Universidade de Brasília
Departamento de Estatística
Professor: Frederico Machado Almeida
Data: 06/05/2025
Aluno (a): ____________________

Disciplina: Inferência Estatística
Nível: Graduação em Estatística
Semestre: 2025-I, **Turma:** 01
Matrícula: ____________________

GABARITO PROVA I

Esta prova contêm 2 páginas, 3 questões totalizando 10 pontos. A duração da prova será de 2 (duas) horas.

Quadro de pontuação (uso EXCLUSIVO do professor)

Questão	**1**	**2**	**3**	**Total**
Valor	3,0	3,0	4,0	10,0
Pontuação	3,0	3,0	4,0	10,0

Questão 1 (3,0 pontos). Assinale com V, as alternativas verdadeiras, e F as falsas.

a) (F) Quando o tamanho de amostra aumenta, a variância da distribuição amostral da média $\bar{X}_n$ diminui em $\sqrt{n}$ unidades.

Justificativa: Sabe-se (notas de aulas) que $Var\left(\bar{X}_n\right) = \sigma^2/n$. Portanto, a variância do estimador $\bar{X}_n$, é inversamente proporcional a n (não $\sqrt{n}$). Desta forma, ela decresce com uma magnitude de n.

b) (V) Um estimador é dito ser não-tendencioso para um parâmetro θ, se o centro da distribuição amostral coincidir com o a quantidade de interesse θ.

c) (F) O método de estimação por momentos pressupõem encontrar um estimador $\hat{\theta}_n^*$ de θ que maximiza a probabilidade de uma amostra ser observada.

Justificativa: O método de estimação por momentos pressupõem encontrar um estimador igualando os momentos amostrais com os momentos populacionais.

d) (F) Se $X_1, X_2, \cdots, X_n$ é uma amostra aleatória de uma variável aleatória $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, então, é correto afirmar que distribuição amostral da média $\bar{X}_n$ é normal centrada em μ, com variância σ^2.

Justificativa: Segue da distribuição amostral da média aritmética que, $\mathbb{E}_\mu\left(\bar{X}_n\right) = \mu$, e $Var\left(\bar{X}_n\right) = \sigma^2/n$. Desta forma, como os X_i's são *v.a's iid's* com distribuição normal, segue imediatamente que $\bar{X}_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$.

e) (V) O teorema Central do Limite garante que, a distribuição amostral da proporção, $\hat{p}_n$ é aproximadamente normal, centrada em p, com variância $p(1-p)/n$, quando $n \to \infty$.

f) (F) O método de estimação por máxima verossimilhança afirma que, se $\hat{\theta}_n$ é um máximo global, então, $\ell'\left(\hat{\theta}_n\right) < 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Sendo $\ell'(\theta)$ a derivada da log-verossimilhança.

Justificativa: Se $\hat{\theta}_n$ é um estimador de máxima verossimilhança para θ, então, dir-se-á que $\hat{\theta}_n$ é um máximo global se e somente se $\ell''\left(\hat{\theta}_n\right) < 0$.

Questão 2 (3,0 pontos). Seja $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3$ médias amostrais de três amostras independentes de tamanhos n_1, n_2, n_3, tal que, $\bar{X}_j = \sum_{i=1}^{n_j} X_{ji}/n_j$. Assuma que cada umas das amostras foi extraída de uma distribuição normal de média μ e variância σ^2. Seja $T_1 = \frac{(\bar{X}_1+\bar{X}_2+\bar{X}_3)}{3}$ e $T_2 = w_1\bar{X}_1 + w_2\bar{X}_2 + w_3\bar{X}_3$, com $w_j = n_j\,(n_1+n_2+n_3)^{-1}$ estimadores para μ.

(a) (**1,25 pontos**) O que se pode dizer quanto a tendenciosidade de T_1 e T_2?

Resposta: Temos que $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3$ são médias de três amostras aleatórias independentes de tamanhos, n_1, n_2 e n_3, respectivamente. Tal que, para alguma amostra j em particular, $\bar{X}_j = \sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}/n_j$, com $X_{ji} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Desta forma, sabe-se que $\mathbb{E}_\mu\left(\bar{X}_j\right) = \mathbb{E}_\mu\left[\sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}/n_j\right] = \sum_{i=1}^{n_j} \mathbb{E}_\mu\left(X_{ij}\right)/n_j = \frac{n_j\mu}{n_j} = \mu$ (com $j = 1, 2, 3$). Assim, segue imediatamente que,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_\mu\left(T_1\right) &= \mathbb{E}_\mu\left[\frac{\bar{X}_1+\bar{X}_2+\bar{X}_3}{3}\right] = \frac{1}{3}\left[\mathbb{E}_\mu\left(\bar{X}_1\right)+\mathbb{E}_\mu\left(\bar{X}_2\right)+\mathbb{E}_\mu\left(\bar{X}_3\right)\right] = \frac{3\mu}{3} = \mu. \\
\mathbb{E}_\mu\left(T_2\right) &= \mathbb{E}_\mu\left[w_1\bar{X}_1 + w_2\bar{X}_2 + w_3\bar{X}_3\right] = \mathbb{E}_\mu\left(w_1\bar{X}_1\right) + \mathbb{E}_\mu\left(w_2\bar{X}_2\right) + \mathbb{E}_\mu\left(w_3\bar{X}_3\right) \\
&= w_1\mathbb{E}_\mu\left(\bar{X}_1\right) + w_2\mathbb{E}_\mu\left(\bar{X}_2\right) + w_3\mathbb{E}_\mu\left(\bar{X}_3\right) \\
&= \mu\left(w_1+w_2+w_3\right) = \mu\left\{\frac{n_1}{n_1+n_2+n_3} + \frac{n_2}{n_1+n_2+n_3} + \frac{n_3}{n_1+n_2+n_3}\right\} = \mu.
\end{aligned}
$$

