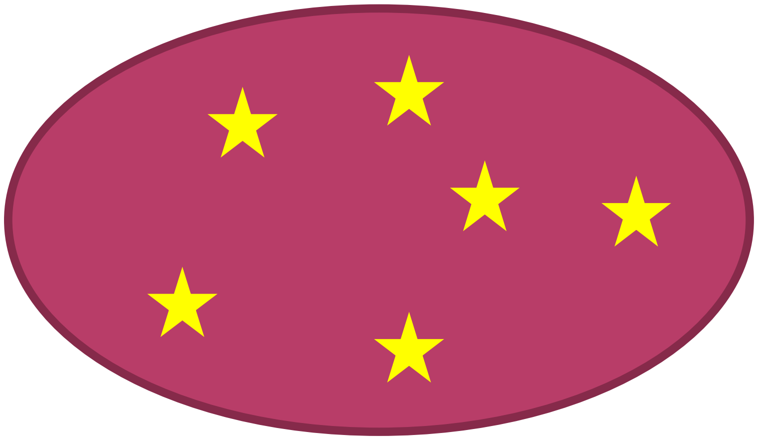
TEORIA DOS CONJUNTOS

Andrea P. Silva

TEORIA DOS CONJUNTOS

- Noções primitivas:
  - Conjunto
  - Elemento
  - Pertinência entre elemento e conjunto



Teoria dos Conjuntos

- Definição de conjunto:
  - Lista ou grupo de dados bem definidos com alguma especificidade entre si
  - Coleção de objetos com alguma característica comum

EXEMPLOS:

1. Conjunto de moedas
2. Conjunto de números pares
3. Conjunto de vogais
4. Conjunto de sapatos
5. Conjunto de soluções para a equação $x - 4 = 0$

Teoria dos Conjuntos

- Elementos de um conjunto:
  - São os componentes que o definem

EXEMPLOS:

1. No conjunto de moedas cada moeda é um elemento
2. O número 2 é um elemento do conjunto dos números pares
3. u é um elemento do conjunto de vogais
4. O número 4 é um elemento do conjunto de soluções para a equação $x - 4 = 0$ (na verdade é o único elemento desse conjunto)

Teoria dos Conjuntos

- Relação de pertinência:
  - Dizemos que um elemento pertence a um conjunto se o mesmo faz parte do conjunto
  - Denotamos por: $a \in B$ (lemos: "*a* pertence a B")
  - Quando um elemento *a* não pertence ao conjunto B escrevemos $a \notin B$ (lemos: "*a* não pertence a B")

EXEMPLOS:

1. O número 2 pertence ao conjunto dos números pares
2. *a* pertence ao conjunto das vogais
3. 6 não pertence ao conjunto de soluções para a equação $x - 4 = 0$

Teoria dos Conjuntos

- Descrição de um conjunto:
  - Podemos descrever um conjunto através da enumeração de seus elementos, separados por vírgula e delimitados por chaves

EXEMPLOS:

1. {a, e, i, o, u}
2. {verde, amarelo, azul, branco}
3. {..., -4, -2, 0, 2, 4, ...}

  - Geralmente nomeamos por letras maiúsculas do alfabeto latino

EXEMPLOS:

1. A = {a, e, i, o, u}
2. K = {verde, amarelo, azul, branco}
3. P = {..., -4, -2, 0, 2, 4, ...}

Teoria dos Conjuntos

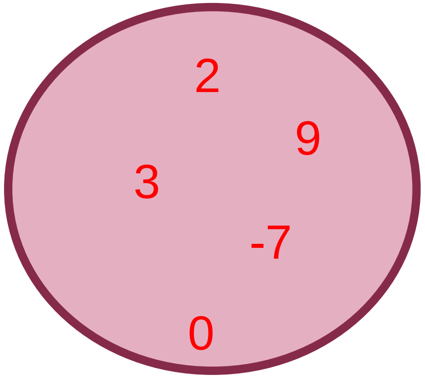
- Descrição de um conjunto:
  - Também podemos descrever os conjuntos por uma propriedade a ele referente ou mesmo uma lei que o define

EXEMPLOS:

1. A = vogais do alfabeto
2. K = Cores da bandeira brasileira
3. P = $\{x \mid x \text{ é par}\}$
4. S = $\{x \mid x \text{ é solução de } x - 4 = 0\}$
5. V = $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 5\}$

Teoria dos Conjuntos

- Representações dos conjuntos:
  - Podemos representar os conjuntos por:
    - Diagramas de Venn-Euler



