

## Estatística Descritiva

Resumindo e Descrevendo Variáveis Quantitativas

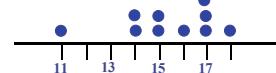
### Estatística Aplicada

Ana Maria Nogales Vasconcelos

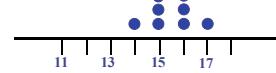
Maria Teresa Leão Costa

- ◆ Represente os dados através de um diagrama de pontos ("DOTPLOT").
- ◆ Com base nos diagramas obtidos analise a produtividade destes operários.

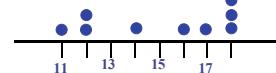
Operário A: 15 11 14 17 18 14 16 17 17 15



Operário B: 14 15 15 15 15 16 16 17 15



Operário C: 11 12 12 16 17 18 18 18 14 18



## Problema 2

- ◆ Durante 10 dias foi observado o número de peças produzidas pelos operários A, B e C de uma fábrica:

Operário A: 15 11 14 17 18 14 16 17 17 15

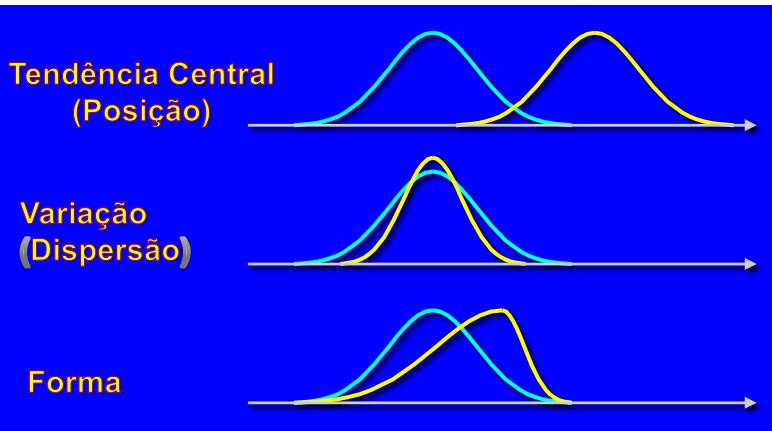
Operário B: 14 15 15 15 15 16 16 16 17 15

Operário C: 11 12 12 16 17 18 18 18 14 18

## Objetivos

- ◆ Explicar propriedades de dados quantitativos
- ◆ Descrever medidas resumo
  - Posição
  - Variação
  - Forma
- ◆ Analisar dados quantitativos usando medidas resumo

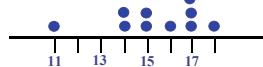
# Propriedades de Dados Quantitativos



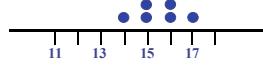
9

- ◆ Qual o número de peças produzidas que você usaria para representar, resumir, a produtividade de cada operário.

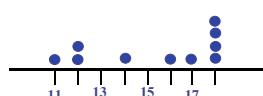
Operário A: 15 11 14 17 18 14 16 17 17 15



Operário B: 14 15 15 15 15 16 16 16 17 15



Operário C: 11 12 12 16 17 18 18 18 14 18



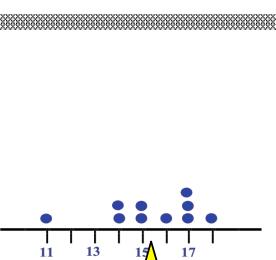
11

## Medidas de Posição

## Exemplo

### Dados Brutos:

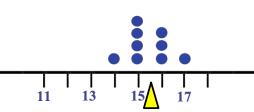
Operário A: 15 11 14 17 18 14 16 17 17 15



Amostra de tamanho ***n=10***

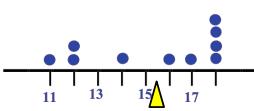
$$\bar{x}_A = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{15+11+14+17+18+14+16+17+17+15}{10} = \frac{154}{10} = 15,4 \text{ peças}$$

Operário B: 14 15 15 15 15 16 16 16 17 15



$$\bar{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{14+15+15+15+15+16+16+16+17+15}{10} = \frac{154}{10} = 15,4 \text{ peças}$$

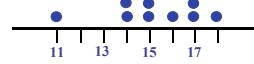
Operário C: 11 12 12 16 17 18 18 18 14 18



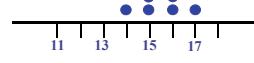
$$\bar{x}_C = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{11+12+12+16+17+18+18+18+14+18}{10} = \frac{154}{10} = 15,4 \text{ peças}$$

- ◆ Comente sobre a variabilidade da produção dos operários. Qual o operário com produtividade mais homogênea?

