatórias

A interpolação osculatória é uma interpolação polinomial com coeficientes já estimados e tabelados. A aplicabilidade desta técnica está na subdivisão de grupos etários agregados de cinco em cinco anos em idade simples, por exemplo. A mesma técnica também é aplicada para a estimativa de funções de sobrevivência a partir de tabelas abreviadas. Entretanto, este procedimento não é aplicável a grupos de idade de amplitude variável; neste caso, as metodologias de interpolações polinomiais são mais indicadas.

As fórmulas para interpolação podem ser expressas em termos de coeficientes ou multiplicadores que são aplicados aos dados agregados. Existem vários grupos de multiplicadores que podem ser utilizados para a interpolação de subdivisão de dados agregados. Esses multiplicadores são baseados em diferentes fórmulas (ver Anexo): (a) *Sprague fifth-difference formula*; (b) *Karup-king third-difference formula*; (c) *Beers ordinary*; (d) *Beers modified* (Shryock e Siegel, 1980).

Para a avaliação do conjunto de multiplicadores mais adequado foi feita uma comparação entre os métodos baseada nos dados do Censo Demográfico de 2000. A Tabela 5 apresenta os dados observados no Brasil, por idade simples, de 0 a 24 anos. O exercício proposto parte de grupos de idade de cinco anos, que são interpolados pelos quatro conjuntos de multiplicadores. Os valores encontrados na interpolação são então comparados com as idades simples originais, sendo possível a avaliação do erro relativo.

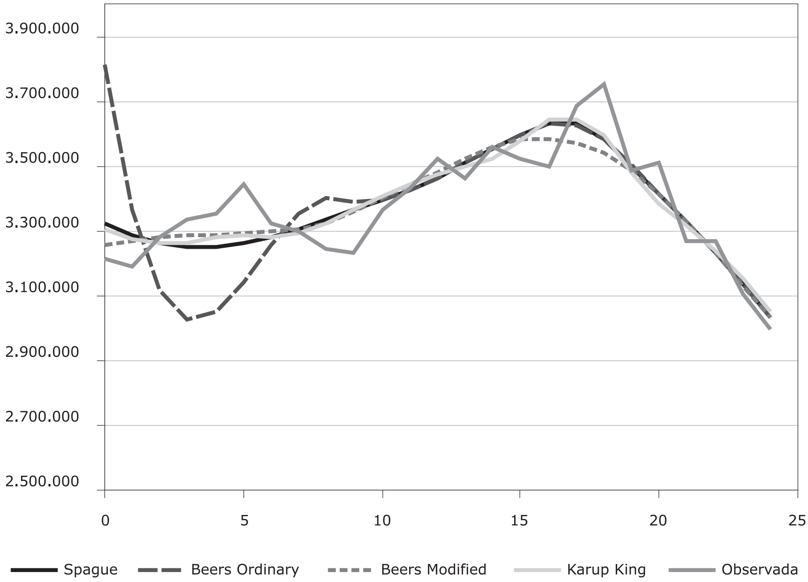
O Gráfico 5 apresenta a população por idade simples e o Gráfico 6 apresenta a diferença relativa entre os valores encontrados. Ressalta-se que os resultados

TABELA 5
População residente por idade simples observada e interpolada, segundo método de interpolação dos grupos de idade – Brasil, 2000

Idade	**Observada**	***Sprague***	***Beers ordinary***	***Beers modified***	***Karup-king***
Menos de 1 ano	3.213.310	3.321.162	3.815.405	3.256.634	3.302.723
1 ano	3.191.309	3.285.533	3.364.123	3.268.485	3.273.595
2 anos	3.282.937	3.263.207	3.116.506	3.277.741	3.259.806
3 anos	3.332.660	3.252.820	3.027.529	3.284.401	3.261.357
4 anos	3.355.512	3.253.006	3.052.165	3.288.466	3.278.247
5 anos	3.445.580	3.262.400	3.143.642	3.291.683	3.284.911
6 anos	3.320.105	3.279.637	3.256.933	3.297.458	3.281.349
7 anos	3.300.664	3.303.352	3.352.253	3.305.365	3.293.126
8 anos	3.245.677	3.332.181	3.398.546	3.323.795	3.320.242
9 anos	3.230.301	3.364.757	3.390.954	3.360.712	3.362.698
10 anos	3.367.200	3.397.600	3.396.145	3.401.181	3.408.578
11 anos	3.433.809	3.427.228	3.427.757	3.440.871	3.444.232
12 anos	3.524.814	3.462.859	3.464.711	3.482.570	3.474.749
13 anos	3.461.413	3.507.361	3.507.890	3.522.822	3.500.131
14 anos	3.560.831	3.553.020	3.551.564	3.557.509	3.520.377
15 anos	3.521.881	3.592.286	3.596.765	3.579.822	3.578.864
16 anos	3.497.668	3.630.310	3.628.681	3.585.428	3.640.775
17 anos	3.682.950	3.633.148	3.627.446	3.572.467	3.645.324
18 anos	3.751.494	3.584.285	3.582.655	3.539.570	3.592.513
19 anos	3.485.822	3.499.787	3.504.267	3.487.408	3.482.340
20 anos	3.508.846	3.415.379	3.415.454	3.415.750	3.380.064
21 anos	3.268.804	3.327.689	3.327.661	3.328.097	3.316.029
22 anos	3.265.973	3.232.688	3.232.592	3.231.672	3.240.148
23 anos	3.104.791	3.133.193	3.133.166	3.131.285	3.152.423
24 anos	2.993.101	3.032.566	3.032.641	3.031.779	3.052.852
Total	84.347.452	84.347.452	84.347.452	84.262.971	84.347.452