    - Intervalos

EXEMPLOS:

1. $V = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 5\} = (0,5)$
2. $W = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 10\} = [10,+\infty)$

Teoria dos Conjuntos

- Conjuntos especiais
  - Conjunto vazio
    - ✓ É aquele que não possui elementos
    - ✓ É denotado por { } ou $\varnothing$
  - Conjunto unitário
    - ✓ É aquele que possui somente um elemento
    - ✓ Exemplos: A={2}, S = {x | x é solução de x – 4 = 0}, E = $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 10 \text{ e } x \leq 10\}$
  - Conjunto universo
    - ✓ É aquele que possui todos os elementos referentes a um determinado assunto a ser tratado no estudo
    - ✓ É denotado por U
    - ✓ Exemplos: Se estivermos estudando as soluções de equações de primeiro grau, U = $\mathbb{R}$

Teoria dos Conjuntos

- Conjuntos iguais
  - Dados dois conjuntos A e B dizemos que A = B se, e somente se, todos os elementos que pertencem a A também pertencem a B e reciprocamente todos os elementos de B também pertencem a A.
  - Simbolicamente escrevemos:

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

EXEMPLOS:

a) {1,3,5,7,9} = {3, 3, 1, 7, 7, 7, 9, 5, 5}

b) Para A = {x | x é par} e B = $\{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2y,\ y \in \mathbb{Z}\}$ temos A = B

OBS:

1) Observemos do exemplo a) que a ordem não é relevante nem tampouco a repetição de elementos.

2) Pela observação anterior a repetição de elementos em um conjunto é algo inútil.

Teoria dos Conjuntos

- Subconjuntos
  - Dados dois conjuntos A e B dizemos que A é um subconjunto de B se, e somente se, todos os elementos que pertencem a A também pertencem a B (nesse caso a recíproca não necessariamente deve ser verdadeira)
  - Simbolicamente escrevemos: $A \subset B$ (ou $B \supset A$) e lemos "A está contido em B" (ou "B contém A")

EXEMPLOS:

a) Sejam $A = \{1,3,5\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, temos que $A \subset B$.

b) Para $A = \{x \mid x > 0$ e x é par$\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2y, y \in \mathbb{Z}\}$ temos $A \subset B$

c) Para $A = \{1,3,5,7,9\}$ e $B = \{3, 3, 1, 7, 7, 7, 9, 5, 5\}$ temos que $A \subset B$ e $B \subset A$

OBS:

1) Observemos do exemplo c) que $A = B$ se, e somente se, $A \subset B$ e $B \subset A$.

2) Se A não está contido em B escrevemos $A \not\subset B$.

Teoria dos Conjuntos

- Propriedades da inclusão
  - Sendo A, B e C três conjuntos quaisquer, valem as seguintes propriedade:

    1. $\varnothing \subset A$
    2. $A \subset A$ (reflexiva)
    3. Se $A \subset B$ e $B \subset A \Rightarrow A = B$ (anti-simétrica)
    4. Se $A \subset B$ e $B \subset C \Rightarrow A \subset C$ (transitiva)

Teoria dos Conjuntos

- Conjunto das partes
  - Dado um conjunto A, definimos o conjunto das partes de A e denotamos por P(A) o conjunto formado por todos os subconjuntos de A.
  - Simbolicamente: $P(A) = \{X \mid X \subset A\}$

EXEMPLO: Seja $A = \{1,3,5\}$.

Temos $P(A) = \{\{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1,3\}, \{1,5\}, \{3, 5\}, \{1, 3, 5\}$ e $\varnothing\}$

OBS:

1. A cardinalidade de A, denotada por #A é o número de elementos de A e #P(A) é $2^{\#A}$
2. No exemplo anterior temos que $\#P(A) = 2^3 = 8$

EXERCÍCIOS

1. Dados os conjuntos $A = \{a,b,c\}$, $B = \{a\}$, $C = \{1,2,3,4\}$, $D = \{1,2\}$, $E = \{5,6,7\}$, $F = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) $a \in A$ ( )

b) $a \in B$ ( )

c) $c \notin A$ ( )

d) $d \notin B$ ( )

e) $b \notin B$ ( )

f) $c \in A$ ( )

g) $C \subset D$ ( )

h) $E \subset F$ ( )

i) $\{7,7,5, 1,1\} \subset F$ ( )

j) $A \subset D$ ( )

k) $5 \in B$ ( )

l) $\{3,1,2\} = C$ ( )

m) $b \notin A$ ( )

n) $\{a\} \subset B$ ( )

o) $A = B$ ( )

p) $\{b\} \not\subset A$ ( )

q) $D \subset E$ ( )

r) $F \subset C$ ( )

s) $F = E$ ( )

t) $\{a,b, b,c\} = A$ ( )

