

Fortsetzung Jubiläumsband
7 Jahre „Erlebnis Mathematik“

Mag. Dr. Gerlinde FAUSTMANN (Hrsg.)



Mag. Dr. Gerlinde FAUSTMANN (Hrsg.)

Fortsetzung Jubiläumsband
7 Jahre „Erlebnis Mathematik“



IMPRESSUM 2025 Mag. Dr. Gerlinde Faustmann

Umschlaggestaltung: Mag. Mag. Dr. Cornelia Faustmann
Lektorat/Korrektur: DI Dr. Friedrich Faustmann

Das Werk, einschließlich seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt.

Mag. Dr. Gerlinde FAUSTMANN (Hrsg.)

**Fortsetzung Jubiläumsband
7 Jahre „Erlebnis Mathematik“**

Kurzfassungen der gehaltenen Vorträge
unter redaktioneller Mitarbeit
von DI Dr. Friedrich FAUSTMANN

Vorwort (<i>G. Faustmann</i>)	7
0. Kepler-Jubiläumsveranstaltung.....	9
0.1 Biographie (<i>F. Faustmann</i>)	9
0.2 Keplers Vermächtnis: Die „Tabulae Rudolphinae“ (<i>F. J. Vrabelc</i>)	16
0.3 Das Keplersche Problem (<i>P. Schmitt</i>)	30
1. Festvortrag – 5 Jahresfeier (<i>F. J. Vrabelc</i>).....	33
XII. Simulation elektromagnetischer Felder (<i>H. Preineder</i>).....	45
XIII. Was Sie schon immer über Relationale Datenbanken wissen wollten (<i>E. Sulzgruber</i>)...51	
XIV. Wenn Mathematik Schach spielt (<i>M. Feischl</i>)	59
XV. Trost und Moral in der Mathematik (<i>W. Herold</i>)	63
XVI. Mathematiker auf Banknoten (<i>T. Jahre</i>)	69
XVII. Quantum Computing – Ein Quantensprung? (<i>M. Faustmann</i>)	75
XVIIIa. Liebes π - bist du „normal“ ? (<i>F. J. Vrabelc</i>)	82
XVIIIb. Fortsetzung - Buffonsches Nadelproblem zur Approximation von π (<i>G. Petritsch</i>) .	89
XIX. Kinderspielzeug oder mathematische Herausforderung (<i>E. Sulzgruber</i>)	92

Vorwort

Ich freue mich sehr, anlässlich der 7-Jahresfeier des „Erlebnis-Mathematik“ eine Fortsetzung des „5-Jahres – Jubiläumsbandes“ präsentieren zu können.

Die Primzahlen werden in unserem offenen Mathematikraum besonders gefeiert, seit der „letzten Primzahlfeier“ gab es verschiedene mathematische Erlebnisse und zwischen dem Erlebnisraum und einem weiteren Raum wurde die Vereinigungsmenge gebildet.

Bei der Zahl sieben handelt es sich ebenfalls wie bei der Zahl fünf um eine Mersennesche Primzahl. Die Zahl „sieben“ hat eine besondere Bedeutung in verschiedenen Bereichen. Denken wir an die Schöpfungsgeschichte, an die Siebentonreihe in der Musik, an Siebenjahreszyklen in diversen Lebensphasen oder an viele Märchen, in denen die Zahl 7 eine besondere Rolle spielt. Ein regelmäßiges Siebeneck lässt sich nicht mit Zirkel und Lineal konstruieren und es handelt sich dabei um die kleinste Eckenanzahl dieser besonderen Polygone.

Dieser Ergänzungsband enthält eine Kurzfassung der in den letzten zwei Jahren gehaltenen Vorträge sowie die Zusammenfassung der Vorträge, die anlässlich der „Keplerfeier“ und der 5-Jahresfeier präsentiert wurden. Dieses Skriptum bietet somit auch einen kleinen Überblick zu verschiedenen Themen der Mathematik, die dankenswerterweise ehrenamtlich von den Referenten gehalten wurden.

Beim Eintauchen in die „Erlebnis-Mathematik“-Welt mittels dieser Lektüre wünsche ich viel Freude.

Eine Fortsetzung dieser Ausführungen ist für die „11-Jahresfeier“ geplant.

Mag. Dr. Gerlinde Faustmann

Wiener Neustadt, im August 2025

0. Kepler-Jubiläumsveranstaltung

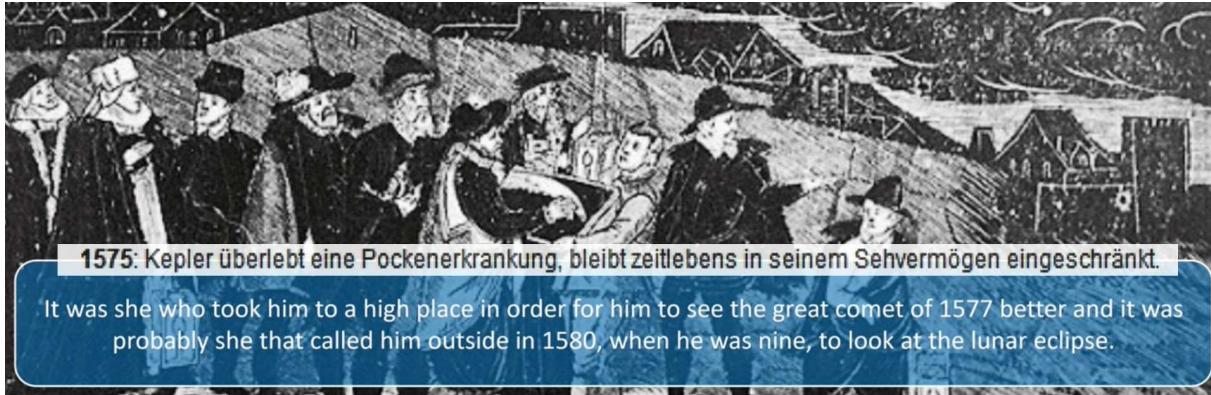
0.1 Biographie



1571: Johannes Kepler wird am 27. Dezember 1571 in Weil der Stadt geboren.

Johannes Kepler was born on 27 December 1571 in Weil der Stadt, a small town in what is now the Stuttgart region of Germany. He was the fourth child of Heinrich Kepler, a mercenary who left the family when Johannes was only five and is thought to have died in the eighty years war.

His mother, Katharina, was an innkeeper's daughter. She did her best to allow Johannes to experience the wonders of nature, and it was probably because of this that he developed a love for astronomy.



1575: Kepler überlebt eine Pockenerkrankung, bleibt zeitlebens in seinem Sehvermögen eingeschränkt.

It was she who took him to a high place in order for him to see the great comet of 1577 better and it was probably she that called him outside in 1580, when he was nine, to look at the lunar eclipse.



1584 - 1586: Besuch der Klosterschule Adelberg.

1586 - 1589: Besuch der evangelischen Klosterschule Maulbronn.

1589 - 1591: Studium der Theologie, Mathematik und Astronomie an der Universität Tübingen.

In 1589, after leaving grammar school, Kepler attended the University of Tübingen, and proved himself to be a skillful mathematician.

Under Michael Maestlin, the university's professor of mathematics, he learned about planetary motion and became a fan of the Copernican system which put the Sun, rather than the Earth at the center of the universe.

