



UnB - IE
Departamento de
Estatística

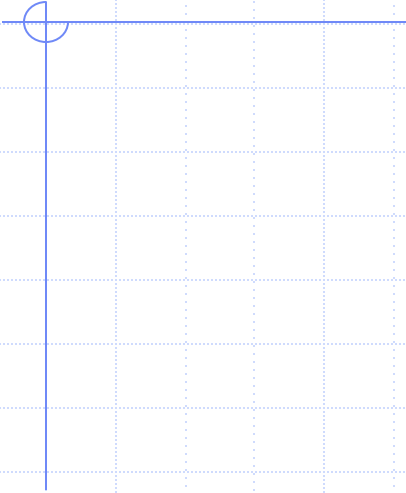
Unidade IV

Noções de Probabilidade

Estatística Aplicada

Ana Maria Nogales Vasconcelos

Maria Teresa Leão Costa



DISTRIBUIÇÃO NORMAL

Variável Aleatória Contínua

- Quando o conjunto de valores de uma variável aleatória é um intervalo, isto é, não conseguimos enumerar seus resultados, por estes formarem um conjunto infinito em um dado intervalo de números reais.
- O conjunto de valores possíveis* é um conjunto infinito não enumerável.

Exemplos:

- X: altura de um funcionário selecionado aleatoriamente de uma empresa.*
Valores possíveis: $\{x \in \mathbb{R}, \text{tal que } 1,10 < x < 2,10\}$
- Y: umidade relativa do ar em %.*
Valores possíveis: $(0, 100)$
- W: tempo (em minutos) gasto para localizar um livro na biblioteca.*
Valores possíveis: $\{x \in \mathbb{R}, \text{tal que } x > 0\}$



Exemplos

Selecionar, aleatoriamente, um estudante de uma escola de ensino básico, e verificar sua altura em centímetros.

1. Identifique a variável aleatória.



Exemplos

Selecionar, aleatoriamente, um estudante de uma escola de ensino básico, e verificar sua altura em centímetros.

1. Identifique a variável aleatória.

X : altura em cm do estudante selecionado

valores possíveis: $\{x \in \mathbb{R}; 1,00 < x < 1,70\}$

Exemplos

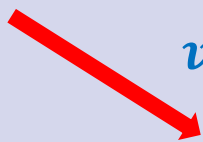
Selecionar, aleatoriamente, um estudante de uma escola de ensino básico, e verificar sua altura em centímetros.

1. Identifique a variável aleatória.

X : altura em cm do estudante selecionado

valores possíveis: $\{x \in \mathbb{R}; 1,00 < x < 1,70\}$

variável aleatória contínua

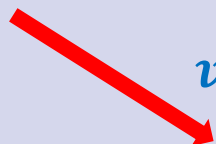


Exemplos

- Selecionar, aleatoriamente, um estudante de uma escola de ensino básico, e verificar sua altura em centímetros.

1. Identifique a variável aleatória.

X : altura em cm do estudante selecionado



valores possíveis: $\{x \in \mathbb{R}; 1,00 < x < 1,70\}$

variável aleatória contínua

2. Qual o modelo probabilístico de X ?


Exemplos

Selecionar, aleatoriamente, um estudante de uma escola de ensino básico, e verificar sua altura em centímetros.

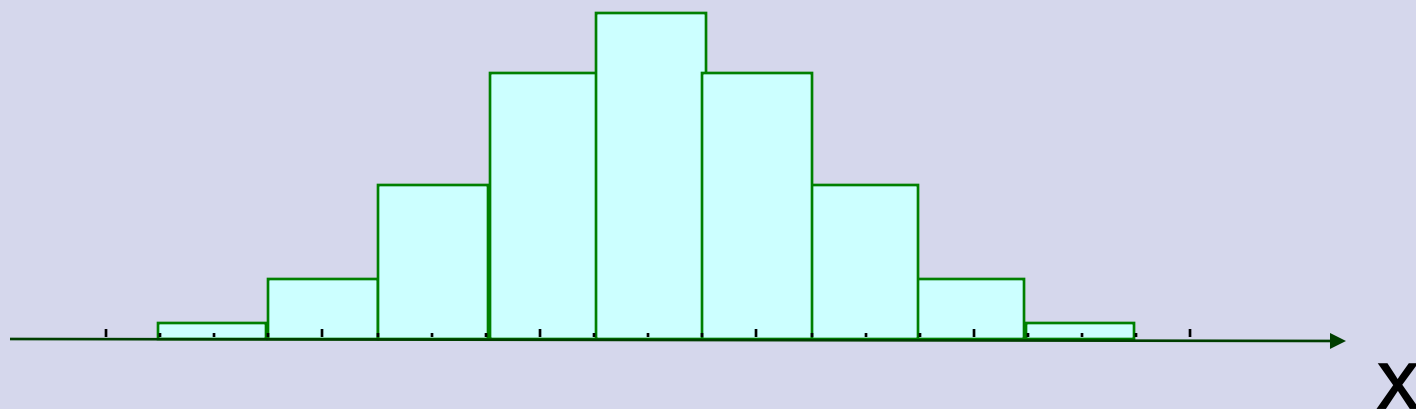
1. Identifique a variável aleatória.

X : altura em cm do estudante selecionado

valores possíveis: $\{x \in \mathbb{R}; 1,00 < x < 1,70\}$

 **variável aleatória contínua**

2. Qual o modelo probabilístico de X ?



Exemplos

Selecionar, aleatoriamente, um estudante de uma escola de ensino básico, e verificar sua altura em centímetros.

