Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра інтелектуальних програмних систем
Чисельні методи в інформатиці

Звіт

з лабораторної роботи №5
«Сплайни»

Варіант №7

студентки 3-го курсу
групи ІПС-31
Совгирі Анни

Київ — 2025

Вступ

У даній лабораторній роботі розглядаються чисельні методи інтерполяції та, зокрема, побудова природного кубічного інтерполяційного сплайна. Сплайни є одним із найпоширеніших інструментів для гладкого наближення функцій, оскільки забезпечують неперервність самої функції, а також її перших і других похідних у всіх вузлах інтерполяції.

Метою роботи є побудова природного кубічного інтерполяційного сплайна для функції

$$f(x) = \tan(x)$$

на відрізку $x \in [-0.5,\, 0.5]$ за тими самими вузлами, що були використані в лабораторній роботі №4.

У межах роботи необхідно:

- сформувати систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів $c_i = S''(x_i)$ згідно з формулами методички;
- розв'язати тридіагональну систему методом прогонки;
- отримати коефіцієнти кубічних поліномів на кожному відрізку;
- побудувати графіки функції, сплайна та їхніх похідних;
- провести чисельне порівняння точного значення функції з інтерполяційним наближенням.

Теорія

Інтерполяційний природний кубічний сплайн

Інтерполяційним природнім кубічним сплайном називається поліном, для якого виконуються умови:

1. $s(x)$ — поліном степеня 3 для $x \in [x_{i-1}, x_i],\ i = \overline{1, n}$;
2. $s(x) \in C^2_{[a;b]}$;
3. $s(x_i) = f(x_i),\ i = \overline{0, n}$;
4. $s''(a) = s''(b) = 0$ — умова природності.

Зауваження. Для побудови інтерполяційного кубічного сплайну можна замість умови 4) використовувати інші умови, але тоді сплайн не буде природнім: $s''(a) = A;\ s''(b) = B$ або $s'(a) = A;\ s'(b) = B$, або умови періодичності: $s(a) = s(b)$, $s'(a) = s'(b)$, $s''(a) = s''(b)$.

Розглянемо формули для побудови інтерполяційного природного кубічного сплайну s_i на проміжку $[x_{i-1}, x_i]$:

$$s_i = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3,$$

де c_i знаходяться з тридіагональної системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$h_i c_{i-1} + 2c_i(h_i + h_{i+1}) + h_{i+1}c_{i+1} = 6\left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}\right),$$

$$c_0 = c_n = 0;$$

решта коефіцієнтів знаходяться за формулами:

$$a_i = f_i, \qquad b_i = \frac{h_i}{2}c_i - \frac{h_i^2}{6}d_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}, \qquad d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i}.$$

Розв'язання

Для побудови природного кубічного інтерполяційного сплайна на відрізку $[a, b] = [-0.5,\ 0.5]$ використаємо $n+1 = 15$ вузлів, рівномірно розподілених на даному проміжку. Крок сітки дорівнює

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{0.5-(-0.5)}{14} = \frac{1}{14} \approx 0.0714286.$$

Отже, значення вузлів x_i та відповідні значення функції $f(x) = \tan(x)$ мають вигляд:

i	x_i	$f_i = \tan(x_i)$
0	-0.500000	-0.546302
1	-0.428571	-0.456893
2	-0.357143	-0.373144
3	-0.285714	-0.293751
4	-0.214286	-0.217622
5	-0.142857	-0.143837
6	-0.071429	-0.071550
7	0.000000	0.000000
8	0.071429	0.071550
9	0.142857	0.143837
10	0.214286	0.217622
11	0.285714	0.293751
12	0.357143	0.373144
13	0.428571	0.456893
14	0.500000	0.546302