EXERCÍCIOS

2. Seja $U = \left\{-2,1,0,\frac{1}{2},\frac{3}{4},2,\frac{10}{3},4,-5\right\}$. Explicitar os elementos de cada um dos conjuntos seguintes:

a) $\{x \in U | x < 0\}$

b) $\{x \in U | 2 < x < 3\}$

c) $\{x \in U | 2x - 1 = 3x + 4\}$

d) $\{x \in U | x - 4 < 0\}$

3. Seja $U = \left\{-1,\frac{1}{2},2,\frac{1}{3},4,5\right\}$. Verifique se são ou não iguais os seguintes pares A e B de conjuntos:

a) $\mathrm{A} = \{x \in U | x + 1 = 3\}$ e $\mathrm{B} = \{x \in U | 2x - 3 = 1\}$

b) $\mathrm{A} = \{x \in U | x < 0\}$ e $\mathrm{B} = \{x \in U | x + 1 = 0\}$

c) $\left\{x \in U \middle| x > \frac{1}{2}\right\}$ e $\mathrm{B} = \{x \in U | x < 5\}$

Teoria dos Conjuntos

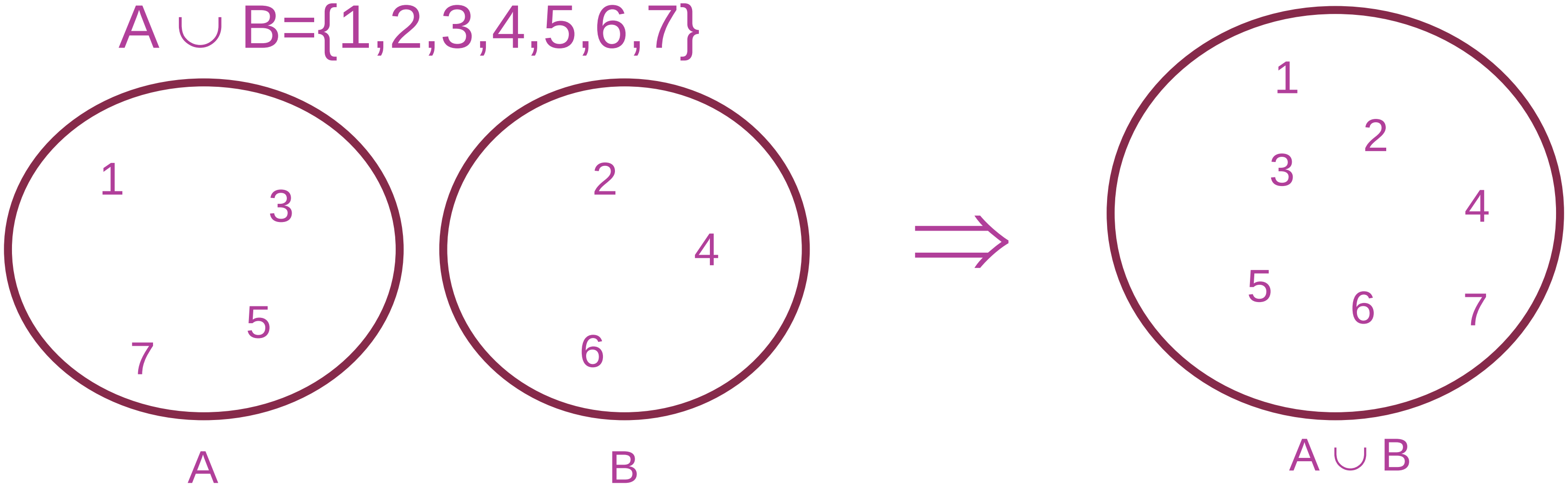
- Operações com conjuntos
  - União
  - Interseção
  - Diferença
  - Complementar

Teoria dos Conjuntos

- União de conjuntos (∪)
  - A união dos conjuntos A e B é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a A ou a B ou a ambos.
  - **Notação:** $A \cup B$