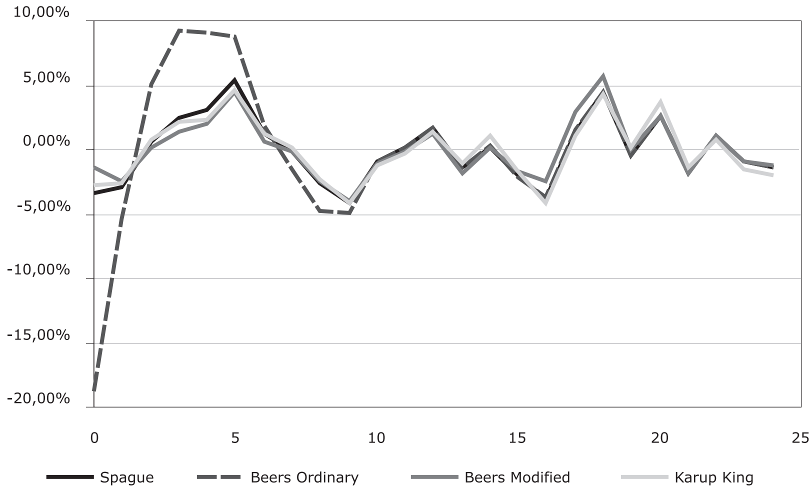
Fonte: Censo Demográfico de 2000.

GRÁFICO 5
População por idade simples observada e interpolada, segundo método de interpolação dos grupos de idade – Brasil, 2000



Fonte: Censo Demográfico de 2000.

GRÁFICO 6
Diferença relativa entre a população residente observada e a interpolada, por idade simples, segundo método de interpolação dos grupos de idade – Brasil, 2000



Fonte: Censo Demográfico de 2000.

das interpolações, como era de se esperar, representam curvas suaves quando comparados com os dados observados. Os dados reais da população exibem um padrão de variação significativo que é influenciado pela preferência por dígitos na declaração de idade e por variações imprevisíveis no comportamento anual da fecundidade.

Observa-se ainda que os multiplicadores "*Beers ordinary*" apresentam os maiores erros relativos (próximo a 10%) e que estão concentrados nos grupos de idade abaixo de 10 anos. Os demais métodos tiveram os maiores erros próximos a 5% e são muito semelhantes entre si.

No caso específico dos estudos educacionais, exigem-se conjuntos de grupos populacionais por idade simples, ou por grupos etários coerentes com as idades do sistema de ensino brasileiro. Desta maneira, faz-se necessário estimar os grupos etários específicos da educação a partir de grupos etários de cinco anos. A Tabela 6 exemplifica a formatação original dos dados das projeções populacionais e os grupos etários.

TABELA 6

Grupos de idade de cinco anos e grupos de idade adequados aos níveis de ensino oficiais

Projeção CEDEPLAR	**Projeção adequada aos níveis de ensino oficiais**	
Grupo de Idade	**Grupo de Idade**	**Nível de Ensino**
0 a 4 anos	0 a 3 anos	
5 a 9 anos	4 a 6 anos	Pré-Escola
10 a 14 anos	7 a 10 anos	Fundamental (1ª a 4ª séries)
15 a 19 anos	11 a 14 anos	Fundamental (5ª a 8ª séries)
	15 a 17 anos	Médio (1ª a 3ª séries)
	18 a 19 anos	
20 a 24 anos	20 a 24 anos	
25 a 29 anos	25 a 29 anos	
30 a 34 anos	30 a 34 anos	
35 a 39 anos	35 a 39 anos	
40 a 44 anos	40 a 44 anos	
45 a 49 anos	45 a 49 anos	
50 a 54 anos	50 a 54 anos	
55 a 59 anos	55 a 59 anos	
60 a 64 anos	60 a 64 anos	
65 a 69 anos	65 a 69 anos	
70 e mais	70 e mais	

Fonte: Elaboração própria.

A Tabela 7, o Gráfico 7 e o Gráfico 8 apresentam os resultados da avaliação das interpolações para os grupos de idade adequados aos níveis de ensino oficiais e para os respectivos erros relativos por grupo de idade. Nota-se, possivelmente em conseqüência da agregação dos dados, que neste caso (Gráfico 8) os erros relativos são menores que os observados na idade simples. Os valores estão próximos a 5% para os multiplicadores de "*Beers ordinary*" e a 3% para os demais multiplicadores.