Усі кроки $h_i = x_{i+1} - x_i$ є однаковими:

$$h_i = x_{i+1} - x_i = 0.0714286, \qquad i = 0, \ldots, 13.$$

Побудова системи лінійних рівнянь для коефіцієнтів c_i

Згідно з теорією, на кожному внутрішньому вузлі $x_i,\ i = 1, \ldots, n-1$ виконується рівняння

$$h_i c_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})c_i + h_{i+1}c_{i+1} = 6\left(\frac{f_{i+1}-f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}\right),$$

а для природного сплайна додатково маємо граничні умови

$$c_0 = 0, \qquad c_n = 0.$$

У нашому випадку сітка рівномірна, тому $h_i = h_{i+1} = h$, і коефіцієнти при невідомих набувають вигляду

$$h\,c_{i-1} + 4h\,c_i + h\,c_{i+1} = 6\left(\frac{f_{i+1}-f_i}{h} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h}\right), \qquad i = 1, \ldots, 13.$$

Таким чином, будується тридіагональна система лінійних алгебраїчних рівнянь

$$A\mathbf{c}_{\text{in}} = \mathbf{b},$$

де $\mathbf{c}_{\text{in}} = (c_1, \ldots, c_{13})^T$ — вектор внутрішніх коефіцієнтів, а матриця A та вектор $\mathbf{b}$ формуються напряму з наведених вище формул.

```
Матриця A:
  0.285714   0.071429   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000
  0.071429   0.285714   0.071429   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000
  0.000000   0.071429   0.285714   0.071429   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000
  0.000000   0.000000   0.071429   0.285714   0.071429   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000
  0.000000   0.000000   0.000000   0.071429   0.285714   0.071429   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000
  0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.071429   0.285714   0.071429   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000
  0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.071429   0.285714   0.071429   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000
  0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.071429   0.285714   0.071429   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000
  0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.071429   0.285714   0.071429   0.000000   0.000000   0.000000
  0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.071429   0.285714   0.071429   0.000000   0.000000
  0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.071429   0.285714   0.071429   0.000000
  0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.071429   0.285714   0.071429
  0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.071429   0.285714
Вектор b:
b[1] = -0.475497
b[2] = -0.365875
b[3] = -0.274568
b[4] = -0.196086
b[5] = -0.126282
b[6] = -0.061855
b[7] = 0.000000
b[8] = 0.061855
b[9] = 0.126282
b[10] = 0.196086
b[11] = 0.274568
b[12] = 0.365875
b[13] = 0.475497
```

Рис. 1: Система лінійних алгебраїчних рівнянь

Розв'язання СЛАР методом прогонки

Оскільки матриця A є тридіагональною, для розв'язання системи використовується **метод прогонки**. На прямому ході обчислюються допоміжні коефіцієнти α_i та β_i, після чого на зворотному ході послідовно визначаються усі внутрішні значення

$$c_1, c_2, \ldots, c_{13}.$$

Граничні значення відновлюються згідно з умовою природності:

$$c_0 = 0, \qquad c_{14} = 0.$$

У результаті розв'язання СЛАР отримуємо повний набір коефіцієнтів

$$\{c_i\}_{i=0}^{14},$$

які інтерпретуються як значення другої похідної сплайна в вузлах: $c_i = S''(x_i)$.

Обчислення коефіцієнтів поліномів a_i, b_i, c_i, d_i

На кожному відрізку $[x_i, x_{i+1}]$ сплайн подається кубічним поліномом

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3.$$

Коефіцієнти a_i, b_i, d_i обчислюються за формулами з методички:

$$a_i = f_i, \qquad b_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}\left(2c_i + c_{i+1}\right), \qquad d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{h_i},$$

де $h_i = x_{i+1} - x_i$. У програмній реалізації ці формули використовуються без додаткових перетворень: у циклі по $i = 0, \ldots, 13$ для кожного відрізка обчислюються відповідні a_i, b_i та d_i, що повністю визначає сплайн на всьому проміжку $[-0.5, 0.5]$.

```
Коефіцієнти c_i, S''(x_i)):
c[0] = 0.000000
c[1] = -1.477901
c[2] = -0.745359
c[3] = -0.662913
c[4] = -0.446938
c[5] = -0.294539
c[6] = -0.142857
c[7] = 0.000000
c[8] = 0.142857
c[9] = 0.294539
c[10] = 0.446938
c[11] = 0.662913
c[12] = 0.745359
c[13] = 1.477901
c[14] = 0.000000
```