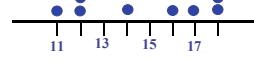
Operário A: 15 11 14 17 18 14 16 17 17 15



Operário B: 14 15 15 15 15 16 16 16 17 15



Operário C: 11 12 12 16 17 18 18 18 14 18



17

## Medidas de Variação ou Dispersão

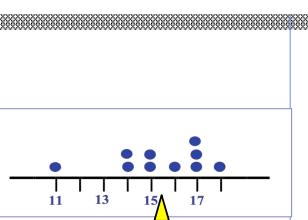
## Amplitude Total

- ◆ Medida de dispersão
- ◆ Diferença entre o maior e o menor valor observado

$$\text{Amplitude Total (AT)} = x_{\max} - x_{\min}$$

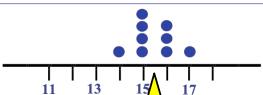
## Exemplo

Operário A: 15 11 14 17 18 14 16 17 17 15



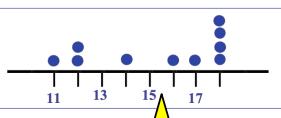
$$\left. \begin{array}{l} x_{\min} = 11 \\ x_{\max} = 18 \end{array} \right\} \Rightarrow AT = 18 - 11 = 7$$

Operário B: 14 15 15 15 15 16 16 17 15



$$\left. \begin{array}{l} x_{\min} = 14 \\ x_{\max} = 17 \end{array} \right\} \Rightarrow AT = 17 - 14 = 3$$

Operário C: 11 12 12 16 17 18 18 14 18



$$\left. \begin{array}{l} x_{\min} = 11 \\ x_{\max} = 18 \end{array} \right\} \Rightarrow AT = 18 - 11 = 7$$

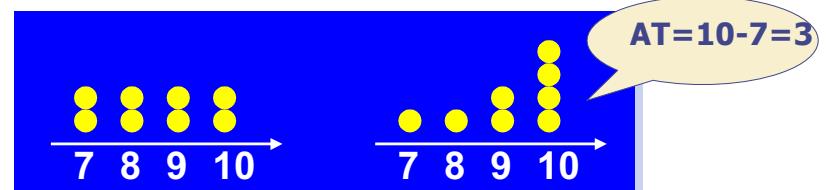
23

## Amplitude Total

- ◆ Medida de dispersão
- ◆ Diferença entre o maior e o menor valor observado

$$\text{Amplitude Total} = x_{\max} - x_{\min}$$

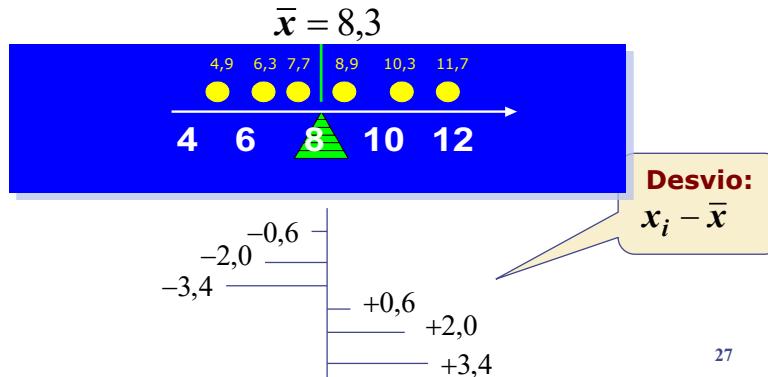
- ◆ Não considera a distribuição dos dados



24

## Variância e Desvio Padrão

- ◆ Medidas de dispersão
- ◆ Considera como os dados estão distribuídos
- ◆ Mostra a variação em torno da média



27

## Variância

### Variância populacional:

Em uma população de tamanho  $N$ :

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N}$$

ou

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 - N\mu^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N} - \mu^2$$

