Fatec Jales Prof. José Camargo

Centro Paula Souza

GOVERNO DO ESTADO SÃO PAULO

Faculdade de Tecnologia "Professor José Camargo" - Fatec Jales

Fundamentos de Matemática Elementar

Sistemas para Internet

Profª Andrea P. Silva

Fatec Jales Prof. José Camargo

Centro Paula Souza

GOVERNO DO ESTADO SÃO PAULO

Faculdade de Tecnologia "Professor José Camargo" - Fatec Jales

Fundamentos de Matemática Elementar

Matrizes

Matrizes

- Uma matriz é uma estrutura multidimensional a qual pode ser representada por uma tabela de dupla entrada na forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

Linhas

Colunas

onde:

m= número de linhas da matriz A

n= número de colunas da matriz A

m x n é a chamada <u>dimensão</u> da matriz A

Matrizes

- Observações:
  - Uma matriz cujo número de linhas é igual ao número de colunas (m=n) é chamada de **quadrada**:

$$A = \left(a_{i,j}\right) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

Diagonal secundária

Diagonal principal

Matrizes

- **Matrizes especiais:**
  - **Matriz linha:** são as matrizes que possuem somente uma linha:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \end{bmatrix}_{1\times n}$$

  - **Matriz coluna:** são as matrizes que possuem somente uma coluna:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ a_{3,1} \\ \vdots \\ a_{mx1} \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

Matrizes

- **Matrizes especiais:**
  - **Matriz nula:** são as matrizes cujos coeficientes são <u>todos</u> nulos:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m \times n}$$

  - **Matriz diagonal:** são as matrizes quadradas cujos coeficientes fora da diagonal principal são todos nulos:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{3,3} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Matrizes

- **Matrizes especiais:**
  - **Matriz triangular superior:** são as matrizes quadradas cujos coeficientes são <u>todos</u> nulos abaixo da diagonal principal

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

  - **Matriz triangular inferior:** são as matrizes quadradas cujos coeficientes são <u>todos</u> nulos acima da diagonal principal:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Matrizes

- **Matrizes especiais:**
  - **Matriz identidade:** são as matrizes quadradas cujos coeficientes fora da diagonal principal são <u>todos</u> nulos e na diagonal principal são <u>todos</u> iguais a 1:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

Observação: Denotamos as matrizes identidade por I_n.

Exemplos:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3} \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

Matrizes

- **Matrizes especiais:**
  - **Matriz Transposta:** Seja uma matriz real $A_{m\times n} = (a_{i,j})$. A matriz transposta da A é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}_{m\times n} \longrightarrow A^T = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} & \cdots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3,2} & \cdots & a_{m,2} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} & \cdots & a_{m,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & a_{3,n} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}_{n\times m}$$

Ou seja, as linhas da transposta tornam-se colunas e vice e versa.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3} \longrightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

Matrizes

- **Operações com Matrizes**
  - **Multiplicação de um escalar por Matrizes:** Sejam $k \in \mathbb{R}$ e $A_{m\times n} = (a_{i,j})$ uma matriz de números reais. Definimos:

$$k \cdot A = \left(k \cdot a_{i,j}\right) = \begin{bmatrix} k \cdot a_{1,1} & k \cdot a_{1,2} & \cdots & k \cdot a_{1,n} \\ k \cdot a_{2,1} & k \cdot a_{2,2} & \cdots & k \cdot a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot a_{m,1} & k \cdot a_{m,2} & \cdots & k \cdot a_{m,n} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

Exemplo: Seja $A = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 10 & 2/3 \\ 0 & 25 & -12 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 4}$. Determine $3 \cdot A$.

Temos:

$$3 \cdot A = \begin{bmatrix} 3\cdot(-2) & 3\cdot 7 & 3\cdot 10 & 3\cdot\left(2/3\right) \\ 3\cdot 0 & 3\cdot 25 & 3\cdot(-12) & 3\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 21 & 30 & 2 \\ 0 & 75 & -36 & 3 \end{bmatrix}$$

