Matematiksel İktisat II

1. Hafta Konu Anlatımı ve Ödev Limit ve Süreklilik Konu Anlatımı ve Sorular

Doç. Dr. Erkan AĞASLAN

Şubat 2026

---

1. Yaklaşma Kavramı

Uzayda bulunan herhangi bir noktaya sonsuz farklı yönden yaklaşılabilir. Ancak bu nokta bir **doğru** üzerinde yer alıyorsa bu noktaya yalnızca **iki yönden** yaklaşılabilir: **sağdan** ve **soldan**. Limit kavramı kapsamında ilgilenilen noktalara da sağdan ve soldan yaklaşılacaktır. Bu yaklaşma işleminin çok küçük bir mesafeden yapıldığını unutmayalım. Matematikte böylesine küçük mesafeleri belirtmek için ε (epsilon) (yunan harfi) kullanılır.

2. Limit Tanımı

Bir x-y koordinat sisteminde $y = f(x)$ fonksiyonunun a noktasındaki davranışı araştırılıyorsa şu soru sorulur:

$$\lim_{x \to a} f(x) = ?$$

x, a'ya iki yönden yaklaşabilir:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = ? \quad \text{(soldan limit)}$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = ? \quad \text{(sağdan limit)}$$

$-$ (eksi) işareti soldan, $+$ (artı) işareti ise sağdan yaklaşıldığını göstermektedir.

Tanım: Eğer bir fonksiyon x, a'ya yaklaşırken sol limit ile sağ limit **aynı reel sayıya** gidiyorsa, fonksiyonun limiti vardır ve o reel sayıdır.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

- Bu tanımda **reel sayı** kelimesine dikkat edilmelidir.
- Sağ ve sol limit ∞ ise limitin varlığından söz **edemeyiz**.

- Limit için fonksiyonun a noktasında **tanımlı olması zorunlu değildir**; etrafında tanımlı olması yeterlidir.

Grafikte dolu ve boş nokta: Grafikte bir noktanın **dolu** ($\bullet$) olması fonksiyonun o noktada tanımlı olduğunu, **boş** ($\circ$) olması ise tanımsız olduğunu gösterir. Ancak limit araştırılırken o noktanın tanımlı olması gerekmez; limit davranışlarla ilgilenir.

---

3. Limit Örnekleri

Örnek 1 — Limitin Var Olduğu Durum (Sürekli Fonksiyon)
$y = f(x)$ fonksiyonunda a noktasına soldan ve sağdan yaklaşıldığında fonksiyon b noktasına gidiyorsa:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = b, \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = b$$

$b = b$ olduğu için limit **vardır**:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

Örnek 2 — Limitin Olmadığı Durum
$y = g(x)$ fonksiyonunda a noktasına soldan yaklaşıldığında b'ye, sağdan yaklaşıldığında c'ye gidiyorsa:

$$\lim_{x\to a^-} g(x) = b, \qquad \lim_{x\to a^+} g(x) = c$$

$b \neq c$ olduğu için $g(x)$'in a'da limiti **yoktur**.

Örnek 3 — Tanımlı Noktada Limit Var, Görüntü Farklı
$y = k(x)$ fonksiyonunda a noktasına soldan ve sağdan yaklaşıldığında her iki taraftan da b'ye gidiliyorsa limit vardır:

$$\lim_{x\to a^-} k(x) = b, \qquad \lim_{x\to a^+} k(x) = b \implies \lim_{x\to a} k(x) = b$$

Ancak fonksiyon a noktasında c değerini alıyorsa ($c \neq b$) bu durum **süreklilik** sorununa yol açar (bkz. Bölüm 4).

Örnek 4 — Tanımsız Noktada Limit
$y = t(x)$ fonksiyonu a noktasında tanımlı olmasa da:

$$\lim_{x\to a^-} t(x) = b, \qquad \lim_{x\to a^+} t(x) = b \implies \lim_{x\to a} t(x) = b$$

Sonuç: **Limit için fonksiyonun a noktasında tanımlı olmasına gerek yoktur.**

---

4. Süreklilik

Bir noktanın sürekli olup olmadığını anlamak için **ilk kural** o noktanın tanım kümesinde yer almasıdır.

$$f : A \to \mathbb{R}, \quad a \in A$$

olmak üzere, $\lim_{x \to a} f(x)$ mevcut **ve** $f(a)$'ya eşitse f, a'da **süreklidir** denir.

Tanım kümesinde olmayan bir noktada süreklilik **incelenemez** (süreksizlik de incelenemez).

Özetle f'nin a'da sürekli olması için **üç koşul** birlikte sağlanmalıdır:
0.0.

1. $f(a)$ tanımlı olmalıdır $\quad (a \in A)$
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ var olmalıdır $\quad$ (sol$=$ sağ limit)
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ eşitliği sağlanmalıdır

---

5. Süreklilik Örnekleri

Örnek 5 — Sürekli Fonksiyon
$y = f(x)$ fonksiyonu a noktasında sürekli midir?

- ✓ a noktası tanım kümesinde
- ✓ a noktasında limit var: $\lim_{x \to a} f(x) = b$
- ✓ Görüntü limite eşit: $f(a) = b$

Süreklidir.

