

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
 Кафедра інтелектуальних програмних систем
 Чисельні методи в інформатиці

Звіт
з лабораторної роботи №2
«Методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь»

Варіант №3

студентки 3-го курсу
групи ІПС-31
Совгирі Анни

Київ — 2025

Вступ

Метою роботи є програмна реалізація та дослідження методів розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), а саме:

- метод Гауса (г.e. по матриці);
- метод прогонки;
- метод Зейделя.

Для виконання лабораторної роботи необхідно згенерувати квадратну матрицю розміром 4×4 з цілими елементами за модулем менше 10 та вектор правої частини, що задовільняють умови збіжності обраного методу. Також буде реалізовано алгоритм, що дозволяє знаходити розв'язок системи із заданою користувачем точністю ε .

Теорія

Метод Гаусса

Метод Гаусса є прямим методом розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

$$Ax = b, \quad A \in R^{n \times n}, \quad \det A \neq 0.$$

Він складається з двох етапів: **прямий хід** (перетворення до трикутної матриці) та **зворотний хід** (послідовне знаходження змінних).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = a_{1(n+1)}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = a_{2(n+1)}, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = a_{n(n+1)}. \end{cases}$$
$$a_{i(n+1)} = b_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Прямий хід

$$a_{kj}^{(k)} = \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad k = \overline{1, n},$$
$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k)}, \quad j = \overline{k+1, n+1}, \quad i = \overline{k+1, n},$$
$$a_{kk}^{(k-1)} \neq 0.$$

Після першого кроку система набуває вигляду:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n = a_{1(n+1)}^{(1)}, \\ x_2 + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n = a_{2(n+1)}^{(2)}, \\ \vdots \\ x_n = a_{n(n+1)}^{(n)}. \end{cases}$$

Зворотний хід

$$x_n = a_{n(n+1)}^{(n)},$$

$$x_i = a_{i(n+1)}^{(i)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(i)} x_j, \quad i = \overline{n-1, 1}.$$

Вибір головного елемента

Для зменшення обчислювальної похибки в методі Гаусса використовують вибір головного елемента:

1. по стовпцях,
2. по рядках,
3. за всією матрицею.

У випадку вибору головного елемента **за всією матрицею** на кожному кроці вибирається елемент найбільшого модуля у всій поточній підматриці та виконуються перестановки рядків і стовпців.

Метод прогонки

Метод прогонки використовується, якщо матриця системи лінійних алгебраїчних рівнянь A є тридіагональною. Цей метод є частковим випадком методу Гаусса.

Нехай маємо систему вигляду:

$$\begin{cases} -c_0 y_0 + b_0 y_1 = -f_0, \\ \vdots \\ a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} = -f_i, \quad i = 1, n-1, \\ \vdots \\ a_n y_{n-1} - c_n y_n = -f_n; \end{cases}$$

Достатня умова стійкості. Нехай коефіцієнти $a_0, b_0 = 0; c_0, c_n \neq 0; a_i, b_i, c_i \neq 0; i = 1, n-1$. Якщо виконуються умови:

- 1) $|c_i| \geq |a_i| + |b_i|, \quad i = 0, n;$
- 2) $\exists i : |c_i| > |a_i| + |b_i|,$

то метод є стійким: $|\alpha_i| \leq 1; |z_i| > 1, i = 1, n$.

Прямий хід методу Гаусса в методі прогонки відповідає знаходженню прогонкових коефіцієнтів:

$$\alpha_1 = \frac{b_0}{c_0}, \quad \beta_1 = \frac{f_0}{c_0},$$

$$\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{z_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{f_i + a_i \beta_i}{z_i},$$

$$z_i = c_i - \alpha_i a_i, \quad i = 1, n-1.$$

Зворотний хід:

$$y_n = \frac{f_n + a_n \beta_n}{z_n}, \quad y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = n-1, 0.$$

Складність методу прогонки:

$$Q(n) = 8n - 2.$$

Метод Зейделя

Метод Зейделя є ітераційним методом для розв'язання СЛАР $Ax = b$, т.т. розв'язок знаходить із заданою точністю ε . Початкове наближення x^0 обираємо довільним чином. Ітераційний процес має вигляд:

$$x_i^{k+1} = - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k + \frac{b_i}{a_{ii}}. \quad (22)$$

Достатня умова збіжності 1. Якщо $\forall i : i = 1, n$ виконується нерівність

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|,$$

то ітераційний процес методу Зейделя (22) збігається, при чому швидкість збіжності лінійна.