EXEMPLO: Sejam A={1,3,5,7} e B={2,4,6} então

$A \cup B=\{1,2,3,4,5,6,7\}$



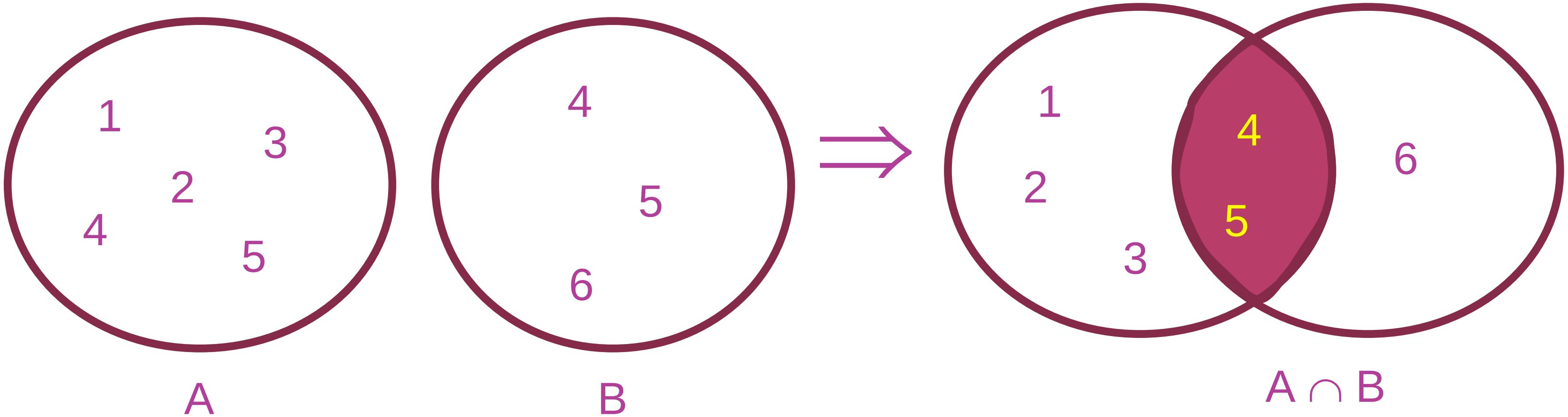
OBS: Dois ou mais conjuntos que não possuem elementos em comum são chamados de disjuntos.

Teoria dos Conjuntos

- Interseção de conjuntos ($\cap$)
  - A interseção dos conjuntos A e B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e B simultaneamente.
  - **Notação:** $A \cap B$

EXEMPLO: Sejam A={1,2,3,4,5} e B={4,5,6} então

$A \cap B=\{4,5\}$

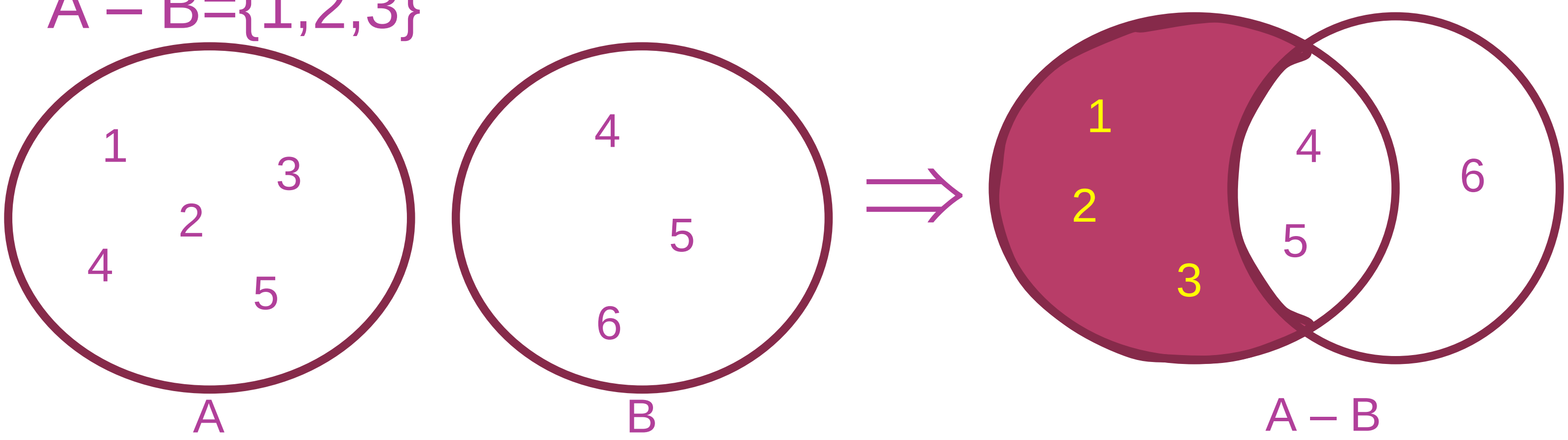


Teoria dos Conjuntos

- Diferença entre conjuntos (–) ou conjunto diferença
  - A diferença entre o conjuntos A e B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A mas não pertencem a B.
  - **Notação:** A – B