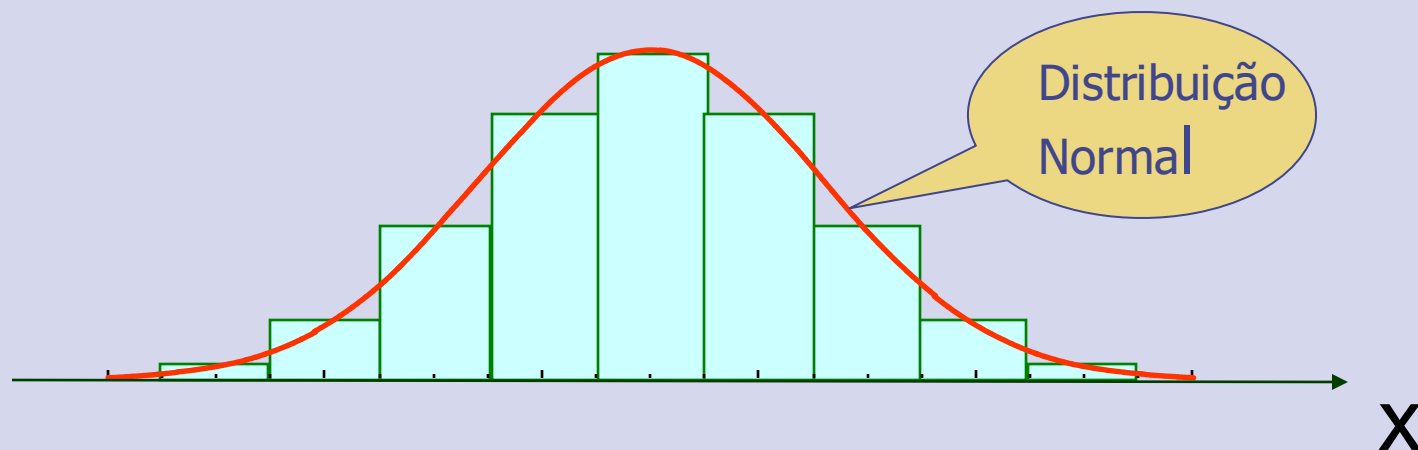
1. Identifique a variável aleatória.

X : altura em cm do estudante selecionado

valores possíveis: $\{x \in \mathbb{R}; 1,00 < x < 1,70\}$

variável aleatória contínua

2. Qual o modelo probabilístico de X ?



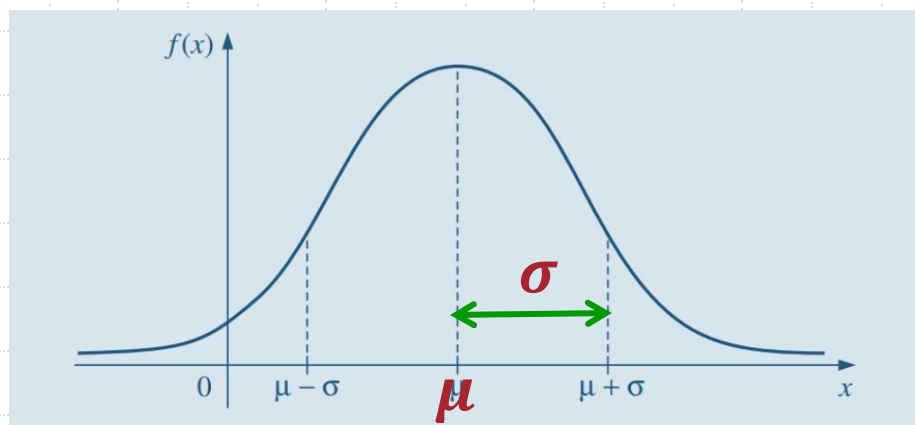
Distribuição Normal

Dizemos que a v. a. X tem **DISTRIBUIÇÃO NORMAL** com parâmetros μ e σ^2 .

◆ **Notação:** $X: N(\mu, \sigma^2)$

◆ **Medidas Características:**

$$E(X) = \mu \quad \text{e} \quad V(X) = \sigma^2$$



Extraído de Bussab e Morettin

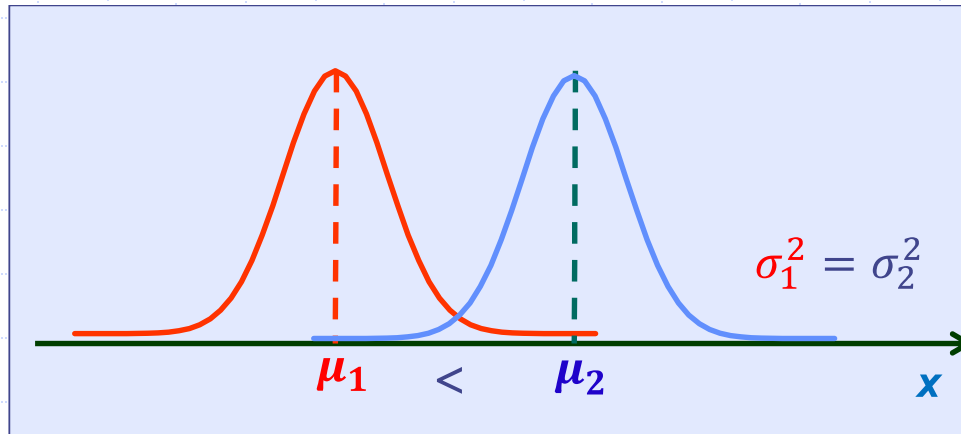
- É simétrica.
- Ponto de máximo quando $X = \mu$.
- $P(X = x) = 0$
- *para qualquer valor de X .*



◆ A distribuição Normal depende de dois parâmetros:

- Média $\rightarrow \mu = E(X)$
- Variância $\rightarrow \sigma^2 = V(X)$

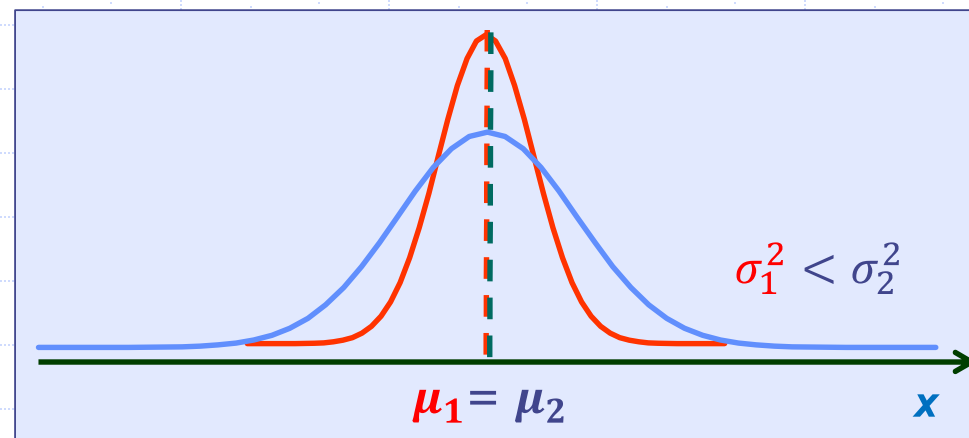
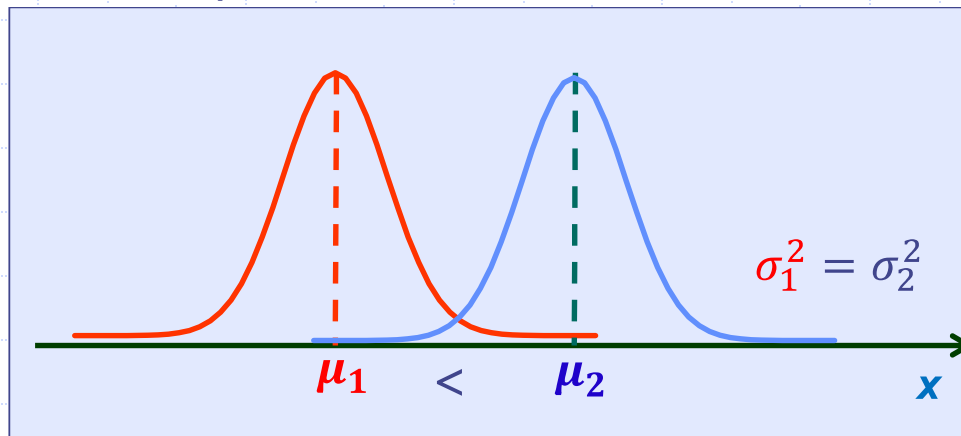
Observe que:



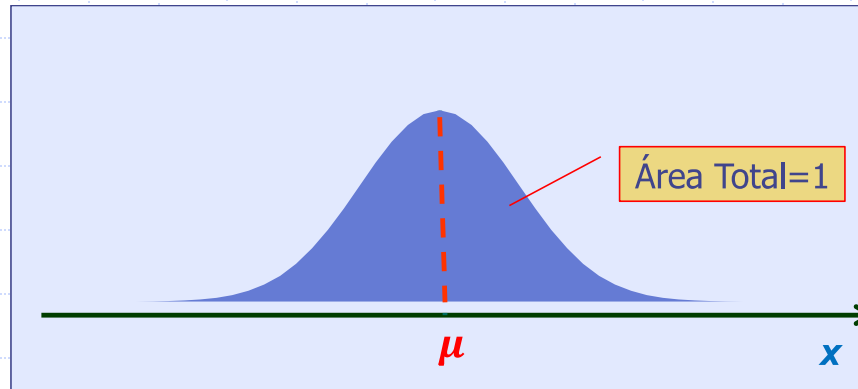
◆ A distribuição Normal depende de dois parâmetros:

- Média $\rightarrow \mu = E(X)$
- Variância $\rightarrow \sigma^2 = V(X)$

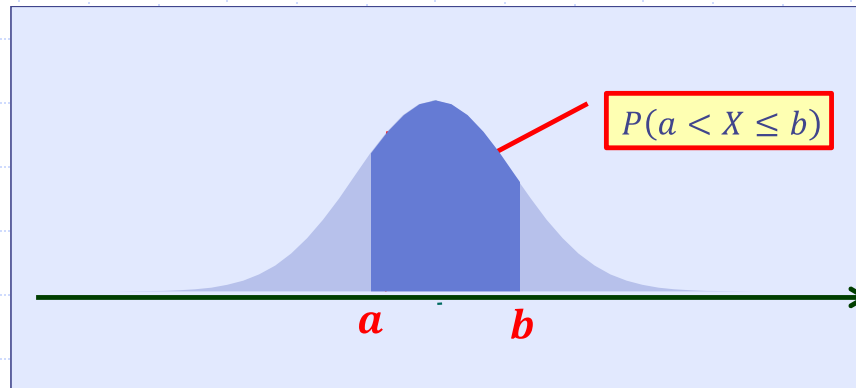
Observe que:



◆ A área total sob a curva Normal é igual a 1

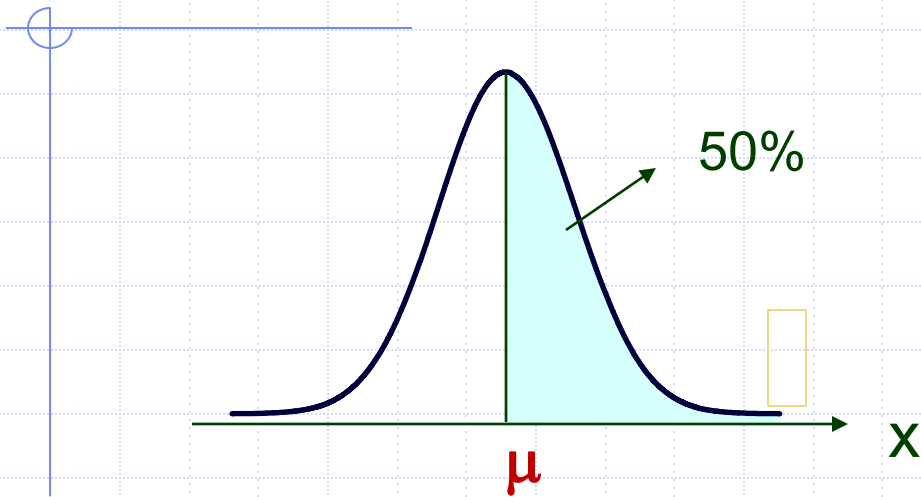


◆ E a ÁREA sob a curva normal entre dois pontos a e b é a $P(a < X < b)$

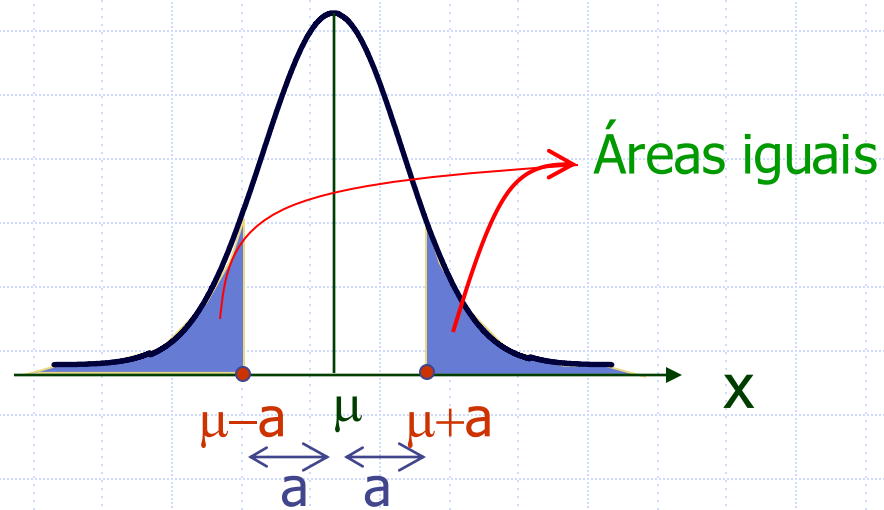




- ◆ A distribuição Normal é simétrica em relação à média.



- ◆ E portanto...



DISTRIBUIÇÃO NORMAL PADRÃO:

A distribuição NORMAL constitui, na realidade, uma “família” infinitamente grande de distribuições – uma para cada combinação possível de média e desvio padrão.

Uma distribuição normal com média $\mu = 0$ e variância $\sigma^2 = 1$ é dita DISTRIBUIÇÃO NORMAL PADRÃO.

Z tem distribuição Normal Padrão $\rightarrow Z: N(0, 1)$

A distribuição NORMAL PADRÃO está tabelada para diferentes valores de z .

A tabela fornece a seguinte probabilidade: $P(Z \leq z)$.

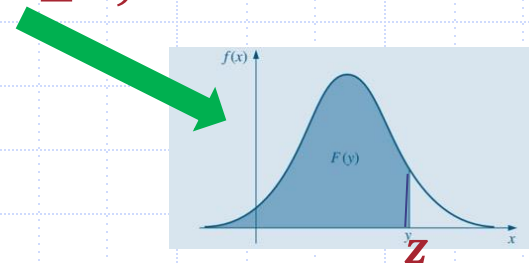




Tabela da DISTRIBUIÇÃO NORMAL PADRÃO

Tabela 1 - Distribuição Normal Padrão
(Valores da Função de Distribuição - $P(Z \leq z)$)



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0020	0.0019	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0438	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0376	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0560
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0886	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5676	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5949	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7862
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

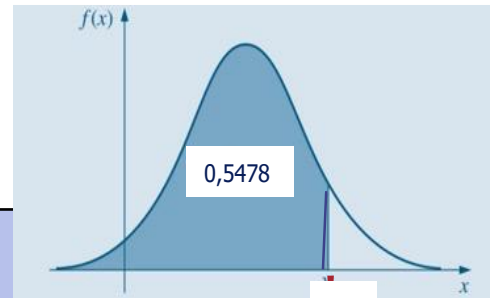


Exemplo:

- Qual é a área abaixo de $z = 0,12$ ou seja, $P(Z < 0,12)$?

z	segunda decimal de z				
	0	1	2	...	9
0,0					
0,1					
0,2					
...					

0,5478



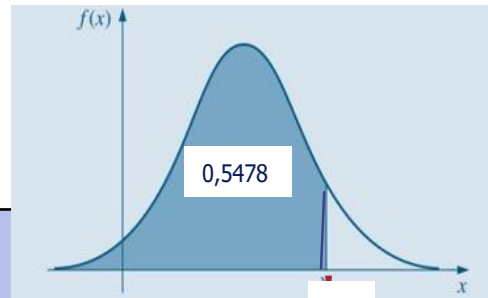


Exemplo:

- Qual é a área abaixo de $z = 0,12$ ou seja, $P(Z < 0,12)$?

z	segunda decimal de z				
	0	1	2	...	9
0,0					
0,1					
0,2					
...					

0,5478



Z	P(Z ≤ z)
0,000	0,5000
0,670	0,7500
1,000	0,1587
1,280	0,9000
1,645	0,9500
1,960	0,9750
2,000	0,0228
2,050	0,9800
2,330	0,9900
2,575	0,9950



Exemplo 1:

Seja $Z: N(0, 1)$, determine as seguintes probabilidades:

- a) $P(Z \leq 1,28)$
- b) $P(Z > 1,28)$
- c) $P(Z \leq -2,575)$
- d) $P(Z > -1,96)$
- e) $P(-0,67 < Z < 2,05)$
- f) $P(1 < Z < 1,645)$
- g) $P(-1 < Z < 1)$
- h) $P(Z < -1)$ e $P(Z > 1)$



Exemplo 1: (*continuação*)

Seja $Z: N(0, 1)$, qual o(s) valor(e)s de tal que:

a) $P(Z \leq z) = 0,10$

b) $P(Z \leq z) = 0,95$

c) $P(Z > z) = 0,98$

d) $P(a < Z < b) = 0,90$ e $P(Z \leq a) = 0,02$

◆ DISTRIBUIÇÃO NORMAL PADRÃO:

◆ RESULTADO IMPORTANTE!