TABELA 7

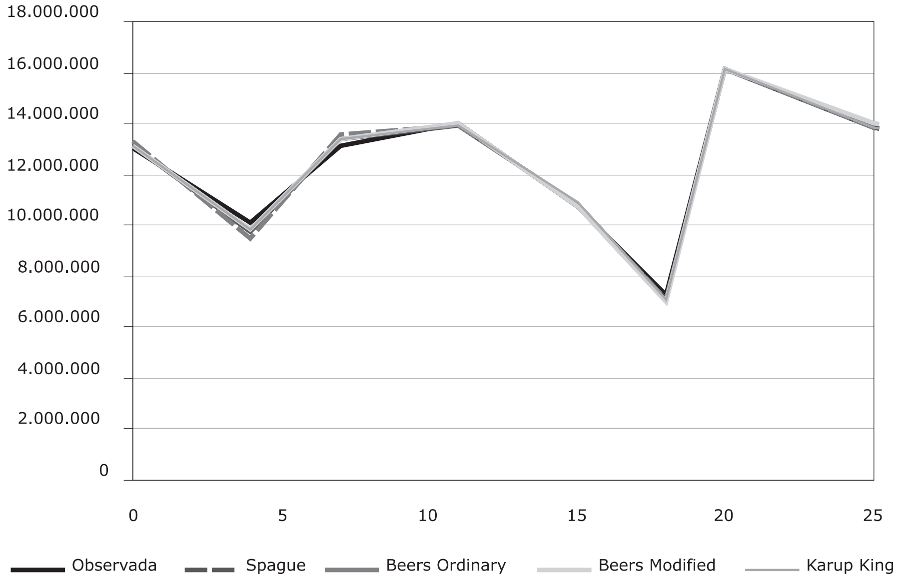
População residente, por grupos etários especiais observados e interpolados, segundo método de interpolação dos grupos de idade – Brasil, 2000

Grupo de Idade	Observada	*Spague*	*Beers ordinary*	*Beers modified*	*Karup-king*
0 a 3 anos	13.020.216	13.122.722	13.323.563	13.087.262	13.097.481
4 a 6 anos	10.121.197	9.795.043	9.452.740	9.877.607	9.844.507
7 a 10 anos	13.143.842	13.397.890	13.537.897	13.391.052	13.384.645
11 a 14 anos	13.980.867	13.950.467	13.951.922	14.003.772	13.939.489
15 a 17 anos	10.702.499	10.855.743	10.852.893	10.737.717	10.864.963
18 a 19 anos	7.237.316	7.084.072	7.086.922	7.026.978	7.074.852
20 a 24 anos	16.141.515	16.141.515	16.141.515	16.138.583	16.141.515
25 a 29 anos	13.849.665	13.849.665	13.849.665	13.995.113	13.849.665
30 a 34 anos	13.028.944	13.028.944	13.028.944	13.011.009	13.028.944
35 a 39 anos	12.261.529	12.261.529	12.261.529	12.182.502	12.261.529
40 a 44 anos	10.546.694	10.546.694	10.546.694	10.570.799	10.546.694
45 a 49 anos	8.721.541	8.721.541	8.721.541	8.738.814	8.721.541
50 a 54 anos	7.062.601	7.062.601	7.062.601	7.025.698	7.062.601
55 a 59 anos	5.444.715	5.444.715	5.444.715	5.517.092	5.444.715
60 a 64 anos	4.600.929	4.600.929	4.600.929	4.560.073	4.600.929
65 a 69 anos	3.581.106	3.581.106	3.581.106	3.581.106	3.581.106
70 anos e mais	6.353.994	6.353.994	6.353.994	6.353.994	6.353.994
Total	169.799.170	169.799.170	169.799.170	169.799.170	169.799.170

Fonte: Censo Demográfico de 2000.

GRÁFICO 7

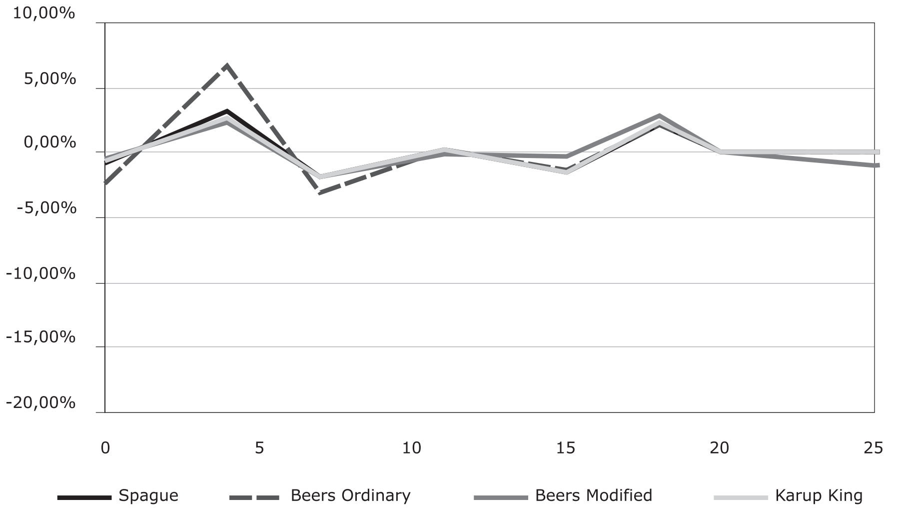
População residente, por grupos etários especiais observados e interpolados, segundo método de interpolação dos grupos de idade – Brasil, 2000



Fonte: Censo Demográfico de 2000.

