Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра інтелектуальних програмних систем
Чисельні методи в інформатиці

Звіт

з лабораторної роботи №4
«Методи інтерполяції функцій: поліном Ньютона та обернена інтерполяція»

Варіант №1

студентки 3-го курсу
групи ІПС-31
Совгирі Анни

Київ — 2025

Вступ

Метою лабораторної роботи є дослідження інтерполяційних алгоритмів, аналіз точності наближення та формування практичних навичок програмної реалізації чисельних методів. У рамках лабораторної роботи задається аналітична функція $\mathbf{tg}(\boldsymbol{x})$ на відрізку $[\mathbf{-0.5;\ 0.5}]$, за якою формується таблиця з не менше ніж **15 вузлів**. На основі цих даних будується інтерполяційний поліном Ньютона, проводиться обчислювальний експеримент та порівняння отриманих результатів з аналітичним значенням функції.

Також розв'язується задача оберненої інтерполяції: для вибраного значення y, що лежить усередині області значень функції і не входить до таблиці, визначається відповідне значення аргументу x. Усі етапи роботи супроводжуються програмною реалізацією, чисельними обчисленнями та побудовою графічних матеріалів.

Теорія

Інтерполяційний поліном Ньютона

Розділеною різницею першого порядку називається величина:

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i};$$

другого порядку:

$$f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_i, x_{i+1}) - f(x_{i-1}, x_i)}{x_{i+1} - x_{i-1}};$$

(k+1) порядку:

$$f(x_i, \ldots, x_{i+k+1}) = \frac{f(x_{i+1}, \ldots, x_{i+k+1}) - f(x_i, \ldots, x_{i+k})}{x_{i+k+1} - x_i}.$$

Таблиця розділених різниць має вигляд:

$$\begin{array}{c|ccccc}
x_0 & f(x_0) & f(x_0;x_1) & f(x_0;x_1;x_2) & \cdots & f(x_0;x_1;\ldots;x_n) \\
x_1 & f(x_1) & f(x_1;x_2) & f(x_1;x_2;x_3) & \cdots & \\
x_2 & f(x_2) & f(x_2;x_3) & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\
x_n & f(x_n) & & & &
\end{array}$$

На підставі цієї таблиці, використовуючи перший її рядок, можемо записати *інтерполянт Ньютона вперед:*

$$P_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$
$$+\ f(x_0, x_1, \ldots, x_n)(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}),$$

чи скориставшись останнім рядком, дістанемо *інтерполяційну формулу Ньютона назад:*

$$P_n(x) = f(x_n) + f(x_{n-1}; x_n)(x - x_n) + \ldots$$
$$\ldots + f(x_0; x_1; \ldots; x_n)(x - x_n)(x - x_{n-1})\cdots(x - x_1).$$

Зауваження. За $(n+1)$ вузлом можна побудувати інтерполяційний поліном не вище n-го степеня, тобто степінь може бути нижчим. Для визначення степеня інтерполяційного поліному зручно використовувати розділені різниці.

Похибка інтерполяції: для оцінки похибки інтерполяції можна використати оцінку залишкового члена у формі Ньютона:

$$|f(x) - L_n(x)| = \omega(x) f(x, x_0, x_1, \ldots, x_n).$$

Обернена інтерполяція

Нехай функція $y = f(x) \in C[a,b]$, що задана таблично (x_i, y_i), $i = \overline{0,n}$, монотонна. Для знаходження x^* застосовуємо такий алгоритм:

Будуємо за таблицею (x_i, y_i), $i = \overline{0,n}$ таку таблицю: (y_i, x_i), $i = \overline{0,n}$. На підставі останньої таблиці інтерполянт набуває вигляду:

$$L_n(y) = \sum_{i=0}^{n} x_i \frac{\omega_{n+1}(y)}{(y - y_i)\,\omega'_{n+1}(y_i)},$$

де $\omega_{n+1}(y) = (y - y_0)(y - y_1)\cdots(y - y_n)$ та $L(y^*) \approx x^*$.

