UnB - IE
Departamento de Estatística

Unidade IV

Noções de Probabilidade

Estatística Aplicada

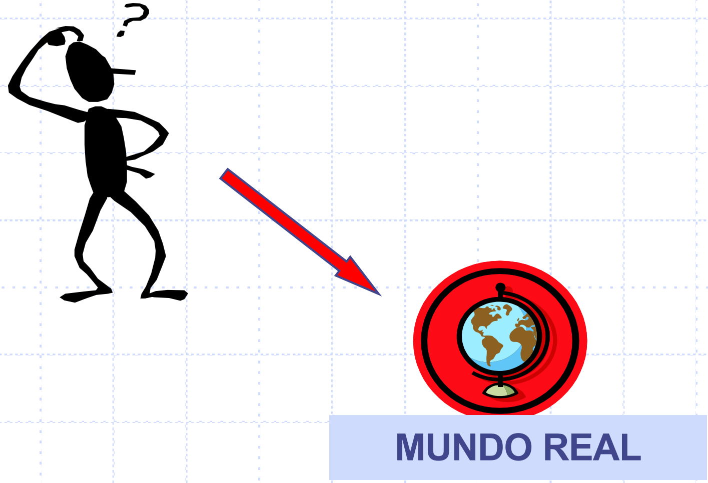
Ana Maria Nogales Vasconcelos

Maria Teresa Leão Costa

UnB - IE
Departamento de
Estatística

PROBABILIDADE – CONCEITOS BÁSICOS

UnB - IE
Departamento de
Estatística



No estudo de um fenômeno deve-se distinguir entre dois tipos de fenômenos:

- ✓ Determinísticos
- ✓ Aleatórios

A água vai ferver quando a temperatura chegar a….

Vai chover hoje a tarde?...

UnB - IE
Departamento de
Estatística

Tipos de Experimentos

- **Experimentos Determinísticos**:
  - Os experimentos em que podemos determinar os resultados nas diversas vezes que repetimos.
  - Conduzem **sempre a um mesmo resultado em condições iniciais idênticas**.

Exemplo:

- *Ao aquecermos a água à pressão de 1,0 atm (1 atmosfera – valor da pressão atmosférica ao nível do mar), podemos prever antecipadamente que ela ferverá quando chegar à temperatura de 100º C.*