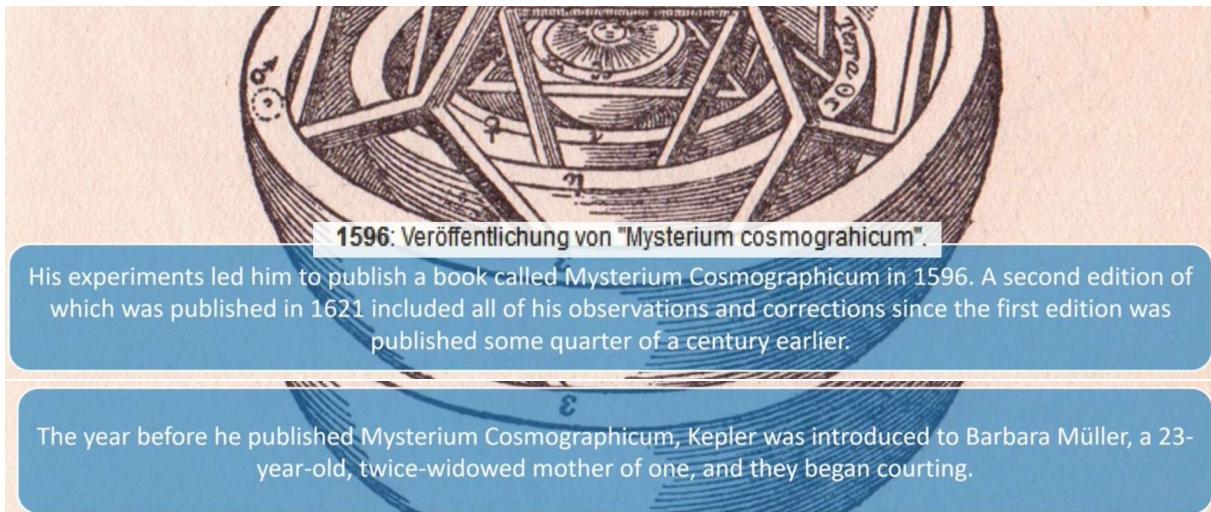


Kepler had wanted to become a minister, having studied both philosophy and theology whilst at university, and having attended seminary at Maulbronn before that. However, he was recommended as a teacher of mathematics and astronomy at a school in Graz, a position which he took up at the age of 23 in April 1594.



1594: Lehrer für Mathematik in Graz

Whilst teaching at Graz, Kepler claimed to have an epiphany on 19 July 1595 in which he believed that he was shown God's geometrical plan for the universe.



1596: Veröffentlichung von "Mysterium cosmographicum".

His experiments led him to publish a book called *Mysterium Cosmographicum* in 1596. A second edition of which was published in 1621 included all of his observations and corrections since the first edition was published some quarter of a century earlier.

The year before he published *Mysterium Cosmographicum*, Kepler was introduced to Barbara Müller, a 23-year-old, twice-widowed mother of one, and they began courting.

1597 - 1611: Ehe mit Barbara Müller. Aus dieser Ehe gehen fünf Kinder hervor.

The couple was married on 27 April 1597. They had two children who died in infancy, but three more children would follow, a daughter called Susanna and two sons, Friedrich and Ludwig.

Following the publication of *Mysterium Cosmographicum*, Kepler formulated grand plans to expand on the work, by publishing four more books dealing with the sun, stars, planets and their motions, the physical nature of the planets and the effects of the heavens on the earth.

In order to help him with his work, he began correspondence with a number of eminent astronomers, to whom he had previously sent copies of his book. One such person was Tycho Brahe, who was particularly critical of the use, in Kepler's work, of the inaccurate data supplied by Copernicus.

Never the less, the two started regular correspondence. Eventually, and amidst growing religious tension in Graz which was threatening his employment, Kepler accepted an invitation from Tycho to visit him in Prague.



Kepler arrived in Benátky nad Jizerou, about 35km outside of Prague, where Tycho Brahe was building a new observatory, on 4 February 1600. He met Tycho and his assistants and stayed for the next couple of months as a guest, and as Tycho began to trust Kepler, he allowed him more and more access to his data.



1600 - 1612: Aufenthalt in Prag.

Following an argument, however, over negotiations for a more formal arrangement of employment with Tycho, Kepler left and headed to Prague. The pair soon came to an arrangement though and Kepler returned to Graz to collect his family.

Kepler was appointed his successor as the imperial mathematician with the responsibility to complete Brahe's unfinished work.



As the imperial mathematician, Kepler's primary responsibility to Emperor Rudolph II was to provide astrological advice. Kepler had been providing detailed horoscopes to friends and family since his university time, and so this presented no problem for him.

The emperor showed an active interest in Kepler's work and, on paper at least, provided an ample income. However, due to the financial troubles the emperor was experiencing at the time, actually getting hold of enough money to look after his family proved difficult and was causing problems for him at home.

However, this was balanced by the fact that his position at court allowed him to practice his Lutheran religion without hindrance and also provided him with access to other scholars, which allowed his astronomical work to progress quite rapidly.

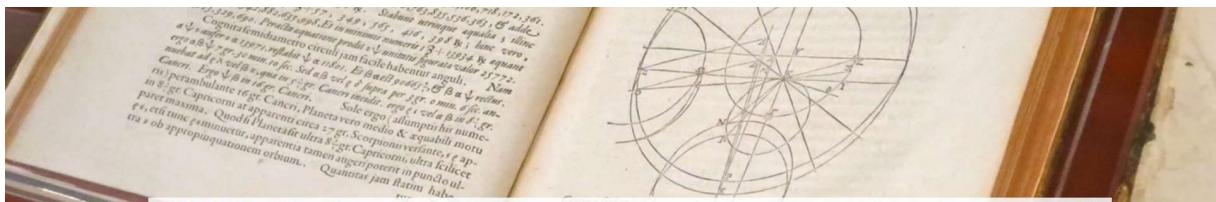
As he also now had unrestricted access to Tycho Brahe's work, he also made leaps and bounds with his work on optics and actually paused most of his other work during 1603 to work exclusively on the subject. This resulted in a manuscript which he presented to Emperor Rudolph on 1 January 1604.

ASTRONO PARS OPT TRADITV

Potissimum
DE ARTIFICIOSA OBSERVATIO-
NE ET ESTIMATIONE DIAMETRORVM
deliquiorumq; Solis & Lunæ.
CVM EXEMPLIS IN SIGNVM ECLIPSIVM.
Habes hoc libro, Lector, inter alia multa noua,



The manuscript was published as *Astronomiae Pars Optica* (The Optical Part of Astronomy) within which it should be noted that Kepler was the first to correctly describe that images are presented to the human eye upside down before being inverted by the lens for presentation to the retina. The work is now considered to be the foundation of modern optics.



1609: Veröffentlichung von "Astronomia nova", welches die keplerschen Gesetze enthält.

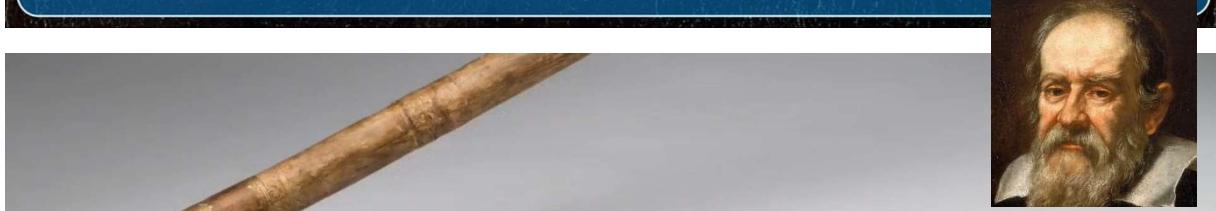
In October of 1604, Kepler began to systematically observe a bright new evening star, a supernova, which led him to conduct more research into the phenomenon. The research resulted in the publication of *Astronomia nova*, within which are published Kepler's first two laws of planetary motion.