Достатня умова збіжності 2. Якщо $A = A^T > 0$, то ітераційний процес методу Зейделя (22) збігається, при чому швидкість збіжності лінійна.

Умова припинення:

$$\|x^n - x^{n-1}\| \leq \varepsilon.$$

Тридіагональна матриця

Тридіагональна матриця має ненульові елементи лише на головній діагоналі, а також на сусідніх діагоналях. Це особливий вид матриці, для якого підходить метод прогонки, який забезпечує ефективне розв'язання з меншими обчислювальними витратами.

Діагонально домінантна матриця

Матриця є діагонально домінантною, якщо кожен діагональний елемент більший за суму модулів елементів у відповідному рядку (окрім діагонального елемента).

Розв'язання

У ході роботи була згенерована тридіагональна та діагонально домінантна матриця розміром 4×4 із цілими елементами в межах від -9 до 9 , а також сформовано відповідний вектор правої частини. Для обчислення розв'язку отриманої системи було застосовано три чисельні методи: метод Гаусса з вибором головного елемента, метод прогонки та метод Зейделя.

Матриця A (тридіагональна, діагонально домінантна):

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Вектор b:

$$\begin{bmatrix} -9 & 3 & 2 & -8 \end{bmatrix}$$

Перевірка діагональної домінантності:

Рядок 1: $|a_{11}| = 5.0 \geq 3.0 = \sum |a_{ij}| \quad \checkmark$

Рядок 2: $|a_{22}| = 8.0 \geq 5.0 = \sum |a_{ij}| \quad \checkmark$

Рядок 3: $|a_{33}| = 7.0 \geq 6.0 = \sum |a_{ij}| \quad \checkmark$

Рядок 4: $|a_{44}| = 4.0 \geq 1.0 = \sum |a_{ij}| \quad \checkmark$

Визначник: $\det(A) = 874.000000$

Рис. 1: Початкові дані

Метод Гаусса

Маємо систему

$$Ax = b, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Початкова розширенна матриця:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 3 & 0 & 0 & -9 \\ 2 & 8 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 7 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -8 \end{array} \right].$$

Крок 1. Вибір головного елемента. Найбільший за модулем елемент у всій матриці – це 8 (елемент a_{22}). Виконуємо перестановку рядків $R_1 \leftrightarrow R_2$ та стовпців $C_1 \leftrightarrow C_2$ (повний вибір головного елемента):

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 2 & -3 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 0 & 0 & -9 \\ -3 & 0 & 7 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -8 \end{array} \right].$$

Виконуємо виключення елементів у першому стовпці під головним:

$$m_{21} = \frac{3}{8}, \quad m_{31} = -\frac{3}{8}, \quad m_{41} = 0.$$

Отримуємо

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 2 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{17}{4} & \frac{9}{8} & 0 & -\frac{81}{8} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{47}{8} & -3 & \frac{25}{8} \\ 0 & \frac{4}{8} & \frac{8}{8} & -3 & \frac{8}{8} \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -8 \end{array} \right].$$

Крок 2. Вибір у підматриці. У підматриці рядків та стовпців максимальний за модулем елемент $-\frac{47}{8}$ (у позиції $(3, 3)$). Переставляємо рядки $R_2 \leftrightarrow R_3$ та стовпці $C_2 \leftrightarrow C_3$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 8 & -3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{47}{8} & \frac{3}{4} & -3 & \frac{25}{8} \\ 0 & \frac{9}{8} & \frac{17}{4} & 0 & -\frac{81}{8} \\ 0 & \frac{8}{8} & \frac{4}{4} & 0 & -\frac{8}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -8 \end{array} \right].$$