Tipos de Experimentos

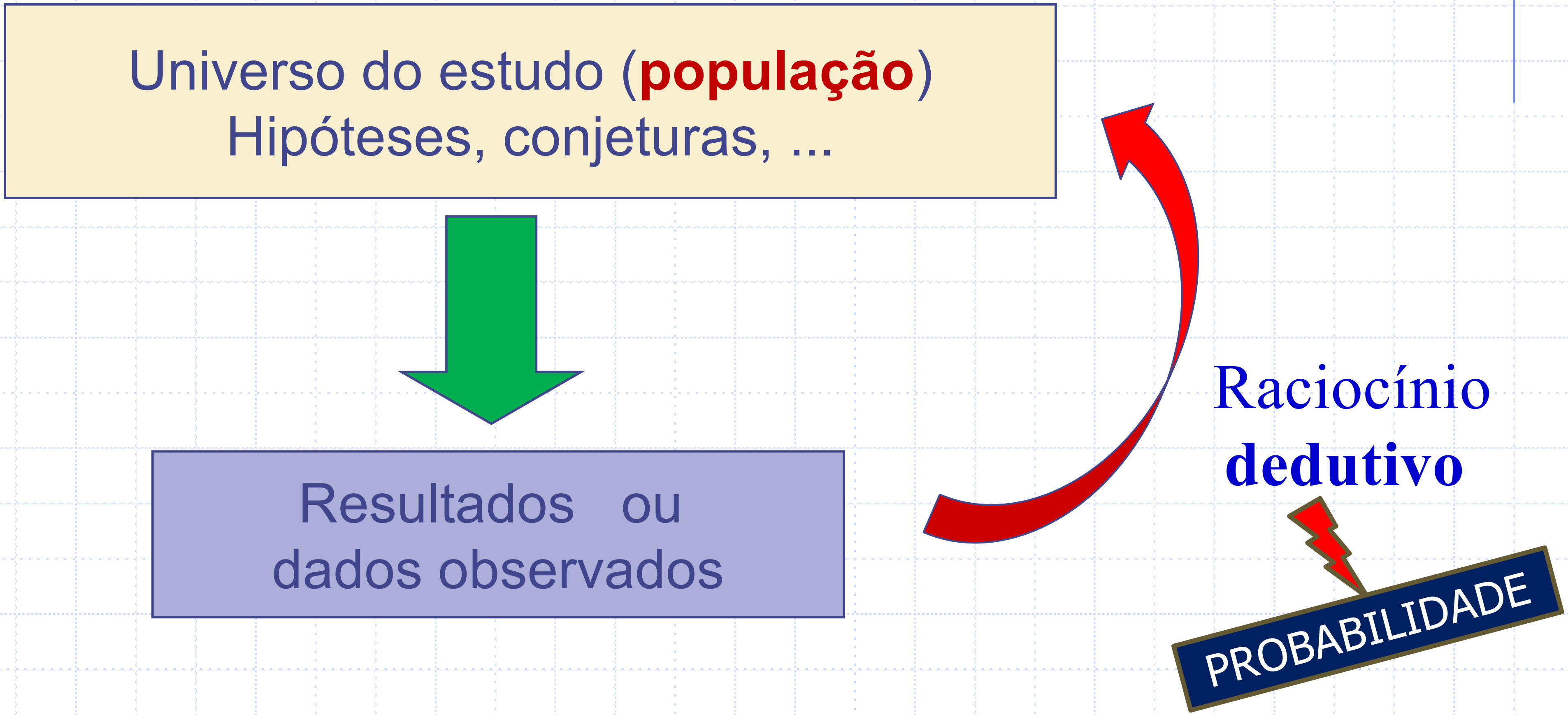
- **Experimentos Aleatórios**:
  - Os experimentos em que não podemos determinar os resultados nas diversas vezes que repetimos
  - podem conduzir a diferentes resultados mesmo em condições iniciais idênticas.

Exemplo:

- Condições climáticas do amanhã.

Quanto é provável?

PROBABILIDADE



Extraído de PEDRO A. BARBETTA – Estatística Aplicada às Ciências Sociais 6ed. Editora da UFSC, 2006.

UnB - IE
Departamento de
Estatística

Experiência Aleatória (ε)

- Uma ***EXPERIÊNCIA ALEATÓRIA*** é aquela em que não existe certeza quanto ao resultado. O fator ACASO está presente.

- Ela se caracteriza pela:
  - ***possibilidade de repetição*** indefinida, mantida as condições iniciais;
  - ***Impossibilidade*** de determinação do resultado, em uma particular repetição, antes de sua realização;
  - Capacidade de descrever o conjunto de todos os resultados possíveis da experiência.

Exemplos:

1. Lançamento de um dado equilibrado a fim de verificar o número de pontos da face voltada para cima.
2. Seleção de um aluno da turma, ao acaso, a fim de verificar o número de semestres na UnB.
3. Leitura da umidade diária.
4. Lançamento de duas moedas para verificar o resultado.
5. Seleção de um animal ao acaso da população em estudo e verificar se apresenta certa característica genética ou não.
6. Seleção de um indivíduo ao acaso a fim de determinar o tipo sanguíneo.

OBSERVAÇÃO:

- Ao escrever uma experiência aleatória devemos especificar não somente que operação deve ser realizada mas também o que deve ser observado.

Espaço Amostral (Ω)

- A cada experiência aleatória (ε) se associa um ***ESPAÇO AMOSTRAL***, Ω, que é o conjunto de todos os resultados possíveis na sua realização.

Exemplos:

1. **ε**: Lançamento de um dado equilibrado a fim de *verificar o número de pontos da face voltada para cima*.

Espaço Amostral (Ω)

- A cada experiência aleatória (ε) se associa um ***ESPAÇO AMOSTRAL,*** Ω***,*** que é o conjunto de todos os resultados possíveis na sua realização.

Exemplos:

1. ε: Lançamento de um dado equilibrado a fim de *verificar o número de pontos da face voltada para cima*.