Se $X: N(\mu, \sigma^2)$ então a v.a definida por:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

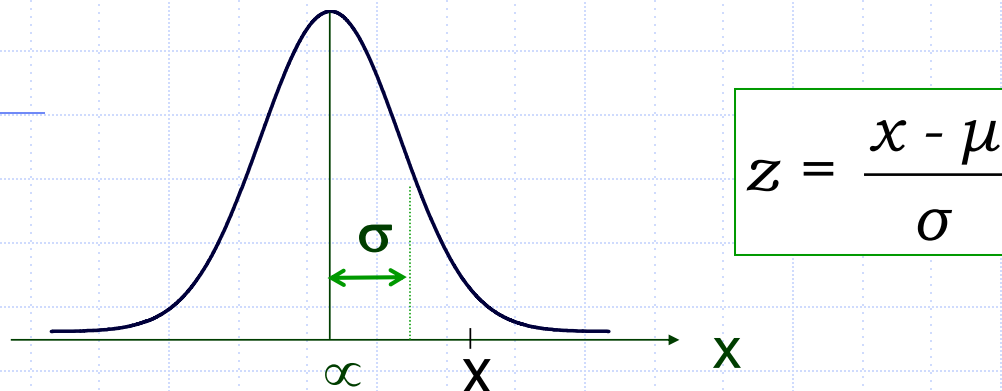
tem distribuição Normal Padrão, isto é , $Z: N(0,1)$

Usando esta relação podemos calcular $P(X \leq x)$ na normal geral, pois:

$$P(X \leq x) = P\left(Z \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$



Valor padronizado



- ◆ O valor z (*valor padronizado*) é uma medida relativa.
- ◆ Mede o quanto x se afasta da média (μ), em unidade de desvio padrão (σ).



Exemplos

Selecionar, aleatoriamente, um funcionário de uma empresa, e verificar sua altura em centímetros.

Considerando que nesta empresa os funcionários têm altura média de 170 cm com desvio padrão de 10 cm, qual a probabilidade do funcionário sorteado ter altura superior a 180 cm?



Exemplos

Selecionar, aleatoriamente, um funcionário de uma empresa, e verificar sua altura em centímetros.

Considerando que nesta empresa os funcionários têm altura média de 170 cm com desvio padrão de 10 cm, qual a probabilidade do funcionário sorteado ter altura superior a 190 cm?

- Se a altura de um funcionário for $x = 190$ cm, então qual é o escore padronizado z correspondente?

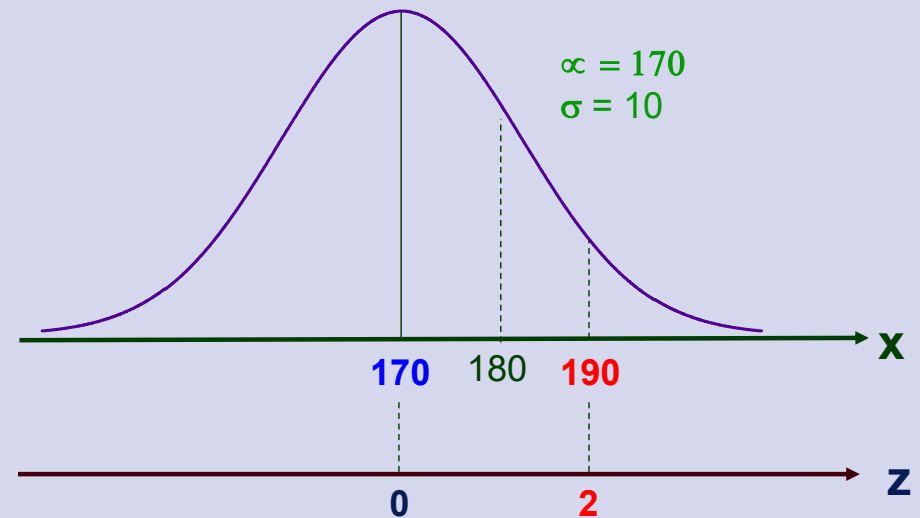
Exemplos

Selecionar, aleatoriamente, um funcionário de uma empresa, e verificar sua altura em centímetros.

Considerando que nesta empresa os funcionários têm altura média de 170 cm com desvio padrão de 10 cm, qual a probabilidade do funcionário sorteado ter altura superior a 190 cm?

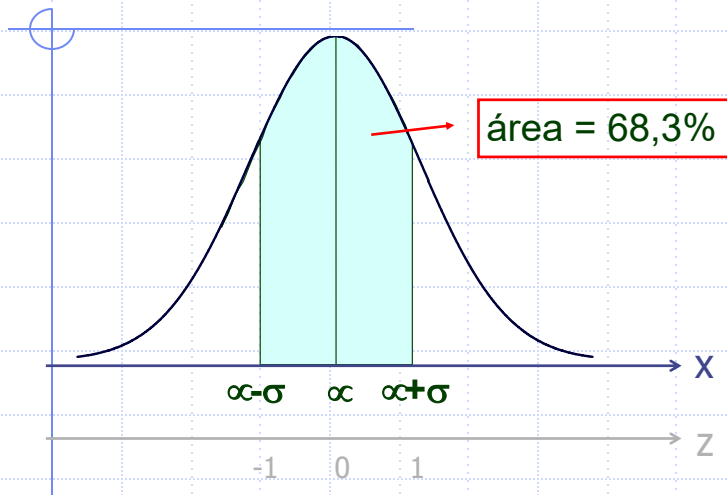
- Se a altura de um funcionário for $x = 190$ cm, então qual é o escore padronizado z correspondente?