### Variância da Amostra:

Em uma amostra de tamanho  $n$ :

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

**Atenção!!!**  
 $n-1$  no denominador

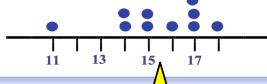
$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}$$

Fórmulas Operacionais

28

## Exemplo

Operário A: 15 11 14 17 18 14 16 17 17 15



Amostra de tamanho  $n=10$  e  $\bar{x}_A = 15,4$  peças

$$\text{Considerando que: } s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

e que:

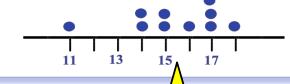
$$\begin{aligned} \sum_i (x_i - \bar{x})^2 &= (15 - 15,4)^2 + (11 - 15,4)^2 + (14 - 15,4)^2 + (17 - 15,4)^2 + \\ &\quad (18 - 15,4)^2 + (14 - 15,4)^2 + (16 - 15,4)^2 + (17 - 15,4)^2 + (17 - 15,4)^2 + \\ &\quad (15 - 15,4)^2 = \\ &= (-0,4)^2 + (-4,4)^2 + (-1,4)^2 + (1,6)^2 + (2,6)^2 + (-1,4)^2 + (0,6)^2 + \\ &\quad (1,6)^2 + (1,6)^2 + (-0,4)^2 = \\ &= 0,16 + 19,36 + 1,96 + 2,56 + 6,76 + 1,96 + 0,36 + 2,56 + 2,56 + 0,16 = \\ &= 38,4 \end{aligned}$$

$$\text{Assim: } s^2 = \frac{38,4}{10-1} = 4,2667(\text{peças})^2$$

29

## Exemplo

Operário A: 15 11 14 17 18 14 16 17 17 15



Ou considerando a fórmula operacional:

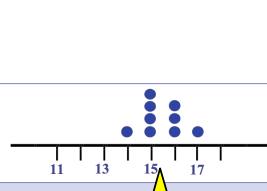
$$\begin{aligned} \sum_i x_i^2 &= 15^2 + 11^2 + 14^2 + 17^2 + 18^2 + 14^2 + 16^2 + 17^2 + 15^2 = \\ &= 225 + 121 + 196 + 289 + 324 + 196 + 256 + 289 + 225 = 2410 \end{aligned}$$

$$\text{Assim: } s^2 = \frac{2410 - 10 \times 15,4^2}{10-1} = \frac{2410 - 2371,6}{9} = \frac{38,4}{9} = 4,2667(\text{peças})^2$$

30

## Exemplo

Operário B: 14 15 15 15 15 16 16 17 15

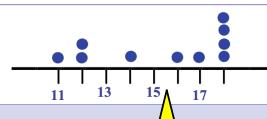


Amostra de tamanho  $n=10$  e  $\bar{x}_B = 15,4$  peças

$$\sum_i x_i^2 = 14^2 + 15^2 + 15^2 + 15^2 + 15^2 + 16^2 + 16^2 + 16^2 + 17^2 + 15^2 = 2378$$

$$\text{Assim: } s^2 = \frac{2378 - 10 \times 15,4^2}{10-1} = \frac{2378 - 2371,6}{9} = \frac{6,4}{9} = 0,71111(\text{peças})^2$$

Operário C: 11 12 12 16 17 18 18 18 14 18



Amostra de tamanho  $n=10$  e  $\bar{x}_C = 15,4$  peças

$$\sum_i x_i^2 = 11^2 + 12^2 + 12^2 + 15^2 + 17^2 + 18^2 + 18^2 + 18^2 + 14^2 + 18^2 = 2446$$

$$\text{Assim: } s^2 = \frac{2446 - 10 \times 15,4^2}{10-1} = \frac{2446 - 2371,6}{9} = \frac{74,4}{9} = 8,2667(\text{peças})^2$$

31

## Observe que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2\bar{x}x_i + \bar{x}^2) = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \bar{x}^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i}_{n\bar{x}} + n\bar{x}^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} n\bar{x} + n\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2$$

39

◆ Assim:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}$$

◆ Analogamente, mostramos que:

$$\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^N x_i^2 - N\mu^2$$

E portanto:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 - N\mu^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N} - \mu^2$$