EXEMPLO: Sejam A={1,2,3,4,5} e B={4,5,6} então

A – B={1,2,3}

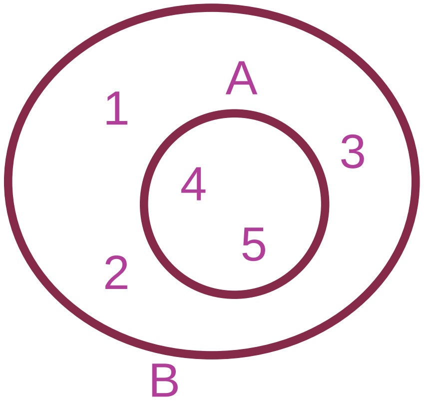


Teoria dos Conjuntos

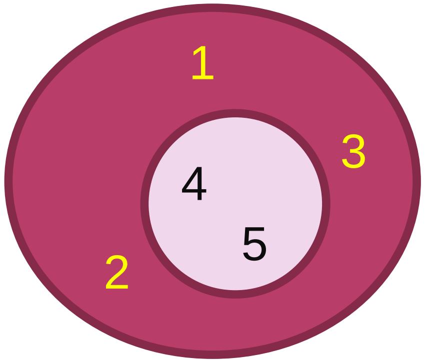
- Complementar de um conjuntos
  - Sejam os conjuntos A e B, com $A \subset B$. Chamamos de complementar de A em relação a B o conjunto formado pelos elementos que faltam em A para que A = B, ou simplesmente B – A.
  - **Notação:** C_B^A

EXEMPLO: Sejam B={1,2,3,4,5} e A={4,5} então

$$C_B^A = B - A = \{1, 2, 3\}$$



$\Rightarrow$



Teoria dos Conjuntos

- Aplicações
  1. Uma empresa entrevistou 300 de seus funcionários a respeito de três embalagens A, B, C para o lançamento de um novo produto. O resultado foi o seguinte:

  160 indicaram a embalagem A;

  120 indicaram a embalagem B;

  90 indicaram a embalagem C;

  30 indicaram as embalagens A e B;

  40 indicaram as embalagens A e C;

  50 indicaram as embalagens B e C;

  10 indicaram as 3 embalagens.

Pergunta-se:

a) Dos funcionários entrevistados, quantos não tinham preferência por nenhum dos três?

b) Quantos não indicaram a embalagem C?

c) Quantos não indicaram as embalagens B ou C?

d) Quantos indicaram apenas a embalagem A?

Teoria dos Conjuntos

- Aplicações

  2. Numa cidade são consumidos três produtos A, B e C. Feito um levantamento do mercado sobre o consumo desses produtos, obteve-se o resultado disposto na tabela abaixo:

Produtos	Número de Consumidores
A	150
B	200
C	250
A e B	70
A e C	90
B e C	80
A, B e C	60
Nenhum dos três	180

Pergunta-se:

a) Quantas pessoas consomem apenas o produto A?
b) Quantas pessoas consomem o produto A ou o produto B ou o produto C?
c) Quantas pessoas consomem o produto A ou o produto B?
d) Quantas pessoas consomem apenas o produto C?
e) Quantas pessoas foram consultadas?

Teoria dos Conjuntos

- Conjuntos Numéricos

- Intervalos de números reais

Teoria dos Conjuntos

- Conjuntos Numéricos
  - Conjuntos dos números naturais $\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

  - Conjuntos dos números inteiros $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Teoria dos Conjuntos

- Conjuntos dos números racionais $\mathbb{Q}$
  - São os números que podem ser escritos na forma de fração

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \middle| p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

EXEMPLOS:

$$-\frac{23}{50};\ \frac{1}{8};\ 0{,}333\ldots;\ 0{,}125;\ \frac{1}{4};\ 0{,}25$$