Portanto, T_1 e T_2 são estimadores não-tendenciosos para μ.

(b) (**1,25 pontos**) Obtenha as distribuições amostrais para T_1 e T_2.

Resposta: Segue do enunciado que, $X_{ji} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Logo, $Var\left(\bar{X}_{ji}\right) = \sigma^2$ e $Var\left(\bar{X}_j\right) = \sum_{i=1}^{n_j} Var\left(X_{ij}\right)/n_j^2 = \sigma^2/n_j$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
Var\left(T_1\right) &= Var\left[\frac{\bar{X}_1+\bar{X}_2+\bar{X}_3}{3}\right] = \frac{1}{9}\left[Var\left(\bar{X}_1\right)+Var\left(\bar{X}_2\right)+Var\left(\bar{X}_3\right)\right] \\
&= \frac{\sigma^2/n_1+\sigma^2/n_2+\sigma^2/n_3}{9} = \frac{\sigma^2}{9}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}\right). \\
Var\left(T_2\right) &= Var\left(w_1\bar{X}_1 + w_2\bar{X}_2 + w_3\bar{X}_3\right) = w_1^2 Var\left(\bar{X}_1\right) + w_2^2 Var\left(\bar{X}_2\right) + w_3^2 Var\left(\bar{X}_3\right) \\
&= w_1^2\frac{\sigma^2}{n_1} + w_2^2\frac{\sigma^2}{n_2} + w_3^2\frac{\sigma^2}{n_3} = \sigma^2\left(\frac{w_1^2}{n_1}+\frac{w_2^2}{n_2}+\frac{w_3^2}{n_3}\right).
\end{aligned}
$$

Como as $\bar{X}_j$ são combinações lineares de $v.a's$ $iid's$ da normal, segue imediatamente que, $\bar{X}_j \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n_j)$. Consequentemente, $T_1 \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{9}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}\right)\right)$ e $T_2 \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\left(\frac{w_1^2}{n_1}+\frac{w_2^2}{n_2}+\frac{w_3^2}{n_3}\right)\right)$. Lembrando que $w_j = n_j\,(n_1+n_2+n_3)^{-1}$ e que T_1 e T_2 são combinações lineares de $\bar{X}_j$, com $j = 1, 2, 3$.

(c) (**0,5 ponto**) O estimador T_1 é consistente? Justifique a sua resposta.

Resposta: Segue dos itens anteriores que, $\mathbb{E}_\mu\left(T_1\right) = \mu$ e $Var\left(T_1\right) = \frac{\sigma^2}{9}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}\right)$. Portanto, como (i) $\lim_{n_j\to\infty} \mathbb{E}\left(T_1\right) = \mu$, para todo n_j $(j = 1, 2, 3)$ e (ii) $\lim_{n_j\to\infty} Var\left(T_n\right) = 0$ para todo j.

Questão 3 (4,0 pontos). Considere n sistemas com tempos de falha $X_1, \cdots, X_n$ assumidas como independentes e identicamente distribuídas de uma exponencial com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, \;\; x > 0, \;\; \theta > 0.$$

(a) (**1,0 ponto**) Obtenha o estimador dos momentos para o parâmetro θ.

Resposta: Segue da definição dos estimadores dos momentos que, os momentos populacionais e amostrais são dados por: $m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ e $\mu_k = \int_0^\infty X^k f(x|\theta)\, dx$. Portanto, para $k = 1$ temos que,

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \mathbb{E}(X) = \int_0^\infty x f(x|\theta)\, dx = \int_0^\infty x \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} dx = -\int_0^\infty x d\left[e^{-x/\theta}\right] \\ &= -\left[x e^{-x/\theta}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-x/\theta} dx \right] = \theta e^{-x/\theta}\Big|_0^\infty = \theta, \end{aligned} \tag{1}$$

e $m_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Assim, igualando o momento populacional obtido em (1) com o momento amostral obtemos: $\mu_1 = m_1 \Longleftrightarrow \hat{\theta}_m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}_n$, que denota o estimador dos momentos para θ.

(b) (**1,5 pontos**) Encontre o estimador de máxima verossimilhança de θ, e o respectivo limite inferior de Rao-Cammér.

