Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп`ютерних наук та кібернетики
Кафедра інтелектуальних програмних систем
Моделювання складних систем

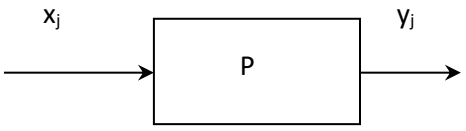
Звіт
з лабораторної роботи №2
студентки 3-го курсу
групи ІПС-31
Совгирі Анни Олегівни
Варіант №5

Київ
2025

Побудова лінійної моделі з допомогою псевдообернених операторів

Постановка задачі

Будемо вважати, що на вхід системи перетворення, математична модель якої невідома, поступають послідовно дані у вигляді $m-1$ вимірних векторів $\mathbf{x}_j$. На виході системи спостерігається сигнал у вигляді вектора $\mathbf{y}_j$ розмірності p.



Постановка задачі: Для послідовності вхідних сигналів $\mathbf{x}_j$, $j=1,2,\dots,n$ та вихідних сигналів $\mathbf{y}_j$, $j=1,2,\dots,n$ знайти оператор P перетворення вхідного сигналу у вихідний.

Будемо шукати математичну модель оператора об'єкту в класі лінійних операторів

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix}\mathbf{x}_j\\1\end{pmatrix}=\mathbf{y}_j,\ j=1,2,\dots,n. \qquad (1)$$

Невідома матриця $\mathbf{A}$ математичної моделі об'єкту розмірності $p\times n$. Систему (1) запишемо у матричній формі

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_n\\1 & 1 & \dots & 1\end{pmatrix}=(\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\dots,\mathbf{y}_n),$$

або

$$\mathbf{AX}=\mathbf{Y}, \qquad (2)$$

де $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_n\\1 & 1 & \dots & 1\end{pmatrix}$ – матриця вхідних сигналів розмірності $m\times n$, $\mathbf{Y}=(\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\dots,\mathbf{y}_n)$ – матриця вихідних сигналів розмірності $p\times n$.

Матрицю $\mathbf{X}$ будемо інтерпретувати як двовимірне вхідне зображення, а матрицю $\mathbf{Y}$ вихідне зображення.

Тоді

$$\mathbf{A}=\mathbf{YX}^{+}+\mathbf{VZ}^{T}(\mathbf{X}^{T}),$$

де матриця

$$\mathbf{V}=\begin{pmatrix}\mathbf{v}_{(1)}^{T}\\\mathbf{v}_{(2)}^{T}\\\vdots\\\mathbf{v}_{(p)}^{T}\end{pmatrix},$$

розмірності $p\times m$, $\mathbf{Z}(\mathbf{X}^{T})=\mathbf{I}_m-\mathbf{XX}^{+}$.

Формула Гревіля для псевдообернення матриці:

Якщо для матриці A відома псевдообернена (обернена) матриця A^+, то для розширеної матриці $\begin{pmatrix} A \\ a^T \end{pmatrix}$ справедлива формула

$$\begin{pmatrix} A \\ a^T \end{pmatrix}^+ = \begin{cases} \left(A^+ - \dfrac{Z(A)aa^TA^+}{a^TZ(A)a} : \dfrac{Z(A)a}{a^TZ(A)a} \right), if\ a^TZ(A)a > 0 \\ \left(A^+ - \dfrac{R(A)aa^TA^+}{1+a^TR(A)a} : \dfrac{R(A)a}{1+a^TR(A)a} \right), if\ a^TZ(A)a = 0 \end{cases},$$

де $Z(A) = E - A^+A,\ R(A) = A^+\left(A^+\right)^T$.

Для першого кроку алгоритму $\left(a_1^T\right)^+ = \dfrac{a_1}{a_1^Ta_1}$, де $A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix}$.

Формула Мура - Пенроуза для знаходження оберненої (псевдооберненої) матриці:

$$A^+ = \lim_{\delta^2 \to 0} \left\{ \left(A^TA + \delta^2 E_n \right)^{-1} A^T \right\} = \lim_{\delta^2 \to 0} \left\{ A^T \left(AA^T + \delta^2 E_m \right)^{-1} \right\}.$$

матриця A розмірності $m \times n$.