Виконуємо виключення елементів у другому стовпці:

$$m_{32} = \frac{\frac{9}{8}}{\frac{47}{8}} = \frac{9}{47}, \quad m_{42} = \frac{1}{\frac{47}{8}} = \frac{8}{47}.$$

Після цього:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 8 & -3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & \frac{47}{8} & -3 & \frac{3}{4} & \frac{25}{8} \\ 0 & 0 & \frac{193}{47} & \frac{27}{47} & -\frac{504}{47} \\ 0 & 0 & -\frac{6}{47} & \frac{212}{47} & -\frac{401}{47} \end{array} \right].$$

Крок 3. Вибір у останній підматриці. У підматриці найбільший за модулем елемент $-\frac{212}{47}$ (позиція $(4, 4)$). Переставляємо рядки $R_3 \leftrightarrow R_4$ та стовпці $C_3 \leftrightarrow C_4$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 8 & -3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & \frac{47}{8} & -3 & \frac{3}{4} & \frac{25}{8} \\ 0 & 0 & \frac{212}{47} & -\frac{6}{47} & -\frac{401}{47} \\ 0 & 0 & \frac{27}{47} & \frac{193}{47} & -\frac{504}{47} \end{array} \right].$$

Виконуємо виключення елемента в позиції $(4, 3)$:

$$m_{43} = \frac{\frac{27}{47}}{\frac{212}{47}} = \frac{27}{212}.$$

Отримаємо остаточну верхньотрикутну систему

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 8 & -3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & \frac{47}{8} & -3 & \frac{3}{4} & \frac{25}{8} \\ 0 & 0 & \frac{212}{47} & -\frac{6}{47} & -\frac{401}{47} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{437}{106} & -\frac{2043}{212} \end{array} \right].$$

Через перестановки стовпців порядок невідомих у трикутній системі відповідає змінним (x_2, x_3, x_4, x_1) , але після зворотного ходу ми повертаємося до початкового порядку x_1, x_2, x_3, x_4 .

Зворотний хід. Із останнього рівняння:

$$x_1 = \frac{-\frac{2043}{212}}{\frac{437}{106}} = -\frac{2043}{874}.$$

Далі послідовно знаходимо x_4, x_3, x_2 (підставляючи вже відомі значення) і в результаті одержуємо

$$x_1 = -\frac{2043}{874}, \quad x_2 = \frac{783}{874}, \quad x_3 = -\frac{74}{437}, \quad x_4 = -\frac{1711}{874}.$$

Отже, розв'язок системи в початковому порядку невідомих має вигляд

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -\frac{2043}{874} \\ \frac{783}{874} \\ -\frac{74}{437} \\ -\frac{1711}{874} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.338 \\ 0.895 \\ -0.169 \\ -1.957 \end{pmatrix}.$$

```
=====
1. МЕТОД ГАУССА (з вибором головного елемента)
=====

Розв'язок:
x1 = -2.33752860
x2 = 0.89588101
x3 = -0.16933638
x4 = -1.95766590
```

Рис. 2: Результати програмної реалізації (Гаус)

Метод прогонки

Матриця є тридіагональною, отже можемо використати метод прогонки. Маємо: $y_i = x_{i+1}$

$$\begin{aligned} c_0 &= -5, & b_0 &= 3, \\ a_1 &= 2, & c_1 &= -8, & b_1 &= -3, \\ a_2 &= -3, & c_2 &= -7, & b_2 &= -3, \\ a_3 &= 1, & c_3 &= -4. \end{aligned}$$

Прямий хід

За формулами з теорії

$$\alpha_1 = \frac{b_0}{c_0}, \quad \beta_1 = \frac{f_0}{c_0}, \quad \alpha_{i+1} = \frac{b_i}{z_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{f_i + a_i \beta_i}{z_i}, \quad z_i = c_i - \alpha_i a_i,$$

