Potenciação e Radiciação

Profª. Andrea P. Silva

Potenciação

- Definição
  - Definimos a potência de base *a* e expoente n o número a^n (lemos "a elevado a n") tal que:

$$a^n = \begin{cases} 1 & se & n = 0 \\ a & se & n = 1 \\ \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-vezes} & se & n \in \mathbb{N} \\ \underbrace{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a}}_{n-vezes} & se & n \in \mathbb{Z}\_, a \neq 0 \\ \sqrt[q]{a^p} & se & n = \frac{p}{q} \text{ para } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, q > 1 \end{cases}$$

Expoente

Base

Potenciação

- Exemplos:

a) $2^0 = 1, \quad \left(-\frac{1}{5}\right)^0 = 1, \quad \left(\sqrt{2}\right)^0 = 1, \quad (-12)^0 = 1$

b) $2^1 = 2, \quad \left(\frac{1}{5}\right)^1 = \frac{1}{5}, \quad \left(\sqrt{3}\right)^1 = \sqrt{3}, \quad (-10)^1 = -10$

c) $3^2 \quad 3 \cdot 3 = 9,$

$\left(\frac{1}{3}\right)^3 \quad \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27},$

$\left(\sqrt{5}\right)^2 \quad \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5,$

$(-10)^2 = (-10) \cdot (-10) = 100$

Potenciação

- Exemplos:

$$\text{d) } 5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125},$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{\frac{1}{2^2}} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4,$$

$$(-3)^{-4} = \frac{1}{(-3)^4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81},$$

$$(-10)^{-3} = \frac{1}{(-10)^3} = -\frac{1}{1000}$$

Potenciação

- Exemplos:

e) $3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3}$

$$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$9^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{9^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{9^1}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

Potenciação

- Propriedades

1) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad Ex.: 2^2 \cdot 3^2 = (2 \cdot 3)^2 = 36$

2) $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n \quad Ex.: \dfrac{4^3}{2^3} = \left(\dfrac{4}{2}\right)^3 = 2^3 = 8$

3) $a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad Ex.: 5^2 \cdot 5^3 = 5^5 = 3125$

4) $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad Ex.: \dfrac{3^6}{3^4} = 3^{6-4} = 3^2 = 9$

5) $(a^n)^m = a^{n \cdot m} \quad Ex.: (6^2)^4 = 6^{2 \cdot 4} = 6^8 = 1.679.616$

Radiciação

- Definição
  - Definimos a raíz ***n-ésima*** do número ***a***, a expressão:

Índice

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ onde } b^n = a$$

Radicando

  - OBS: O símbolo $\sqrt{}$ é chamado de radical

Radiciação

- Exemplos:

$$a)\ \sqrt{4} = 2,\ \text{pois } 2^2 = 4$$

$$b)\ \sqrt{25} = 5,\ \text{pois } 5^2 = 25$$

$$c)\ \sqrt[3]{8} = 2,\ \text{pois } 2^3 = 8$$

$$d)\ \sqrt[4]{81} = 3,\ \text{pois } 3^4 = 81$$

$$e)\ \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3},\ \text{pois } \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

$$f)\ \sqrt[7]{0} = 0,\ \text{pois } 0^7 = 0$$

$$g)\ \sqrt[5]{-32} = -2,\ \text{pois } (-2)^5 = -32$$

- OBS: Só existem raízes reais de números negativos para raízes de índice ímpar. Caso contrário as raízes são números complexos.

Radiciação

- Propriedades

1) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$ $\quad Ex.: \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3 \times 9} = \sqrt[3]{27} = 3$

2) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ $\quad Ex.: \dfrac{\sqrt[4]{64}}{\sqrt[4]{4}} = \sqrt[4]{\dfrac{64}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$

3) $\sqrt[n]{a^n} = a$ $\quad Ex.: \sqrt[3]{5^3} = 5$

4) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \times p]{a^{m \times p}}$ $\quad Ex.: \sqrt{16} = \sqrt[4]{16^2} = \sqrt[4]{256} = 4$

$Obs: \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[\frac{n}{p}]{a^{\frac{m}{p}}}, \ p \neq 0.$

5) $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p = \sqrt[n]{a^{m \times p}} =$ $\quad Ex.: \left(\sqrt[4]{9}\right)^2 = \sqrt[4]{3^{2 \times 2}} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

6) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \times m]{a}$ $\quad Ex.: \sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt[2 \times 2]{16} = \sqrt[4]{16} = 2$

Potenciação e Radiciação

Exemplos:

1) O número de bactérias em um meio duplica de hora em hora. Se, inicialmente, existem 8 bactérias no meio, quanto será o número de bactérias depois de 10 horas?