Teoria dos Conjuntos

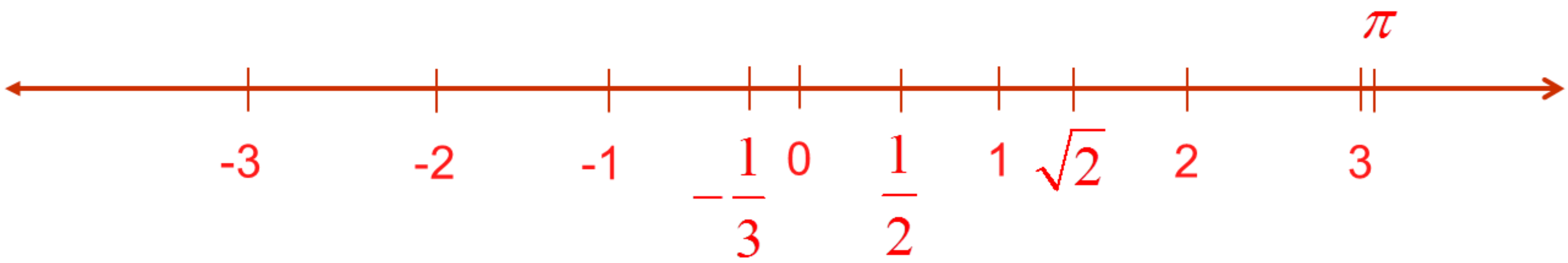
- Conjuntos dos números irracionais I
  - São os números que <u>não</u> podem ser escritos na forma de fração (ou o conjunto todas as decimais infinitas não periódicas)

EXEMPLOS:

$$\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots;$$
$$\sqrt{3} = 1{,}7320508076\ldots;$$
$$\pi = 3{,}14159265\ldots;$$
$$e = 2{,}7182818285\ldots;$$
$$\ldots$$

Teoria dos Conjuntos

- Conjuntos dos números reais $\mathbb{R}$
  - $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathrm{I}$
  - São todos os números que podem ser representados em uma reta, chamada reta real



Teoria dos Conjuntos

- Intervalos
  - Os intervalos são uma forma de representação bastante utilizada quando desejamos representar “partes” da reta real
  - Podem ser
    - abertos ( )
    - Fechados [ ]
    - Semi-abertos ( ] ou [ )

Teoria dos Conjuntos

- Intervalos
  - Intervalo fechado: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$

  - Intervalo aberto: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$

Teoria dos Conjuntos

- Intervalos
  - ➢ Intervalo fechado à esquerda:

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$$

  - ➢ Intervalo aberto à esquerda :