40

## Desvio Padrão

**Desvio Padrão populacional:**

$$\sigma = +\sqrt{\sigma^2}$$

**Desvio Padrão da Amostra:**

$$S = +\sqrt{S^2}$$

## Exemplo

**Operário A:**

$$\bar{x}_A = 15,4 \text{ peças} \quad S^2 = 4,2667(\text{peças})^2 \rightarrow s = \sqrt{4,2667} = 2,07 \text{ peças}$$

**Operário B:**

$$\bar{x}_B = 15,4 \text{ peças} \quad S^2 = 0,7111(\text{peças})^2 \rightarrow s = \sqrt{0,7111} = 0,84 \text{ peças}$$

**Operário C:**

$$\bar{x}_C = 15,4 \text{ peças} \quad S^2 = 8,2667(\text{peças})^2 \rightarrow s = \sqrt{8,2667} = 2,88 \text{ peças}$$

42

## Exemplo

Qual grupo é mais homogêneo?

**Grupo A:**

$$\bar{X} = 40 \quad e \quad S = 10$$

**Grupo B:**

$$\bar{X} = 200 \quad e \quad S = 10$$

**Turma A:**

$$\bar{X} = 30 \quad e \quad S = 10$$

**Turma B:**

$$\bar{X} = 800 \quad e \quad S = 80$$

43

## Coeficiente de Variação

- ◆ Medida de dispersão *relativa*
- ◆ Pode ser expresso como uma %
- ◆ Mostra a variação relativa a média
- ◆ Usado para comparar 2 ou mais grupos
- ◆ Fórmula
  - População:

$$cv = \frac{\sigma}{\mu} \quad \text{ou} \quad cv = \frac{\sigma}{\mu} \times 100$$

- Amostra:

$$cv = \frac{s}{\bar{x}} \quad \text{ou} \quad cv = \frac{s}{\bar{x}} \times 100$$

45

## Exemplo

- ❖ Comente sobre a variabilidade da produção dos operários. Qual o operário com produtividade mais homogênea?

### Operário A:

$$\bar{x}_A = 15,4 \text{ peças} \quad s = 2,07 \text{ peças} \quad \rightarrow \quad cv = \frac{2,07}{15,4} = 0,1344 \rightarrow 13,44\%$$

### Operário B:

$$\bar{x}_B = 15,4 \text{ peças} \quad s = 0,84 \text{ peças} \quad \rightarrow \quad cv = \frac{0,84}{15,4} = 0,0545 \rightarrow 4,45\%$$

### Operário C:

$$\bar{x}_C = 15,4 \text{ peças} \quad s = 2,88 \text{ peças} \quad \rightarrow \quad cv = \frac{2,88}{15,4} = 0,1870 \rightarrow 18,7\%$$

46

## Exemplos

### Qual grupo é mais homogêneo?

<b>Grupo A:</b>	$\bar{X} = 40$	$s = 10$	$\Rightarrow$	$cv = 0,25$
<b>Grupo B:</b>	$\bar{X} = 200$	$s = 10$	$\Rightarrow$	$cv = 0,05$

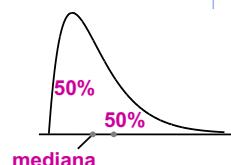
<b>Turma A:</b>	$\bar{X} = 30$	$s = 10$	$\Rightarrow$	$cv = 0,33$
<b>Turma B:</b>	$\bar{X} = 800$	$s = 80$	$\Rightarrow$	$cv = 0,10$

47

## Outras Medidas de Posição

## Mediana

- ◆ Medida de tendência central
- ◆ Valor central em uma sequência *ordenada*
  - Se  $n$  ímpar, valor central da sequência
  - Se  $n$  par, média dos 2 valores centrais
- ◆ Não é afetada por valores extremos



$n$  ímpar : – Mediana é valor que ocupa a posição  $\frac{n+1}{2}$

$n$  par : – Mediana é a média dos valores que ocupam

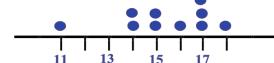
$$\text{as posições} \left( \frac{n}{2} \right) \text{ e} \left( \frac{n}{2} + 1 \right)$$

49

## Exemplo

- ◆ Suponha que a última informação sobre o número de peças produzidas pelo operário A não tenha sido registrada. Em 50% dos dias pesquisados o operário A produziu uma quantidade de peças inferior a que valor?