Matrizes

- **Operações com Matrizes**
  - **Adição/Subtração de Matrizes:** Sejam $A_{m\times n} = (a_{i,j})$e $B_{m\times n} = (b_{i,j})$ matrizes de números reais. Definimos:

$$A+B=\left(a_{i,j}+b_{i,j}\right)=\begin{bmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & a_{1,2}+b_{1,2} & \cdots & a_{1,n}+b_{1,n} \\ a_{2,1}+b_{2,1} & a_{2,2}+b_{2,2} & \cdots & a_{2,n}+b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}+b_{m,1} & a_{m,2}+b_{m,2} & \cdots & a_{m,n}+b_{m,n} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

$$A-B=\left(a_{i,j}-b_{i,j}\right)=\begin{bmatrix} a_{1,1}-b_{1,1} & a_{1,2}-b_{1,2} & \cdots & a_{1,n}-b_{1,n} \\ a_{2,1}-b_{2,1} & a_{2,2}-b_{2,2} & \cdots & a_{2,n}-b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}-b_{m,1} & a_{m,2}-b_{m,2} & \cdots & a_{m,n}-b_{m,n} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

Observação: As matrizes envolvidas nessas operações devem ter a mesma dimensão.

Matrizes

- **Exemplos:** Sejam A e B definidas por

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 10 \\ 3 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

Calcule A+B e A-2B. Temos:

$$A + B = \begin{bmatrix} 3+0 & -2+(-1) & 1+0 \\ -1+3 & 0+4 & 5+10 \\ 1+3 & 1+2 & -3+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 15 \\ 4 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Matrizes

Fazendo 2B

$$2B = \begin{bmatrix} 2 \cdot 0 & 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 4 & 2 \cdot 10 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 6 & 8 & 20 \\ 6 & 4 & 18 \end{bmatrix}$$

Temos:

$$A - 2B = \begin{bmatrix} 3 - 0 & -2 - (-2) & 1 - 0 \\ -1 - 6 & 0 - 8 & 5 - 20 \\ 1 - 6 & 1 - 4 & -3 - 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -7 & -8 & -15 \\ -5 & -3 & -21 \end{bmatrix}$$

Matrizes

- **Exercícios**
  - Considerando as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}_{3\times 2} \qquad B = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 2} \qquad C = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 10 & 1/3 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

1. Calcule:
   a) $A + B$
   b) $A - 3C$
   c) $2A - B + 3C$

2. Considerando as matrizes anteriores determine X tal que:

$$X - 3C = B$$

Matrizes

- **Operações com Matrizes**
  - **Multiplicação de Matrizes:** Sejam $A_{m\times n} = (a_{i,j})$ e $B_{n\times p} = (b_{j,k})$ matrizes de números reais. Definimos a multiplicação da matriz A pela matriz B por:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} A^1 \cdot B_1 & A^1 \cdot B_2 & \cdots & A^1 \cdot B_p \\ A^2 \cdot B_1 & A^2 \cdot B_2 & \cdots & A^2 \cdot B_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^m \cdot B_1 & A^m \cdot B_2 & \cdots & A^m \cdot B_p \end{bmatrix}_{m\times p}$$

onde

A^i representa a linha i de A

B_k representa a coluna k de B

e

$$A^i \cdot B_k = a_{i,1} \cdot b_{1,k} + a_{i,2} \cdot b_{2,k} + a_{i,3} \cdot b_{3,k} + \cdots + a_{i,n} \cdot b_{n,k}$$

Matrizes

Exemplo: Sejam *A* e *B* matrizes de números reais dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 3} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

Calcule A · B.

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + (-1)\cdot 0 + 0\cdot 7 & 2\cdot 2 + (-1)\cdot(-3) + 0\cdot 5 \\ 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 3\cdot 7 & 1\cdot 2 + 0\cdot(-3) + 3\cdot 5 \end{pmatrix}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 2+0+0 & 4+3+0 \\ 1+0+21 & 2+0+15 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 22 & 17 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

Matrizes

Exercícios:

1. Sejam A, B e C matrizes reais dadas por:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 3 & 2 & -1\\ 0 & 5 & 3\end{pmatrix}_{3\times 3} \quad B=\begin{pmatrix}4\\ -2\\ 10\end{pmatrix}_{3\times 1} \quad C=\begin{pmatrix}2 & -1 & 7\end{pmatrix}_{1\times 3}$$

Calcule AB, BC, CA e CB

2. Sejam $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 7\end{pmatrix}_{2\times 2}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 10\\ 2 & 5\end{pmatrix}_{2\times 2}$ e $C=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}_{2\times 2}$.

Determine a matriz X tal que $2X - A = BC$.

Referência Bibliográfica

[1] GUIDORIZZI, H. L. **Matemática para Administração**. LTC, 2012.

[2] MUROLO, A. **Matemática aplicada à Administração, Economia e Contabilidade**. Thomson Pioneira, 2004.

[3] SILVA, F C M; ABRAO, M. **Matemática básica para decisões administrativas**. Atlas, 2008.