Resposta: Com base na fdp apresentada anteriormente, podemos obter facilmente a densidade conjunta (ou função de verossimilhança), tal que,

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i|\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} e^{-X_i/\theta} = \theta^{-n} e^{-\sum_{i=1}^{n} X_i/\theta}.$$

Assim, aplicando o logaritmo da função de verossimilhança acima, obtemos o seguinte resultado,

$$\ell(\theta) = \log L(\theta) = -n\log(\theta) - \sum_{i=1}^{n} X_i/\theta,$$

que resulta na seguinte função escore:

$$\ell'(\theta) = \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta} = \frac{-n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Rightarrow n = \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow \hat{\theta}_n = \bar{X}_n,$$

que denota o candidato a estimador de máxima verossimilhança para θ. Portanto, vamos verificar se $\hat{\theta}_n$ é um máximo global ou local. Para tal, vamos calcular a derivada de segunda ordem.

$$\ell''(\theta) = \frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \theta^2}\bigg|_{\theta = \hat{\theta}_n} = \frac{n}{\hat{\theta}_n^2} - \frac{2}{\hat{\theta}_n^3}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{n}{\bar{X}_n^2} - \frac{2n\bar{X}_n}{\bar{X}_n^3} = \frac{-n}{\bar{X}_n^2} < 0,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. E portanto, $\hat{\theta}_n = \bar{X}_n$ é um máximo global. Com base na segunda derivada obtida anteriormente, podemos obter a informação de Fisher para a aa $X_1, X_2, \cdots, X_n$ tal que,

$$I_n(\theta) = \mathbb{E}\left[-\ell''(\theta)\right] = \mathbb{E}\left[-\frac{n}{\theta^2} + \frac{2}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = -\frac{n}{\theta^2} + \frac{2}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i) = \frac{-n}{\theta^2} + \frac{2n\theta}{\theta^3} = \frac{n}{\theta^2}.$$

Portanto, como $m(\theta) = \mathbb{E}(X) = \theta$, segue que, $m'(\theta) = \frac{dm(\theta)}{d\theta} = 1$. Desta forma, segue que,

$$LIRC\left(\hat{\theta}_n\right) = \frac{\left[m'(\theta)\right]^2}{nI_1(\theta)} = \frac{\left[m'(\theta)\right]^2}{I_n(\theta)} = \frac{\theta^2}{n} \equiv Var\left(\hat{\theta}_n\right).$$

(c) (**1,5 pontos**) Encontre, caso exista, o estimador de máxima verossimilhança para a função $g(\theta) = P(X > 1)$ e sua distribuição aproximada quando n for grande.

Resposta: Com base na fdp apresentada anteriormente, queremos estimar a quantidade $g(\theta) = P(X > 1)$. Usando a definição de probabilidade acumulada:

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F_X(1),$$

em que $F_X(x)$ é a função de distribuição acumulada. Para a distribuição exponencial:

$$F_X(x) = \int_0^x f_X(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{\theta}e^{-t/\theta}\,dt = 1 - e^{-x/\theta}.$$

Então:

$$g(\theta) = P(X > 1) = 1 - (1 - e^{-1/\theta}) = e^{-1/\theta},$$

Como o estimador de máxima verossimilhança de θ é $\hat{\theta}_n = \bar{X}_n$, segue da propriedade de invariância dos EMV's que $g\left(\hat{\theta}_n\right) = e^{-1/\hat{\theta}_n} = e^{-1/\bar{X}_n}$. Quanto a sua distribuição para grandes amostras segue que, $\mathbb{E}\left[g\left(\hat{\theta}_n\right)\right] = g(\theta) = e^{-1/\theta}$ e,

$$Var\left[g\left(\hat{\theta}_n\right)\right] = \left(\frac{dg(\theta)}{d\theta}\right)^2\Bigg|_{\theta=\hat{\theta}_n} Var\left[\hat{\theta}_n\right] = \left(\frac{1}{\bar{X}_n^2}\right)^2 e^{-2/\bar{X}_n}\frac{X_n^2}{n} = \frac{e^{-2/\bar{X}_n}}{n\bar{X}_n^2},$$

com $\frac{dg(\theta)}{d\theta} = \frac{de^{-1/\theta}}{d\theta} = \frac{1}{\theta^2}e^{-1/\theta}$. Por fim, segue do TCL que, $g\left(\hat{\theta}_n\right) \sim \mathcal{N}\left(e^{-1/\theta}, Var\left[g\left(\hat{\theta}_n\right)\right]\right)$, quando $n \to \infty$. Ou seja,

$$\frac{g\left(\bar{X}_n\right) - g(\theta)}{\sqrt{\frac{\exp\left(-2/\bar{X}_n\right)}{n\bar{X}_n^2}}} = \frac{e^{1/\bar{X}_n} - e^{1/\theta}}{\sqrt{\frac{\exp\left(-2/\bar{X}_n\right)}{n\bar{X}_n^2}}} \sim \mathcal{N}(0, 1)\,,\ n \to \infty.$$