Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра інтелектуальних програмних систем
Чисельні методи в інформатиці

Звіт

з лабораторної роботи №1
«Розв'язування нелінійних рівнянь»

Варіант №7

студентки 3-го курсу
групи ІПС-31
Совгирі Анни

Київ — 2025

Вступ

У даній роботі необхідно знайти найменший додатний корінь нелінійного рівняння вигляду $f(x) = 0$ методом простої ітерації та методом релаксації. Процес розв'язання включає попереднє дослідження функції з метою визначення інтервалів, на яких можливе існування коренів, подальше виділення областей, що містять лише один корінь, а також вибір початкового наближення для ітераційних процедур.

Після цього виконується обчислення кореня з наперед заданою точністю за допомогою обраних алгоритмів. Крім того, проводиться як апріорна, так і апостеріорна оцінка кількості ітерацій, що дозволяє оцінити ефективність застосованих методів.

Умова задачі

Знайти найменший додатний корінь нелінійного рівняння

$$x^4 + x^3 - 6x^2 + 20x - 16 = 0$$

методом простої ітерації та релаксації з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$. Знайти апріорну та апостеріорну оцінку кількості кроків. Початковий проміжок та початкове наближення обрати однакове для обох методів (якщо це можливо), порівняти результати роботи методів між собою.

Теорія

Метод простої ітерації

Метод простої ітерації ґрунтується на зведенні нелінійного рівняння до вигляду

$$x = \varphi(x),$$

де $\varphi(x) = x + \Psi(x)f(x)$, $\Psi(x)$ — знакопостала неперервна функція.

Початкове наближення обирається довільне з проміжку: $x_0 \in [a; b]$, ітераційний процес має вигляд:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n).$$

Достатня умова збіжності. Нехай для $\forall x_0 : x_0 \in S$, де $S = \{x : |x - x_0| \leq \delta\}$, $\varphi(x)$ задовольняє умовам:

1. $\max\limits_{x \in S} |\varphi'(x)| \leq q < 1$;
2. $|\varphi(x_0) - x_0| \leq (1 - q)\delta$;

тоді ітераційний процес збігається $\exists x^* : \lim\limits_{n \to \infty} x_n = x^*$, при чому швидкість збіжності лінійна:

$$|x_n - x^*| \leq \frac{q^n}{1 - q}|\varphi(x_0) - x_0|.$$

Зауваження. Замість умови 1) $\max\limits_{x \in S} |\varphi'(x)| \leq q < 1$ можна використати умову Ліпшица: $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q|x - y|$, $x, y \in S$.

З формули швидкості збіжності можна вивести апріорну оцінку кількості кроків:

$$n \geq \left[\frac{\ln \dfrac{|\varphi(x_0) - x_0|}{(1 - q)\varepsilon}}{\ln(1/q)} \right] + 1.$$

Умова припинення залежить від q:

$$|x_n - x_{n-1}| \le \frac{1-q}{q}\varepsilon, \quad \text{якщо } q < \tfrac{1}{2};$$

$$|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon, \quad \text{в інших випадках.}$$

Метод релаксації

Якщо в методі простої ітерації $\Psi(x) \equiv \tau \equiv const$, то отримуємо метод релаксації.

Початкове наближення обирається довільне з проміжку: $x_0 \in [a; b]$, ітераційний процес:

$$x_{n+1} = x_n \pm \tau f(x_n), \tag{18}$$

де «+», якщо $f'(x) < 0$; «−», якщо $f'(x) > 0$.

Достатня умова збіжності. Якщо в ітераційному процесі параметр $\tau \in (0; 2/M_1)$, де $0 < m_1 < |f'(x)| < M_1$, $M_1 = \max\limits_{x\in[a;b]} |f'(x)|$, $m_1 = \min\limits_{x\in[a;b]} |f'(x)|$, то ітераційний процес збігається, при цьому швидкість збіжності лінійна.