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{190 - 170}{10} = 2$$



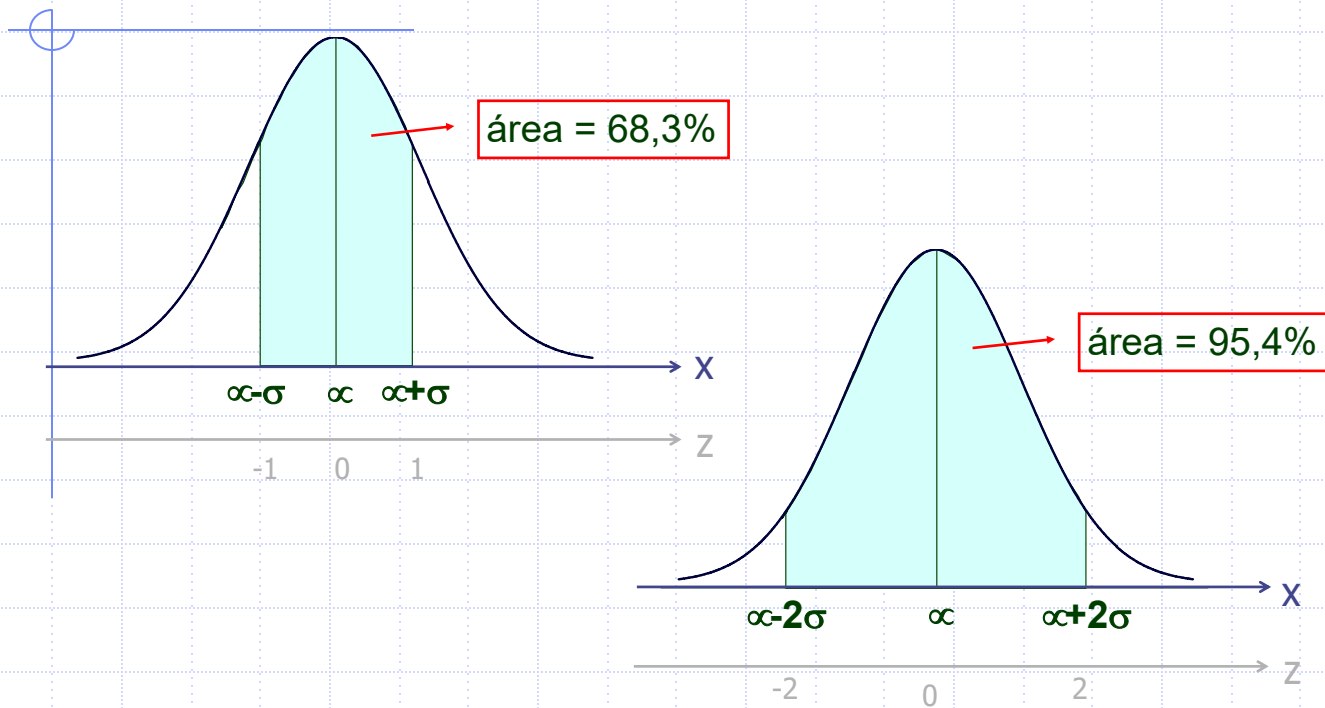


Distribuição normal



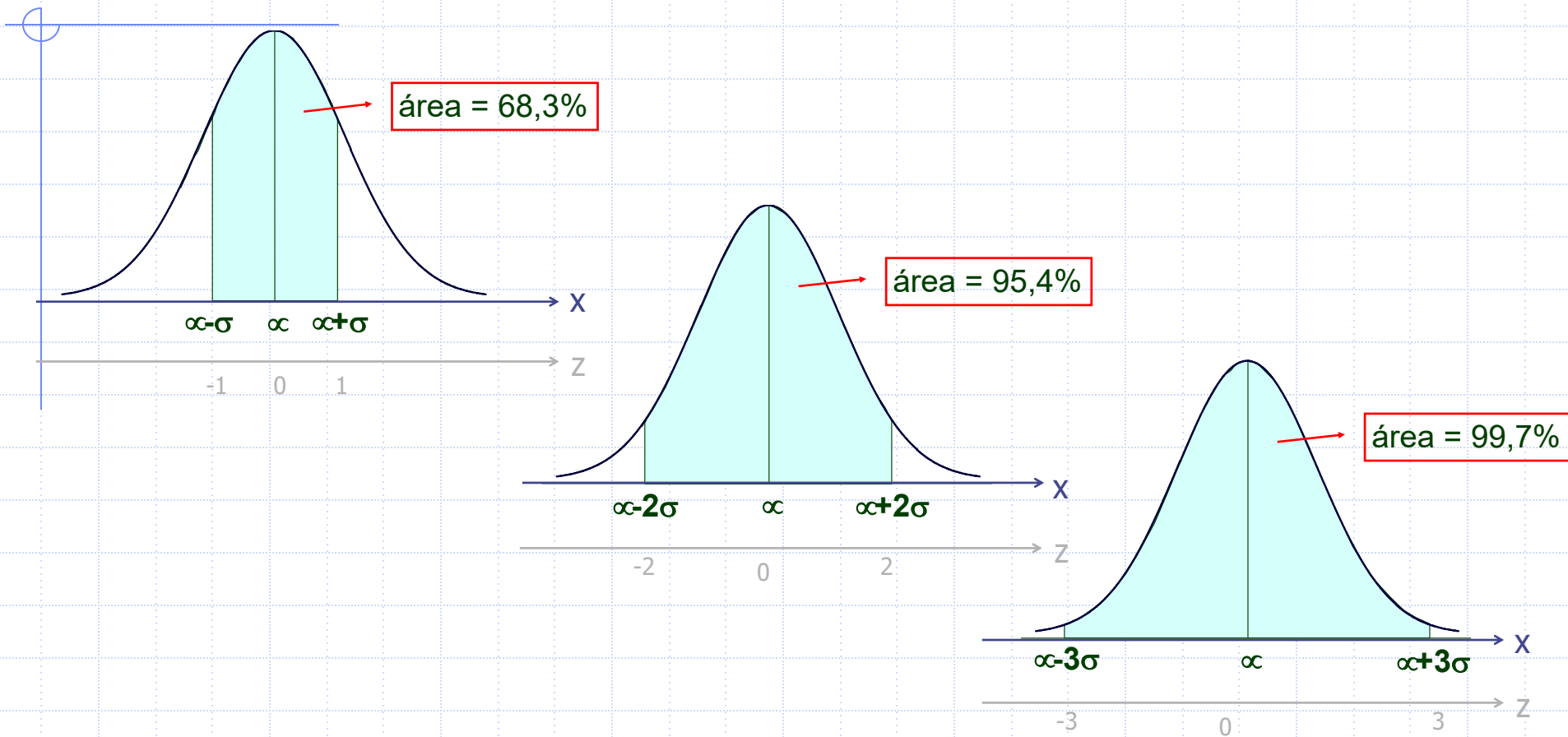


Distribuição normal





Distribuição normal

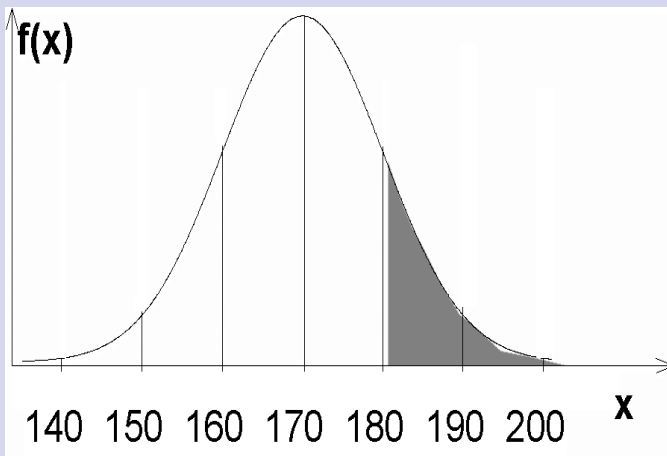


Exemplos

Selecionar, aleatoriamente, um funcionário de uma empresa, e verificar sua altura em centímetros.

Considerando que nesta empresa os funcionários têm altura média de 170 cm com desvio padrão de 10 cm, qual a probabilidade do funcionário sorteado ter altura superior a 180 cm?

Distribuição de X :
normal com $\mu = 170$ e $\sigma = 10$