Теоретичні відомості

Псевдообернена матриця A^+ - це узагальнення поняття оберненої матриці для випадків, коли
A:

- не квадратна,
- або вироджена (det = 0),
- або має ранг, менший за мінімальний розмір.

Вона визначається 4 умовами Мура–Пенроуза:

1. $AA^+A = A$
2. $A^+AA^+ = A^+$
3. AA^+ — симетрична
4. A^+A — симетрична

У лабораторній роботі використовуються два підходи:

Ітераційна формула Мура–Пенроуза

$$A^+ = \lim_{\delta^2 \to 0} (A^T A + \delta^2 E)^{-1} A^T$$

Метод Гревіля

Побудова псевдооберненої матриці поелементно, додаючи рядки один за одним.

Модель оператора A через X^+

Після знаходження псевдооберненої матриці оператор відновлюється формулою:

$$A=YX^+.$$

Це головна формула, яка використовується у лабораторній роботі для побудови моделі. У загальному випадку допускається довільна матриця V:

$$A = YX^+ + VZ(X^T),$$

де $Z(X^T)=I-XX^+$.

У реалізації ми використовуємо найпростіший варіант: **V = 0**.

Метрики точності відновлення: MSE та RMSE

MSE (Mean Squared Error)

$$\text{MSE} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y}_i)^2$$

RMSE (Root Mean Square Error) — це метрика для оцінки помилок у прогнозах, яка вимірює середню різницю між прогнозованими та фактичними значеннями.

$$\text{RMSE}=\sqrt{\boldsymbol{MSE}}$$

Хід роботи

1. Завантаження вхідного та вихідного зображень.
Отримано матриці X та Y, що представляють відповідно вхідний та вихідний

сигнали системи. Проведено їхнє попереднє опрацювання (перетворення у числові матриці, нормалізація).

2. Формування розширеної матриці $\tilde{X}$

До матриці X додано рядок одиниць для урахування вільного члена у моделі лінійного оператора.

3. Обчислення псевдооберненої матриці двома методами.

- методом Мура–Пенроуза (ітераційний підхід на основі граничного переходу);
- методом Гревіля (побудова псевдооберненої матриці шляхом поступового додавання рядків).

Для кожного методу перевірено виконання умов Мура–Пенроуза.

4. Побудова лінійного оператора A.
Оператор моделі визначено за формулою:

$$A=YX^{+},$$

де X^{+} - псевдообернена матриця, отримана відповідним методом.

5. Обчислення відновленого вихідного сигналу.
Для кожного методу отримано апроксимацію вихідного сигналу:

$$\hat{Y} = A\tilde{X}$$

6. Оцінювання точності та порівняння методів.
Для результатів обох методів обчислено:

- L1-норму похибки,
- MSE (середньоквадратичну помилку),
- RMSE (корінь середньоквадратичної помилки),
- час виконання.

На основі цих метрик проведено порівняльний аналіз точності та ефективності методів.

Програмна реалізація

Програму реалізовано мовою *Python* та розділено на три логічні модулі:

- `main.py` – основний керуючий файл;
- `image_io.py` – модуль роботи із зображеннями;
- `pseudoinverse.py` – модуль обчислення псевдообернених матриць двома методами (Мура–Пенроуза та Гревіля).

Для реалізації використано бібліотеки **NumPy** (лінійна алгебра), **Pillow** (зчитування/запис зображень), **Matplotlib** (побудова графіків), а також стандартні модулі `time` та `os` для вимірювання часу та роботи з файлами.

1. У модулі `image_io.py` реалізовано дві функції:

`read_grayscale_image(path)` – зчитує BMP-файл, переводить його у формат *grayscale* та перетворює на матрицю типу `float` з нормалізацією пікселів у діапазон [0,1][0, 1][0,1]. Саме ці матриці використовуються як матриці XXX та YYY у задачі AX=YAX = YAX=Y.

`save_grayscale_image(path, matrix)` – перетворює отриману матрицю назад у 8-бітне зображення (обрізаючи значення до [0,1][0,1][0,1]) і зберігає результат на диск. Це дозволяє візуально порівняти вихідні та відновлені зображення.