Оптимальний параметр. Якщо обрати

$$\tau_0 = \frac{2}{M_1 + m_1},$$

то кількість ітерацій буде мінімальною, швидкість збіжності залишається лінійною:

$$|x_n - x^*| \le q_0^n |x_0 - x^*|, \quad q_0 = \frac{M_1 - m_1}{M_1 + m_1}.$$

Для оптимального параметра τ_0 апріорна оцінка кількості кроків:

$$n_0 \ge \left[\frac{\ln \dfrac{|x_0 - x^*|}{\varepsilon}}{\ln(1/q_0)} \right] + 1.$$

Умова припинення ітераційного процесу:

$$|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon.$$

Розв'язання

Графік функції

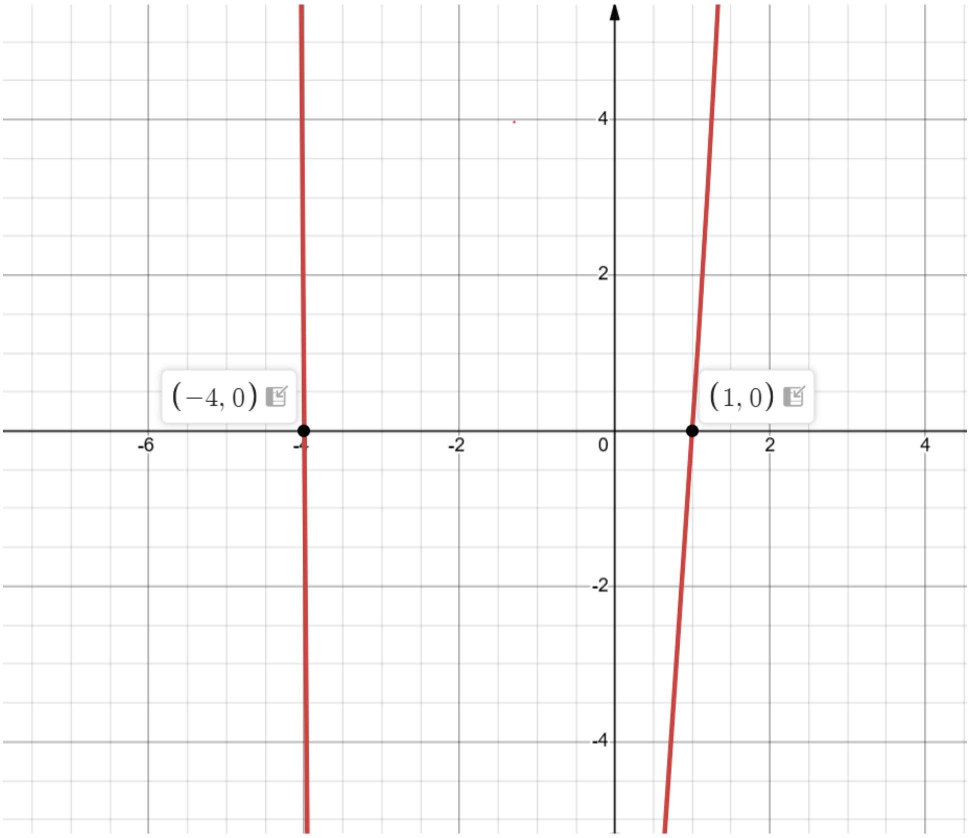

Рис. 1: Графік функції $y = f(x)$

Графік похідної функції

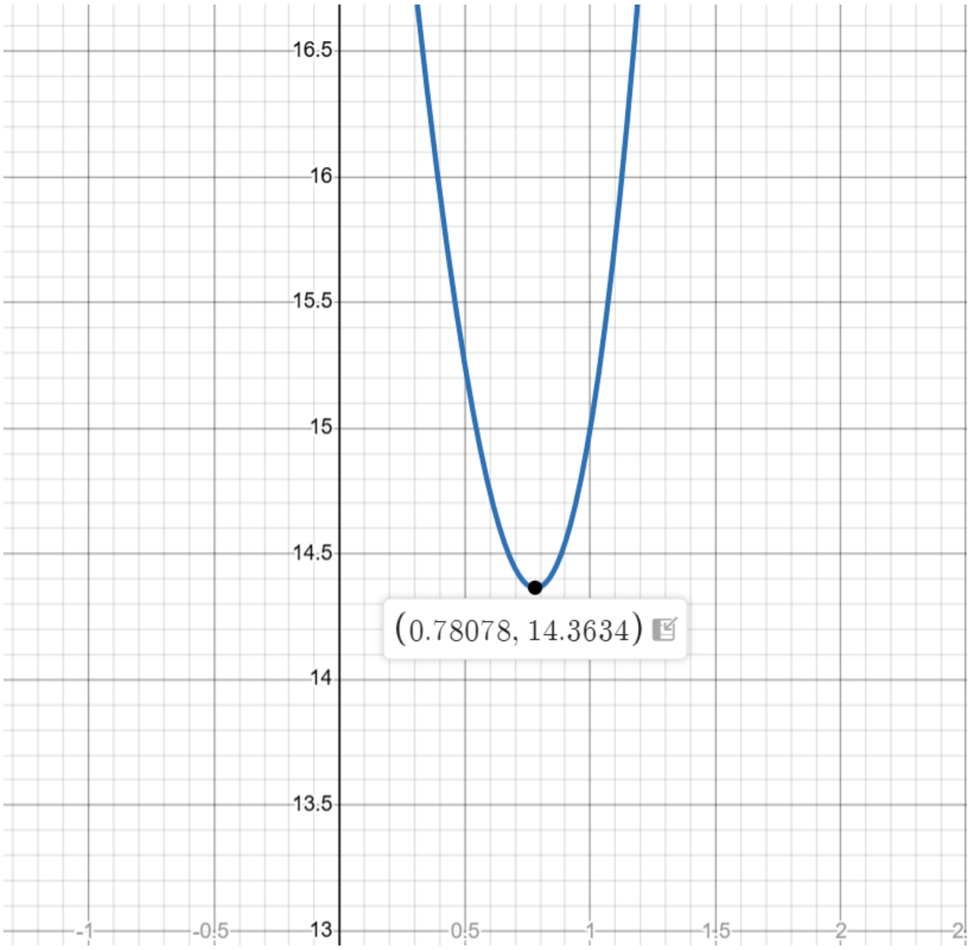

Рис. 2: Графік похідної $y = f'(x)$

Ми бачимо, що $x = 1$ є точним коренем рівняння. Щоб переконатися, що це найменший додатний корінь, проаналізуємо похідну:

$$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 12x + 20$$

На проміжку $[0, 1]$:

- $f'(0) = 20 > 0$
- $f'(1) = 4 + 3 - 12 + 20 = 15 > 0$

Оскільки похідна $f'(x)$ додатна на інтервалі $[0, 1]$, функція $f(x)$ на цьому відрізку зростає. Оскільки $f(0) < 0$ та $f(1) = 0$, то на інтервалі $(0, 1]$ існує лише один корінь, і це $x = 1$.

Для демонстрації роботи методів візьмемо ізольований інтервал навколо кореня, наприклад $[0.8,\ 1.2]$**.**

Метод простої ітерації

$$\varphi(x) = x + \Psi(x)f(x)$$

Оберемо $\Psi(x) = -\frac{x}{20}$. Функція є лінійною, не константою, знакопостійною на відрізку $[0.8;\ 1.2]$. Тоді:

$$\varphi(x) = x + \Psi(x)f(x) = x - \frac{x}{20}(x^4 + x^3 - 6x^2 + 20x - 16)$$

Перевірка умов збіжності.