8	6	16	2	21	3	13	3	3	5	17	I	19	II	II	16	2	II	1	3	2	14	3	14	5	8
10	5	17	3	21	3	13	3	4	5	17	I	18	II	10	17	1	10	1	4	3	14	2	14	6	10
12	4	17	3	21	3	12	3	6	5	18	2	18	12	9	16	1	9	1	5	3	15	2	13	7	12
14	4	18	3	21	2	11	4	7	5	18	3	18	13	9	16	1	9	1	6	3	15	2	13	7	14
16	3	18	4	20	2	9	4	8	5	19	3	17	13	8	16	0	8	0	7	3	15	1	12	8	16
18	2	19	4	20	2	8	4	9	4	19	4	17	14	7	16	sub	7	0	8	3	15	1	12	9	18

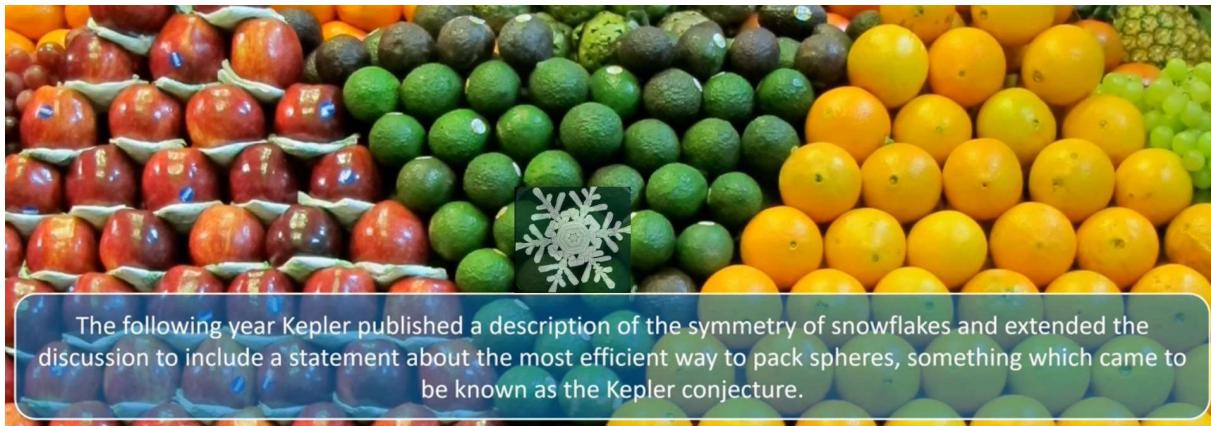
Kepler then switched his focus back to the Rudolphine Tables, which was the unfinished work he took over from Tycho Brahe. The tables included specific predictions of planet and star positions, but the work would continue for several more years before it was completed.

2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24
26	sub	20	4	18	Ad	4	13	1	5	16	14	7	16	0	6	Ad	0	2	15	0	11	10	20	26	
20	0	15	4	17	0	9	5	11	11	2	10	X	14	10	4	14	11	4	15	1	9	12	26	20	

In 1610, Kepler was contacted by Galileo Galilei who told him of his observations of four new satellites orbiting Jupiter, essentially to seek confirmation of his observations.



This confirmation came enthusiastically from Kepler as he realized the significance of not only Galileo's observations but the means by which they had been achieved. Through the use of a relatively new device called a telescope.



However, 1611 would mark another significant turn in Kepler's life. Emperor Rudolph's health was failing and after he was forced to abdicate by his brother Matthias as King of Bohemia, it became apparent that Kepler's days at court were numbered.

During the same time, his wife Barbara became ill with Hungarian spotted fever and all three of his children contracted smallpox. Friedrich, his six year old son died, and soon afterwards so did Barbara.

Kepler had been offered a post by the University of Padua as mathematics professor to replace Galileo, but he wanted to keep his family in Germany. He had arranged for a move to Linz as a teacher and mathematician, but delayed his departure following the deaths of his wife and son.

On the death of the emperor in 1612, Matthias actually re-affirmed Kepler's position at court, but allowed him to move to Linz.

1612 - 1626: Aufenthalt in Linz

Whilst in Linz he published a formal and systematic work on the year of Christ's birth and also wrote a similarly detailed treatise on how to measure the volume of containers. The first was published in 1613 and the latter in 1615.

1613 - 1630: Ehe mit Susanna Reuttinger. Aus dieser Ehe gehen sechs Kinder hervor.

In the same year as the publication of the work on the date of Christ's birth which was called *De Vero Anno*, he married a 24-year-old woman called Susanna Reuttinger. They had six children, although the first three died in childhood. The next three, though, Cordula, Fridmar, and Hildebert survived.



1621: "Epitome Astronomiae Copernicanae" wird veröffentlicht.

Between 1615 and 1621, Kepler published a three-volume work called *Epitome astronomiae Copernicanae* (Epitome of Copernican Astronomy), which contained all three of his laws of planetary motion, with the first two being purposefully extended to cover all the planets, the moon and the satellites of Jupiter.

This would become his most influential work. He also published astronomical calendars in which he would forecast political events, the weather, and planetary positions. These became very popular and helped him to offset the cost of producing his other work.

By 1624 though, the calendars started to cause more trouble than they were worth, partly due to the ambiguity of his predictions. The last of his calendars, published in 1624, was publicly burned.



During this time, Kepler had to turn some of his efforts in another direction when his mother, Katharina, was accused of witchcraft. Kepler devised a successful legal defense and after 14 months in prison, Katharina was released in October 1621.



By 1623, Kepler had finally completed the Rudolphine Tables, but they would not be printed until 1627, at Kepler's own expense in the city of Ulm, which was where Kepler and his family had moved to following more religious tension, and the besieging of Linz in 1626.

The following years consisted of a lot of travel following the military success of the emperor's forces. He spent time in the imperial court in Prague as well as in Linz and Ulm.



1630: Johannes Kepler stirbt am 15. November 1630 in Regensburg.

Kepler finally moved to Regensburg in the South East of Germany, but shortly after arriving there he fell ill with a fever and died at the age of 58 on 15 November 1630.

He was buried in Regensburg, but a few years after his death the graveyard was destroyed during religious conflict and its exact location is now lost.

Zusammenfassung

- 1571:** Johannes Kepler wird am 27. Dezember 1571 in Weil der Stadt geboren.
- 1575:** Kepler überlebt eine Pockenerkrankung, bleibt zeitlebens in seinem Sehvermögen eingeschränkt.
- 1584 - 1586:** Besuch der Klosterschule Adelberg.
- 1586 - 1589:** Besuch der evangelischen Klosterschule Maulbronn.
- 1589 - 1591:** Studium der Theologie, Mathematik und Astronomie an der Universität Tübingen.
- 1594:** Lehrer für Mathematik in Graz
- 1596:** Veröffentlichung von "Mysterium cosmographicum".
- 1597 - 1611:** Ehe mit Barbara Müller. Aus dieser Ehe gehen fünf Kinder hervor.
- 1600 - 1612:** Aufenthalt in Prag.
- 1609:** Veröffentlichung von "Astronomia nova", welches die keplerschen Gesetze enthält.
- 1612 - 1626:** Aufenthalt in Linz
- 1613 - 1630:** Ehe mit Susanna Reuttinger. Aus dieser Ehe gehen sechs Kinder hervor.
- 1621:** "Epitome Astronomiae Copernicæ" wird veröffentlicht.
- 1630:** Johannes Kepler stirbt am 15. November 1630 in Regensburg.

Quellen:

5MinuteBiographies.com – 27. Johannes Kepler – Internet-Video adaptiert mit Eigenbeschriftungen und mit Bildern aus Wikipedia, Internet – public domain

0.2 Keplers Vermächtnis: Die „Tabulae Rudolphinae“

(Mag. Franz Josef Vrabec)

Inhalt

Einleitung

Astronomische Tafelwerke

Aufbau und Inhalt der
Rudolphinischen Tafeln (RT)

Die astronomische Basis der RT

Die Entstehungsgeschichte der RT

Ein Rechenbeispiel aus den RT

Ausklang

Literatur / Internet



Einleitung

Frontispiz des Tafelwerkes

Die „Rudolphinischen Tafeln“ ([1], in deutscher Übersetzung: [2]) sind nach Kaiser Rudolph II. benannt, der den dänischen Astronomen Tycho de Brahe um 1600 mit der Erstellung von Tafeln für die Berechnung von astrologischen und astronomischen Konstellationen beauftragte. Nach dem frühen Tod Tychos führte Johannes Kepler die Arbeit an diesem Werk alleine weiter, er brachte sie auf Grund vieler widriger Umstände allerdings erst 1627 zum Abschluss.

