

KÜTAHYA DUMLUPINAR ÜNİVERSİTESİ

İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi
Uluslararası Ticaret ve Finansman Bölümü

EKONOMETRİ

3. Hafta Çalışma Seti Normal Denklemler ile EKK Tahmini

Konu Anlatımı & Uygulama Soruları

Doç. Dr. Erkan AĞASLAN

1. Ekonometrik Model Nedir?

Ekonometride bir sorunu incelemenin ilk adımı **model kurmaktır**. Model kurmak demek, değişkenler arasındaki ilişkiyi matematiksel bir denklemle ifade etmek demektir.

★ Neden Model Kuruyoruz?

Gerçek dünya çok karmaşıktır. Her şeyi aynı anda inceleyemeyiz. Model, gerçekliğin **basitleştirilmiş bir temsili**dir. Bize önemli ilişkileri görme imkânı verir. Örneğin, “Döviz kuru arttıkça ithalat nasıl etkilenir?” sorusunu cevaplamak için, bu iki değişken arasındaki ilişkiyi bir denklemle yazabiliriz.

Σ Basit Doğrusal Regresyon Modeli

İki değişken arasındaki doğrusal ilişkiyi şöyle yazabiliriz:
Anakütle (Gerçek) Modeli:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i \quad (1)$$

- Y_i : **Bağımlı değişken** — Açıklamak istediğimiz değişken
- X_i : **Bağımsız değişken** — Açıklayıcı değişken
- β_0 : **Sabit terim** — $X = 0$ iken Y ’nin aldığı değer
- β_1 : **Eğim katsayısı** — X ’teki 1 birimlik değişimin Y üzerindeki etkisi
- u_i : **Hata terimi** — Modelin açıklayamadığı faktörler

△ Anakütle vs Örneklem

Gerçek parametreler (β_0, β_1) **bilinmez**. Biz örneklem verisiyle bunları **tahmin ederiz**:
Tahmin Edilen Model:

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$$

Şapkalı ($\hat{}$) ifadeler bizim tahminlerimizdir. $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$ ise **artık** (kalıntı) dır.

2. Model Kurmanın Aşamaları

Bir ekonometrik çalışma belirli bir sıra izler. Bu sırayı takip etmek, doğru sonuçlara ulaşmanın anahtarıdır.

Ekonometrik çalışma adımları:

1. **İktisadi soruyu belirle:** “Faiz oranları yatırımı etkiler mi?”
2. **Sözel modeli kur:** “Faiz oranları arttıkça yatırım azalır.” (İktisat teorisi)
3. **Matematiksel modeli yaz:** $Yatırım_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot Faiz_i + u_i$
4. **Veri topla:** Gözlem verilerini derle
5. **Parametreleri tahmin et:** EKK yöntemiyle $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ hesapla
6. **Sonuçları yorumla:** Sonuçlar teoriyle uyumlu mu?

★ Önemli Nokta

Model kurarken **iktisat teorisi rehberimizdir**. Teori bize hangi değişkenin bağımlı, hangisinin bağımsız olduğunu söyler. Örneğin:

- ✓ İthalat = $f(\text{Döviz Kuru}) \rightarrow$ Döviz kuru arttıkça ithalat azalır (teori)
- ✓ Yatırım = $f(\text{Faiz Oranı}) \rightarrow$ Faiz arttıkça yatırım azalır (teori)
- ✓ Satışlar = $f(\text{Reklam Harcamaları}) \rightarrow$ Reklam arttıkça satışlar artar (teori)

3. EKK Yöntemi ve Normal Denklemler

En Küçük Kareler (EKK) yöntemi, artıkların karelerinin toplamını minimize ederek en iyi tahmin doğrusunu bulur. Bu minimizasyon sonucunda iki denklem elde edilir. Bunlara **normal denklemler** denir.

Σ Normal Denklem Sistemi

İki bilinmeyenli ($\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$) iki denklem:

1. Normal Denklem:

$$\sum_{i=1}^n Y_i = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n X_i \quad (2)$$

2. Normal Denklem:

$$\sum_{i=1}^n X_i Y_i = \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^n X_i + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n X_i^2 \quad (3)$$

★ Normal Denklemlerin Çözümü

Bu iki denklemi çözdüğümüzde EKK tahmin edicilerini elde ederiz:

Eğim Katsayısı:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{n \sum X_i Y_i - \sum X_i \sum Y_i}{n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2} \quad (4)$$

Sabit Terim:

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} \quad (5)$$

Burada $\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n}$ ve $\bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{n}$ dir.

△ Hesaplama İçin Gerekli Toplamlar

Normal denklemleri çözmek için şu **beş toplama** ihtiyacımız var:

$$\sum X_i, \quad \sum Y_i, \quad \sum X_i Y_i, \quad \sum X_i^2, \quad n \text{ (gözlem sayısı)}$$

Bu yüzden çözüm tablolarında $X_i Y_i$ ve X_i^2 sütunları her zaman yer alır.

Hatırlatma: Regresyon doğrusu, verinin ağırlık merkezinden (\bar{X}, \bar{Y}) noktasından her zaman geçer. Bu, 1. normal denklemin doğal bir sonucudur.

