

# KÜTAHYA DUMLU PINAR ÜNİVERSİTESİ

İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi  
Uluslararası Ticaret ve Finansman Bölümü

## EKONOMETRİ

### 3. Hafta Çalışma Seti Normal Denklemler ile EKK Tahmini

Konu Anlatımı & Uygulama Soruları

Doç. Dr. Erkan AĞASLAN

## 1. Ekonometrik Model Nedir?

Ekonometride bir sorunu incelemenin ilk adımı **model kurmak**tır. Model kurmak demek, değişkenler arasındaki ilişkiyi matematiksel bir denklemle ifade etmektir.

### \* Neden Model Kuruyoruz?

Gerçek dünya çok karmaşıktır. Her şeyi aynı anda inceleyemeyiz. Model, gerçekliğin **basitleştirilmiş bir temsilidir**. Bize önemli ilişkileri görme imkânı verir. Örneğin, "Döviz kuru arttıkça ithalat nasıl etkilenebilir?" sorusunu cevaplamak için, bu iki değişken arasındaki ilişkiyi bir denklemle yazarız.

### $\Sigma$ Basit Doğrusal Regresyon Modeli

İki değişken arasındaki doğrusal ilişkiyi şöyle yazarız:

**Anakütle (Gerçek) Modeli:**

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i \quad (1)$$

- $Y_i$  : **Bağımlı değişken** — Açıklamak istediğimiz değişken
- $X_i$  : **Bağımsız değişken** — Açıklayıcı değişken
- $\beta_0$  : **Sabit terim** —  $X = 0$  iken  $Y$ 'nin aldığı değer
- $\beta_1$  : **Eğim katsayısı** —  $X$ 'teki 1 birimlik değişimin  $Y$  üzerindeki etkisi
- $u_i$  : **Hata terimi** — Modelin açıklayamadığı faktörler

### $\triangle$ Anakütle vs Örneklem

Gerçek parametreler ( $\beta_0, \beta_1$ ) **bilinmez**. Biz örneklem verisiyle bunları **tahmin ederiz**:

**Tahmin Edilen Model:**

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$$

Şapkalı (^) ifadeler bizim tahminlerimizdir.  $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$  ise **artık** (kalıntı) dır.

## 2. Model Kurmanın Aşamaları

Bir ekonometrik çalışma belirli bir sıra izler. Bu sırayı takip etmek, doğru sonuçlara ulaşmanın anahtarıdır.

### Ekonometrik çalışma adımları:

1. **İktisadi soruyu belirle:** "Faiz oranları yatırımı etkiler mi?"
2. **Sözel modeli kur:** "Faiz oranları arttıkça yatırım azalır." (İktisat teorisi)
3. **Matematiksel modeli yaz:**  $\text{Yatırım}_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot \text{Faiz}_i + u_i$
4. **Veri topla:** Gözlem verilerini derle
5. **Parametreleri tahmin et:** EKK yöntemiyle  $\hat{\beta}_0$  ve  $\hat{\beta}_1$  hesapla
6. **Sonuçları yorumla:** Sonuçlar teoriyle uyumlu mu?

### ★ Önemli Nokta

Model kurarken **iktisat teorisi rehberimizdir**. Teori bize hangi değişkenin bağlımlı, hangisinin bağımsız olduğunu söyler. Örneğin:

- ✓ İthalat =  $f(\text{Döviz Kuru}) \rightarrow$  Döviz kuru arttıkça ithalat azalır (teori)
- ✓ Yatırım =  $f(\text{Faiz Oranı}) \rightarrow$  Faiz arttıkça yatırım azalır (teori)
- ✓ Satışlar =  $f(\text{Reklam Harcamaları}) \rightarrow$  Reklam arttıkça satışlar artar (teori)

### 3. EKK Yöntemi ve Normal Denklemler

En Küçük Kareler (EKK) yöntemi, artıkların karelerinin toplamını minimize ederek en iyi tahmin doğrusunu bulur. Bu minimizasyon sonucunda iki denklem elde edilir. Bunlara **normal denklemler** denir.