GRÁFICO 8

Diferença relativa entre a população residente observada e a interpolada, por grupos etários especiais simples, segundo método de interpolação dos grupos de idade – Brasil, 2000



Fonte: Censo Demográfico de 2000.

Exemplificação da interpolação osculatória

No exemplo aqui apresentado foi utilizada a "*Sprague fifth-difference formula*", por serem os multiplicadores de uso mais comum, dentre os citados. Os coeficientes utilizados nesta interpolação podem ser consultados no Anexo ao final do capítulo, e os dados de população por grupos etários de cinco anos são apresentados na Tabela 8.

TABELA 8
População residente – Brasil, 2010

Grupo	Idades	2010
G1	0 a 4 anos	17.330.857
G2	5 a 9 anos	17.306.033
G3	10 a 14 anos	16.029.985
G3	15 a 19 anos	16.449.193
G3	20 a 24 anos	17.152.899
G3	25 a 29 anos	17.644.531
G3	30 a 34 anos	15.833.157
G3	35 a 39 anos	13.538.912
G3	40 a 44 anos	12.655.750
G3	45 a 49 anos	11.779.647
G3	50 a 54 anos	9.961.849
G3	55 a 59 anos	8.033.591
G4	60 a 64 anos	6.269.831
G5	65 a 69 anos	4.579.399
	70 anos e mais	7.806.649
	Total	**192.372.282**

Fonte: Cedeplar (2001).

Os valores dos coeficientes estão organizados segundo o grupo de idade que se pretende desagregar. Considerando a Tabela 8 como exemplo, o primeiro grupo de idade (G1) seria o de 0 a 4 anos, o segundo grupo (G2) seria o de 5 a 9 anos. O terceiro grupo (G3) é utilizado para todos os grupos intermediários (grupos de idade entre 10 e 59 anos). Finalmente, no penúltimo (60 a 64 anos) e último (65 a 69 anos) grupos são utilizados os conjuntos G4 e G5, respectivamente. A cada quinto ("*first fifth of G1*") corresponde uma idade a ser interpolada. Os exemplos a seguir clareiam esta exposição.

Para estimar a população de zero ano de idade utilizam-se os coeficientes do primeiro grupo e do primeiro quinto. Desta maneira, a população de zero ano seria dada por:

$$P_0 = {}_5P_0 * G1^{1}_{1° \ 1/5} + {}_5P_5 * G1^{2}_{1° \ 1/5} + {}_5P_{10} * G1^{3}_{1° \ 1/5} + {}_5P_{15} * G1^{4}_{1° \ 1/5}$$

Ou, substituindo os valores:

$$P_0 = 17.330.857 * 0{,}3616 + 17.306.033 * (-0{,}2768)$$
$$+ 16.029.985 * 0{,}1488 + 16.449.193 * (-0{,}0336)$$

No caso da estimativa da população de 6 anos de idade teríamos as seguintes fórmulas:

$$P_6 = {}_5P_0 * G2^{1}_{2° \ 1/5} + {}_5P_5 * G2^{2}_{2° \ 1/5} + {}_5P_{10} * G2^{3}_{2° \ 1/5} + {}_5P_{15} * G2^{4}_{2° \ 1/5}$$

$$P_6 = 17.330.857 * 0{,}0080 + 17.306.033 * 0{,}2320$$
$$+ 16.029.985 * (-0{,}0480) + 16.449.193 * 0{,}0080$$

No caso da estimativa da população de 24 anos, seria utilizado o grupo 3 (G3) e teríamos as seguintes fórmulas:

$$P_{24} = {}_5P_{10} * G3^{1}_{5° \ 1/5} + {}_5P_{15} * G3^{2}_{5° \ 1/5} + {}_5P_{20} * G3^{3}_{5° \ 1/5} + {}_5P_{25} * G3^{4}_{5° \ 1/5} + {}_5P_{30} * G3^{4}_{5° \ 1/5}$$

$$P_{24} = 16.029.985 * 0{,}0016 + 16.449.193 * (-0{,}0240) +$$
$$+ 17.152.899 * 0{,}1504 + 17.644.531 * 0{,}0848 + 15.833.157 * (-0{,}0128)$$

Para a população de 62 anos e para a população de 67 anos teríamos:

$$P_{62} = {}_5P_{50} * G4^{2}_{3° \ 1/5} + {}_5P_{55} * G4^{3}_{3° \ 1/5} + {}_5P_{60} * G4^{4}_{3° \ 1/5} + {}_5P_{65} * G4^{5}_{3° \ 1/5}$$

$$P_{67} = {}_5P_{50} * G5^{2}_{3° \ 1/5} + {}_5P_{55} * G5^{3}_{3° \ 1/5} + {}_5P_{60} * G5^{4}_{3° \ 1/5} + {}_5P_{65} * G5^{5}_{3° \ 1/5}$$

