

Fundamentos de Matemática Elementar

Sistemas para Internet

Profª Andrea P. Silva

Fundamentos de Matemática Elementar

Equações de 1º e 2º grau

Equações de 1º Grau

- Uma equação é uma igualdade entre duas sentenças ou proposições

Uma equação do 1º grau em x é dada por

$$ax + b = 0$$

onde a e b são números reais com $a \neq 0$.

Exemplos:

a) $2x + 4 = 0$ onde $a = 2$ e $b = 4$

b) $2x = -4$

c) $x + 3 = 0$ onde $a = 1$ e $b = 3$

- As equações dos exemplos a) e b) são equivalentes

Equações de 1º Grau

- Uma equação não é considerada de 1º grau na variável x quando em seus termos aparecem ou a variável em potências maiores que 1

$$3x^2 + 2x = 5x - 7$$

$$x^3 + 3x^2 - 10x = 1$$

- Ou com expressões não-lineares como raízes, trigonométricas (seno, cosseno, etc.), logarítmicas, exponenciais, etc.

$$\text{sen}(x) + 2\log_2 x = \frac{1}{x}$$

$$2^{3x+1} + \cos(x) = 1$$

Equações de 1º Grau

- Como resolver uma equação de 1º grau
 - Resolver uma equação significa determinar valor(es) para a(s) incógnita(s) de modo que a igualdade seja satisfeita
 - **Exemplo:** Na equação $2x + 4 = 0$ se considerarmos $x = -2$

teremos

$$2 \cdot (-2) + 4 = 0 \Leftrightarrow -4 + 4 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

- Em uma equação o primeiro lado a esquerda da igualdade é chamado de 1º membro e o lado direito de 2º membro. Assim, o objetivo de se resolver uma equação é determinar para qual(ais) valor(es) de x os dois membros da equação se igualam, ou, têm o mesmo valor.

Equações de 1º Grau

- Como resolver uma equação de 1º grau
 - Podemos utilizar duas **regras básicas** para se resolver uma equação de 1º grau na variável x que são:
 - 1) Em uma equação podemos adicionar ou subtrair um número real em ambos os membros da equação sem alterar a solução da mesma
 - **Exemplo:** Consideremos a equação do exemplo anterior

$$2x + 4 = 0$$

Se adicionarmos -4 (ou subtrairmos 4) em ambos os membros, teremos

$$2x + 4 - 4 = 0 - 4 \Leftrightarrow 2x = -4$$

A solução $x = -2$ continua válida

Equações de 1º Grau

- Como resolver uma equação de 1º grau
 - Continuando as regras básicas:
 - 2) Em uma equação podemos multiplicar ou dividir um número real diferente de zero em ambos os membros da equação sem alterar a solução da mesma
 - Exemplo: Consideremos a equação do exemplo anterior

$$2x = -4$$

Se dividirmos por 2 (ou multiplicarmos por $\frac{1}{2}$) ambos os membros, teremos

$$2x(\div 2) = -4(\div 2) \Leftrightarrow x = -4$$

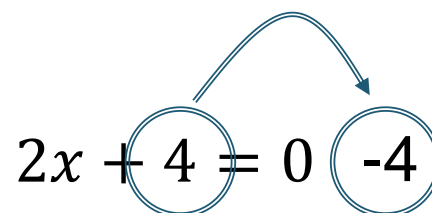
Equações de 1º Grau

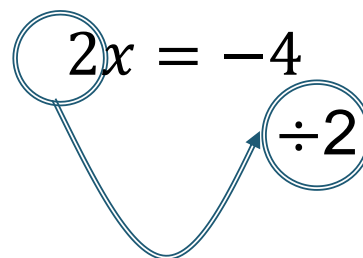
- Como resolver uma equação de 1º grau
 - Assim podemos sintetizar essas duas propriedades da seguinte forma:
 1. Se quisermos movimentar um número que está sendo somado do 1º membro da equação para o 2º, “passamos” ele para o 2º membro subtraindo
 2. Se quisermos movimentar um número que está sendo subtraído do 1º membro da equação para o 2º, “passamos” ele para o 2º membro adicionando
 3. Se quisermos movimentar um número que está sendo multiplicado do 1º membro da equação para o 2º, “passamos” ele para o 2º membro dividindo
 4. Se quisermos movimentar um número que está sendo dividido do 1º membro da equação para o 2º, “passamos” ele para o 2º membro multiplicando

Equações de 1º Grau

- Como resolver uma equação de 1º grau

Consideremos

$$2x + 4 = 0$$


$$2x = -4$$


Então

$$x = \frac{-4}{2} \Leftrightarrow x = -2$$

Equações de 1º Grau

- **Exercícios** – Resolver as equações:

1) $3x - 24 = 0$

2) $3t - 4 = 8$

3) $2x - 3 = 4x - 5$

4) $4(y - 2) = 5y$

5) $\frac{2}{3}x = \frac{4}{5}$

6) $0,5x - 7 = -5$

Equações de 2º Grau

Uma equação do 2º grau em x é dada por

$$ax^2 + bx + c = 0$$

onde a, b e c são números reais com $a \neq 0$.