Resolução:

No tempo t = 0, o número de bactérias é igual a 8.

No tempo t = 1, o número de bactérias é dado por 8.2 = 16.

No tempo t = 2, o número de bactérias é dado por 8.2.2 = 32.
Assim, no tempo t = x, o número de bactérias é dada por

$$n = 8 \cdot 2^x$$

Logo, ao fim de 10 horas, o número de bactérias será de

$$n = 8 \cdot 2^{10} = 2^3 \cdot 2^{10} = 2^{13}$$

Potenciação e Radiciação

2) O sistema de juros compostos também funciona de forma exponencial. O montante M é a quantia a ser recebida após a aplicação de um capital C, a uma taxa i, durante certo tempo t. No regime de juros compostos, esse montante é calculado pela relação

$$M = C(1 + i)^t$$

Considere um capital de R$ 10.000 aplicado a uma taxa de 12% ao ano durante 4 anos. Qual seria o montante ao final dessa aplicação?

Resolução:

$$M = C(1 + i)^t$$
$$M = 10000(1 + 0{,}12)^4$$
$$M = 10000 \cdot 1{,}12^4$$
$$M = 10000 \cdot 1{,}57352$$
$$M = 15735{,}2$$

Serão resgatados R$ 15.735,20.

Potenciação e Radiciação

Exemplos: 1) Uma cidade tem hoje 20.000 habitantes, e esse número cresce a uma taxa de 3% ao ano. Então:

a) Qual o número de habitantes daqui a 10 anos?

b) Qual seria a taxa de crescimento anual, se daqui a 10 anos o nº de habitantes fosse 30.000?

Potenciação e Radiciação

Resolução:

a) $y = 20.000(1{,}03)^{10} = 26.878$

b) $$30.000 = 20.000(1 + k)^{10}$$

$$(1 + k)^{10} = 1{,}5$$

elevando ambos os membros a expoente 1/10,

$$[(1 + k)^{10}]^{1/10} = (1{,}5)^{1/10}$$

$$(1 + k)^{1} = (1{,}5)^{0{,}1}$$

$$1 + k = 1{,}0414$$

$$k = 0{,}0414 = 4{,}14\%$$

Portanto a taxa de crescimento procurada seria de 4,14%

Potenciação e Radiciação

- Exercícios aplicados:

1) Estudos demográficos feitos em certo país estimaram que sua população daqui a t anos será $p(t) = 50.000(1,05)^t$ habitantes.

a) Qual sua população hoje?

b) Qual sua população daqui a 2 anos?

c) Qual seria a taxa de crescimento anual, se daqui a 2 anos o nº de habitantes fosse 54.080?

2) Suponha que f(t) seja o número de bactérias presentes em uma certa cultura em t minutos, e $f(t) = B.e^{0,035t}$ onde B é uma constante. Se 5.000 bactérias estão presentes após 10 minutos, quantas bactérias estavam presentes inicialmente?

Potenciação e Radiciação

3) Uma pessoa aplicou a importância de R$ 1.000,00 em um fundo de investimento de renda variável que paga juros mensais de 2%, no regime de juros compostos. Então:

a) Qual o montante daqui a 10 meses?

b) Qual seria a taxa, se daqui a 10 meses o montante fosse R$ 1.300,00?

4) Uma cidade tem hoje 50.000 habitantes, e esse número cresce a uma taxa de 2% ao ano. Então:

a) Qual sua população hoje?

b) Qual o número de habitantes daqui a 15 anos?

c) Qual seria a taxa de crescimento anual, se daqui a 15 anos o nº de habitantes fosse 80.000?

Potenciação e Radiciação

5) Numa certa comunidade a propagação de um determinado vírus da gripe foi tal que t semanas após o seu surgimento, f(t) pessoas contraíram a doença, onde

$$f(t) = \frac{45.000}{1 + 224e^{-0,9t}}, \ t \geq 0$$

a) Quantas pessoas tiveram a gripe no surgimento?
b) Quantas pessoas tiveram a gripe após 3 semanas?
c) Quantas pessoas tiveram a gripe após 10 semanas?

Referências Bibliográficas

[1] Gersting, J.L., **Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação.**, ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1995.

[2] Hazzan, S.; Morettin, P.A.; Bussab, W. O., **Introduçao ao Cálculo para Administração, Economia.** Saraiva, 2009.

[3] Iezzi, G. e Murakami, C., **Fundamentos de Matemática Elementar**, vol. 1, ed. Atual, 2005.