Залишковий член в цьому випадку утворюється із залишкового члена формули Ньютона, якщо в останньому поміняти місцями x та y, а похідну $f'(x)$ замінити на похідну від оберненої функції. **Похибка інтерполяції** має вигляд:

$$|x - x^*| \le \frac{\widetilde{M}_{n+1}}{(n+1)!}\,|\omega(y^*)|, \qquad \widetilde{M}_{n+1} = \max_{y} \left| \frac{d^{n+1}}{dy^{n+1}} x(y) \right|.$$

Розв'язання

У межах цієї лабораторної роботи розглядається функція

$$f(x) = \mathrm{tg}(x),$$

визначена на відрізку $[-0.5; 0.5]$. Даний проміжок повністю належить області визначення тангенса, оскільки його межі значно віддалені від точок розриву $\frac{\pi}{2} + k\pi$. Завдяки цьому функція на вибраному інтервалі є неперервною.

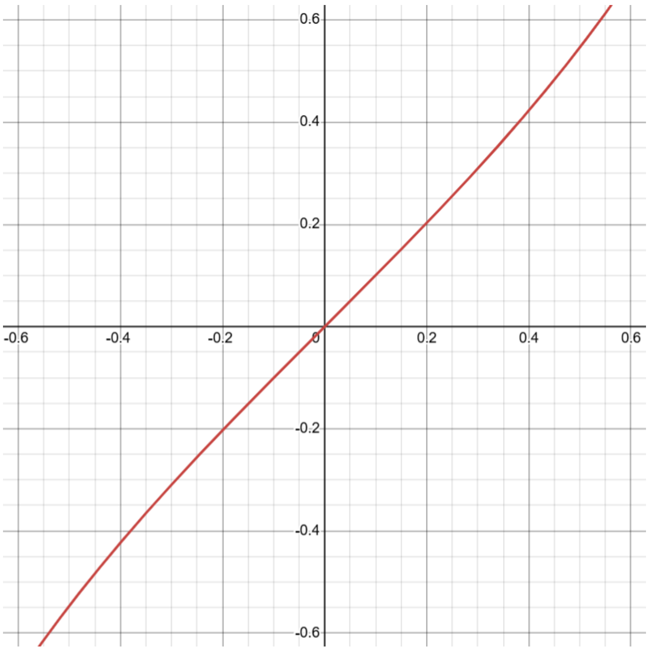

Рис. 1: Графік функції y=tg(x)

Оскільки похідна тангенса має вигляд

$$f'(x) = \sec^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} > 0,$$

то на відрізку $[-0.5;\,0.5]$ вона є додатною для всіх значень x. Це означає, що функція $\operatorname{tg}(x)$ є **строго монотонно зростаючою** на всій області дослідження. Монотонність забезпечує коректність подальшої постановки задачі оберненої інтерполяції та дозволяє однозначно відновлювати значення аргументу за відомими значеннями функції.

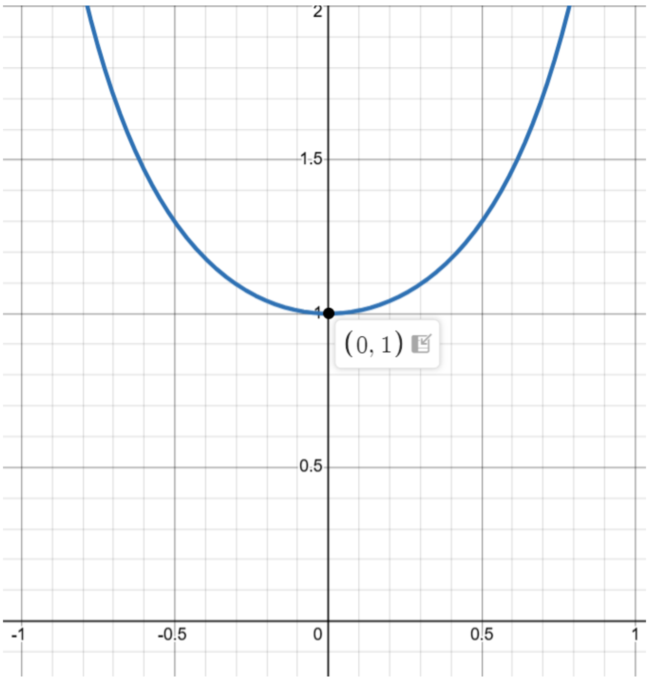

Рис. 2: $f'(x) = \sec^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

Значення функції на межах відрізку становлять:

$$\operatorname{tg}(-0.5) \approx -0.5463, \qquad \operatorname{tg}(0.5) \approx 0.5463,$$

тобто область значень охоплює приблизно $[-0.55;\,0.55]$. Саме всередині цього діапазону можна коректно вибирати значення для задачі оберненої інтерполяції.

Для подальшого чисельного дослідження формується таблиця з 15 вузлів на відрізку $[-0.5;\,0.5]$. Вузли обираються рівновіддалено, що дозволяє рівномірно охопити весь проміжок та отримати достатню густоту точок для побудови інтерполяційного полінома.

0.1 Інтерполяція Ньютона

Для наближення функції $\operatorname{tg}(x)$ на відрізку $[-0.5;\,0.5]$ використано інтерполяційний поліном Ньютона на розділених різницях. Спочатку було обрано 15 рівновіддалених вузлів

$$x_i = -0.5 + i \cdot h, \quad i = \overline{0,14}, \qquad h = \frac{0.5 - (-0.5)}{14} = \frac{1}{14} \approx 0.071428,$$

та обчислено відповідні значення $y_i = \operatorname{tg}(x_i)$. На основі цієї таблиці побудовано таблицю розділених різниць $f[x_i;\ldots;x_j]$ до 14-го порядку.

Перший рядок таблиці розділених різниць містить коефіцієнти інтерполяційного полінома Ньютона. Позначимо

$$c_0 = f[x_0], \quad c_1 = f[x_0, x_1], \quad c_2 = f[x_0, x_1, x_2], \ \ldots, \ c_{14} = f[x_0, x_1, \ldots, x_{14}].$$

Тоді інтерполяційний поліном має вигляд

$$P_{14}(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + c_{14}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{13}),$$

де числові значення коефіцієнтів c_k отримані безпосередньо з першого рядка таблиці розділених різниць.

```
=== Таблиця розділених різниць (вхід: x, вихід: y) ===
i  x[i]         F[0]       F[1]       F[2]       F[3]       F[4]       F[5]       F[6]       F[7]       F[8]       F[9]       F[10]      F[11]      F[12]      F[13]      F[14]
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
0  -0.5000000   -0.5463025 1.2517314  -0.5547469 0.5968327  -0.3490052 0.2929058  -0.1670838 0.1234701  -0.0642690 0.0448265  -0.0199295 0.0146122  -0.0045028 0.0048492  0.0000000
1  -0.4285714   -0.4568931 1.1724818  -0.4268542 0.4971169  -0.2443960 0.2212985  -0.1053488 0.0867450  -0.0354520 0.0305911  -0.0084485 0.0107526  -0.0000000 0.0048492
2  -0.3571429   -0.3731444 1.1115026  -0.3203292 0.4272895  -0.1653608 0.1761490  -0.0619763 0.0664867  -0.0157863 0.0245564  0.0000000  0.0107526  0.0045028
3  -0.2857143   -0.2937514 1.0657413  -0.2287671 0.3800435  -0.1024505 0.1495877  -0.0287330 0.0574659  -0.0000000 0.0245564  0.0084485  0.0146122
4  -0.2142857   -0.2176270 1.0330603  -0.1473292 0.3507720  -0.0490263 0.1372736  -0.0000000 0.0574659  0.0157863  0.0305911  0.0199295
5  -0.1428571   -0.1438370 1.0120133  -0.0721638 0.3367644  0.0000000  0.1372736  0.0287330  0.0664867  0.0354520  0.0448265
6  -0.0714286   -0.0715503 1.0017042  0.0000000  0.3367644  0.0490263  0.1495877  0.0619763  0.0867450  0.0642690
7  0.0000000    0.0000000  1.0017042  0.0721638  0.3507720  0.1024505  0.1761490  0.1053488  0.1234701
8  0.0714286    0.0715503  1.0120133  0.1473292  0.3800435  0.1653608  0.2212985  0.1670838
9  0.1428571    0.1438370  1.0330603  0.2287671  0.4272895  0.2443960  0.2929058
10 0.2142857    0.2176270  1.0657413  0.3203292  0.4971169  0.3490052
11 0.2857143    0.2937514  1.1115026  0.4268542  0.5968327
12 0.3571429    0.3731444  1.1724818  0.5547469
13 0.4285714    0.4568931  1.2517314
14 0.5000000    0.5463025
```