Рис. 2: $c_i = S''(x_i)$

i	a_i	b_i	d_i
0	-0.546302	1.269325	-3.448436
1	-0.456893	1.216543	1.709264
2	-0.373144	1.137141	0.192374
3	-0.293751	1.086846	0.503941
4	-0.217627	1.047208	0.355599
5	-0.143837	1.020727	0.353925
6	-0.071550	1.005106	0.333332
7	0.000000	1.000000	0.333332
8	0.071550	1.005106	0.353925
9	0.143837	1.020727	0.355599
10	0.217627	1.047208	0.503941
11	0.293751	1.086846	0.192374
12	0.373144	1.137141	1.709264
13	0.456893	1.216543	-3.448436

Побудова сплайну

```
ОТРИМАНІ СПЛАЙНИ НА КОЖНОМУ ВІДРІЗКУ:
S_0(x) = -0.546302 + +1.269325 (x - -0.500000) + +0.000000 (x - -0.500000)^2 + -3.448436 (x - -0.500000)^3,   x ∈ [-0.500000, -0.428571]
S_1(x) = -0.456893 + +1.216543 (x - -0.428571) + -0.738950 (x - -0.428571)^2 + +1.709264 (x - -0.428571)^3,   x ∈ [-0.428571, -0.357143]
S_2(x) = -0.373144 + +1.137141 (x - -0.357143) + -0.372680 (x - -0.357143)^2 + +0.192374 (x - -0.357143)^3,   x ∈ [-0.357143, -0.285714]
S_3(x) = -0.293751 + +1.086846 (x - -0.285714) + -0.331457 (x - -0.285714)^2 + +0.503941 (x - -0.285714)^3,   x ∈ [-0.285714, -0.214286]
S_4(x) = -0.217627 + +1.047208 (x - -0.214286) + -0.223469 (x - -0.214286)^2 + +0.355599 (x - -0.214286)^3,   x ∈ [-0.214286, -0.142857]
S_5(x) = -0.143837 + +1.020727 (x - -0.142857) + -0.147269 (x - -0.142857)^2 + +0.353925 (x - -0.142857)^3,   x ∈ [-0.142857, -0.071429]
S_6(x) = -0.071550 + +1.005106 (x - -0.071429) + -0.071428 (x - -0.071429)^2 + +0.333332 (x - -0.071429)^3,   x ∈ [-0.071429, 0.000000]
S_7(x) = 0.000000 + +1.000003 (x - 0.000000) + +0.000000 (x - 0.000000)^2 + +0.333332 (x - 0.000000)^3,   x ∈ [0.000000, 0.071429]
S_8(x) = 0.071550 + +1.005106 (x - 0.071429) + +0.071428 (x - 0.071429)^2 + +0.353925 (x - 0.071429)^3,   x ∈ [0.071429, 0.142857]
S_9(x) = 0.143837 + +1.020727 (x - 0.142857) + +0.147269 (x - 0.142857)^2 + +0.355599 (x - 0.142857)^3,   x ∈ [0.142857, 0.214286]
S_10(x) = 0.217627 + +1.047208 (x - 0.214286) + +0.223469 (x - 0.214286)^2 + +0.503941 (x - 0.214286)^3,   x ∈ [0.214286, 0.285714]
S_11(x) = 0.293751 + +1.086846 (x - 0.285714) + +0.331457 (x - 0.285714)^2 + +0.192374 (x - 0.285714)^3,   x ∈ [0.285714, 0.357143]
S_12(x) = 0.373144 + +1.137141 (x - 0.357143) + +0.372680 (x - 0.357143)^2 + +1.709264 (x - 0.357143)^3,   x ∈ [0.357143, 0.428571]
S_13(x) = 0.456893 + +1.216543 (x - 0.428571) + +0.738950 (x - 0.428571)^2 + -3.448436 (x - 0.428571)^3,   x ∈ [0.428571, 0.500000]
```