Soru 1: İthalat ve Döviz Kuru İlişkisi ($n = 5$)

⊙ İthalat – Döviz Kuru Modeli

Bir ülkede döviz kurunun (X , TL/\$) ithalat miktarı (Y , milyar \$) üzerindeki etkisini incelemek istiyoruz. Aşağıda 5 yıllık veri verilmiştir.

İktisadi Teori: Döviz kuru yükseldiğinde (yerli para değer kaybettiğinde) ithalat malları pahalılaşır ve ithalat **azalır**. Bu nedenle $\beta_1 < 0$ beklenir.

Model: $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i$

i	X_i (Döviz Kuru)	Y_i (İthalat)	$X_i Y_i$	X_i^2
1	15	50		
2	18	45		
3	22	38		
4	25	32		
5	30	25		
Σ				

İstenen:

- Normal denklemleri bu veriler için yazınız.
- $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ değerlerini bulunuz.
- Tahmin edilen regresyon denklemini yazınız.
- $\hat{\beta}_1$ katsayısını iktisadi olarak yorumlayınız.
- Döviz kuru 20 TL/\$ olduğunda tahmini ithalatı hesaplayınız.

Soru 2: Faiz Oranı ve Yatırım İlişkisi ($n = 7$)

⊙ Faiz – Yatırım Modeli

Bir ekonomide faiz oranının (X , %) özel sektör yatırım harcamaları (Y , milyar TL) üzerindeki etkisi incelenmektedir. 7 çeyrek dönemlik veri aşağıda sunulmuştur.

İktisadi Teori: Faiz oranı yükseldiğinde borçlanma maliyeti artar ve yatırımlar **azalır**. Bu nedenle $\beta_1 < 0$ beklenir.

Model: $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i$

i	X_i (Faiz, %)	Y_i (Yatırım, milyar TL)	$X_i Y_i$	X_i^2
1	10	85		
2	14	72		
3	18	65		
4	22	55		
5	25	48		
6	30	38		
7	35	28		
Σ				

İstenen:

- Normal denklemleri bu veriler için yazınız.
- $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ değerlerini bulunuz.
- Tahmin edilen regresyon denklemini yazınız.
- $\hat{\beta}_1$ katsayısını iktisadi olarak yorumlayınız.
- Faiz oranı %20 olduğunda tahmini yatırım miktarını hesaplayınız.
- Sonuçlarınız iktisat teorisiyle uyumlu mu? Tartışınız.

Soru 3: Reklam Harcamaları ve Satışlar ($n = 10$)

⊙ Reklam – Satış Modeli

Bir firma, reklam harcamalarının (X , bin TL) satış gelirleri (Y , bin TL) üzerindeki etkisini ölçmek istemektedir. 10 aylık veri aşağıda sunulmuştur.

İktisadi Teori: Reklam harcamaları arttıkça marka bilinirliği yükselir ve satışlar **artar**. Bu nedenle $\beta_1 > 0$ beklenir.

Model: $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i$

i	X_i (Reklam, bin TL)	Y_i (Satış, bin TL)	$X_i Y_i$	X_i^2
1	5	40		
2	8	55		
3	10	62		
4	12	68		
5	15	80		
6	18	90		
7	20	95		
8	22	102		
9	25	112		
10	30	130		
Σ				

İstenen:

- Normal denklemleri bu veriler için yazınız.
- $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ değerlerini bulunuz.
- Tahmin edilen regresyon denklemini yazınız.
- $\hat{\beta}_1$ katsayısını iktisadi olarak yorumlayınız.
- Reklam harcaması 14 bin TL olduğunda tahmini satış gelirini hesaplayınız.
- Reklam harcaması 0 olursa satış geliri ne olur? Bu ekonomik olarak anlamlı mı?

Çözüm Stratejisi ve İpuçları

★ Adım Adım Çözüm Yolu

Her üç soru için de aynı stratejiyi takip edin:

Adım 1: Tablodan n , $\sum X_i$, $\sum Y_i$, $\sum X_i Y_i$, $\sum X_i^2$ değerlerini okuyun.

Adım 2: Normal denklemlere yerleştirin:

$$\begin{aligned}\sum Y_i &= n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum X_i \\ \sum X_i Y_i &= \hat{\beta}_0 \sum X_i + \hat{\beta}_1 \sum X_i^2\end{aligned}$$

Adım 3: Doğrudan formülle $\hat{\beta}_1$ hesaplayın:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{n \sum X_i Y_i - \sum X_i \sum Y_i}{n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2}$$

Adım 4: $\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$ ile sabit terimi bulun.

Adım 5: Tahmin denklemini yazın: $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$

Adım 6: Katsayıyı yorumlayın ve tahmin yapın.

△ Sık Yapılan Hatalar

- × $(\sum X_i)^2$ ile $\sum X_i^2$ karıştırılır! Bunlar **farklı** şeylerdir.
- × $(\sum X_i)^2$: Önce topla, sonra karesini al.
- × $\sum X_i^2$: Önce karesini al, sonra topla.
- × Bağımlı ve bağımsız değişkeni karıştırmayın. Teori bize yol gösterir.
- × Katsayı işaretini (+ veya -) kontrol edin: Teoriyle uyumlu mu?

Katsayı Yorumu Şablonu:

$\hat{\beta}_1 = b$ ise: “Bağımsız değişken (X) **1 birim** arttığında, bağımlı değişken (Y) ortalama olarak $|b|$ birim **artar/azalır**.”