одержуємо:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{3}{-5} = -\frac{3}{5}, & \beta_1 &= \frac{9}{-5} = -\frac{9}{5}, \\ z_1 &= c_1 - \alpha_1 a_1 = -8 - \left(-\frac{3}{5} \cdot 2\right) = -\frac{34}{5}, \\ \alpha_2 &= \frac{b_1}{z_1} = \frac{-3}{-\frac{34}{5}} = \frac{15}{34}, & \beta_2 &= \frac{f_1 + a_1 \beta_1}{z_1} = \frac{3 + 2 \cdot \left(-\frac{9}{5}\right)}{-\frac{34}{5}} = \frac{33}{34}, \\ z_2 &= c_2 - \alpha_2 a_2 = -7 - \frac{15}{34} \cdot (-3) = -\frac{193}{34}, \\ \alpha_3 &= \frac{b_2}{z_2} = \frac{-3}{-\frac{193}{34}} = \frac{102}{193}, & \beta_3 &= \frac{f_2 + a_2 \beta_2}{z_2} = \frac{2 + (-3) \cdot \frac{33}{34}}{-\frac{193}{34}} = \frac{167}{193}, \\ z_3 &= c_3 - \alpha_3 a_3 = -4 - \frac{102}{193} = -\frac{874}{193}.\end{aligned}$$

Зворотний хід

З останнього рівняння:

$$y_3 = \frac{f_3 + a_3 \beta_3}{z_3} = \frac{8 + 1 \cdot \frac{167}{193}}{-\frac{874}{193}} = -\frac{1711}{874}.$$

Далі послідовно:

$$\begin{aligned}y_2 &= \alpha_3 y_3 + \beta_3 = \frac{102}{193} y_3 + \frac{167}{193} = -\frac{74}{437}, \\ y_1 &= \alpha_2 y_2 + \beta_2 = \frac{15}{34} y_2 + \frac{33}{34} = \frac{783}{874}, \\ y_0 &= \alpha_1 y_1 + \beta_1 = -\frac{3}{5} y_1 - \frac{9}{5} = -\frac{2043}{874}.\end{aligned}$$

Оскільки $y_i = x_{i+1}$, остаточний розв'язок у початковому порядку невідомих:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2043}{874} \\ \frac{783}{874} \\ \frac{74}{437} \\ -\frac{437}{1711} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -2.338 \\ 0.896 \\ -0.169 \\ -1.957 \end{pmatrix}.$$

Метод Зейделя

Маємо діагонально домінантну систему:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

```

=====
2. МЕТОД ПРОГОНКИ
=====

Розв'язок:
x1 = -2.33752860
x2 = 0.89588101
x3 = -0.16933638
x4 = -1.95766590

```

Рис. 3: Результати програмної реалізації (прогонка)

Перепишемо її в еквівалентному вигляді, виражаючи кожну змінну через інші:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-9 - 3x_2}{5}, \\ x_2 = \frac{3 - 2x_1 + 3x_3}{8}, \\ x_3 = \frac{2 + 3x_2 + 3x_4}{7}, \\ x_4 = \frac{-8 - x_3}{4}. \end{cases}$$

Ітераційний процес методу Зейделя (з використанням “нових” значень по мірі їх появи) має вигляд:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{-9 - 3x_2^{(k)}}{5}, \\ x_2^{(k+1)} = \frac{3 - 2x_1^{(k+1)} + 3x_3^{(k)}}{8}, \\ x_3^{(k+1)} = \frac{2 + 3x_2^{(k+1)} + 3x_4^{(k)}}{7}, \\ x_4^{(k+1)} = \frac{-8 - x_3^{(k+1)}}{4}. \end{cases}$$

Початкове наближення вибираємо

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Перші ітерації:

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} -1.8000 \\ 0.8250 \\ 0.6393 \\ -2.1598 \end{pmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} -2.2950 \\ 1.1885 \\ -0.1306 \\ -1.9674 \end{pmatrix}.$$

Подальші обчислення виконуються програмно до виконання умови зупинки

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_{\infty} \leq \varepsilon,$$

де в роботі взято $\varepsilon = 10^{-6}$.