#### $\Sigma$ Normal Denklem Sistemi

İki bilinmeyenli ( $\hat{\beta}_0$  ve  $\hat{\beta}_1$ ) iki denklem:

**1. Normal Denklem:**

$$\sum_{i=1}^n Y_i = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n X_i \quad (2)$$

**2. Normal Denklem:**

$$\sum_{i=1}^n X_i Y_i = \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^n X_i + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n X_i^2 \quad (3)$$

#### \* Normal Denklemelerin Çözümü

Bu iki denklemi çözdüğümüzde EKK tahmin edicilerini elde ederiz:

**Eğim Katsayısı:**

$$\hat{\beta}_1 = \frac{n \sum X_i Y_i - \sum X_i \sum Y_i}{n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2} \quad (4)$$

**Sabit Terim:**

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} \quad (5)$$

Burada  $\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n}$  ve  $\bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{n}$  dir.

#### $\triangle$ Hesaplama İçin Gerekli Toplamlar

Normal denklemeleri çözmek için **beş toplama** ihtiyacımız var:

$$\sum X_i, \quad \sum Y_i, \quad \sum X_i Y_i, \quad \sum X_i^2, \quad n \text{ (gözlem sayısı)}$$

Bu yüzden çözüm tablolarında  $X_i Y_i$  ve  $X_i^2$  sütunları her zaman yer alır.

**Hatırlatma:** Regresyon doğrusu, verinin ağırlık merkezinden  $(\bar{X}, \bar{Y})$  noktasından her zaman geçer. Bu, 1. normal denklemi doğal bir sonucudur.

## Soru 1: İthalat ve Döviz Kuru İlişkisi ( $n = 5$ )

### Ⓐ İthalat – Döviz Kuru Modeli

Bir ülkede döviz kurunun ( $X$ , TL/\$) ithalat miktarı ( $Y$ , milyar \$) üzerindeki etkisini incelemek istiyoruz. Aşağıda 5 yıllık veri verilmiştir.

**İktisadi Teori:** Döviz kuru yükseldiğinde (yerli para değer kaybettiğinde) ithalat malları pahalılışır ve ithalat **azalır**. Bu nedenle  $\beta_1 < 0$  beklenir.

**Model:**  $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i$

$i$	$X_i$ (Döviz Kuru)	$Y_i$ (İthalat)	$X_i Y_i$	$X_i^2$
1	15	50		
2	18	45		
3	22	38		
4	25	32		
5	30	25		
$\Sigma$				

#### İstenen:

- a) Normal denklemleri bu veriler için yazınız.
- b)  $\hat{\beta}_0$  ve  $\hat{\beta}_1$  değerlerini bulunuz.
- c) Tahmin edilen regresyon denklemini yazınız.
- d)  $\hat{\beta}_1$  katsayısını iktisadi olarak yorumlayınız.
- e) Döviz kuru 20 TL/\$ olduğunda ithalatı hesaplayınız.

## Soru 2: Faiz Oranı ve Yatırım İlişkisi ( $n = 7$ )

### ⊕ Faiz – Yatırım Modeli

Bir ekonomide faiz oranının ( $X$ , %) özel sektör yatırım harcamaları ( $Y$ , milyar TL) üzerindeki etkisi incelenmektedir. 7 çeyrek dönemlik veri aşağıda sunulmuştur.

**İktisadi Teori:** Faiz oranı yükseldiğinde borçlanma maliyeti artar ve yatırımlar **azalır**. Bu nedenle  $\beta_1 < 0$  beklenir.

