UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

Disciplina: INFERÊNCIA ESTATÍSTICA
Curso: Graduação em Estatística
Código: EST0035
Semestre: 2025.1
Professor: Frederico Machado Almeida

LISTA DE EXERCÍCIOS #01

Observações:

- Questões para entregar: 2, 4, 7, 8 e 9
- **A lista deve ser feita preferencialmente em duplas**.
- Demais questões são apenas para estudar.
- Prazo de entrega: **22/04/2025**

Q1. Nos itens (i)-(iii) escolha a alternativa que melhor responde a pergunta de interesse:

(i) Qual das seguintes alternativas descreve a propriedade de um estimador não-viesado (ou não-tendencioso) para um parâmetro θ?
(a) A forma da distribuição amostral é aproximadamente normal.
(b) O centro da distribuição amostral coincide com o valor de θ.
(c) A distribuição a amostral em questão apresenta menor variação entre todas as possíveis distribuições amostrais do estimador.
(d) O centro da distribuição amostral coincide com o valor do desvio-padrão populacional.

(ii) Suponha que a idade dos estudantes do curso de Estatística na UnB segue uma distribuição assimétrica com média de 25 anos, e desvio-padrão igual a 4 anos. Se uma amostra de 200 estudantes for selecionada repetidamente, qual das seguintes afirmações a cerca da distribuição amostral da média está **incorreta?**
(a) A média da distribuição amostral é aproximadamente igual a 25 anos.
(b) O desvio-padrão da distribuição amostral é igual a 4 anos.
(c) A forma da distribuição amostral é aproximadamente normal.
(d) Todas as alternativas anteriores estão corretas.

(iii) O Teorema Central de Limite é muito importante na estatística porque afirma que:
(a) Para qualquer tamanho da população, a distribuição da média amostral $\bar{X}_n$ é aproximadamente normal.
(b) Para n suficientemente grande, a população é não-viesada.
(c) Para qualquer população, a distribuição da média amostral $\bar{X}_n$ é aproximadamente normal, independentemente do seu tamanho de amostra.
(d) Para n suficientemente grande, a distribuição da média amostral $\bar{X}_n$ é aproximadamente normal, independentemente da população onde a amostra foi selecionada.

Q2. Considere a amostra aleatória de dimensão $n = 2$, digamos (X_1, X_2) retirada de uma população da variável aleatória X, que denota o número de animais de estimação por família, cuja distribuição e a seguinte:

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	0,60	0,25	0,10	0,05

(a) Qual a probabilidade de obter a amostra (3,1), ou seja, qual a probabilidade de a primeira família selecionada ter três animais de estimação e a segunda família selecionada ter 1 animal de estimação?

(b) Liste todas as possíveis amostras daquela dimensão que pode obter.

(c) Qual das amostras possíveis de dimensão 2 é a mais provável?

(d) Qual a probabilidade de uma amostra selecionada ao acaso fornecer uma média amostral $\bar{X}_n$ igual a 2,5?

Q3. O conteúdo em litros de garrafas de azeite de certa marca segue uma distribuição normal com media $\mu = 0,99$ litros e desvio-padrão $\sigma = 0,02$ litros. Qual a probabilidade de o conteúdo médio numa amostra de 16 garrafas selecionadas aleatoriamente ser superior a um litro?

Q4. Assuma que $Y_1, \cdots, Y_n$ denotam variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com fdp dada por,

$$f(x|\mu) = \begin{cases} e^{\mu - y} & y > \mu, -\infty < \mu < \infty \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

que denota a distribuição exponencial de dois parâmetros. Se $Z_1 = \text{Min}\{Y_1, \cdots, Y_n\}$ denota a menor estatística de ordem. Assim,

(a) Especifique o espaço paramétrico e o suporte associado à distribuição de Y.

(b) Verifique se $T_{1n} = \bar{Y}_n$ e $T_{2n} = Y_{(1)}$ são estimadores não viciados para μ.

(c) Encontre e compare os EQMs dos dois estimadores apresentados no item (b). Faça um gráfico dos EQMs como função de μ.

Q5. Seja $X_1, \cdots, X_n$ uma amostra aleatória proveniente de uma distribuição de Bernoulli com probabilidade de sucesso θ, e seja $W_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ uma estatística qualquer. Compare os erros quadráticos médios de dois estimadores de θ, respectivamente, $T_{1n} = W_n/n$ e $T_{2n} = (W_n + 1) / (n + 2)$.