Operário A: 15 11 14 17 18 14 16 17 17 15



Dados Brutos: 15 11 14 17 18 14 16 17 17

Ordenados: 11 14 14 15 15 16 17 17 17 18

Posição: 1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$\text{Posição} = \frac{n+1}{2} = \frac{9+1}{2} = 5$$

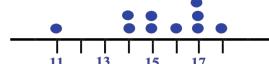
Valor que ocupa a 5<sup>a</sup> posição →  $Md = 16$  peças

50

## Exemplo

- ◆ Considerando agora as informações de todos os 10 dias, em 50% dos dias pesquisados o operário A produziu uma quantidade de peças inferior a que valor?

Operário A: 15 11 14 17 18 14 16 17 17 15



Dados Brutos: 15 11 14 17 18 14 16 17 17 15

Ordenados: 11 14 14 15 15 16 17 17 17 18

Posição: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10



$$\text{Posições} = \frac{n}{2} = \frac{10}{2} = 5 \quad \text{e} \quad \frac{n}{2} + 1 = \frac{10}{2} + 1 = 6$$

Valor que ocupa a 5<sup>a</sup> posição: 15 } →  $Md = \frac{15 + 16}{2} = 15,5$  peças  
 Valor que ocupa a 6<sup>a</sup> posição: 16 }

51

## Moda

- ◆ Medida de tendência central
- ◆ Valor que ocorre mais freqüentemente
- ◆ Não é afetado por valores extremos
- ◆ Pode não existir moda como pode existir várias modas
- ◆ Pode ser usada para dados quantitativos e qualitativos

52

## Exemplos

◆ **Dados Brutos:** 24,1 **22,6** 21,5 23,7 **22,6**

$$Mo = 22,6$$

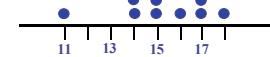
■ **Dados Brutos:** 10,3 4,9 8,9 **11,7** 6,3 7,7

*Não tem Moda.*

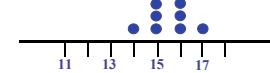
53

- ◆ Qual o número de peças produzidas mais frequentemente pelo operário **A**? E pelo **B**? E pelo **C**?

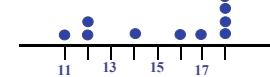
Operário A: 15 11 14 17 18 14 16 17 17 15



Operário B: 14 15 15 15 15 16 16 16 17 15



Operário C: 11 12 12 16 17 18 18 18 14 18

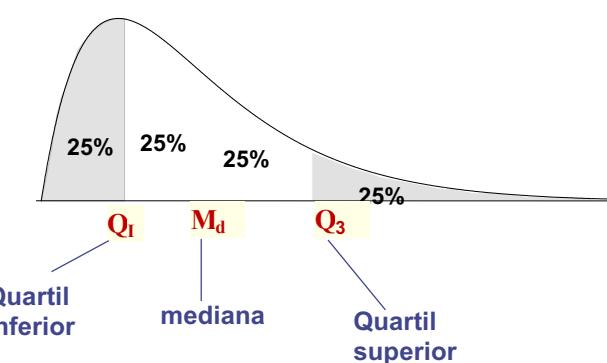


54

## Medidas baseadas na ordenação dos dados

## Quartis

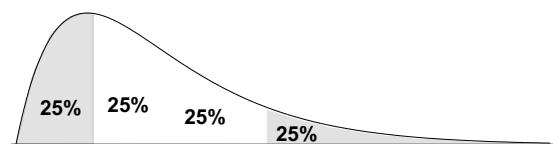
- ◆ Medida de tendência *não central*  
◆ Divide os dados ordenados em 4 quartos



57

## Quartis

- ◆ Medida de tendência *não central*
- ◆ Divide os dados ordenados em 4 quartos



- ◆ Posição do  $i$ -ésimo quartil

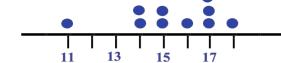
$$\text{Posição de } Q_i = n \times \frac{i}{4}$$

58

## Exemplo – $Q_1$

- ◆ Considerando agora as informações do operário A determine o primeiro quartil ( $Q_1$ ) e interprete seu resultado.