2. Модуль `pseudoinverse.py` містить реалізацію двох методів:

`pseudo_inverse_moore_penrose(A:)` – ітераційно обчислює псевдообернену матрицю за формулою Мура–Пенроуза. На кожній ітерації будується матриця

$$(A^T A + \delta^2 I)^{-1} \text{ або } (AA^T + \delta^2 I)^{-1},$$

параметр δ поступово зменшується, а цикл зупиняється при досягненні заданої точності ε.

`pseudo_inverse_greville(A:)` – реалізує метод Гревіля, який формує псевдообернену матрицю послідовно, додаючи рядки A та оновлюючи A^+ за рекурсивними формулами для випадків лінійно незалежного та майже залежного рядка.

Окремою функцією **`is_pseudoinverse(A, A_plus)`** перевіряються чотири умови Мура–Пенроуза для отриманої матриці A^+ що дозволяє переконатися у коректності реалізації алгоритмів.

3. В основному файлі `main.py` виконується послідовність дій:

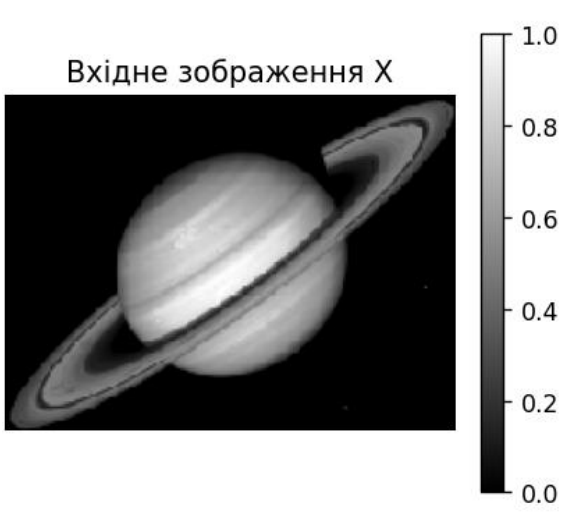
1) Зчитуються вхідне зображення **`x1.bmp`** та відповідне вихідне **`y5.bmp`**. Перевіряється узгодженість розмірностей.
2) Для урахування вільного члена формується розширена матриця за допомогою функції **`augment_with_ones.`**

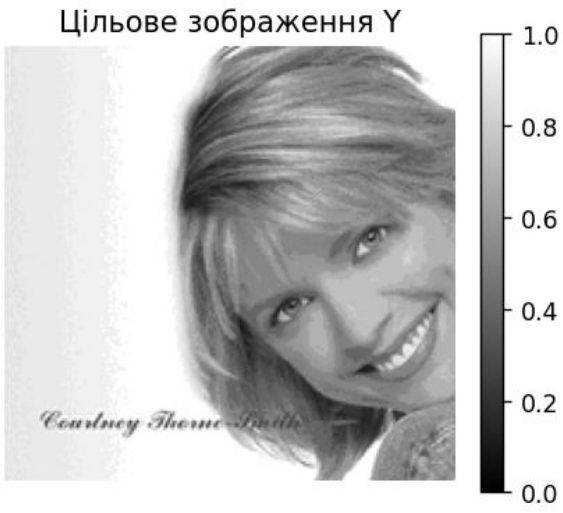
3) Функція `build_operator_and_predict()` для кожного з методів: обчислює псевдообернену $\tilde{X}^{+}$, перевіряє умови Мура–Пенроуза, будує оператор $A=Y\tilde{X}^{+}$, відновлює вихідне зображення, обчислює метрики похибки: L1-норму, MSE та RMSE; фіксує час виконання кожного методу.
4) Отримані результати для методів Мура–Пенроуза та Гревіля зберігаються у вигляді зображень `result_moore_penrose.bmp` та `result_greville.bmp`, що дає можливість якісно оцінити відновлення.

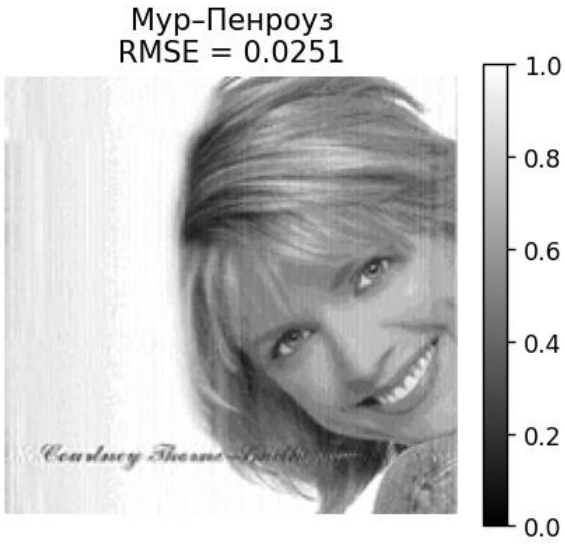
4. Візуалізація результатів: побудова узагальнюючого звіту засобами `matplotlib`.