Рис. 3: Програмна реалізація таблиці розділених різниць

```
=== Поліном у формі Ньютона (неспростений) ===
P(x) = -0.546302 + 1.251731(x + 0.500000) - 0.554747(x + 0.500000)(x + 0.428571) + 0.596833(x + 0.500000)(x + 0.428571)(x + 0.357143) - 0.349005(x + 0.500000)(x + 0.428571)(
x + 0.357143)(x + 0.285714) + 0.292906(x + 0.500000)(x + 0.428571)(x + 0.357143)(x + 0.285714)(x + 0.214286) - 0.167084(x + 0.500000)(x + 0.428571)(x + 0.357143)(x + 0.28571
4)(x + 0.214286)(x + 0.142857) + 0.123470(x + 0.500000)(x + 0.428571)(x + 0.357143)(x + 0.285714)(x + 0.214286)(x + 0.142857)(x + 0.071429) - 0.064269(x + 0.500000)(x + 0.42
8571)(x + 0.357143)(x + 0.285714)(x + 0.214286)(x + 0.142857)(x + 0.071429)(x - 0.000000) + 0.044826(x + 0.500000)(x + 0.428571)(x + 0.357143)(x + 0.285714)(x + 0.214286)(x
+ 0.142857)(x + 0.071429)(x - 0.000000)(x - 0.071429) - 0.019930(x + 0.500000)(x + 0.428571)(x + 0.357143)(x + 0.285714)(x + 0.214286)(x + 0.142857)(x + 0.071429)(x - 0.0000
00)(x - 0.071429)(x - 0.142857) + 0.014612(x + 0.500000)(x + 0.428571)(x + 0.357143)(x + 0.285714)(x + 0.214286)(x + 0.142857)(x + 0.071429)(x - 0.000000)(x - 0.071429)(x -
0.142857)(x - 0.214286) - 0.004503(x + 0.500000)(x + 0.428571)(x + 0.357143)(x + 0.285714)(x + 0.214286)(x + 0.142857)(x + 0.071429)(x - 0.000000)(x - 0.071429)(x - 0.142857
)(x - 0.214286)(x - 0.285714) + 0.004849(x + 0.500000)(x + 0.428571)(x + 0.357143)(x + 0.285714)(x + 0.214286)(x + 0.142857)(x + 0.071429)(x - 0.000000)(x - 0.071429)(x - 0.
142857)(x - 0.214286)(x - 0.285714)(x - 0.357143) + 0.000000(x + 0.500000)(x + 0.428571)(x + 0.357143)(x + 0.285714)(x + 0.214286)(x + 0.142857)(x + 0.071429)(x - 0.000000)(
x - 0.071429)(x - 0.142857)(x - 0.214286)(x - 0.285714)(x - 0.357143)(x - 0.428571)

=== Поліном у степеневій формі (спрощений) ===
P(x) = 0.000000x^14 + 0.004849x^13 - 0.000000x^12 + 0.008501x^11 + 0.000000x^10 + 0.021918x^9 - 0.000000x^8 + 0.053965x^7 + 0.133333x^5 + 0.333333x^3 + 1.000000x

=== Перевірка точності інтерполяції у контрольних точках ===
       x              f(x)              P(x)        |f(x)-P(x)|
   -0.5000     -0.5463024898     -0.5463024898   0.0000000000e+00
   -0.2500     -0.2553419212     -0.2553419212   5.7104321272e-13
    0.0000      0.0000000000      0.0000000000   0.0000000000e+00
    0.2500      0.2553419212      0.2553419212   5.7098770156e-13
    0.5000      0.5463024898      0.5463024898   0.0000000000e+00
```