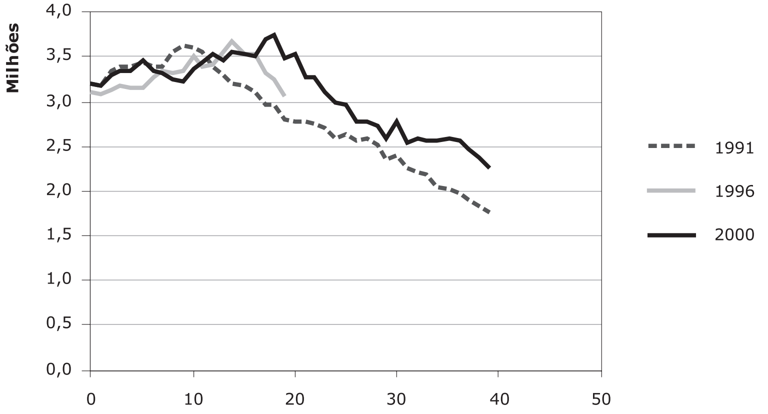
Estimativa da população por idade e sexo

Uma alternativa para o cálculo da população desagregada por idade e sexo é a estimativa de taxas médias de crescimento entre os indivíduos de um mesmo grupo de idade. Desta maneira, haveria várias estimativas para a taxa de crescimento, uma para cada grupo de idade e sexo. Analogamente, poderia ser aplicada uma interpolação polinomial para cada grupo populacional. Seguindo esta alternativa, por exemplo, bastaria interpolar os dados de população considerando o total de indivíduos de 0 a 4 anos do sexo masculino em 1º de agosto de 2000 em relação à população de homens de 0 a 4 anos em 1º de setembro de 1991. Entretanto, o uso de um mesmo grupo de idade para a interpolação da população é uma possível fonte de erros. Tal alternativa é de fácil implementação, entretanto deve-se notar que a população de 0 a 4 anos em 2000 não pertence à mesma coorte da população de 0 a 4 anos em 1991.

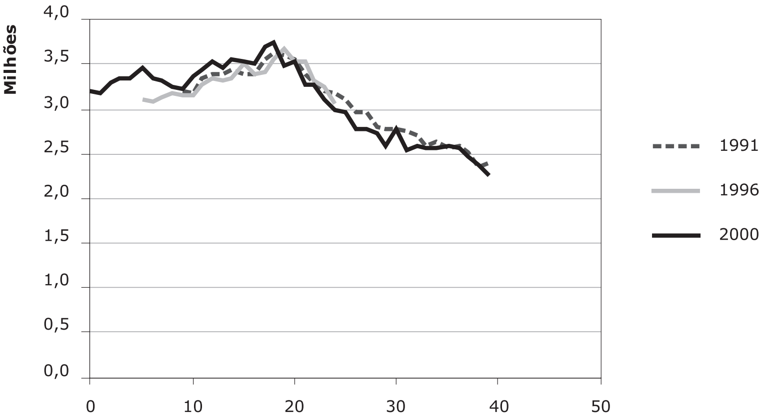
O Gráfico 9, que apresenta a população dos Censos Demográficos de 1991 e 2000 e da Contagem Populacional de 1996, ilustra os erros possíveis ao se adotar essa alternativa. Os dados de 1991 foram deslocados nove anos e desenhados juntamente com os dados de 2000, assim como os dados da Contagem de 1996 foram deslocados quatro anos. O que pode ser observado é a grande oscilação no tamanho das populações de uma mesma idade nos dois censos: (a) a população entre 7 e 11 anos em 1991 é maior do que a

GRÁFICO 9
População residente, segundo idade – Brasil, 1991, 1996 e 2000

População recenseada, segundo idade observada na data de referência das pesquisas



População recenseada, segundo idade no Censo Demográfico de 2000



Fontes: Censos Demográficos de 1991 e 2000 e Contagem Populacional de 1996.

correspondente em 2000; e (b) a partir de 11 anos, a população em 2000 é sempre maior do que a de 1991, a diferença máxima ocorrendo nas idades de 15 e 16 anos. Observa-se então que entre as populações com a mesma idade nas datas censitárias existem grandes diferenças. O mesmo não é observado quando comparamos a população que tinha uma idade x em 1991 e aquela que tinha $x + 9$ em 2000, por estarmos observando valores da mesma coorte. Observa-se ainda que o esperado seria que a população em 1991, deslocada nove anos, fosse maior que a de 2000, por causa da mortalidade. Quando isto não acontece, a explicação mais plausível seria a da imigração de pessoas da coorte ou mesmo a diferença de coberturas censitárias.

Desta maneira, estimar a taxa de crescimento de um mesmo grupo de idade entre dois censos consecutivos pode produzir uma população diferente da população real. Exemplificando, a população de 10 anos em 1995 seria subestimada por este método. No caso de populações estáveis ou quase estáveis[2] esta forma de cálculo traria valores próximos dos reais. Mas no caso de populações que apresentam variações marcantes na sua função de fecundidade, como é o caso do Brasil de 1970 a 2000, este método poderia produzir erros de estimativas.