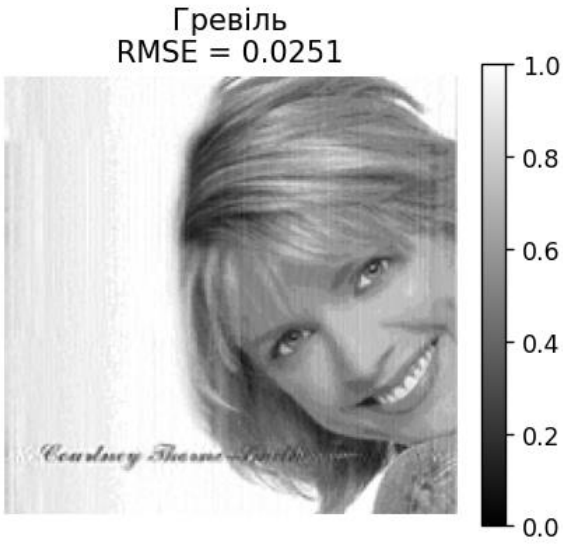
Результат

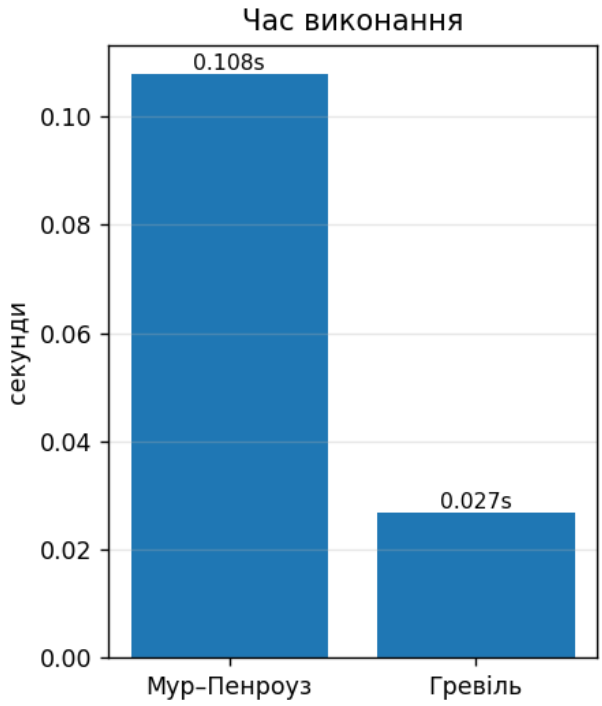
Початкові дані: вхідний сигнал – ***x1.bmp,*** вихідний сигнал – ***y5.bmp.***