Ітераційний процес:						
Ітерація 1:	$x = [-1.800000, 0.825000, 0.639286, -2.159821]$	$\ \Delta x\ = 2.160e+00$	$(> 1e-06)$			
Ітерація 2:	$x = [-2.295000, 1.188482, -0.130574, -1.967357]$	$\ \Delta x\ = 7.699e-01$	$(> 1e-06)$			
Ітерація 3:	$x = [-2.513089, 0.954307, -0.148450, -1.962888]$	$\ \Delta x\ = 2.342e-01$	$(> 1e-06)$			
Ітерація 4:	$x = [-2.372584, 0.912477, -0.164461, -1.958885]$	$\ \Delta x\ = 1.405e-01$	$(> 1e-06)$			
Ітерація 5:	$x = [-2.347486, 0.900199, -0.168008, -1.957998]$	$\ \Delta x\ = 2.510e-02$	$(> 1e-06)$			
Ітерація 6:	$x = [-2.340119, 0.897027, -0.168988, -1.957753]$	$\ \Delta x\ = 7.367e-03$	$(> 1e-06)$			
Ітерація 7:	$x = [-2.338216, 0.896184, -0.169244, -1.957689]$	$\ \Delta x\ = 1.903e-03$	$(> 1e-06)$			
Ітерація 8:	$x = [-2.337710, 0.895961, -0.169312, -1.957672]$	$\ \Delta x\ = 5.058e-04$	$(> 1e-06)$			
Ітерація 9:	$x = [-2.337577, 0.895902, -0.169330, -1.957668]$	$\ \Delta x\ = 1.336e-04$	$(> 1e-06)$			
Ітерація 10:	$x = [-2.337541, 0.895887, -0.169335, -1.957666]$	$\ \Delta x\ = 3.532e-05$	$(> 1e-06)$			
Ітерація 11:	$x = [-2.337532, 0.895882, -0.169336, -1.957666]$	$\ \Delta x\ = 9.336e-06$	$(> 1e-06)$			
Ітерація 12:	$x = [-2.337529, 0.895881, -0.169336, -1.957666]$	$\ \Delta x\ = 2.468e-06$	$(> 1e-06)$			
Ітерація 13:	$x = [-2.337529, 0.895881, -0.169336, -1.957666]$	$\ \Delta x\ = 6.525e-07$	\checkmark збіжність досягнута!			

Рис. 4: Ітераційні кроки

Збіжність досягається за 13 ітерацій, остаточне наближення розв'язку має вигляд

$$x^{(*)} \approx \begin{pmatrix} -2.3375 \\ 0.8959 \\ -0.1693 \\ -1.9577 \end{pmatrix}.$$

```
=====
3. МЕТОД ЗЕЙДЕЛЯ
=====
Збіжність досягнута за 13 ітерацій

Розв'язок:
x1 = -2.33752884
x2 = 0.89588111
x3 = -0.16933635
x4 = -1.95766591
```

Рис. 5: Результати програмної реалізації (Зейдель)

Висновок

- Метод Гаусса з вибором головного елемента.** Це універсальний прямий метод, який можна застосовувати до будь-якої квадратної матриці. Він забезпечує високу точність і стійкість, однак є ресурсоємним для великих систем через значні обчислювальні витрати та можливе накопичення похибок округлення. Метод Гаусса доцільно використовувати для систем середнього розміру або коли матриця не має спеціальної структури.
- Метод прогонки (Томаса).** Є найефективнішим методом для систем із тридіагональною структурою матриці. Забезпечує високу точність і має мінімальну обчислювальну складність. Обмеженням є те, що метод застосовується лише до строго діагонально-домінантних тридіагональних матриць і не може бути використаний для загальних систем.

3. **Метод Зейделя.** Ітераційний метод, який вирізняється простотою реалізації та ефективністю для великих або розріджених систем. Його збіжність залежить від вибору початкового наближення та діагональної домінантності матриці. За слабкої або відсутньої домінантності може збігатися повільно або не збігтися. Водночас для добре структурованих систем він дає ефективний керований наближений результат.