Örnek 6 — Süreksiz Fonksiyon (Limit Yok)
$y = g(x)$ fonksiyonu a noktasında sürekli midir?

- ✓ a noktası tanım kümesinde
- × a noktasında limit **yoktur** (sol $\neq$ sağ)

Süreksizdir.

Örnek 7 — Süreksiz Fonksiyon (Limit $\neq$ Görüntü)
$y = k(x)$ fonksiyonu a noktasında sürekli midir?

- ✓ a noktası tanım kümesinde
- ✓ Limit var: $\lim_{x \to a} k(x) = b$
- × Limit değeri görüntüye eşit **değil**: $f(a) = c \neq b$

Süreksizdir.

Örnek 8 — Süreklilik İncelenemez
$y = t(x)$ fonksiyonu a noktasında sürekli midir?

- × a noktası tanım kümesinde **değildir**

Süreklilik incelenemez!

Önemli Not: $y = t(x)$ fonksiyonunun a noktasındaki sürekliliğinden bahsedilemez. Ancak "$y = t(x)$ fonksiyonu süreklidir" denilebilir. Çünkü bir fonksiyonun sürekli olması için **tanım kümesindeki her elemanında** sürekli olması yeterlidir. a noktası zaten tanım kümesinde yer almadığı için fonksiyonun genel sürekliliğini etkilemez.

Örnek 9 — $y = \dfrac{1}{x}$ fonksiyonu sürekli midir?
Bu fonksiyon sıfır noktasında tanımlı değildir (ve tanımlı olamaz). Tanım kümesi $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$'dır. Fonksiyon, tanım kümesindeki tüm değerlerde sürekli olduğu için **süreklidir**.

Genel Kural:

- Tüm **polinomyal** fonksiyonlar süreklidir.
  Örneğin: $y = 0.5, \quad y = 0.5 + x, \quad y = 0.5 + x^2, \quad y = x^3$
- Tüm **rasyonel** fonksiyonlar (tanım kümelerinde) süreklidir.
  Örneğin: $y = \dfrac{2x+3}{x-4}$

Sorular

Soru 1 — Grafik Üzerinde Limit ve Süreklilik

Aşağıdaki grafikte $y = f(x)$ fonksiyonu verilmektedir. Grafik üzerindeki **dolu nokta** (•) fonksiyonun o noktada tanımlı olduğunu, **boş nokta** (○) ise tanımsız olduğunu göstermektedir.

Grafikteki bilgilerden yararlanarak aşağıdaki limitleri bulunuz ve ilgili noktalardaki sürekliliği inceleyiniz.

()()

1. $\lim_{x\to -3} f(x) = ?$

2. $\lim_{x\to -1} f(x) = ?$

3. $\lim_{x\to 1} f(x) = ?$

4. $\lim_{x\to 2} f(x) = ?$

5. $\lim_{x\to 6} f(x) = ?$

Her bir nokta için süreklilik koşullarını aşağıdaki şablona göre yazınız:

Nokta	Tanım kümesinde mi?	Limit var mı?	Limit = $f(a)$ mı?
$x = -3$			
$x = -1$			
$x = 1$			
$x = 2$			
$x = 6$			

Soru 2 — Soldan ve Sağdan Limit

Aşağıdaki parçalı fonksiyon için istenenleri bulunuz.

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & x<1 \\ 5 & x=1 \\ 2x+1 & x>1 \end{cases}$$

()()

1. $\lim_{x \to 1^-} f(x) =?$
2. $\lim_{x \to 1^+} f(x) =?$
3. $\lim_{x \to 1} f(x)$ var mıdır? Gerekçelendiriniz.
4. $f(1)$ kaçtır? f, $x = 1$'de sürekli midir? Neden?

Soru 3 — Süreklilik Analizi

Aşağıdaki fonksiyonların verilen noktalarda sürekli olup olmadığını **üç koşulu tek tek kontrol ederek** inceleyiniz.

()()

1. $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}, \quad x = 2$ noktasında
2. $g(x) = \begin{cases} 3x-1 & x \le 2 \\ x^2 & x > 2 \end{cases}, \quad x = 2$ noktasında
3. $h(x) = \dfrac{1}{x-3}, \quad x = 3$ noktasında
4. $k(x) = x^2 + 2x - 1, \quad x = 0$ noktasında

Soru 4 — Doğru / Yanlış

Aşağıdaki ifadelerin doğru mu yanlış mı olduğunu belirtiniz ve kısaca gerekçenizi yazınız.

()()

1. "Bir fonksiyonun a noktasında limiti varsa, $f(a)$ mutlaka tanımlıdır."
2. "$f(a)$ tanımlı değilse a noktasında limit araştırılamaz."

3. “Sol limit ile sağ limit eşitse limit mutlaka $f(a)$’ya eşittir.”
4. “Tüm polinomyal fonksiyonlar her noktada süreklidir.”
5. “$y = \dfrac{1}{x}$ fonksiyonu süreksizdir.”

Limit ve süreklilik kavramları matematiğin ve ekonominin temel taşlarındandır. Grafik yorumlama becerisini geliştirmek için her örneği dikkatlice inceleyiniz. Soruları yalnızca sonuç için değil, **her adımı gerekçelendirerek** çözünüz.