Operário A: 15 11 14 17 18 14 16 17 17 15



Dados Brutos: 15 11 14 17 18 14 16 17 17 15

Ordenados: 11 14 14 15 15 15 16 17 17 18

Posição: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

$$\text{Posição do } Q_1: n \times \frac{1}{4} = 10 \times \frac{1}{4} = 2,5 \cong 3$$

Valor que ocupa a 3ª posição: 14  $\rightarrow Q_1 = 14$  peças

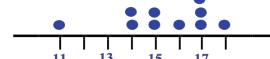
O operário A, em 25 % dos dias pesquisados produziu 14 peças ou menos.

59

## Exemplo – $Q_2$

- ◆ Considerando agora as informações do operário A determine o segundo quartil ( $Q_2$ ) e interprete seu resultado.

Operário A: 15 11 14 17 18 14 16 17 17 15



Dados Brutos: 15 11 14 17 18 14 16 17 17 15

Ordenados: 11 14 14 15 15 15 16 17 17 18

Posição: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

O operário A, em 50 % dos dias pesquisados produziu 15,4 peças ou menos.

Observe que:  
 $Q_2 = Md$

$$\text{Posição do } Q_2: n \times \frac{2}{4} = 10 \times \frac{2}{4} = 5 \rightarrow 5^{\text{a}} \text{ e } 6^{\text{a}} \text{ posições}$$

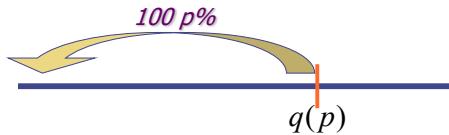
$$\text{Valor que ocupa a } 5^{\text{a}} \text{ posição: } 15 \rightarrow Q_2 = \frac{15 + 16}{2} = 15,5 \text{ peças}$$

60

## Quantis

**Quantil de ordem  $p$  ou  $p$ -quantil**  
ou **Separatriz de ordem  $p$ :**

- ◆ Medida indicada por  $q(p)$ , onde  $p$  é uma proporção qualquer,  $(0 < p < 1)$ .
- ◆ Medida tal que  $100 p\%$  das observações sejam menores que ela.



- ◆ Posição do **quantil de ordem  $p$** :

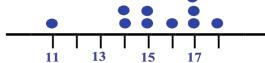
$$\text{Posição de } q(p) = n \times p$$

62

## Exemplo

- Considerando agora as informações do operário A determine o quantil de ordem  $p = 0,35$ ,  $q(0,35)$ , e interprete seu resultado.

Operário A: 15 11 14 17 18 14 16 17 17 15



Dados Brutos: 15 11 14 17 18 14 16 17 17 15

Ordenados: 11 14 14 15 15 16 17 17 17 18

Posição: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

$$\text{Posição de } q(0,35): n \times p = 10 \times 0,35 = 3,5 \cong 4$$

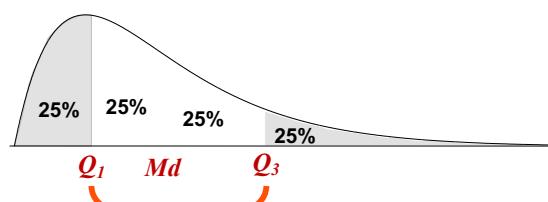
Valor que ocupa a 4ª posição: 15  $\rightarrow q(0,35) = 15$  peças

63

O operário A, em 35 % dos dias pesquisados produziu até 15 peças.

## Amplitude Interquartílica ou Desvio Interquartil

- Medida de dispersão
- Também chamada dispersão central
- Dispersão dos 50% centrais
- Não afetado por valores extremos



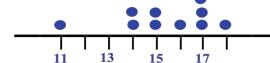
$$d_q = Q_3 - Q_1$$

65

## Exemplo

- Considerando agora as informações do operário A determine o quantil de ordem  $p = 0,90$ ,  $q(0,90)$ , e interprete seu resultado.