Uma alternativa metodologicamente mais correta seria estimar a taxa de crescimento entre a população de x anos em 1991 e aquela de $x + 9$ anos em 2000. Tal procedimento permite incorporar nas interpolações as oscilações de nascimentos e dos sobreviventes, em conseqüência da variação da função de fecundidade da população brasileira observada a partir da década de 70 e da queda da mortalidade no passado. Entretanto, além da difícil implementação, deve ser mencionado que:

(a) No caso da mudança de data de referência, cabe ressaltar que a população estimada será de uma idade diferente daquela adotada como correta; por exemplo, as pessoas de 10 anos em 1º de setembro de 1991 teriam 19,93 anos em 1º de agosto de 2000[3];

(b) Esta forma de cálculo (por coortes) não é capaz de estimar as coortes ainda não nascidas no ano inicial; por exemplo, a população de crianças de 0 a 8 anos em 2000 não era nascida em 1991.

---

[2] Em uma situação hipotética de fecundidade e mortalidade constantes, temos uma população de estrutura etária constante, conhecida como população estável. Em situações reais, em que a fecundidade se mantém constante por um longo período, a população é conhecida como quase estável, como pôde ser observado no Brasil até o final da década de 1960.

[3] 1º de setembro de 1991 e 1º de agosto de 2000 são as datas de referência dos Censos de 1991 e 2000, respectivamente.

Finalmente, uma terceira alternativa seria estimar a população total, pelas metodologias descritas na seção anterior, e a distribuição etária média entre os dois períodos, ponderada pelas datas em questão. A média da distribuição etária, estimada desta forma, seria aplicada diretamente à população total já estimada. Esta alternativa, apesar de parecer menos sofisticada matematicamente, tem produzido resultados satisfatórios.

Projeções populacionais

Uma alternativa tentadora é usar metodologias de interpolação de dados para extrapolar uma população. Entretanto, essa alternativa não é aconselhável salvo no caso de horizontes de tempo muito curtos. Projetar uma população não é apenas extrapolar uma série de dados. Uma maneira comum de projetar uma população é através do método conhecido como Método das Componentes Demográficas. Este procedimento consiste em projetar a população de um determinado grupo de idade para o final do qüinqüênio seguinte, e a partir deste ano, para o final do próximo qüinqüênio, e assim sucessivamente até o final do período da projeção. É importante destacar que os componentes da dinâmica demográfica – mortalidade, fecundidade e migração – são os principais ingredientes do método; portanto, o resultado da projeção está ligado diretamente às hipóteses de comportamento futuro do nível e da estrutura desses componentes.

Pelo Método das Componentes Demográficas, uma projeção populacional é feita em duas etapas. A primeira considera a população fechada à migração, ou seja, considera apenas os nascimentos e mortes. Posteriormente, incorpora-se a esta os efeitos diretos e indiretos da migração. Por facilidade de denominação, chamamos a população gerada na primeira etapa de "população fechada" e aquela gerada na segunda etapa, de "população aberta".

A população fechada são os sobreviventes de um determinado grupo de idade ao final de um período de cinco anos. A estimativa dos nascimentos está baseada nas taxas específicas de fecundidade para o meio dos períodos das projeções, que seriam aplicadas na população feminina de 15-49 anos de cada ano do período qüinqüenal em questão. Já a estimativa dos sobreviventes no fim do qüinqüênio seria obtida a partir das projeções das funções de mortalidade desta mesma população. A população aberta é a população fechada mais o saldo migratório que teria ocorrido nos cinco anos anteriores à data da projeção. O saldo migratório é obtido pela multiplicação da taxa líquida de migração no período qüinqüenal pela população fechada ao final deste período. Desta maneira, é importante ter em mente que

> A chave para [realizar] uma projeção populacional com sucesso é a capacidade que o demógrafo tem em formular as hipóteses futuras dos componentes da dinâmica populacional. Duas questões básicas devem nortear as hipóteses. A primeira é: qual deverá ser o limite das tendências passadas e atuais? Explicando melhor, qual deverá ser o nível e a estrutura de cada um dos componentes, a partir dos quais as mudanças devem ocorrer? A segunda trata do tempo em que este limite deverá ser alcançado. Terá este limite sido alcançado antes do final do período da projeção? Após? Quão após? Algumas tendências podem ser modeladas matematicamente baseadas em evidências históricas. Para outras, na maioria das vezes, as hipóteses são formuladas contrapondo as condições atuais e futuras ao conhecimento acumulado do que seria uma tendência plausível. (Cedeplar, 2001)

Apontamentos finais

Esta breve explanação sobre ajustes e projeções de dados populacionais não pretende esgotar o assunto; existem diversas outras técnicas matemáticas e estatísticas que também fornecem ferramentas para estes fins. A intenção foi apresentar e avaliar métodos comuns e de implementação simples. Cabe ressaltar que, dependendo dos dados em estudo, metodologias simples são capazes de solucionar de maneira satisfatória as necessidades da pesquisa e que, em outros casos, nenhum dos métodos apresentados é possível de ser aplicado. Ademais, por se tratarem de métodos matemáticos, valores incoerentes podem ser encontrados, como é o caso de populações negativas ou com valores muito diferentes do esperado. Evidentemente, cada objetivo merece uma avaliação específica e criteriosa.