Рис. 3: Побудова сплайну

```
Відрізок 1 [-0.500000; -0.428571]:
 S(x) = -3.448436x^3 -5.172653x^2 -1.317001x -0.342694
Відрізок 2 [-0.428571; -0.357143]:
 S(x) = 1.709264x^3 +1.458675x^2 +1.524997x +0.063305
Відрізок 3 [-0.357143; -0.285714]:
 S(x) = 0.192374x^3 -0.166565x^2 +0.944554x -0.005795
Відрізок 4 [-0.285714; -0.214286]:
 S(x) = 0.503941x^3 +0.100493x^2 +1.020856x +0.001472
Відрізок 5 [-0.214286; -0.142857]:
 S(x) = 0.355599x^3 +0.005130x^2 +1.000421x +0.000012
Відрізок 6 [-0.142857; -0.071429]:
 S(x) = 0.353925x^3 +0.004413x^2 +1.000319x +0.000008
Відрізок 7 [-0.071429; 0.000000]:
 S(x) = 0.333332x^3 +0.000000x^2 +1.000003x -0.000000
Відрізок 8 [0.000000; 0.071429]:
 S(x) = 0.333332x^3 +0.000000x^2 +1.000003x +0.000000
Відрізок 9 [0.071429; 0.142857]:
 S(x) = 0.353925x^3 -0.004413x^2 +1.000319x -0.000008
Відрізок 10 [0.142857; 0.214286]:
 S(x) = 0.355599x^3 -0.005130x^2 +1.000421x -0.000012
Відрізок 11 [0.214286; 0.285714]:
 S(x) = 0.503941x^3 -0.100493x^2 +1.020856x -0.001472
Відрізок 12 [0.285714; 0.357143]:
 S(x) = 0.192374x^3 +0.166565x^2 +0.944554x +0.005795
Відрізок 13 [0.357143; 0.428571]:
 S(x) = 1.709264x^3 -1.458675x^2 +1.524997x -0.063305
Відрізок 14 [0.428571; 0.500000]:
 S(x) = -3.448436x^3 +5.172653x^2 -1.317001x +0.342694
```

Рис. 4: Сплайн у зведеному вигляді

Графіки та аналіз результатів

Для аналізу якості інтерполяції було побудовано:

- графік вихідної функції $f(x) = \tan(x)$ та сплайна $S(x)$;
- графік першої похідної $f'(x)$ та похідної сплайна $S'(x)$;
- графік другої похідної $f''(x)$ та другої похідної сплайна $S''(x)$;
- графіки абсолютних похибок: $|f - S|$, $|f' - S'|$, $|f'' - S''|$.

Графіки показують, що на всьому проміжку $[-0.5, 0.5]$ сплайн дуже точно наближує функцію $\tan(x)$: криві $f(x)$ та $S(x)$ практично збігаються. Перша похідна $S'(x)$ також добре відтворює поведінку $f'(x)$, що відповідає гладкості класу C^2, притаманній кубічним сплайнам.

Для другої похідної $S''(x)$ видно характерні «злами» у вузлах, що природно, оскільки $S''(x)$ є кусочно-лінійною функцією. Незважаючи на це, наближення другої похідної є достатньо точним усередині інтервалів.