**Model:**  $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i$

$i$	$X_i$ (Faiz, %)	$Y_i$ (Yatırım, milyar TL)	$X_i Y_i$	$X_i^2$
1	10	85		
2	14	72		
3	18	65		
4	22	55		
5	25	48		
6	30	38		
7	35	28		
$\Sigma$				

#### İstenen:

- a) Normal denklemleri bu veriler için yazınız.
- b)  $\hat{\beta}_0$  ve  $\hat{\beta}_1$  değerlerini bulunuz.
- c) Tahmin edilen regresyon denklemini yazınız.
- d)  $\hat{\beta}_1$  katsayısını iktisadi olarak yorumlayınız.
- e) Faiz oranı %20 olduğunda tahmini yatırım miktarını hesaplayınız.
- f) Sonuçlarınız iktisat teorisiyle uyumlu mu? Tartışınız.

## Soru 3: Reklam Harcamaları ve Satışlar ( $n = 10$ )

### ⊕ Reklam – Satış Modeli

Bir firma, reklam harcamalarının ( $X$ , bin TL) satış gelirleri ( $Y$ , bin TL) üzerindeki etkisini ölçmek istemektedir. 10 aylık veri aşağıda sunulmuştur.

**İktisadi Teori:** Reklam harcamaları arttıkça marka bilinirliği yükselir ve satışlar **artar**.

Bu nedenle  $\beta_1 > 0$  beklenir.

**Model:**  $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i$

$i$	$X_i$ (Reklam, bin TL)	$Y_i$ (Satış, bin TL)	$X_i Y_i$	$X_i^2$
1	5	40		
2	8	55		
3	10	62		
4	12	68		
5	15	80		
6	18	90		
7	20	95		
8	22	102		
9	25	112		
10	30	130		
$\Sigma$				

**Istenen:**

- a) Normal denklemleri bu veriler için yazınız.
- b)  $\hat{\beta}_0$  ve  $\hat{\beta}_1$  değerlerini bulunuz.
- c) Tahmin edilen regresyon denklemini yazınız.
- d)  $\hat{\beta}_1$  katsayısını iktisadi olarak yorumlayınız.
- e) Reklam harcaması 14 bin TL olduğunda tahmini satış gelirini hesaplayınız.
- f) Reklam harcaması 0 olursa satış geliri ne olur? Bu ekonomik olarak anlamlı mı?

## Çözüm Stratejisi ve İpuçları

### ★ Adım Adım Çözüm Yolu

Her üç soru için de aynı stratejiyi takip edin:

**Adım 1:** Tablodan  $n$ ,  $\sum X_i$ ,  $\sum Y_i$ ,  $\sum X_i Y_i$ ,  $\sum X_i^2$  değerlerini okuyun.

**Adım 2:** Normal denklemlere yerleştirin:

$$\sum Y_i = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum X_i$$

$$\sum X_i Y_i = \hat{\beta}_0 \sum X_i + \hat{\beta}_1 \sum X_i^2$$

**Adım 3:** Doğrudan formülle  $\hat{\beta}_1$  hesaplayın:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{n \sum X_i Y_i - \sum X_i \sum Y_i}{n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2}$$

**Adım 4:**  $\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$  ile sabit terimi bulun.

**Adım 5:** Tahmin denklemini yazın:  $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$

**Adım 6:** Katsayıyı yorumlayın ve tahmin yapın.

### △ Sık Yapılan Hatalar

- ✗  $(\sum X_i)^2$  ile  $\sum X_i^2$  karıştırılır! Bunlar **farklı** şeylerdir.
- ✗  $(\sum X_i)^2$ : Önce topla, sonra karesini al.
- ✗  $\sum X_i^2$ : Önce karesini al, sonra topla.
- ✗ Bağımlı ve bağımsız değişkeni karıştırmayın. Teori bize yol gösterir.
- ✗ Katsayı işaretini (+ veya -) kontrol edin: Teoriyle uyumlu mu?

### Katsayı Yorumu Şablonu:

$\hat{\beta}_1 = b$  ise: "Bağımsız değişken ( $X$ ) **1 birim** arttığında, bağımlı değişken ( $Y$ ) ortalamada olarak  $|b|$  birim **artar/azalır**."