Referências bibliográficas

CEDEPLAR – Centro de Desenvolvimento e Planejamento Regional. **Projeção populacional por sexo e grupos de idades qüinqüenais das unidades da Federação, Brasil, 1990-2020**. Trabalho realizado no âmbito do projeto Dinâmica Demográfica, Desenvolvimento Regional e Políticas Públicas (PRONEX/Cedeplar/UFMG, 41/96/0892). Belo Horizonte, 1999 (documento eletrônico).

______. **Projeção populacional por sexo e grupos de idades qüinqüenais das unidades da Federação, Brasil, 1990-2020: atualização**. Trabalho realizado no âmbito do projeto Dinâmica Demográfica, Desenvolvimento Regional e Políticas Públicas (PRONEX/Cedeplar/UFMG, 41/96/0892). Belo Horizonte, 2001 (documento eletrônico).

IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **Censo Demográfico de 2000**. Rio de Janeiro: IBGE. Disponível em: <http://www.sidra. ibge.gov.br/ bda/pesquisas/cdru/default.asp>. Acesso em: 25 maio 2002.

PAULO, Maira Andrade. **Estimativas e projeções populacionais, por idade simples, da população abaixo de 20 anos – Brasil e Grandes Regiões, 2000/2020**. Monografia (Iniciação Científica), Centro de Desenvolvimento e Planejamento Regional, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2001.

SHRYOCK, Henry S. e SIEGEL, S. J. **The methods and material of Demography**. Washington: U. S. Government Printing Office, 1980.

Anexo

TABELA A.1

Coeficientes de interpolação baseados na fórmula Beers Modificada

Interp Subgroup	G1	G2	G3	G4	G5
First Fifth of G1	0,3332	-0,1938	0,0702	-0,0118	0,0022
Second Fifth of G1	0,2569	-0,0753	0,0205	-0,0027	0,0006
Third Fifth of G1	0,1903	0,0216	-0,0146	0,0032	-0,0005
Fourth Fifth of G1	0,1334	0,0969	-0,0351	0,0059	-0,0011
Last Fifth of G1	0,0862	0,1506	-0,0410	0,0054	-0,0012
First Fifth of G2	0,0486	0,1831	-0,0329	0,0021	-0,0009
Second Fifth of G2	0,0203	0,1955	-0,0123	-0,0031	-0,0004
Third Fifth of G2	0,0008	0,1893	0,0193	-0,0097	0,0003
Fourth Fifth of G2	-0,0108	0,1677	0,0577	-0,0153	0,0007
Last Fifth of G2	-0,0159	0,1354	0,0972	-0,0170	0,0003
First Fifth of G3	-0,0160	0,0973	0,1321	-0,0121	-0,0013
Second Fifth of G3	-0,0129	0,0590	0,1564	0,0018	-0,0043
Third Fifth of G3	-0,0085	0,0260	0,1650	0,0260	-0,0085
Fourth Fifth of G3	-0,0043	0,0018	0,1564	0,0590	-0,0129
Last Fifth of G3	-0,0013	-0,0121	0,1321	0,0973	-0,0160
First Fifth of G4	0,0003	-0,0170	0,0972	0,1354	-0,0159
Second Fifth of G4	0,0007	-0,0153	0,0577	0,1677	-0,0108
Third Fifth of G4	0,0003	-0,0097	0,0193	0,1893	0,0008
Fourth Fifth of G4	-0,0004	-0,0031	-0,0123	0,1955	0,0203
Last Fifth of G4	-0,0009	0,0021	-0,0329	0,1831	0,0486
First Fifth of G5	-0,0012	0,0054	-0,0410	0,1506	0,0862
Second Fifth of G5	-0,0011	0,0059	-0,0351	0,0969	0,1334
Third Fifth of G5	-0,0005	0,0032	-0,0146	0,0216	0,1903
Fourth Fifth of G5	0,0006	-0,0027	0,0205	-0,0753	0,2569
Last Fifth of G5	0,0022	-0,0118	0,0702	-0,1938	0,3332

Fonte: Shryock e Siegel (1980).