Аналіз похибок показує:

- похибка $|f - S|$ на всьому проміжку мала (практично нульова), що свідчить про високу точність інтерполяції;
- похибка першої похідної також незначна та рівномірно мала;

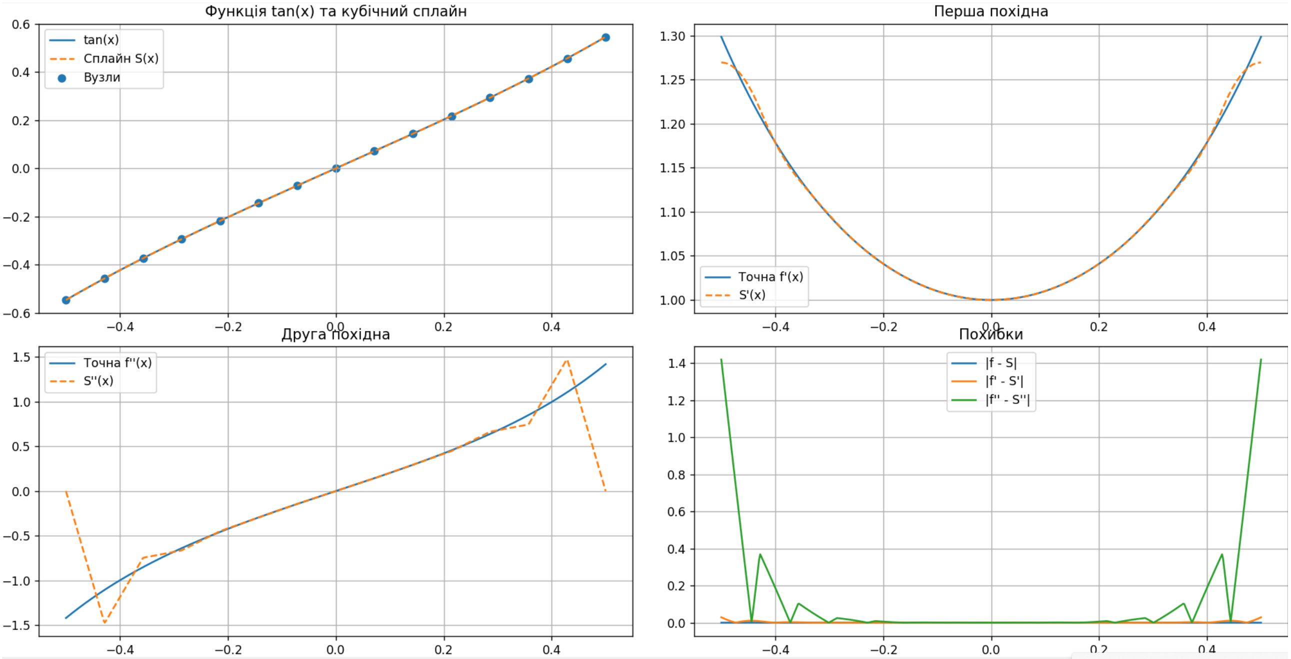

Рис. 5: Графіки вихідної функції, першої та другої похідної

- похибка другої похідної зростає на краях проміжку, що є типовою особливістю природних сплайнів, оскільки на кінцях накладається умова $S''(a) = S''(b) = 0$.

Висновок

У роботі було побудовано природний кубічний інтерполяційний сплайн для функції $f(x) = \tan(x)$ на відрізку $[-0.5, 0.5]$ за заданою системою вузлів. Розв'язавши тридіагональну систему лінійних рівнянь, отримано значення другої похідної сплайна $c_i = S''(x_i)$, що дозволило однозначно визначити всі коефіцієнти кубічних поліномів на кожному підвідрізку.

Графічний аналіз показав, що сплайн дуже точно відтворює функцію $\tan(x)$ та її першу похідну на всьому проміжку. Похибка апроксимації є малою та рівномірною всередині інтервалу, а характерні зростання похибки другої похідної на кінцях відрізку пояснюються умовою природності $S''(a) = S''(b) = 0$.

Отже, природний кубічний сплайн продемонстрував високу точність і стабільність, підтвердивши ефективність сплайнової інтерполяції для наближення функції та її похідних.