⚀ , ⚁ , ⚂ , ⚃ , ⚄ , ⚅

$$\Omega = \{1, 2,3, 4, 5,6\}$$

2. **ε**: Seleção de um aluno da turma, ao acaso, a fim de *verificar o número de semestres na UnB*.

$$\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 24\}$$

3. **ε**: Leitura da umidade diária.

$$\Omega = \{0\%, \ldots, 15\%, \ldots, 100\%\}$$

4. **ε**: Lançamento de duas moedas para verificar o resultado.

$$\Omega = \{(ca, ca), (ca, co), (co, ca), (co, co)\}$$

5. $\boldsymbol{\varepsilon}$: Seleção de um animal ao acaso da população em estudo e verificar se apresenta certa característica genética ou não.

$$\Omega = \{tem\ caracaterística\ genética, não\ tem\ a\ carc.\ genética\}$$

Ou mais simplesmente,

$$\Omega = \{sim, não\}$$

6. $\boldsymbol{\varepsilon}$: Seleção de um indivíduo ao acaso a fim de determinar o tipo sanguíneo.

$$\Omega = \{A, B, AB, O\}$$

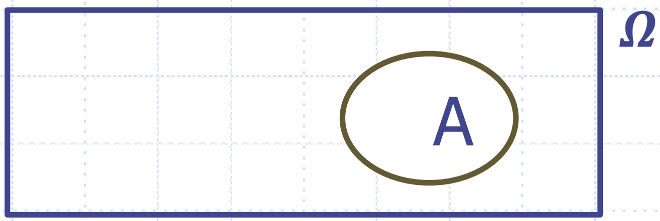
Evento ou Acontecimento

- Notação: A,B,C,.... ou $A_1, A_2, A_3,...$

- Um ***EVENTO*** é um conjunto de resultados da experiência aleatória ε.
- Em termos de Teoria dos Conjuntos, é um subconjunto do espaço amostral Ω, isto é,

$$A \subset \Omega \text{ , A é um evento.}$$

- Graficamente,



UnB - IE
Departamento de
Estatística

- **Evento Certo : Ω**

- **Evento Impossível: ∅**
  - É o conjunto sem elementos.

- **Evento Elementar:**
  - evento constituído por um único resultado do espaço amostral

Exemplos:

1. ε: Lançamento de um dado equilibrado a fim de *verificar o número de pontos da face voltada para cima*.
2.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ → evento certo

A = {sair a face 5} → evento elementar

B = {sair a face 7} → evento impossível

❖ Evento Interseção:

- Sejam A e B dois eventos.

- O EVENTO INTERSEÇÃO é o evento que ocorre quando A ocorre e B ocorre, isto é, quando A e B ocorrem simultaneamente $(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})$

Exemplos:

1. $\boldsymbol{\varepsilon}$: Lançamento de um dado equilibrado a fim de *verificar o número de pontos da face voltada para cima*.

$$\Omega = \{1, 2,3, 4, 5,6\}$$

B= {sair a face maior ou igual a 3}={3,4,5,6}

C = {sair a face ímpar}={1,3,5}

1. O evento interseção $\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C} = \{3,5\} = (sair\ face\ ímpar \geq 3\}$

Evento União:

- Sejam A e B dois eventos.
- O EVENTO UNIÃO é o evento que ocorre quando A ocorre ou B ocorre ou ambos ocorrem. $(A \cup B)$

Exemplos:

1. ε: Lançamento de um dado equilibrado a fim de *verificar o número de pontos da face voltada para cima*.
2. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

B= {sair a face maior ou igual a 3}={3,4,5,6}

C = {sair a face ímpar}={1,3,5}

D = {sair a face 2}={2}

O evento união $B \cup C = \{1.3,4,5,6\} = (sair\ face\ ímpar\ ou\ face \geq 3\}$

Já o evento união $C \cup D = \{2,3,4.5,6\} = \{sair\ face\ 2\ ou\ face\ \geq 3\}$

UnB - IE
Departamento de
Estatística

Eventos Mutuamente Exclusivos:

- Sejam A e B dois eventos.
- A e B são EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUSIVOS se, e somente se, $A \cap B = \phi$, isto é , não puderem ocorrer juntos.