Q6. Assuma que $X_1, \cdots, X_n$ denota uma amostra aleatória de tamanho n da variável aleatória X extraída de uma distribuição da $\mathcal{N}(\mu, 1)$. Considere os estimadores $T_{1n} = \bar{X}_n$ e $T_{2n} = T_{1n} + X_1$. Encontre o EQM de T_{1n} e T_{2n} como função de μ. Faça um gráfico do EQM para $n = 15$.

Q7. Considere as variáveis $X_1, X_2, \cdots, X_9$ com distribuição binomial em que, $X_i \sim Binom(n_i, p = 0,5)$, com $i = 1, 2, \cdots, 9$ e as variáveis, $Y_j \sim \mathcal{N}(2, 1)$ para $j = 1, 2$ (Y_j's são independentes entre sí).

(a) Deduza a distribuição amostral de $T = \sum_{i=1}^{5} X_i$

(b) Calcule o valor esperado e a variância da estatística T.
(c) Deduza a distribuição amostral de $R = \sum\limits_{i=1}^{9} X_i - \sum\limits_{j=1}^{2} Y_j$.

Q8. Seja $X_1, \cdots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória $X \sim \mathbb{U}(0, \theta)$. Se $X_{(n)} = \text{Max}\{X_1, \cdots, X_n\}$ denota a maior observação do conjunto de dados, obtenha:

(a) A função de densidade de probabilidade da estatística $T_n = X(n)$.
(b) Mostre T_n é um estimador viesado para θ, e obtenha a função viés, $b\,(T_n)$.
(c) Do item (b), obtenha o valor da constante $c > 0$, tal que cT_n seja um estimador não-viesado para θ.
(d) Considere o seguinte estimador $Y_n = 2\bar{X}_n$. É correto afirmar que Y_n é um estimador não-viesado para θ? Justifique a sua resposta.

Q9. Definimos a variável $\epsilon = \bar{X}_n - \mu$ como sendo o erro amostral da média, onde $\bar{X}_n$ é a média de uma amostra aleatória simples de tamanho n de uma população com média μ e desvio-padrão σ:

(a) Determine a média, $E(\epsilon)$ e variância $Var(\epsilon)$.
(b) Se a população é normal com $\sigma = 20$; que proporção das amostras de tamanho 100 terá erro amostral absoluto maior do que 2 unidades?
(c) Com base na informação do item (b), qual deve ser o valor de δ para que $P(|\epsilon| > \delta) = 0,01$?
(d) Qual deve ser o tamanho da amostra para que 95% dos erros amostrais absolutos sejam inferiores a 1 unidade?

Q10. Em uma sondagem, perguntou-se a 1002 membros de determinado sindicato se eles haviam votado na última eleição para a direção do sindicato e 701 responderam afirmativamente. Os registros oficiais obtidos depois da eleição mostram que 61% dos membros aptos a votar de fato votaram. Calcule a probabilidade de que, dentre 1002 membros selecionados aleatoriamente, no mínimo 701 tenham votado, considerando que a verdadeira taxa de votantes seja de 61%. O que o resultado sugere?

Q11. Uma caixa contem duas bolas pretas e uma bola branca. Seja X o número de bolas pretas retiradas da caixa numa única extração.

(a) Qual a distribuição da variável aleatória X?
(b) Considere uma amostra aleatória de tamanho $n = 9$ e seja $T = \sum\limits_{i=1}^{9} X_i$. Deduza a distribuição amostral de T.
(c) Calcule a $\mathbb{P}\,(T \leq 3)$.

Q12. Sejam $X_1, \cdots, X_n$ um amostra aleatória de tamanho n da distribuição da variável aleatória X com fdp dada por

$$f\,(x|\theta) = \frac{2x}{\theta^2},\ \ 0 < x < \theta,\ \ \theta > 0.$$

(a) Especifique o espaço paramétrico e o suporte associado à distribuição de X.
(b) Verifique se $\hat{\theta}_1 = \bar{X}_n$ e $\hat{\theta}_2 = X_{(n)}$ são estimadores viciados para θ. Item Encontre e compare os $EQM's$ dos dois estimadores. Faça um gráfico dos $EQM's$ como função de θ.