Disciplina: INFERÊNCIA ESTATÍSTICA
Curso: Graduação em Estatística
Código: EST0035
Semestre: 2024.2
Professor: Frederico Machado Almeida

LISTA DE EXERCÍCIOS #02

Observações:

- Questões para entregar: 1, 2, 5, 8 e 10
- Demais questões são apenas para estudar.
- Prazo de entrega: **30/04/2025**

Q1. Considere a distribuição de Pareto com função densidade de probabilidade (fdp) dada por:

$$f(x, \theta, \alpha) = \frac{\theta\alpha^{\theta}}{x^{(\theta+1)}}, \text{ para } x \geq \alpha, \theta > 1,$$

onde α e θ são parâmetros da distribuição. Assuma $\alpha = 2$ e que $X_1, X_2, \cdots, X_n$ é uma amostra aleatória de tamanho n. A média para a distribuição de Pareto é dada por $E(X) = \frac{\theta\alpha}{\theta-1}$.

(a) Encontre o estimador dos momentos para a média.

(b) Encontre o EMV para θ. Este estimador é diferente daquele obtido no item (a)?

(c) Considere os dados observados para a amostra aleatória: $3, 5, 2, 3, 4, 1, 4, 3, 3, 3$. Obtenha a estimativa para θ usando os estimadores obtidos nos itens (a) e (b).

Q2. Seja $X_1, \cdots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória X com distribuição exponencial com parâmetro θ. Encontre o estimador de máxima verossimilhança para a função $g(\theta) = P(X > 1)$ e sua distribuição aproximada quando n for grande.

Q3. Suponha que em um experimento de Bernoulli, envolvendo 24 repetições independentes resultou em 25 sucessos. Encontre a estimativa de máxima verossimilhança para a probabilidade de sucesso θ, se é do conhecimento do pesquisador que $\theta \leq 1/2$.

Q4. Seja $X_1, \cdots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n da variável aleatória X com função de densidade de probabilidade,

$$f(x|\theta) = \frac{\theta}{(1+x)^{1+\theta}}, \quad x > 0, \ \theta > 0.$$

(a) Encontre, caso exista, uma forma analítica para o estimador de máxima verossimilhança de θ.

(b) Obtenha a informação de Fisher e sua distribuição aproximada em grandes amostras.

Q5. Seja $X_1, X_2, \cdots, X_n$ cópias $iid's$ de uma va $X \sim \mathcal{U}(a, b)$, com a e b denotando parâmetros desconhecidos e $a < b$.

(a) Encontre o estimador dos momentos para a e b.
(b) Encontre o EMV para a e b.
(c) Usando a propriedade de invariância dos EMV, encontre o EMV para $g(a, b) = E(X^2)$.
(d) Os EMV obtidos em (b) são consistentes para a e b? Justifique a sua resposta.

Q6. Seja $X_1, \cdots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n da variável aleatória X com função de densidade de probabilidade dada por,

$$f(x|\theta) = \theta(\theta+1)x^{\theta-1}(1-x), \ 0 \le x \le 1, \ \theta > 0.$$

(a) Encontre, usando o método dos momentos, um estimador para θ.
(b) Encontre o estimador de máxima verossimilhança de θ e sua distribuição aproximada em grandes amostras.
(c) É correto afirmar que $\hat{\theta}_n$ é um estimador eficiente?
(d) Obtenha o estimador de máxima verossimilhança para θ, supondo que uma restrição do suporte de θ, isto é, se $0 \le \theta \le 3$.

Q7. Seja $X_1, X_2, \cdots, X_n$ uma aa retirada de uma população com média β e variância σ^2. Seja $\hat{\beta}$ um estimador para β dado por $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} iX_i}{\sum_{i=1}^{n} i}$.

(a) Verifique se $\hat{\beta}$ é um estimador não-viesado para β.
(b) Mostre que $\hat{\beta}$ é um estimador consistente para β (dica: assuma que, $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n-1)}{2}$ e $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$).

Q8. Se $X_1, X_2, \cdots, X_n$ uma amostra aleatória proveniente de uma distribuição com função densidade de probabilidade,

$$f(x|\theta) = \begin{cases} \frac{3\theta^3}{(x+\theta)^4} & x > 0, \, \theta > 0 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Mostre que $T_n = 2\bar{X}_n$ é um estimador não-viesado para θ, e obtenha a sua eficiência.

Q9. Seja X uma variável aleatória, tal que, $X \sim \mathcal{N}(0, \theta)$, com $\theta > 0$.

(a) Se $X_1, \cdots, X_n$ é uma amostra aleatória extraída da população supracitada, mostre que o estimador de máxima verossimilhança $\hat{\theta}_n$ é eficiente para θ.
(b) Qual é a distribuição assintótica de $\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta\right)$?
(c) Obtenha o estimador de máxima verossimilhança para a função $g(\theta) = \sqrt{\theta}$.

(d) Supondo que o suporte de θ está restrito no intervalo de $0 < \theta \leq 5$, obtenha o EMV para θ.

Q10. Assuma que $X_1, X_2, \cdots, X_n$ denotam cópias $iid's$ de uma v.a. X proveniente de uma população caracterizada por uma função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x|\theta) = \frac{2x}{\theta^2}, \ \ 0 \leq x \leq \theta, \ \ \theta \geq 0. \tag{1}$$

(a) Construa o intervalo de máxima verossimilhança para θ.

(b) É correto afirmar que o estimador construído em (a) é não-viesado para θ? Justifique a sua resposta.