Exemplos:

1. $\boldsymbol{\varepsilon}$: Lançamento de um dado equilibrado a fim de *verificar o número de pontos da face voltada para cima*.
2. $\Omega = \{1, 2,3, 4, 5,6\}$

B= {sair a face maior ou igual a 3}={3,4,5,6}

C = {sair a face ímpar}={1,3,5}

D = {sair a face 2}={2}

Os eventos *C* e ***D*** são ***mutuamente exclusivos*** pois $C \cap D = \emptyset$.

Já os eventos ***B*** e ***C*** ***NÃO são mutuamente exclusivos*** pois

$$\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C} = \{3,5\} \neq \emptyset$$

UnB - IE
Departamento de Estatística

Eventos Complementares:

- Sejam A e B dois eventos.
- Dizemos que A e B são EVENTOS COMPLEMENTARES se, e somente se:
  i. $A \cap B = \phi$, isto é , são mutuamente exclusivos;
  ii. $A \cup B = \Omega$.
- Neste caso, dizemos que B é o complementar de A e designamos por $\bar{A}$.

Exemplos:

1. **ε**: Lançamento de um dado equilibrado a fim de *verificar o número de pontos da face voltada para cima*.
2. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

C = {sair a face ímpar}={1,3,5}
D = {sair a face 2}={2}
E= {sair face par}={2,4,6}

Os eventos ***C*** e ***E*** são ***complementares*** pois $C \cap E = \emptyset$ e $C \cup E = \Omega$.

Já os eventos união ***C*** e ***D*** ***NÃO são complementares*** pois apesar de $\boldsymbol{C} \cap D = \emptyset$, entretanto $\boldsymbol{CUD} = \{1,2,3,5\} \neq \Omega$.

UnB - IE
Departamento de
Estatística

Probabilidade

DEFINIÇÃO CLÁSSICA:

- Seja A um evento. *A **PROBABILIDADE*** de um evento A, designada *P(A)* é definida como:

$$P(A) = \frac{número\ de\ casos\ favoráveis\ a\ ocorrência\ de\ A}{número\ de\ casos\ possíveis}$$

- Só é válida se todos os resultados possíveis têm a mesma chance de ocorrer (EXPERIÊNCIA ALEATÓRIA UNIFORME).

Exemplos:

1. ε: Lançamento de um dado equilibrado a fim de *verificar o número de pontos da face voltada para cima*.
2. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

   B= {sair a face maior ou igual a 3}={3,4,5,6}

   C = {sair a face ímpar}={1,3,5}

   D = {sair a face 2}={2}

$$P(D) = \frac{1}{6}$$

2. $P(B) = \frac{4}{6}$ e $P(C) = \frac{3}{6}$

FREQUÊNCIA RELATIVA:

- Sejam

ε: experiência aleatória repetida ***n*** vezes

Ω: espaço amostral associado a ε

e um evento A.

Considerando que :

n_A = **frequência absoluta do evento A** (*número de vezes que A ocorreu*)

DEFINIÇÃO:

$$f_A = \frac{n_A}{n}$$ → **frequência relativa do evento A** (*proporção de ocorrência de A*)

❖ PROPRIEDADES:

i. $0 \leq f_A \leq 1$.

ii. $f_A = 1 \;\Leftrightarrow$ ***A*** ocorreu em todas as ***n*** repetições.

iii. $f_A = 0 \;\Leftrightarrow$ A não ocorreu nas ***n*** repetições.

iv. Se ***A*** e ***B*** forem eventos MUTUAMENTE EXCLUSIVOS, e se

$f_{A\cup B}$= frequência relativa do evento $A \cup B$

então

$$\boldsymbol{f_{A\cup B} = f_A + f_B}$$

UnB - IE
Departamento de
Estatística

Exemplos:

1. ε: Lançamento de uma moeda equilibrada a fim de *verificar a face voltada para cima*.
2. $$\Omega = \{cara, coroa\}$$

   Repetir esta experiência aleatória $\boldsymbol{n}$ vezes.

   Seja o evento A=$\{sair\ cara\}$.