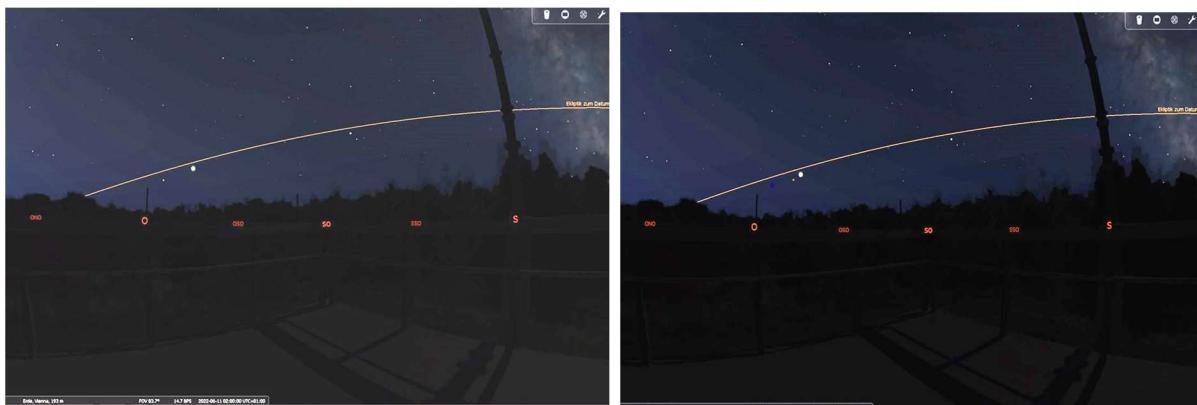
Die „RT“, so in astronomiegeschichtlichen Kreisen genannt, sind die Krönung des Lebenswerkes von Kepler. Mit ihrer Veröffentlichung hatte Kepler „Farbe bekannt“, da sie Grundlagen für die Berechnung astronomischer Phänomene vorgeben, deren Beobachtungen seine mühevoll entwickelten Theorien bestätigen, aber auch widerlegen hätte können.

Die RT sind eine bibliophile Rarität, da weniger als 1000 Exemplare gedruckt wurden. Ich habe in meinem Leben insgesamt 10 Exemplare zu Gesicht bekommen; eines davon durfte ich sogar in die behandschuhte Hand nehmen und darin blättern. Zum Zeitpunkt des Vortrages im Juni 2022 wurde im Internet ein Exemplar der RT um 130.000.- Euro angeboten – und es hat einen Käufer gefunden!

Astronomische Tafelwerke

Zielgruppe für die Verwendung astronomischer Tafelwerke waren Kalendermacher (für die Chronologie, bewegliche Feste: Ostern), Astrologen (für die Erstellung von Horoskopen), Astronomen (Berechnung der Planetensichtbarkeit und von Sonnen- und Mondfinsternissen), aber auch Seefahrer (für die Ortsbestimmung, nautische Tafeln).

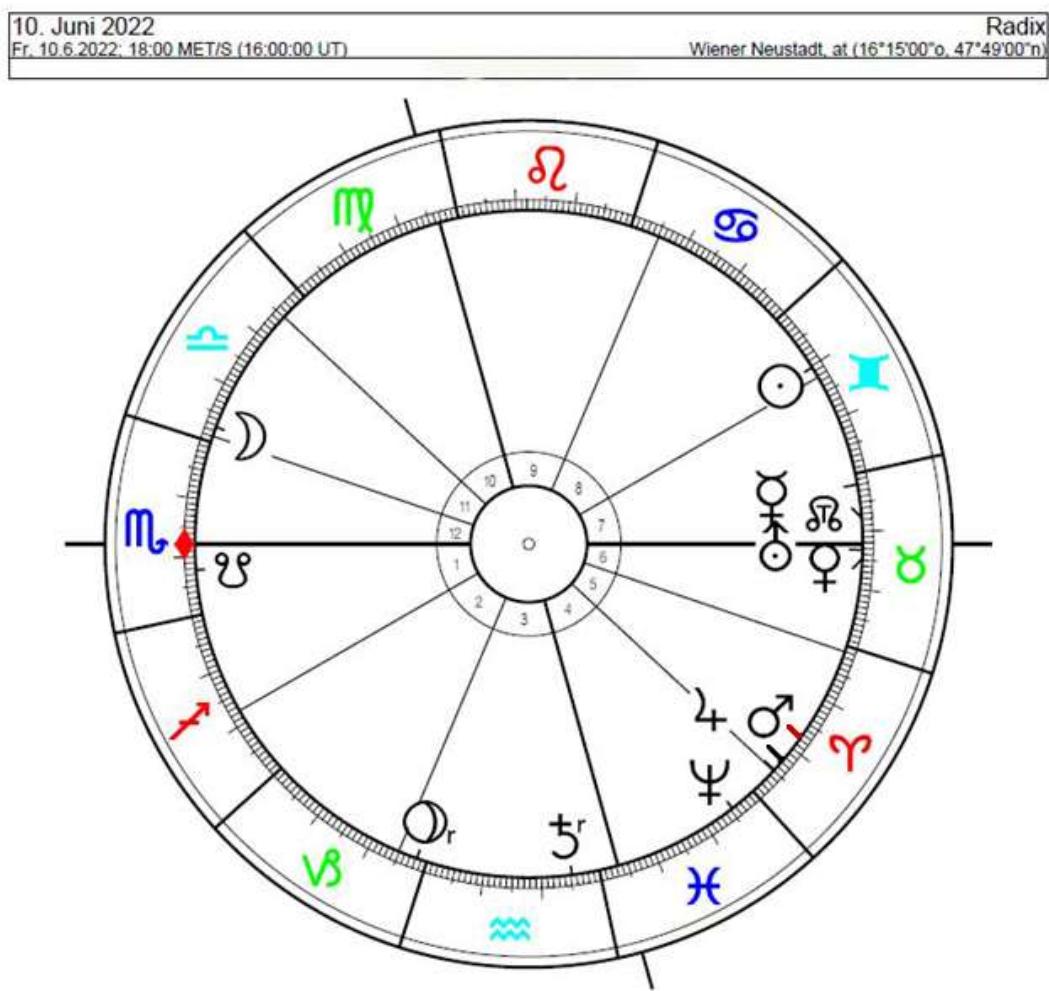
Um 1600 waren vor allem zwei solcher Tafelwerke in Gebrauch: Erstens die „Alfonsinischen Tafeln“ (ca. 1260), benannt nach König Alfons X. von Kastilien und Leon, die noch auf dem ptolemäischen – also geozentrischen – System beruhten. Zweitens die „Prutenischen“ oder „Preußischen Tafeln“ (1551) von Erasmus Reinhold, denen bereits das Kopernikanische Weltsystem zu Grunde lag. Beide genügten kaum mehr den geforderten Genauigkeitsansprüchen; so betrug 1625 der Fehler bei der Marsposition bereits 5° .



Die beiden Abbildungen zeigen, etwas rechts von der Ostrichtung O, die beiden Planeten Mars (schwächer) und Jupiter (heller). Die linke Abbildung ist der korrekte Himmelsanblick; bei der rechten Abbildung ist der Planet Mars um 5° nach S versetzt – das ist bereits sehr auffällig!

Ebenso auffällig wäre ein Fehler der Marsposition in dieser Größe bei einem Horoskop. Die folgende Abbildung zeigt das Radix-Horoskop für den 10. Juni 2022 / Wiener Neustadt.

Im Sternzeichen Widder Υ zeigt die schwarze Markierung die korrekte Position des Mars \textcircled{M} , die rote Markierung eine um 5° fehlerhafte Position. Durch einen Fehler in dieser Größenordnung könnte es vorkommen, dass ein Planet sich bereits fehlerhafterweise im benachbarten Sternzeichen befindet – was astrologisch nicht unbedeutende Auswirkung hätte. Es ist daher nicht verwunderlich, dass um 1600 in der Welt der Astrologen bzw. Astronomen die Nachfrage nach genaueren Tafeln bereits eine gewisse Dringlichkeit aufwies.



Aufbau und Inhalt der Rudolphinischen Tafeln

Die RT beginnen mit einem sehr ausführlichen und mit zahlreichen Beispielen versehenen Anleitungsteil von insgesamt 112 Seiten. Erst dann folgen die eigentlichen Tafeln, die in 4 Teile gruppiert sind.