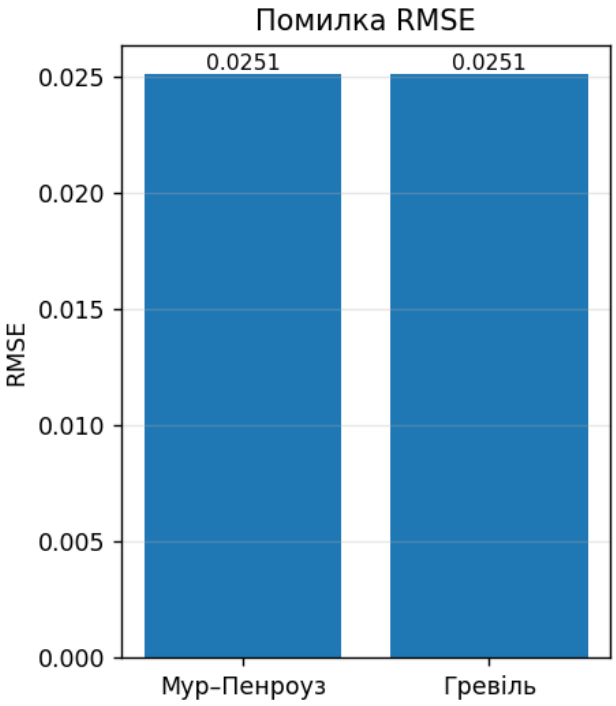


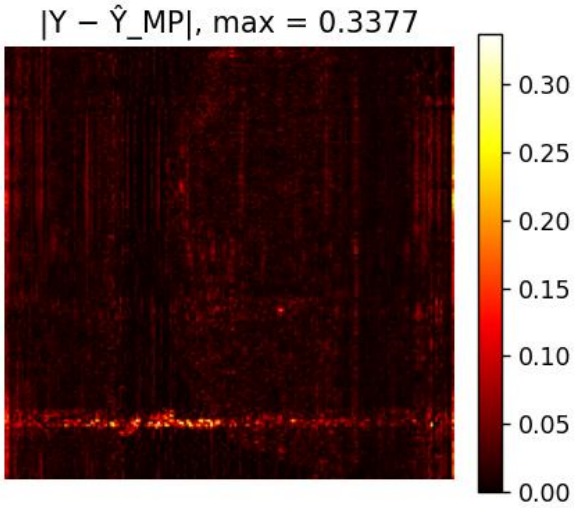


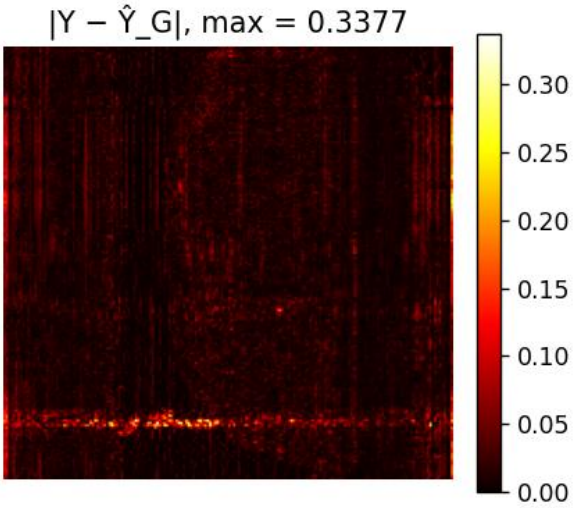













```
=== Метод Мур-Пенроуз ===
Розмір X̃: (141, 188), розмір Y: (181, 188)
Розмір X̃⁺: (188, 141)
Ітерацій: 27
Час: 0.107728 с
Перевірка умов Мура-Пенроуза:
  1) A A⁺ A ≈ A : True
  2) A⁺ A A⁺ ≈ A⁺ : True
  3) A A⁺ симетрична : True
  4) A⁺ A симетрична : True
Розмір оператора A: (181, 141)
Розмір Ŷ: (181, 188)
L1 = 21.892486
MSE = 6.308992e-04
RMSE = 2.511771e-02
```

```
=== Метод Гревіль ===
Розмір X̃: (141, 188), розмір Y: (181, 188)
Розмір X̃⁺: (188, 141)
Ітерацій: 140
Час: 0.026936 с
Перевірка умов Мура-Пенроуза:
  1) A A⁺ A ≈ A : True
  2) A⁺ A A⁺ ≈ A⁺ : True
  3) A A⁺ симетрична : True
  4) A⁺ A симетрична : True
Розмір оператора A: (181, 141)
Розмір Ŷ: (181, 188)
L1 = 21.892486
MSE = 6.308992e-04
RMSE = 2.511771e-02
```

За отриманими результатами можемо побачити, що обидва алгоритми ***відновили вихідне зображення майже з однаковою точністю RMSE ≈ 0.0251***, що свідчить про досить малу похибку та хороше наближення результату до оригінального вихідного сигналу.

Найпомітніша різниця полягає у часі: ***метод Гревіля працює приблизно у чотири рази швидше за метод Мура–Пенроуза***. Така перевага зумовлена конструкцією алгоритму: Мур–Пенроуз використовує інверсії матриць, що "дорого" обчислювально. Гревіль оновлює псевдообернену матрицю поступово, і це більш ефективно при додаванні даних. Отже, за однакової точності метод Гревіля є більш ефективним для практичного використання.