Considerando que :

$$\boldsymbol{n_A} =$$ *número de vezes que ocorreu* cara nos n lançamentos.

temos que:

$$f_A = \frac{n_A}{n} \rightarrow \text{frequência relativa de ocorrência de cara}$$

(*proporção de ocorrência de cara*)

São conhecidos alguns resultados históricos relacionados com a experiência do lançamento da moeda:

- Buffon, cientista francês (1707 - 1788) lançou uma moeda 4 040 vezes, tendo obtido 2 048 caras, ou seja uma frequência relativa para a saída de cara de 0.5069;

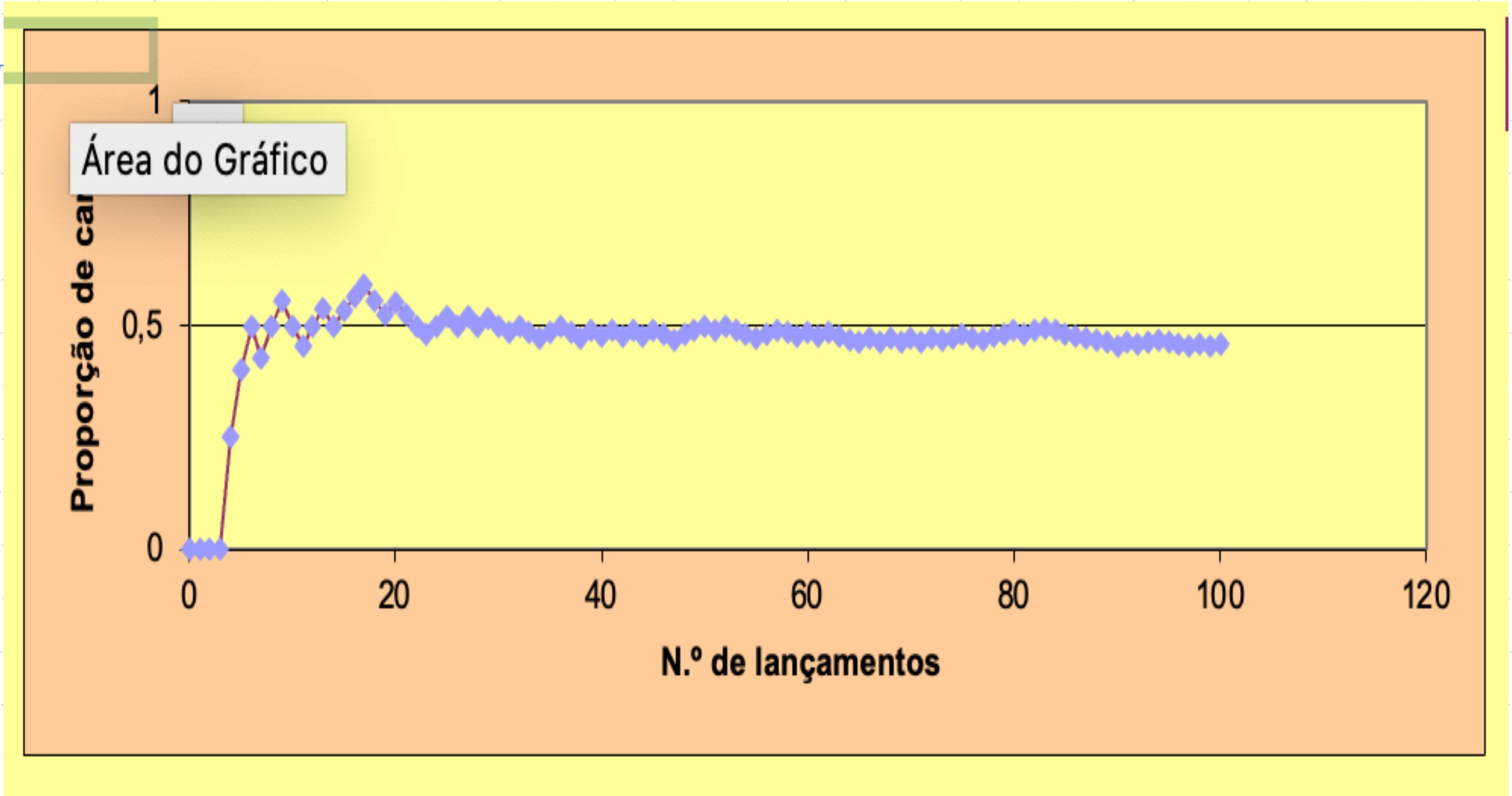
- por volta de 1900, o estatístico inglês Karl Pearson lançou uma moeda 24 000 vezes. Obteve 12 012 caras, ou seja, 0.5005 para a frequência relativa da saída de cara;

- durante a 2ª guerra mundial, enquanto prisioneiro dos alemães, o matemático inglês John Kerrich lançou uma moeda 10 000 vezes, tendo obtido 5 067 caras, ou seja uma frequência relativa de 0.5067 para a saída de cara.