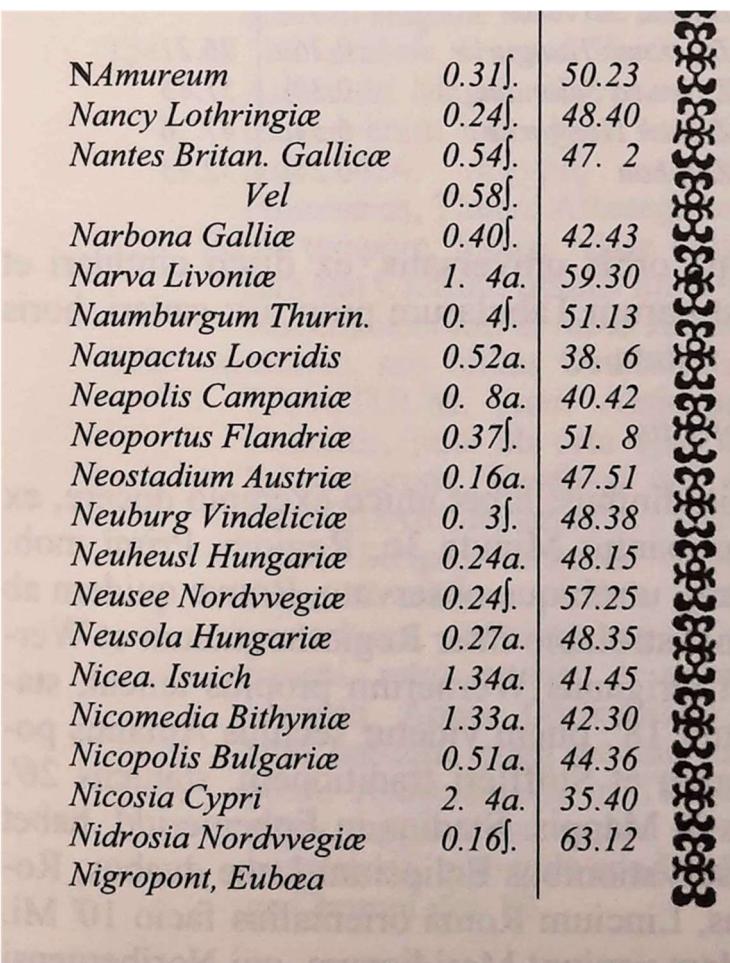
Der 1. Teil (40 Seiten) enthält Tafeln zu Logarithmen, Winkelgrößen, Zeitgleichung, ein Ortsverzeichnis, Zeitrechnung, Wochentage.

Der 2. Teil (48 Seiten) enthält Tafeln zur Sonne und zu den Planeten in der Reihenfolge: Saturn, Jupiter, Mars, Venus, Merkur; schließlich für den Mond.

Der 3. Teil (14 Seiten) enthält Tafeln zu Finsternissen und den Lunationen.

Der 4. Teil (18 Seiten) enthält einen Katalog von etwa 1000 Fixsternen.

Im Ortsverzeichnis findet sich auch eine Eintragung zu Wiener Neustadt:

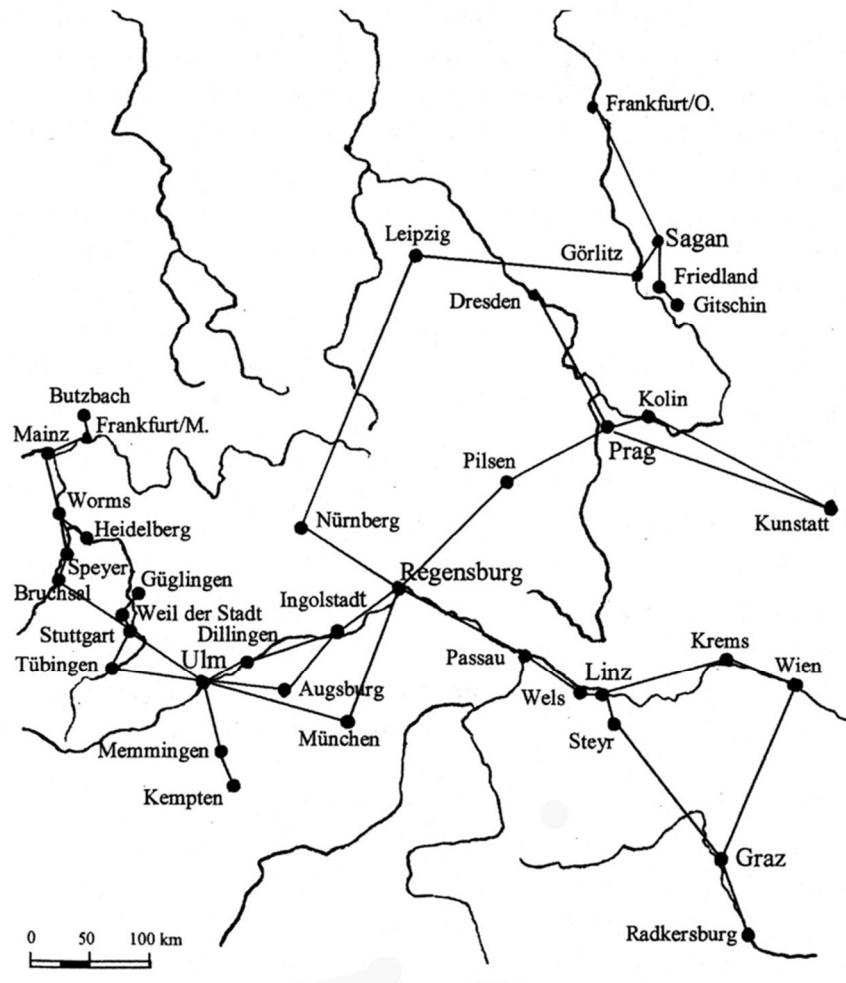


NAmureum	0.31].	50.23
<i>Nancy Lothingiae</i>	0.24].	48.40
<i>Nantes Britan. Gallicæ</i>	0.54].	47. 2
<i>Vel</i>	0.58].	
<i>Narbona Galliæ</i>	0.40].	42.43
<i>Narva Livoniæ</i>	1. 4a.	59.30
<i>Naumburgum Thuring.</i>	0. 4].	51.13
<i>Naupactus Locridis</i>	0.52a.	38. 6
<i>Neapolis Campaniæ</i>	0. 8a.	40.42
<i>Neoportus Flandriæ</i>	0.37].	51. 8
<i>Neostadium Austriae</i>	0.16a.	47.51
<i>Neuburg Vindelicæ</i>	0. 3].	48.38
<i>Neuheusl Hungariæ</i>	0.24a.	48.15
<i>Neusee Nordvegiæ</i>	0.24].	57.25
<i>Neusola Hungariæ</i>	0.27a.	48.35
<i>Nicea. Isuich</i>	1.34a.	41.45
<i>Nicomedia Bithyniæ</i>	1.33a.	42.30
<i>Nicopolis Bulgariæ</i>	0.51a.	44.36
<i>Nicosia Cypri</i>	2. 4a.	35.40
<i>Nidrosia Nordvegiæ</i>	0.16].	63.12
<i>Nigropont, Eubæa</i>		

Unter „Neostadium Austriae“ sind die Koordinaten 0.16a (Meridian: Uraniborg) für die geografische Länge und 47.51 für die geografische Breite angeführt.

Es ist nicht unwahrscheinlich, dass Kepler sich einmal in Wiener Neustadt aufgehalten hat oder zumindest durchgefahren ist.