Рис. 4: Поліном у формі Ньютона та спрощений

На основі отриманого полінома обчислювались наближені значення $P_{14}(x)$ у контрольних точках всередині відрізка, які порівнювалися з точними значеннями $\text{tg}(x)$. Абсолютні похибки виявилися малими (порядку 10^{-n} для обраних точок), що підтверджує коректність побудови таблиці розділених різниць та реалізації методу Ньютона. На основі обчислених значень було побудовано графік інтерполяційного полінома та порівняно його з графіком вихідної функції $\text{tg}(x)$ на відрізку $[-0.5; 0.5]$.

0.2 Обернена інтерполяція

Оскільки на відрізку $[-0.5; 0.5]$ функція $\text{tg}(x)$ є строго монотонно зростаючою, задача оберненої інтерполяції коректно сформульована: для будь-якого значення y з області значень функції існує єдиний відповідний аргумент.

Для реалізації методу оберненої інтерполяції початкову табличну функцію (x_i, y_i) було перетворено у вигляд (y_i, x_i).

Далі для послідовності (y_i, x_i) було побудовано таблицю розділених різниць за тим самим алгоритмом, що й у прямій інтерполяції Ньютона. Перший рядок цієї таблиці містить коефіцієнти інтерполяційного полінома для функції $x = Q(y)$, який має вигляд

$$Q_{14}(y) = d_0 + d_1(y - y_0) + d_2(y - y_0)(y - y_1) + \cdots + d_{14}(y - y_0)(y - y_1)\cdots(y - y_{13}),$$

де $d_k = f[y_0, y_1, \ldots, y_k]$ — відповідні розділені різниці з першого рядка побудованої таблиці.