UnB - IE
Departamento de
Estatística

nº lançamentos	nº caras obtidas	f_A
100	49	0,490
500	253	0,506
1 000	495	0,495
2 000	993	0,4965
3 000	1 510	0,5033

UnB - IE
Departamento de
Estatística



UnB - IE
Departamento de Estatística

Axiomas

Sejam ε uma experiência aleatória e Ω seu espaço amostral

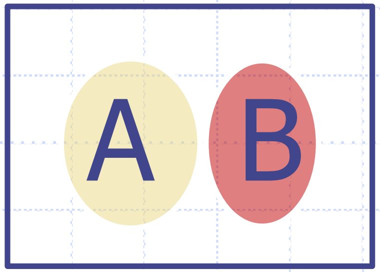
A cada evento ***A*** $(A \subset \Omega)$ associa-se um número real **P(A)**, ***probabilidade do evento A***, que satisfaz as seguintes propriedades:

i. $0 \leq P(A) \leq 1.$

ii. $P(\Omega) = 1.$

iii. Se ***A*** e ***B*** forem eventos ***mutuamente exclusivos***, isto é, $A \cap B = \emptyset$, então

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$



Resultados Importantes (Teoremas):

❖ **TEOREMA 1:**

Sejam A e $\bar{A}$ dois eventos, onde $\bar{A}$ é o complemento de A, então:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \text{ ou } P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

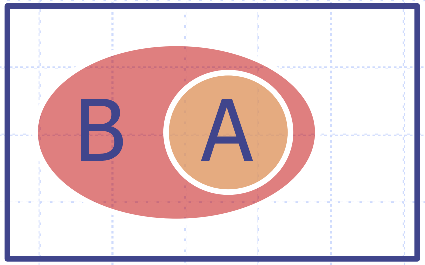
❖ **TEOREMA 2**

Seja ∅ o evento impossível, Então:

$$\mathbf{P(\emptyset) = 0.}$$

❖ **TEOREMA 3**

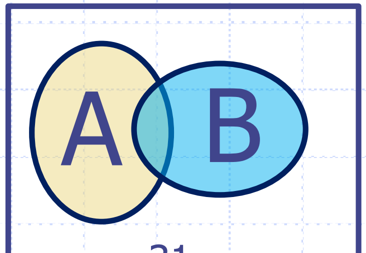
Seja A e B são eventos tais que. $A \subset B, então$:



$$P(A) \leq P(B).$$

❖ **TEOREMA 4**

Seja A e B são dois eventos quaisquer, $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ tem-se:



$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

UnB - IE
Departamento de
Estatística

Vamos praticar?

- Considere que 300 pessoas estão participando de um concurso, 100 da escola A e 200 da escola B. A pergunta mais difícil foi respondida por apenas 110 dos candidatos, 60 dos quais da escola B.

Escola	Questão + Difícil		Total
	Acertou	Errou	
A	60	40	**100**
B	50	150	**200**
Total	**110**	**189**	**300**

- Um candidato foi selecionado ao acaso e entrevistado.

UnB - IE
Departamento de
Estatística

1) Qual a probabilidade do candidato selecionado ter acertado a questão mais difícil?
2) Qual a probabilidade do candidato ter errado a questão mais difícil?
3) Qual a probabilidade do candidato selecionado ser da escola B?
4) Qual a probabilidade do candidato selecionado ter acertado a questão mais difícil e ser da escola B?
5) Qual a probabilidade do candidato selecionado ter acertado a questão mais difícil ou ser da escola B?
6) Qual a probabilidade do candidato selecionado ter acertado a questão mais difícil se você sabe que ele é da escola B?

Escola	Questão + Difícil		Total
	Acertou	Errou	
A	60	40	**100**
B	50	150	**200**
Total	**110**	**189**	**300**