Die Karte der Reisewege Keplers



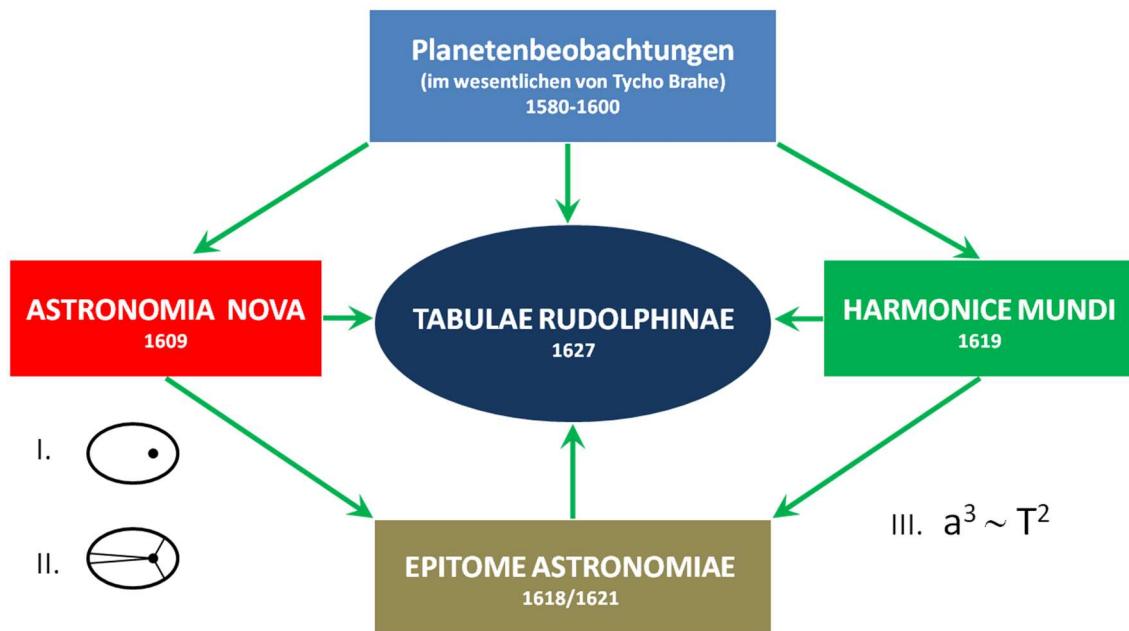
ist dem empfehlenswerten Buch [3] über Kepler entnommen. Sie zeigt, dass Kepler von Graz aus Wien besucht hat; daher ist die oben erwähnte Schlussfolgerung ziemlich wahrscheinlich.

Die astronomische Basis der Rudolphinischen Tafeln

Die den RT zugrunde liegenden theoretischen Überlegungen und Daten wurden von Kepler während seiner gesamten Lebenszeit mit viel Mühe und großer Sorgfalt erarbeitet. Aber auch Tycho Brahe hat einen nicht unwesentlichen Anteil

an diesem Riesenwerk. Nur durch seine Beobachtungskunst und Unermüdlichkeit konnte er jahrzehntelang Aufzeichnungen über die Positionen der Planeten führen, von denen sich besonders jene des Mars als ein wahrer Schatz herausstellten. Denn gerade aus diese Daten war es Kepler möglich, die Form der Planetenbahnen als Ellipsen zu erschließen; er hat damit die Jahrtausende alte Ansicht – als Bahnformen für Wandelsterne kommen ausschließlich Kreise in Betracht – überwunden.

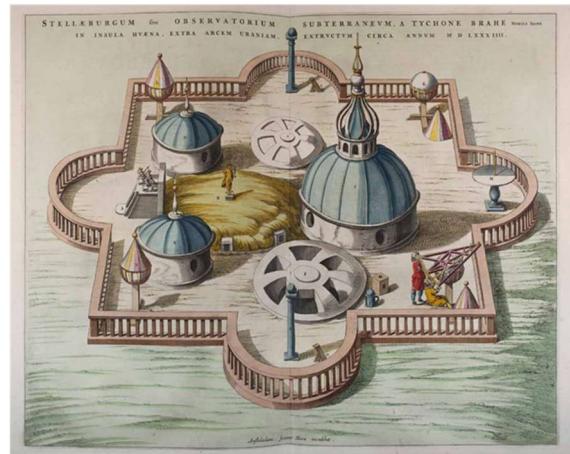
Die folgende Grafik zeigt in anschaulicher Weise das Zusammenspiel der Beiträge Tychos und Keplers zum krönenden Abschluss der Rudolphinischen Tafeln. Sie ist dem tiefergehenden Buch [4] von Volker Bialas über die RT entnommen:



Um den Beitrag Tychos zu den RT entsprechend zu würdigen, werden nun einige Ansichten seiner Forschungsstätten (auf der Insel Hven) und der verwendeten Messgeräte gezeigt:

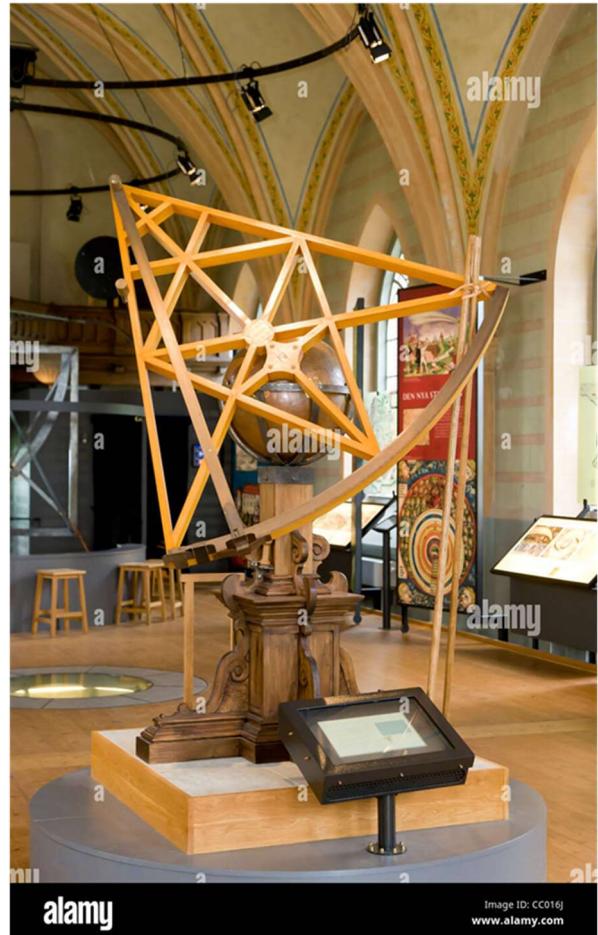
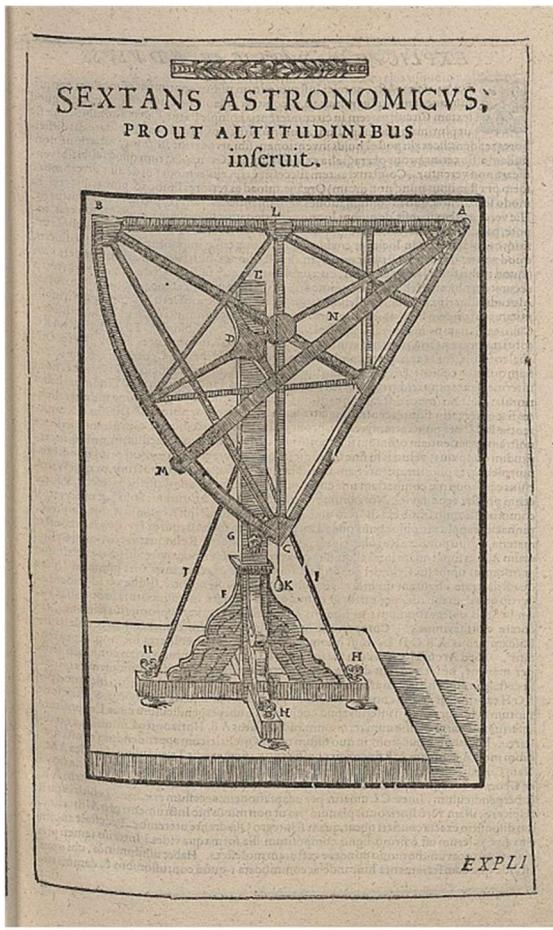


Uraniborg

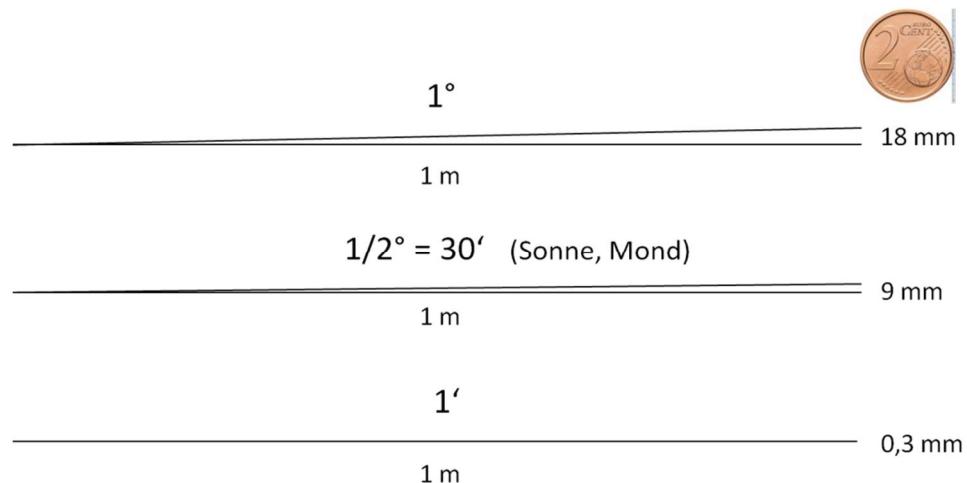


Stjerneborg

Tycho verwendete für seine Messungen der Stern- und Planetenpositionen von ihm selbst konstruierte und gebaute Winkelmessgeräte, die noch keine Fernrohre als Visierhilfe hatten. Die nächsten Abbildungen zeigen links einen Sextanten Tychos, wie in einem Buch dargestellt, und rechts die Nachbildung dieses Instrumentes, zu sehen im Tycho-Museum auf der Insel Hven:

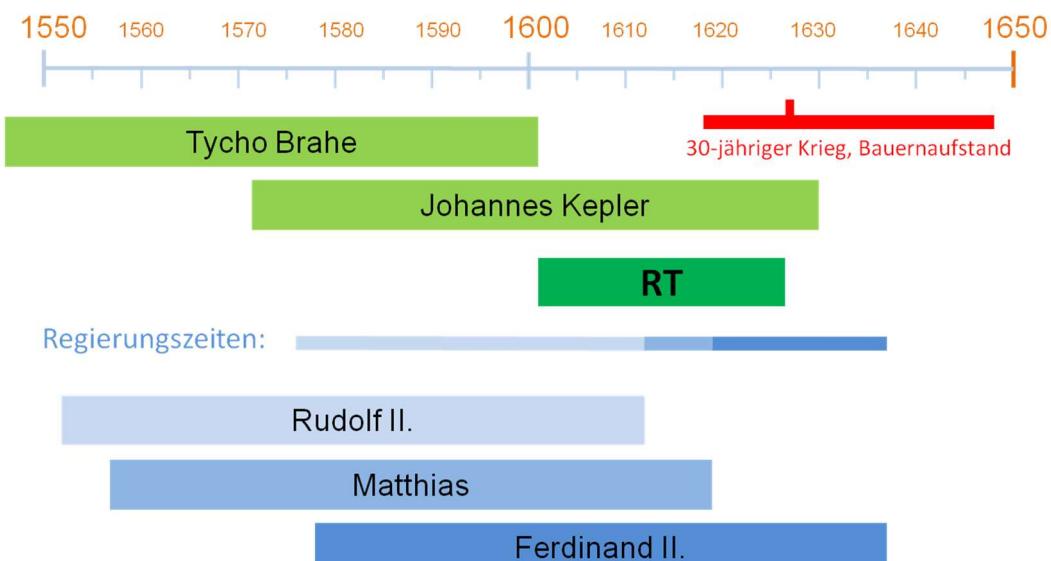


Die Genauigkeit der Positionsmessungen Tychos ist bewundernswert. Die von ihm gemessenen Winkel haben einen mittleren Fehler von etwa einer Bogenminute. Die Kleinheit dieser Fehler möge die folgende Abbildung zeigen (dargestellt durch Objekte in 1 m Entfernung):



Die Entstehungsgeschichte der Rudolphinischen Tafeln

Die folgende Zeittafel zeigt die sich enorm in die Länge ziehende Arbeit an den RT. Kepler konnte nach dem Tode Tychos auf die von ihm gemessenen Planetenpositionen trotz Schwierigkeiten mit Tychos Erben aufbauen; die Veröffentlichung der RT erfolgte aber erst ein Vierteljahrhundert später auf der Frankfurter Buchmesse im Oktober 1627. Die Gründe für diese Verzögerung waren mehrfach.



Einige wichtige Zeitpunkte aus der Entstehungsgeschichte der RT:

- 1601: Kaiser Rudolph II. beauftragt Tycho Brahe und Johannes Kepler, neue Planetentafeln herauszugeben. Im Oktober stirbt unerwartet Tycho.
- 1609: „Astronomia Nova“ (enthält I. und II. Keplersches Gesetz)
- 1612: Kepler übersiedelt nach Linz

- 1615: „Neue Stereometrie der Fässer“. Mahnung der Landstände zur Herausgabe der RT
- 1616: Bericht Keplers an die Landstände:

[...] Von den Tabulis Rudolphi.
 E[uer] Gn[aden] werden selber wissen, oder von
 anderen Mathematicis berichtet sein, das in
 re literaria die Tabulae astronomicae ein
 Wolbedächtliches Hauptwerckh sein müessen
 und gar nit wie ein Comedi über nacht anzu-
 stellen, oder wie ein poema auff blossen einfällen
 bestehe , oder wie ein Commentarius super
 Aristotelem auss den Ermel zu schütteln [...]

•
 Kepler an die “Verordnete des
 Erzhörzogthums Oesterreich ob der Ens”,
 Linz, 9. Mai 1616

Quelle: Online-Vortrag von Dr. Franz Kerschbaum im Astroverein 2021

- 1619: „Harmonices Mundi“ (enthält das III. Keplersche Gesetz)
- 1624: Kepler beim Kaiser in Wien (Finanzierung)
 Fertigstellung des Manuskriptes
- 1625: Kepler reist nach Nürnberg, Memmingen und Kempten
- 1626: Baueraufstand, die Linzer Druckerei brennt ab
 Kepler übersiedelt nach Ulm
- 1627: Druck der RT bei Jonas Saur in Ulm
 Herbst: Buchmesse in Frankfurt/Main

Ein Rechenbeispiel aus den RT

Kepler gibt einige Beispiele zu den „Dreisatz-Rechnungen“, etwa auf der Seite 16:

E X E M P L U M .	B E I S P I E L
<i>Scrupula permeantur quām citō permeantur</i> Minutis Scrupula 29'.45". 15'.43". 58'.47".	<i>Der Winkel wird durchlaufen in wie schnell werden</i> von Minuten durchlaufen 29' 45" 15' 43", 58' 47"?

Solche Aufgaben kennen wir als „Schlussrechnung“:

Von einem Gestirn wird ein Bogen von $29^\circ 45''$ in $15^m 43^s$ durchlaufen ...
... daher wird ein Bogen von $58^\circ 47''$ in $?^m ?^s$ durchlaufen?

Ein „moderner“ Rechnungsgang würde so verlaufen:

1. Winkel- und Zeitgrößen in die kleinsten Einheiten umrechnen:

$$29^\circ 45'' = 60 \cdot 29 + 45 = 1785''$$

$$15^m 43^s = 60 \cdot 15 + 43 = 943^s$$

$$58^\circ 47'' = 60 \cdot 58 + 47 = 3527''$$

2. Ansatz als Schlussrechnung (direkte Proportionalität):

$$1785'' \dots 943^s$$

$$3527'' \dots ?^s$$

$$\text{Daher } ? = (943 / 1785) \cdot 3527 = 1863^s$$

3. In die gewünschten Einheiten zurückverwandeln:

$$1863^s = 60 \cdot 31 + 3 = 31^m 03^s$$

Nun zu Keplers Rechnungsgang:

1. In der Tafel HEPTACOSIAS suche in der Spalte 60stel Bruchteile $29^\circ 45''$:

$$\log 29^\circ 45'' = 70152$$

Der Tafeln Rudolphi											
HEPTACOSIAS - 720 LOGARITHMUS					Bogen des Quadranten mit Differenzen						
Bogen des Quadranten mit Differenzen	60stel Bruchteile	Logarithmen mit Differenzen	24stel und Bruchteile	Teile und 60stel der neg. Log.	Bogen des Quadranten mit Differenzen	60stel Bruchteile	Logarithmen mit Differenzen	24stel und Bruchteile	Teile und 60stel der neg. Log.		
°	'	"	°	'	"	°	'	"	°	'	"
V	m	E	V	m	E	V	m	E	V	m	E
23.34.41	24. 0	91629,07	9.36	2.30. 0		26.44.37	27. 0	79850,77	10.48	2.13.20	
26.23.16 5.20	26.40	81093,02 312,01	10.40	2.15. 0	29.37.59 5.30	29.40	70432,05 280.51	11.52	2. 1.21		
26.28.36 5.20	26.45	80781,01 311,04	10.42	2.14.35	29.43.29 5.30	29.45	70151,54 279,72	11.54	2. 1. 1		
26.33.56 5.21	26.50	80469,97 310,08	10.44	2.14.10	29.48.59 5.30	29.50	69871,82 278,94	11.56	2. 0.40		
26.39.17 5.20	26.55	80159,89 309,12	10.46	2.13.45	29.54.29 5.31	29.55	69592,88 278,16	11.58	2. 0.20		
26.44.37	27. 0	79850,77	10.48	2.13.20	30. 0. 0	30. 0	69314,72	12. 0	2. 0. 0		