- a, b e c são chamados de coeficientes da equação

Exemplos:

- $2x^2 + x + 15 = 0$ $a = 2, \quad b = 1 \text{ e } c = 15$
- $-x^2 + x + 1 = 0$ $a = -1, \quad b = 1 \text{ e } c = 1$
- $x^2 + 0,5x + 2 = 0$ $a = 1, \quad b = 0,5 \text{ e } c = 2$

Equações de 2º Grau

- A forma mais conhecida e prática de se resolver uma equação de 2º grau é utilizando a chamada “fórmula de **Bhaskara**”.
- A(s) solução(ões), chamadas de raíz(es) da equação, pode(m) ser(em) obtida(s) por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

com

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Equações de 2º Grau

- **Exemplo 1:** Dada a equação de 2º grau $x^2 - 3x - 4 = 0$.

Temos:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = -4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow D &= b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-3)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-4) \\ &= 9 + 16 \\ &= 25 \end{aligned}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ x_2 = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

Assim, as soluções são:

$$x = -1 \text{ e } x = 4$$

Equações de 2º Grau

- **Exemplo 2:** Dada a equação de 2º grau $2x^2 - 8x + 8 = 0$.

Temos:

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -8 \\ c = 8 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow D &= b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-8)^2 - 4 \cdot (2) \cdot (8) \\ &= 64 - 64 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 2} = \frac{8 \pm 0}{4} = \begin{cases} x_1 = \frac{8+0}{4} = \frac{8}{4} = 2 \\ x_2 = \frac{8-0}{4} = \frac{8}{4} = 2 \end{cases}$$

Assim, as soluções são: $x = 2$ e $x = 2$, ou seja, são iguais.

Equações de 2º Grau

- **Exemplo 3:** Resolvamos a equação de 2º grau $3x^2+4x+5=0$.

Temos:

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \\ c = 5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow D &= b^2 - 4 \times a \times c = (4)^2 - 4 \times (3) \times (5) \\ &= 16 - 60 \\ &= -44 \end{aligned}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a} = \frac{-4 \pm \sqrt{-44}}{2 \times 3}$$

Observemos que não existe raiz real de $\sqrt{-44}$

Assim, concluímos que a equação acima não admite raízes reais.

Equações de 2º Grau

- **Observações:**

1. No caso da equação quadrática ser incompleta, isto é, $b=0$ ou $c=0$ podemos resolver sem a necessidade de aplicar a fórmula de Bhaskara.

Exemplos:

- a) Para $x^2-1=0$, temos:

$$x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x = \pm 1$$

- b) Para $x^2+2x=0$, temos:

$$x \cdot (x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \end{cases}$$

Equações de 2º Grau

- **Observações:**

2. De acordo com o valor de Δ podemos ter:

- a) Se $\Delta > 0$, a equação possui duas raízes reais distintas ($x_1 \neq x_2$) (exemplo 1)
- b) Se $\Delta = 0$, a equação possui duas raízes reais iguais ($x_1 = x_2$) (exemplo 2)
- c) Se $\Delta < 0$, a equação não possui raízes reais (exemplo 3)

3. Para se utilizar o método de resolução de Bhaskara é necessário que todos os coeficientes da equação (a , b , c) estejam no primeiro membro da equação e que a mesma esteja igualada a zero. Assim uma equação na forma $3x^2 + 4x = -5$ deve ser reescrita na forma $3x^2 + 4x + 5 = 0$ para ser resolvida.

Equações de 2º Grau

- **Observações:**

4. O Δ não necessita obrigatoriamente ser um número cuja raiz quadrada é exata. Consideremos como exemplo a equação $x^2 + 4x + 1 = 0$. Temos:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (4)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (1)$$

$$= 16 - 4$$

$$= 12$$

$$\sqrt{12} @ 3,464101615...$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a} = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2 \cdot 1} @ \frac{-4 \pm 3,46}{2} @ \begin{cases} x_1 = \frac{-4 + 3,46}{2} = \frac{-0,54}{2} = -0,27 \\ x_2 = \frac{-4 - 3,46}{2} = \frac{-7,46}{2} = -3,73 \end{cases}$$

Equações de 2º Grau

- **Exercícios:** Resolva as equações abaixo:

a) $x^2 - x - 6 = 0$

b) $x^2 + 2x - 3 = 0$

c) $-3x^2 - 6x + 24 = 0$

d) $x^2 + 6x + 9 = 0$

e) $x^2 + 2x - 5 = -8$