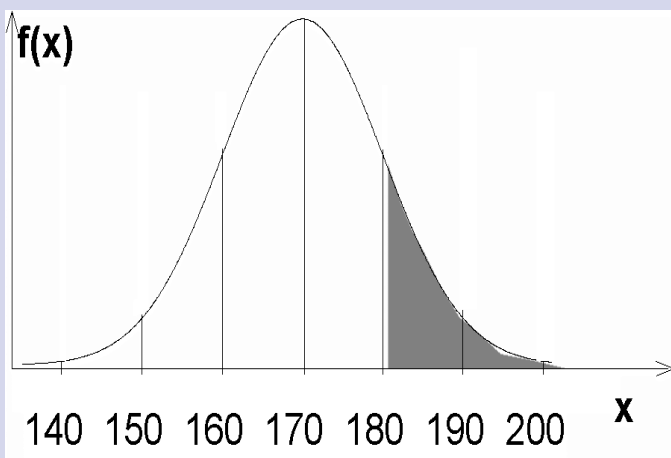


Exemplos

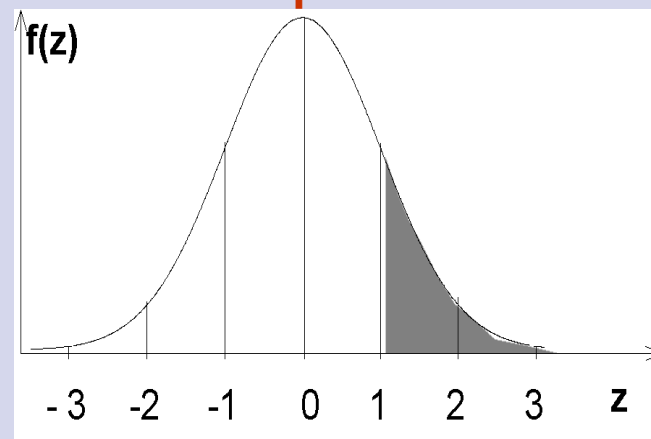
Selecionar, aleatoriamente, um funcionário de uma empresa, e verificar sua altura em centímetros.

Considerando que nesta empresa os funcionários têm altura média de 170 cm com desvio padrão de 10 cm, qual a probabilidade do funcionário sorteado ter altura superior a 180 cm?

Distribuição de X :
normal com $\mu = 170$ e $\sigma = 10$



Distribuição de Z :
normal padrão

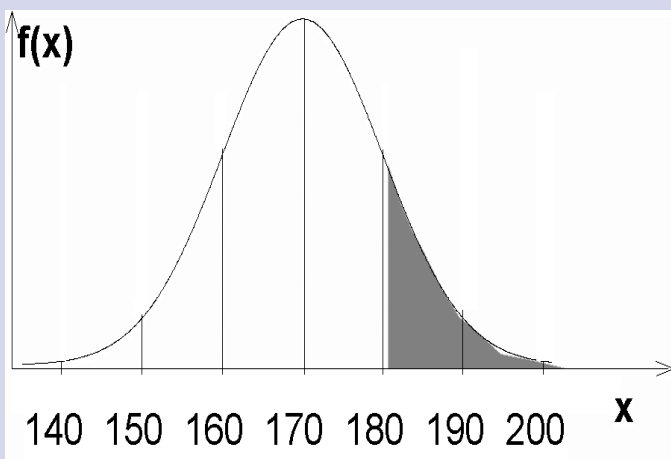


Exemplos

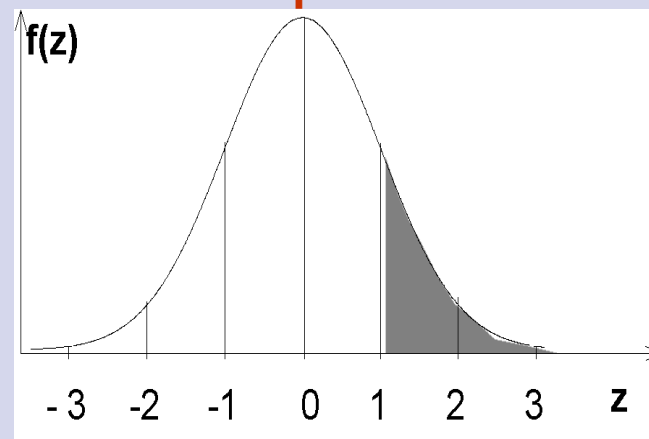
Selecionar, aleatoriamente, um funcionário de uma empresa, e verificar sua altura em centímetros.