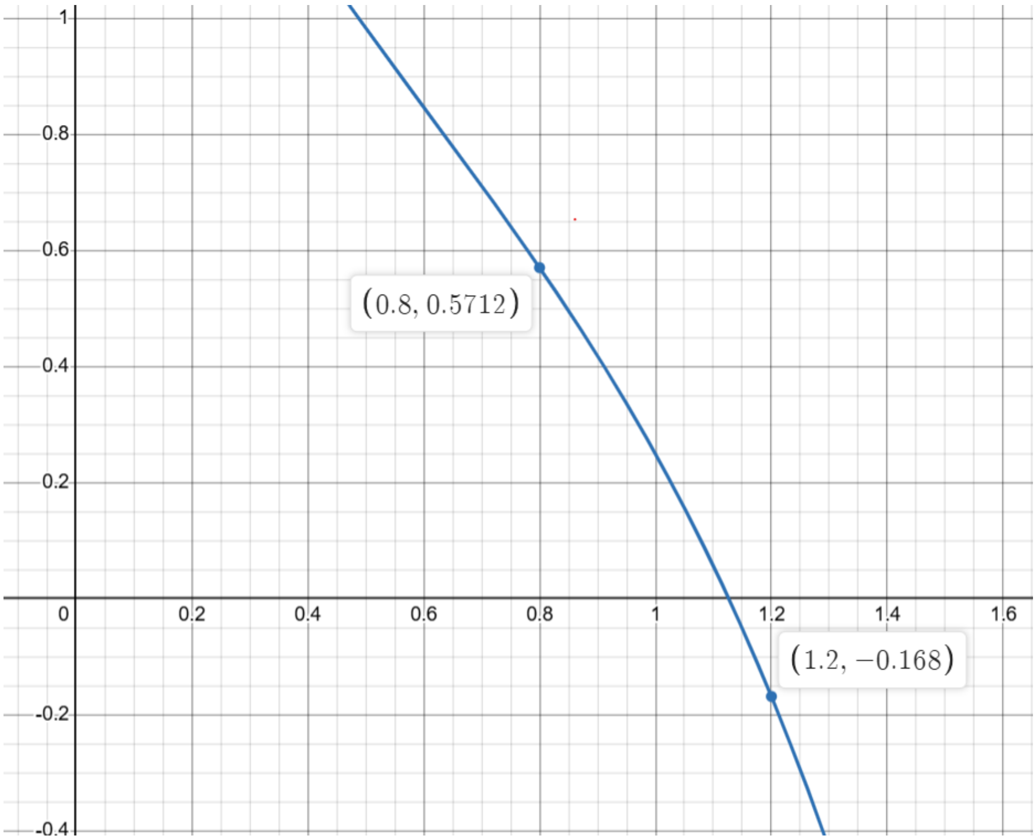

Рис. 3: Графік похідної $y = \varphi'(x)$

Метод збігається, якщо на обраному інтервалі виконується умова

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1.$$

Знайдемо похідну:

$$\varphi'(x) = 1 + \Psi'(x)f(x) + \Psi(x)f'(x)$$

де

$$\Psi'(x) = -\frac{1}{20}, \quad f(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 + 20x - 16, \quad f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 12x + 20.$$

Підставимо:

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{20}(x^4 + x^3 - 6x^2 + 20x - 16) - \frac{x}{20}(4x^3 + 3x^2 - 12x + 20).$$

Перевіримо значення на межах інтервалу $[0.8;\ 1.2]$:

$$|\varphi'(0.8)| = \left|\frac{20 - f(0.8) - 0.8 \cdot f'(0.8)}{20}\right| = \left|\frac{20 - (-2.9184) - 0.8 \cdot 14.368}{20}\right| = \frac{11.424}{20} \approx 0.5712$$

$$|\varphi'(1.2)| = \left|\frac{20 - f(1.2) - 1.2 \cdot f'(1.2)}{20}\right| = \left|\frac{20 - 3.1616 - 1.2 \cdot 16.832}{20}\right| = \frac{3.36}{20} \approx 0.1680$$

Отже, максимальне значення на інтервалі:

$$q = \max_{x \in [0.8;1.2]} |\varphi'(x)| \approx 0.5712.$$

Оскільки $q = 0.5712 < 1$, умова збіжності виконується.

$$|\varphi(x_0) - x_0| = |0.916736 - 0.8| = 0.11674$$
$$(1 - q)\delta = (1 - 0.5712) \cdot 0.4 = 0.17152$$

Отже, і друга умова збіжності виконується.