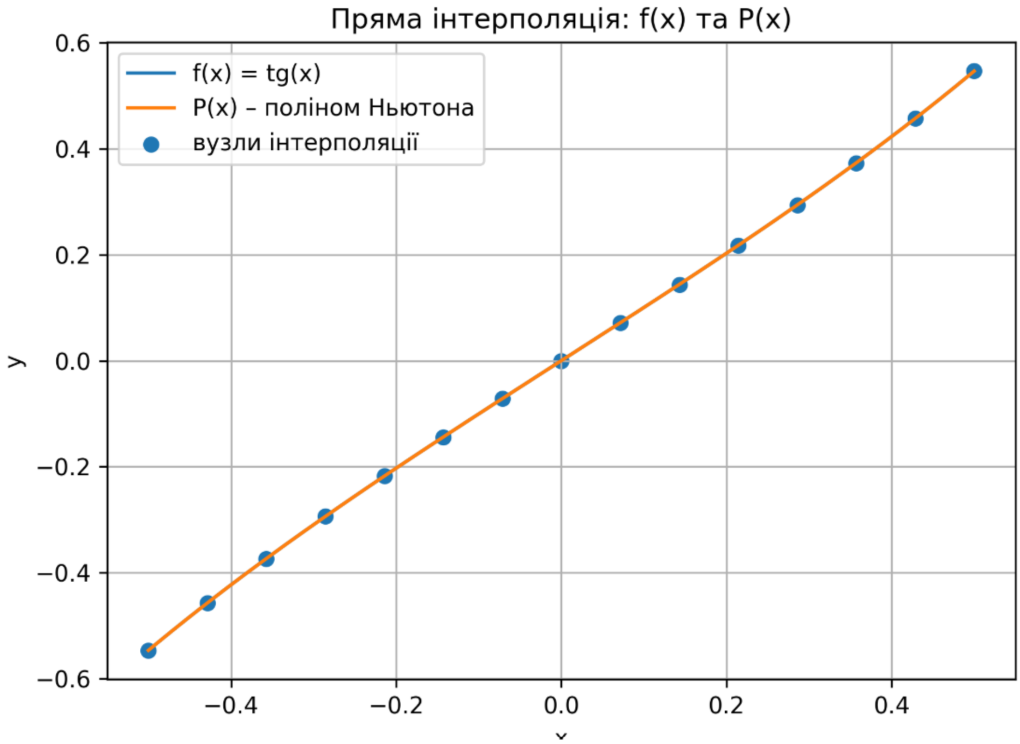

Рис. 5: Порівняння графіків

i	x[i]	F[0]	F[1]	F[2]	F[3]	F[4]	F[5]	F[6]	F[7]	F[8]	F[9]	F[10]	F[11]	F[12]	F[13]	F[14]
0	-0.5463025	-0.5000000	0.7988935	0.3118436	-0.0991085	-0.1868901	-0.0059140	0.1210972	0.0191884	-0.0900686	-0.0034223	0.0700455	-0.0233578	-0.0406667	0.0405372	-0.0000000
1	-0.4568931	-0.4285714	0.8528917	0.2868136	-0.1605347	-0.1892703	0.0515772	0.1315798	-0.0364607	-0.0924304	0.0500876	0.0504237	-0.0607487	0.0000000	0.0405372	
2	-0.3731444	-0.3571429	0.8996830	0.2484031	-0.2197869	-0.1693954	0.1116951	0.1123124	-0.0919865	-0.0586454	0.0879378	-0.0000000	-0.0607487	0.0406667		
3	-0.2937514	-0.2857143	0.9383140	0.1980044	-0.2708756	-0.1277170	0.1616398	0.0647571	-0.1266325	0.0000000	0.0879378	-0.0504237	-0.0233578			
4	-0.2176270	-0.2142857	0.9679977	0.1378155	-0.3083926	-0.0686697	0.1899768	0.0000000	-0.1266325	0.0586454	0.0500876	-0.0700455				
5	-0.1438370	-0.1428571	0.9881293	0.0707009	-0.3282504	-0.0000000	0.1899768	-0.0647571	-0.0919865	0.0924304	-0.0034223					
6	-0.0715503	-0.0714286	0.9982987	0.0000000	-0.3282504	0.0686697	0.1616398	-0.1123124	-0.0364607	0.0900686						
7	0.0000000	0.0000000	0.9982987	-0.0707009	-0.3083926	0.1277170	0.1116951	-0.1315798	0.0191884							
8	0.0715503	0.0714286	0.9881293	-0.1378155	-0.2708756	0.1693954	0.0515772	-0.1210972								
9	0.1438370	0.1428571	0.9679977	-0.1980044	-0.2197869	0.1892703	-0.0059140									
10	0.2176270	0.2142857	0.9383140	-0.2484031	-0.1605347	0.1868901										
11	0.2937514	0.2857143	0.8996830	-0.2868136	-0.0991085											
12	0.3731444	0.3571429	0.8528917	-0.3118436												
13	0.4568931	0.4285714	0.7988935													
14	0.5463025	0.5000000														

Рис. 6: Таблиця розділених різниць для оберненої інтерполяції

```
=== Поліном Q(y) у степеневій формі (наближає arctan(y)) ===
P(y) = -0.000000y^14 + 0.040537y^13 + 0.000000y^12 - 0.081319y^11 - 0.000000y^10 + 0.109821y^9 + 0.000000y^8 - 0.142769y^7 + 0.199997y^5 - 0.333333y^3 + 1.000000y

Перевірка для y* = 0.3:
x_true = arctan(0.3) = 0.2914567945
x_interp (з оберненої інтерполяції) = 0.2914567945
|x_true - x_interp| = 1.0955347740e-11
```

Рис. 7: Поліном для оберненої інтерполяції

Отриманий поліном $Q(y)$ є наближенням до оберненої функції $\arctan(y)$, оскільки саме вона є аналітичним розв'язком рівняння $\mathrm{tg}(x) = y$. Для оцінки точності було обрано значення y з внутрішності області значень функції та обчислено наближене значення, після чого його порівняно з точним значенням.