Considerando que nesta empresa os funcionários têm altura média de 170 cm com desvio padrão de 10 cm, qual a probabilidade do funcionário sorteado ter altura superior a 180 cm?

Distribuição de X :
normal com $\mu = 170$ e $\sigma = 10$



Distribuição de Z :
normal padrão



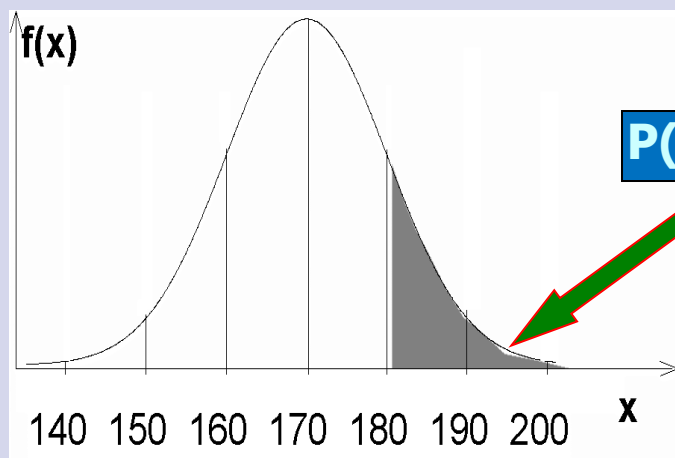
$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{180 - 170}{10} = 1$$

Exemplos

Selecionar, aleatoriamente, um funcionário de uma empresa, e verificar sua altura em centímetros.

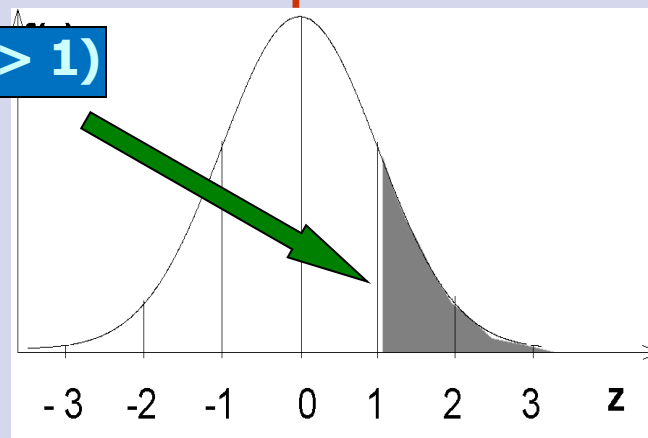
Considerando que nesta empresa os funcionários têm altura média de 170 cm com desvio padrão de 10 cm, qual a probabilidade do funcionário sorteado ter altura superior a 180 cm?

Distribuição de X :
normal com $\mu = 170$ e $\sigma = 10$



$$P(X > 180) = P(Z > 1)$$

Distribuição de Z :
normal padrão



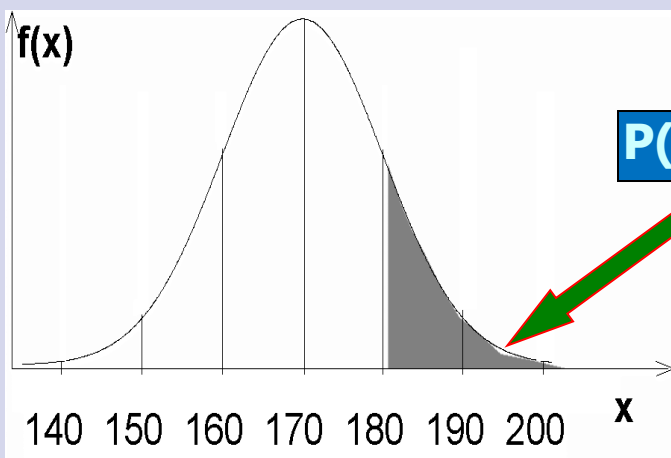
$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{180 - 170}{10} = 1$$

Exemplos

Selecionar, aleatoriamente, um funcionário de uma empresa, e verificar sua altura em centímetros.

Considerando que nesta empresa os funcionários têm altura média de 170 cm com desvio padrão de 10 cm, qual a probabilidade do funcionário sorteado ter altura superior a 180 cm?

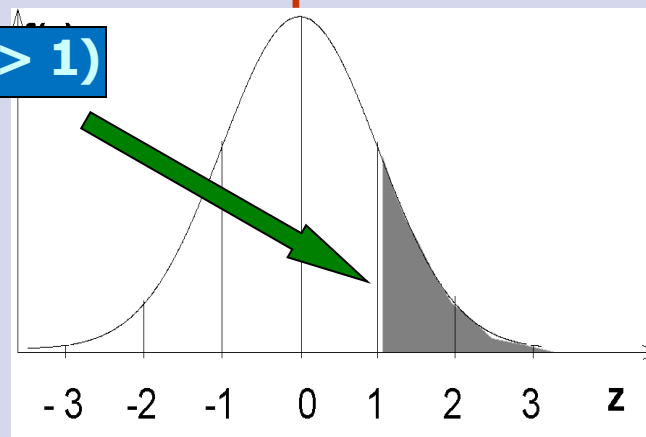
Distribuição de X :
normal com $\mu = 170$ e $\sigma = 10$



$$P(X > 180) = P(Z > 1)$$

0,1587

Distribuição de Z :
normal padrão



$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{180 - 170}{10} = 1$$

Exemplo 2:

Seja X uma variável aleatória com distribuição $N(170, 100)$:

1. Determine as seguintes probabilidades:

a) $P(X \leq 155)$

b) $P(X > 157,2)$

c) $P(175 < X < 195,75)$

2. Determine o valor de x tal que:

a) $P(X \leq x) = 0,05$

b) $P(X > x) = 0,99$

c) Os valores a e b tais que $P(a \leq X \leq b) = 0,95$ e $P(X \leq a) = 0,975$