Operário A: 15 11 14 17 18 14 16 17 17 15



Dados Brutos: 15 11 14 17 18 14 16 17 17 15

Ordenados: 11 14 14 15 15 16 17 17 17 18

Posição: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

O operário A, em 90 % dos dias pesquisados produziu até 17,5 peças.

$$\text{Posição de } q(0,90): n \times 0,9 = 10 \times 0,9 = 9 \rightarrow 9^{\text{a}} \text{ e } 10^{\text{a}} \text{ posição}$$

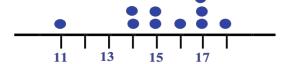
$$\begin{aligned} \text{Valor que ocupa a 9ª posição: } & 17 \\ \text{Valor que ocupa a 10ª posição: } & 18 \end{aligned} \rightarrow q(0,90) = \frac{17 + 18}{2} = 17,5 \text{ peças}$$

64

## Exemplo

- Comente sobre a variabilidade da produção do operário A considerando medidas com base na ordenação dos dados.

Operário A: 15 11 14 17 18 14 16 17 17 15



$$Q_1 = 14 \text{ peças}$$

$$Q_3 = 17 \text{ peças}$$



$$Dq = Q_3 - Q_1 = 17 - 14 = 3 \text{ peças}$$

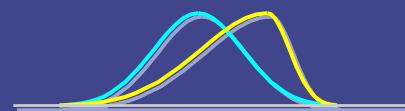
66

## Medidas de Forma

### Forma

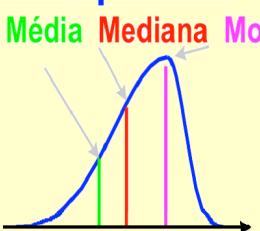
- ◆ Descreve como os dados estão distribuídos

#### Assimetria / Simetria



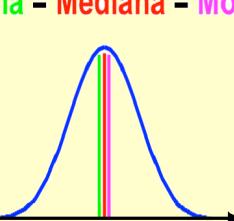
### Assimetria

**Assimétrica  
à esquerda**

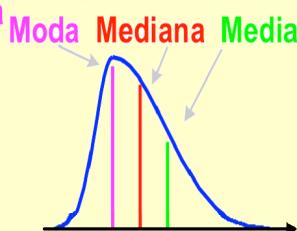


**Simétrica**

$$\text{Media} = \text{Mediana} = \text{Moda}$$



**Assimétrica  
à direita**



### Medida de Assimetria

- ◆ Coeficiente de Assimetria de Pearson

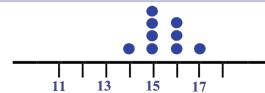
$$As = \frac{\mu - Mo}{\sigma} \quad \text{ou} \quad As = \frac{\bar{x} - Mo}{s}$$

Se  $As \begin{cases} < 0 \rightarrow \text{distribuição assimétrica à esquerda} \\ = 0 \rightarrow \text{distribuição simétrica} \\ > 0 \rightarrow \text{distribuição assimétrica à direita} \end{cases}$

## Exemplo

- Considerando agora as informações do operário B, determine o coeficiente de assimetria e interprete seu resultado.

Operário B: 14 15 15 15 15 16 16 17 15



$$\bar{x}_B = 15,4 \text{ peças}$$

$$s = 0,84 \text{ peças}$$

$$Mo = 15 \text{ peças}$$



$$As = \frac{\bar{x} - Mo}{s} = \frac{15,4 - 15}{0,84} = \frac{0,4}{0,84} = 0,4762$$

Distribuição  
assimétrica  
positiva (a direita)

74

## Vamos trabalhar com os dados?

Considerando os dados referentes a idade de uma amostra de 9 estudantes de uma escola, determine :

15 5 3 8 10 2 7 11 12

1.A idade média das crianças.

2.A idade mediana das crianças.

3.A moda da distribuição das idades.

4.75% das crianças têm idade de mínimo. \_\_\_\_\_ anos.

5.2/3 das crianças têm no máximo \_\_\_\_\_ anos.

Analise os resultados obtidos.

76

## Vamos trabalhar com os dados?

Considerando os dados do exemplo anterior:

15 5 3 8 10 2 7 11 12

analise a variabilidade das idades das crianças usando as medidas de variação ou dispersão apresentadas:

1. Amplitude Total.
2. Desvio médio.
3. Variância e desvio padrão.
4. Coeficiente de variação.
5. Desvio Interquartil.

77



## Vamos trabalhar com os dados?

Considerando os dados do exemplo anterior:

15 5 3 8 10 2 7 11 12

analise a forma da distribuição das idades das crianças usando a medida de assimetria.

78