Отримана абсолютна похибка виявилася дуже малою, що підтверджує коректність побудованого полінома $Q(y)$ та правильність реалізації оберненої інтерполяції.Також, інтерполяційна крива практично збігається з графіком оберненої функції на всьому досліджуваному проміжку.

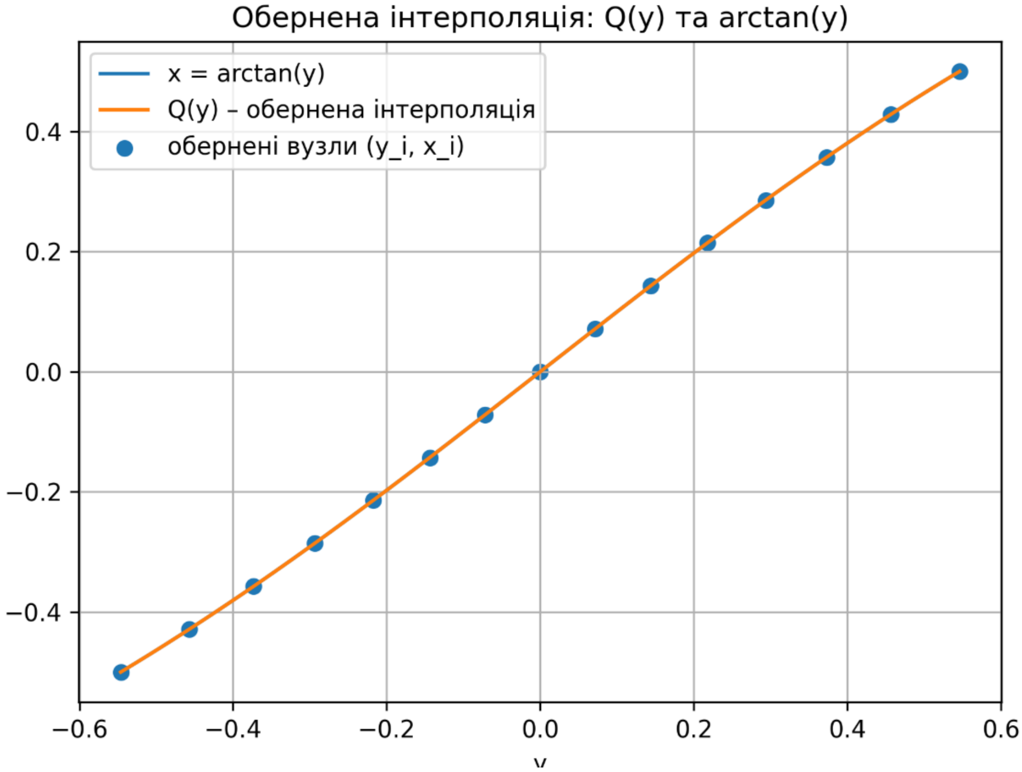

Рис. 8: Поліном для оберненої інтерполяції

Висновок

У роботі було досліджено застосування інтерполяційних методів до функції $\mathrm{tg}(x)$ на відрізку $[-0.5; 0.5]$. Побудований інтерполяційний поліном Ньютона продемонстрував високу точність наближення: числові похибки в контрольних точках виявилися невеликими, а графічне порівняння показало практичний збіг інтерполяційного полінома з вихідною функцією. Монотонність тангенса на цьому проміжку також дала змогу коректно виконати обернену інтерполяцію, отримавши поліном, що наближує функцію $\arctan(y)$. Отримані результати підтверджують ефективність методу розділених різниць та його здатність забезпечувати якісне чисельне наближення як функції, так і її оберненої.