TABELA A.2

Coeficientes de interpolação baseados na fórmula Beers Ordinária

Interp Subgroup	G1	G2	G3	G4	G5
First Fifth of G1	0,3333	-0,1636	-0,0210	0,0796	-0,0283
Second Fifth of G1	0,2595	-0,0780	0,0130	0,0100	-0,0045
Third Fifth of G1	0,1924	0,0064	0,0184	-0,0256	0,0084
Fourth Fifth of G1	0,1329	0,0844	0,0054	-0,0356	0,0129
Last Fifth of G1	0,0819	0,1508	-0,0158	-0,0284	0,0115
First Fifth of G2	0,0404	0,2000	-0,0344	-0,0128	0,0068
Second Fifth of G2	0,0093	0,2268	-0,0402	0,0028	0,0013
Third Fifth of G2	-0,0108	0,2272	-0,0248	0,0112	-0,0028
Fourth Fifth of G2	-0,0198	0,1992	0,0172	0,0072	-0,0038
Last Fifth of G2	-0,0191	0,1468	0,0822	-0,0084	-0,0015
First Fifth of G3	-0,0117	0,0804	0,1570	-0,0284	0,0027
Second Fifth of G3	-0,0020	0,0160	0,2200	-0,0400	0,0060
Third Fifth of G3	0,0050	-0,0280	0,2460	-0,0280	0,0050
Fourth Fifth of G3	0,0060	-0,0400	0,2200	0,0160	-0,0020
Last Fifth of G3	0,0027	-0,0284	0,1570	0,0804	-0,0117
First Fifth of G4	-0,0015	-0,0084	0,0822	0,1468	-0,0191
Second Fifth of G4	-0,0038	0,0072	0,0172	0,1992	-0,0198
Third Fifth of G4	-0,0028	0,0112	-0,0248	0,2272	-0,0108
Fourth Fifth of G4	0,0013	0,0028	-0,0402	0,2268	0,0093
Last Fifth of G4	0,0068	-0,0128	-0,0344	0,2000	0,0404
First Fifth of G5	0,0115	-0,0284	-0,0158	0,1508	0,0819
Second Fifth of G5	0,0129	-0,0356	0,0054	0,0844	0,1329
Third Fifth of G5	0,0084	-0,0256	0,0184	0,0064	0,1924
Fourth Fifth of G5	-0,0045	0,0100	0,0130	-0,0780	0,2595
Last Fifth of G5	-0,0283	0,0796	-0,0210	-0,1636	0,3333

Fonte: Shryock e Siegel (1980).

TABELA A.3

Coeficientes de interpolação baseados na fórmula Sprague

Interp Subgroup	G1	G2	G3	G4	G5
First Fifth of G1	0,3616	-0,2768	0,1488	-0,0336	0,0000
Second Fifth of G1	0,2640	-0,0960	0,0400	-0,0080	0,0000
Third Fifth of G1	0,1840	0,0400	-0,0320	0,0080	0,0000
Fourth Fifth of G1	0,1200	0,1360	-0,0720	0,0160	0,0000
Last Fifth of G1	0,0704	0,1968	-0,0848	0,0176	0,0000
First Fifth of G2	0,0336	0,2272	-0,0752	0,0144	0,0000
Second Fifth of G2	0,0080	0,2320	-0,0480	0,0080	0,0000
Third Fifth of G2	-0,0080	0,2160	-0,0080	0,0000	0,0000
Fourth Fifth of G2	-0,0160	0,1840	0,0400	-0,0080	0,0000
Last Fifth of G2	-0,0176	0,1408	0,0912	-0,0144	0,0000
First Fifth of G3	-0,0128	0,0848	0,1504	-0,0240	0,0016
Second Fifth of G3	-0,0016	0,0144	0,2224	-0,0416	0,0064
Third Fifth of G3	0,0064	-0,0336	0,2544	-0,0336	0,0064
Fourth Fifth of G3	0,0064	-0,0416	0,2224	0,0144	-0,0016
Last Fifth of G3	0,0016	-0,0240	0,1504	0,0848	-0,0128
First Fifth of G4	0,0000	-0,0144	0,0912	0,1408	-0,0176
Second Fifth of G4	0,0000	-0,0080	0,0400	0,1840	-0,0160
Third Fifth of G4	0,0000	0,0000	-0,0080	0,2160	-0,0080
Fourth Fifth of G4	0,0000	0,0080	-0,0480	0,2320	0,0080
Last Fifth of G4	0,0000	0,0144	-0,0752	0,2272	0,0336
First Fifth of G5	0,0000	0,0176	-0,0848	0,1968	0,0704
Second Fifth of G5	0,0000	0,0160	-0,0720	0,1360	0,1200
Third Fifth of G5	0,0000	0,0080	-0,0320	0,0400	0,1840
Fourth Fifth of G5	0,0000	-0,0080	0,0400	-0,0960	0,2640
Last Fifth of G5	0,0000	-0,0336	0,1488	-0,2768	0,3616

Fonte: Shryock e Siegel (1980).

TABELA A.4

Coeficientes de interpolação baseados na fórmula Karup-King

Interp Subgroup	**G1**	**G2**	**G3**
First Fifth of G1	0,3440	-0,2080	0,0640
Second Fifth of G1	0,2480	-0,0560	0,0080
Third Fifth of G1	0,1760	0,0480	-0,0240
Fourth Fifth of G1	0,1280	0,1040	-0,0320
Last Fifth of G1	0,1040	0,1120	-0,0160
First Fifth of G2	0,0640	0,1520	-0,0160
Second Fifth of G2	0,0080	0,2240	-0,0320
Third Fifth of G2	-0,0240	0,2480	-0,0240
Fourth Fifth of G2	-0,0320	0,2240	0,0080
Last Fifth of G2	-0,0160	0,1520	0,0640
First Fifth of G5	-0,0160	0,1120	0,1040
Second Fifth of G5	-0,0320	0,1040	0,1280
Third Fifth of G5	-0,0240	0,0480	0,1760
Fourth Fifth of G5	0,0080	-0,0560	0,2480
Last Fifth of G5	0,0640	-0,2080	0,3440

Fonte: Shryock e Siegel (1980).