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$$

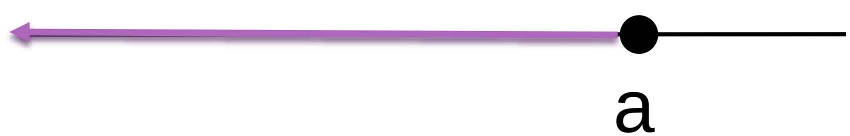
Teoria dos Conjuntos

- Intervalos infinitos

$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\}$

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$

$(-\infty, \mathrm{a}] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\}$

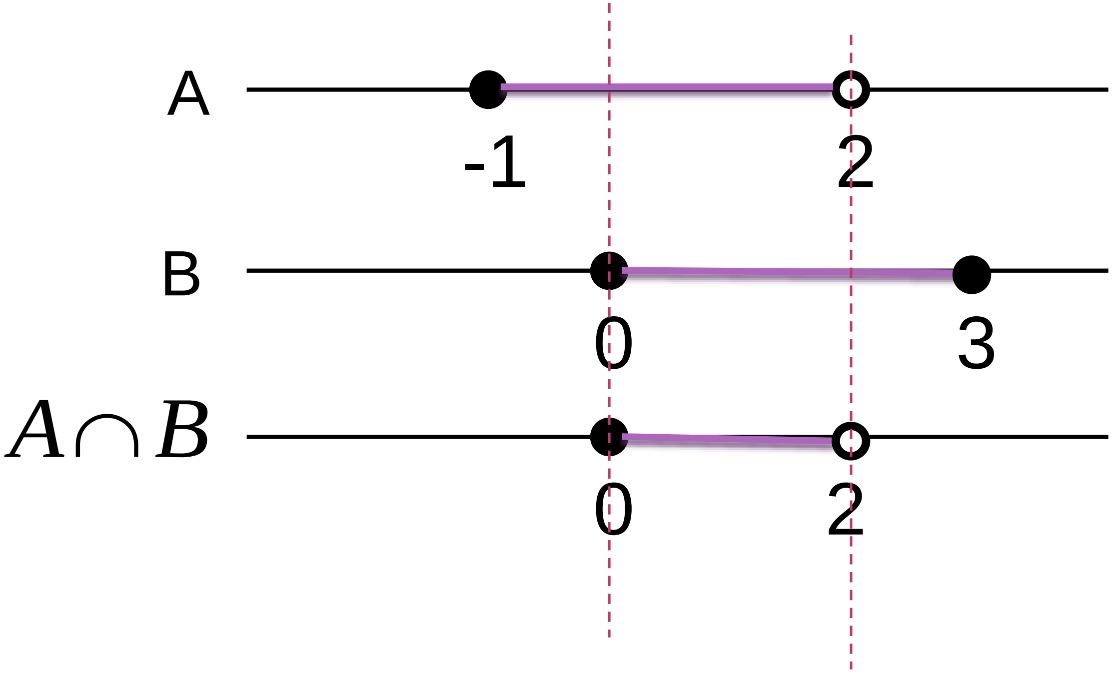


$(-\infty, \mathrm{a}) = \{x \in \mathbb{R} | x < a\}$

$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

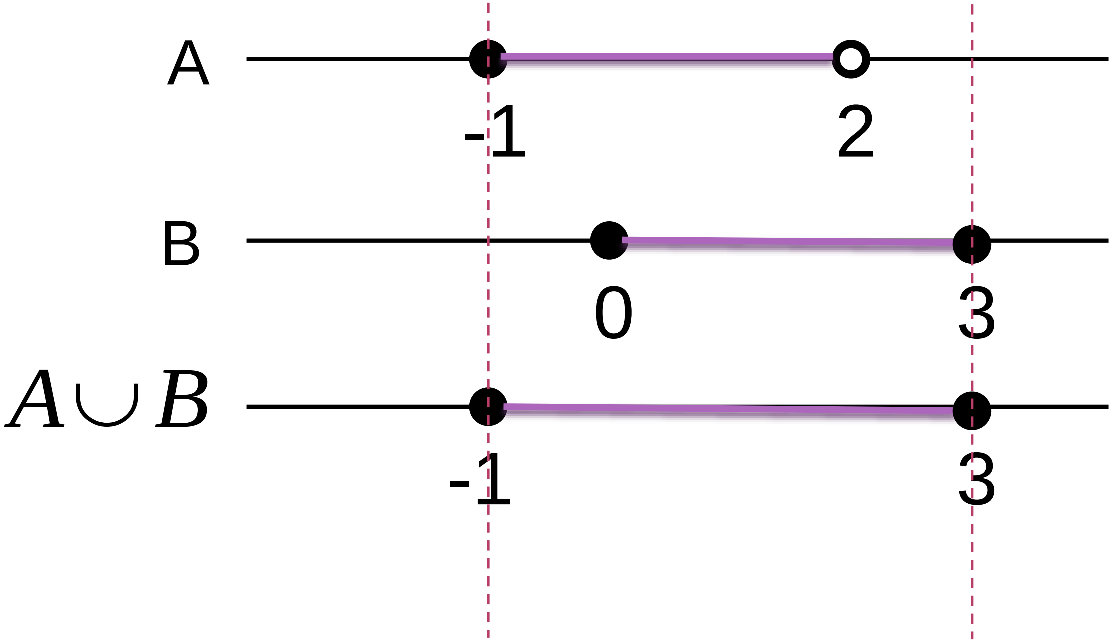
Teoria dos Conjuntos

- Interseção de intervalos
  - Sejam A=[-1,2) e B=[0,3]