Кількість ітерацій n для досягнення точності ε можна оцінити за формулою:

$$n \geq \left[\frac{\ln \dfrac{|\varphi(x_0) - x_0|}{(1 - q)\varepsilon}}{\ln(1/q)}\right] + 1$$

Візьмемо початкове наближення $x_0 = 0.8$:

$$\varphi(x_0) = \varphi(0.8) = 0.916736$$

$$n \geq \left[\frac{\ln \dfrac{0.116736}{(1 - 0.5712) \cdot 10^{-4}}}{\ln(1/0.5712)}\right] + 1 = \left[\frac{\ln(2722.29)}{\ln(1.75)}\right] + 1 = \left[\frac{7.909}{0.560}\right] + 1 = [14.12] + 1 = 15$$

Отже, очікувана кількість ітерацій $n \approx 15$.

Табл. 1: Таблиця ітерацій (метод простої ітерації)

n	x_n	$\Delta = \lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
0	0.8000000000	–
1	0.9167360000	0.11674
2	0.9731610805	0.05643
3	0.9926495534	0.01949
4	0.9981139202	0.00546
5	0.9995252812	0.00141
6	0.9998811175	0.00036
7	**0.9999702667**	0.00009
8	0.9999925659	0.00002229
9	0.9999981414	0.00000558
10	0.9999995534	0.00000139
11	0.9999998838	0.00000035
12	0.9999999710	0.00000009
13	0.9999999927	0.00000002
14	0.9999999982	0.00000001
15	0.9999999995	0.00000000

Оскільки $q = 0.5712 > \frac{1}{2}$, то ми повинні використовувати другу умову припинення ітерацій:

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon,$$

Отже, зупинка на **7-й ітерації.**

Метод релаксації

$$m_1 = \min|f'(x)| = f'(0.8) = 4(0.8)^3 + 3(0.8)^2 - 12(0.8) + 20 = 14.368$$

$$M_1 = \max|f'(x)| = f'(1.2) = 16.832$$

Оптимальний параметр:

$$\tau_0 = \frac{2}{M_1 + m_1} = \frac{2}{16.832 + 14.368} = \frac{2}{31.2} \approx 0.0641$$

Швидкість збіжності:

$$q_0 = \frac{M_1 - m_1}{M_1 + m_1} = \frac{16.832 - 14.368}{16.832 + 14.368} = \frac{2.464}{31.2} \approx 0.0790$$

Апріорна оцінка кількості ітерацій:

$$n_0 \geq \left[\frac{\ln \frac{|x_0 - x^*|}{\varepsilon}}{\ln(1/q_0)} \right] + 1$$

$$n_0 \geq \left[\frac{\ln\left(\frac{0.4}{10^{-4}}\right)}{\ln(1/0.0790)} \right] + 1 = \left[\frac{\ln(4000)}{\ln(12.66)} \right] + 1 = \left[\frac{8.294}{2.538} \right] + 1 = [3.268] + 1 = 3 + 1 = 4$$

Отже, очікувана кількість ітерацій $n \approx 4$.

Табл. 2: Таблиця ітерацій (релаксація)

n	x_n	$\Delta = \lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
0	0.8000000000	–
1	0.9870769231	0.18708
2	0.9994715320	0.01239
3	0.9999796206	0.00051
4	**0.9999992161**	0.00002

Умова припинення $|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon$ виконується на **4-й ітерації**.

Висновок

На основі проведеної лабораторної роботи, яка полягала у знаходженні найменшого додатного кореня нелінійного рівняння методами простої ітерації та релаксації, можна зробити наступний висновок. Обидва методи, застосовані на інтервалі ізоляції кореня $[0.8; 1.2]$, успішно зійшлися до точного кореня $x^* = 1$.

Метод простої ітерації вимагав 7 ітерацій для досягнення заданої точності. Натомість, метод релаксації із застосуванням оптимального параметра продемонстрував значно вищу швидкість збіжності і досяг необхідної точності лише за 4 ітерації. Таким чином, незважаючи на необхідність додаткових обчислень для знаходження оптимального параметра на інтервалі, метод релаксації виявився більш ефективним з погляду мінімізації фактичної кількості ітераційних кроків порівняно з методом простої ітерації.