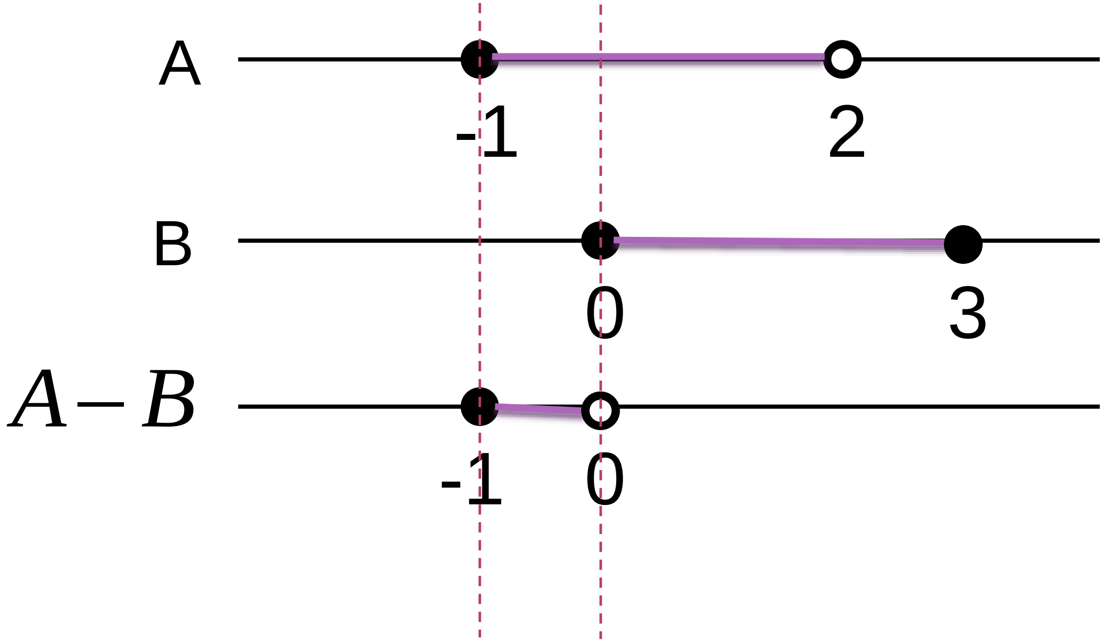
Teoria dos Conjuntos

- União de intervalos
  - Sejam A=[-1,2) e B=[0,3]



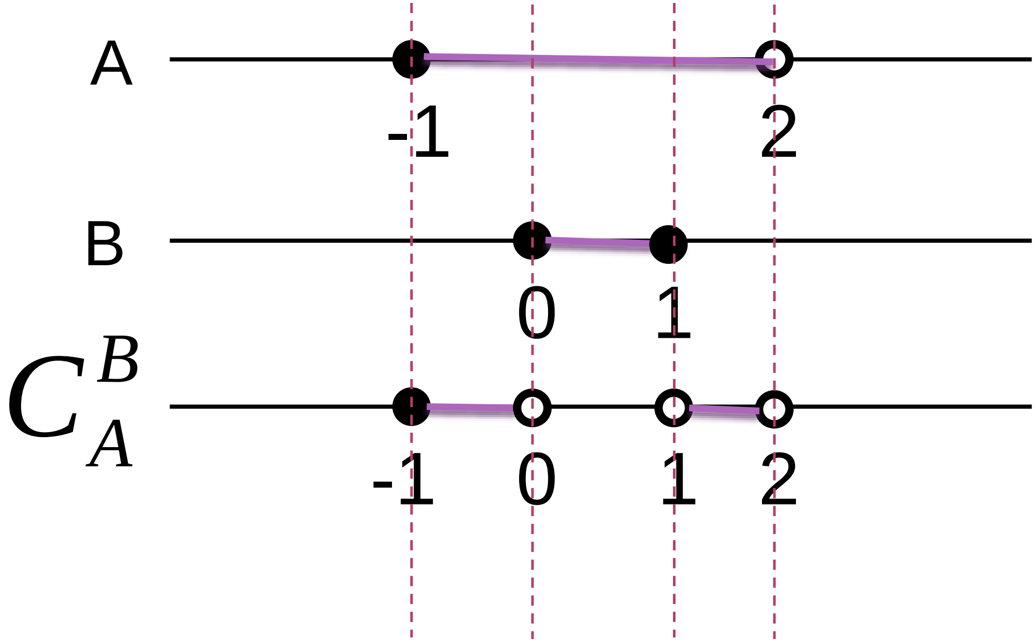
Teoria dos Conjuntos

- Diferença de intervalos
  - Sejam A=[-1,2) e B=[0,3]



Teoria dos Conjuntos

- Complementar entre intervalos
  - Sejam A=[-1,2) e B=[0,1]



  - Ou seja: $[-1,0)\cup(1,2)$

Teoria dos Conjuntos

- Exercícios

Considerando os intervalos A=[-2,3), B=(0,2) e C=[-1,1], determine:

a. $A \cap B$

b. $A \cup C$

c. $A \cup B$

d. $B \cap C$

e. $(A \cap B) \cup (B \cap C)$

f. $(A - B)$

g. C_A^B

h. $C_{\mathbb{R}}^A$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Iezzi, G. e Murakami, C., **Fundamentos de matemática Elementar**, vol. 1, ed. Atual, 2005.

[2] Silva, S. M.; Silva, E. M. e Silva, E. M., **Matemática: para os cursos de economia, administração, ciências contábeis**, ed. Atlas, 2010.