In dieser Tafel ebenso in aufsuchen (ggf. mit Interpolation!):

$$\log 15m43S = 133963$$

$$\log 58^\circ 47'' = 2049$$

2. Statt Multiplikation/Division nun Addition/Subtraktion der Log-Werte:

$$133963 - 70152 + 2049 = 65860$$

3. Rückverwandlung mit der Tafel HEPTACOSIAS, suche in der Spalte Logarithmen 65860:

$$66035 = \log 31.00$$

$$65767 = \log 31.05$$

Interpolation ergibt $65860 = \log 31.03$, also? = $31^m 03^s$

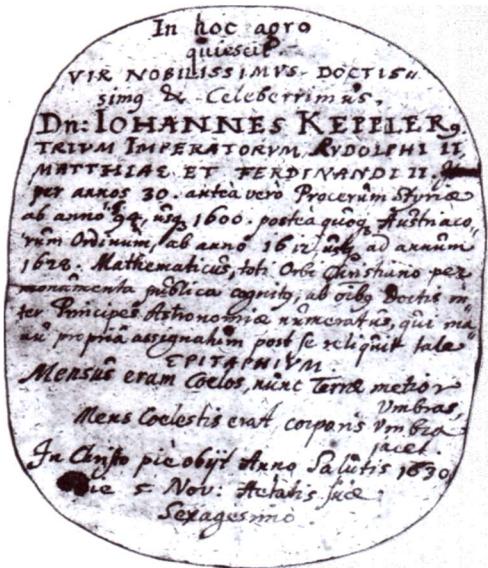
Der (durch die notwendigen Interpolationen sehr umständliche) Rechnungsgang zeigt, dass man sich zu Keplers Zeiten vor mehrstelligen Multiplikationen / Divisionen wie $(943 / 1785) \cdot 3527$ gescheut hat.

Ausklang

Im bedeutungsschweren Frontispiz der RT (es enthält einige Allegorien) findet sich am Basissockel links unten eine Selbstdarstellung Keplers. Sie zeigt in ironischer Weise die geringe materielle Anerkennung, die ihm bei Lebzeiten zu Teil wurde: Mantel und Nachthaube weisen ihn als fleißigen Beobachter des gestirnten Himmels aus; Federkiel, Tinte und Ziffern als unermüdlichen Rechner. Der Lohn ist spärlich, nur wenige von der „Obrigkeit“ herabfallende Münzen bleiben auf seinem Tisch liegen...



Kepler verstarb 1630, nur wenige Jahre nach der Veröffentlichung der RT in Regensburg. Sein Grab ist den Wirren des 30-jährigen Krieges zum Opfer gefallen. Eine Abschrift des Grabsteines hat sein Sohn Ludwig angefertigt:



Keplers Grabstein

Mensus eram coelos, nunc terra metior

umbras

Mens coelestis erat, corporis umbra jacet

Habe die Himmel erforscht, jetzt irdische Schatten durchmess' ich
Himmelsgeschenk war mein Geist, schattenhaft liegt nun der Leib

Literatur / Internet

[1] Johannes Kepler, *Gesammelte Werke, Band X: Tabulae Rudolphinae*. C.H.Beck'sche Verlagsbuchhandlung, München, MCMLXIX.

[2] Jürgen Reichert (Hrsg.), Ioannis Kepleri, *Tabulae Rudolphionae – Johannes Kepler, Rudolphinische Tafeln*. Originaler lateinischer Text und deutsche Übersetzung. Königshausen & Neumann, Würzburg 2014. ISBN 978-3-8260-5352-8.

[3] Thomas Posch, *Johannes Kepler – Die Entdeckung der Weltharmonie*. Theiss Verlag, 2017. ISBN 978-3-8062-3452-7.

[4] Volker Bialas, *Die Rudolphionischen Tafeln von Johannes Kepler*, Mathematische und astronomische Grundlagen. Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München 1969.

Wikipedia: https://de.wikipedia.org/wiki/Johannes_Kepler

https://de.wikipedia.org/wiki/Rudolfinische_Tafeln

Rudolphinische Tafeln:Archiv:

https://archive.org/details/bub_gb_AfkG8DVaJWkC/mode/2upDF (62 MB):
<https://publikationen.badw.de/de/002334746/pdf/CC%20BY>

0.3 Das Keplersche Problem

(ao. Prof. i. R. Dr. Peter Schmitt)

In einer kleinen Schrift (*Strena Seu De Nive Sexangula*, 1611), die vor allem der sechseckigen Form von Schneekristallen gewidmet ist, behandelt Kepler auch die Aufgabe, gleichgroße Kugeln möglichst raumsparend anzuordnen.

Vorgeschichte

Diese Frage geht auf *Sir Walter Raleigh* zurück, der 1587 *Thomas Harriot* um Rat fragte, wie man Kanonenkugeln am günstigsten in einem Schiff lagern könnte, und die von Harriot später (1606) Kepler in einem Brief mitgeteilt wurde. Trotz dieser Vorgeschichte nennt man sie in der Geometrie das Keplersche Problem.

Praktische Lösungen findet man sowohl in Burghöfen als auch manchmal auf Märkten, wenn Orangen, Melonen, oder andere Früchte zu kleinen Pyramiden geschichtet werden. Man erhält diese, indem man in der untersten Schicht die Kugeln entweder (im Quadrat) so anordnet, dass jede Kugel (außer solche am Rand) vier Nachbarn (die sie berührt) hat (eine *quadratische Schicht*), oder (wie bei einer Bienenwabe) von sechs Kugeln umgeben (berührt) wird (eine *hexagonale Schicht*). Dabei entstehen dort, wo vier bzw. drei Kugeln zusammentreffen, Vertiefungen. Legt man in diese Vertiefungen weitere Kugeln (bei einer quadratischen Schicht in jede, bei einer hexagonalen Schicht nur in jede zweite), so erhält man eine zweite Schicht von Kugeln, auf die man wieder Kugeln legen kann, und so fort.

Diese beiden Anordnungen sind im Wesentlichen äquivalent: Sie unterscheiden sich nur durch die Orientierung der Ebenen in Bezug auf die Grundfläche. Wenn man sich auf die Anschauung verlässt, lösen sie die anfangs gestellte Aufgabe, denn es scheint evident zu sein, dass es keine Möglichkeit zur Verbesserung gibt.

Das mathematische Problem

Die Mathematik gibt sich allerdings mit der Anschauung nicht zufrieden: Damit eine Behauptung als mathematische Tatsache anerkannt wird, muss es für sie einen lückenlosen Beweis geben. Da ein solcher Beweis weder von Kepler gegeben wurde, noch –trotz zahlreicher Bemühungen– in den danach folgenden Jahrhunderten (bis ins späte 20. Jahrhundert) gefunden werden konnte, wurde sie korrekterweise auch Keplersche Vermutung genannt.

Kreis- und Kugelpackungen

Damit eine Behauptung mathematisch streng bewiesen werden kann, muss sie davor präzise formuliert werden. Wir machen das statt für Kugeln im Raum für Kreisscheiben in der Ebene:

Wenn man (gleiche) Münzen nimmt, wird man rasch erkennen, dass die Münzen dann besonders dicht liegen, wenn jede Münze von sechs Münzen umgeben ist. Das lässt sich aber nicht durchhalten, denn da man ja nur endlich viele Münzen zur Verfügung hat, werden immer einige am Rand der bedeckten Fläche weniger Nachbarn haben. Versucht man in verschiedenen Gebieten möglichst viele Münzen unterzubringen, wird man bald merken, dass die Anzahl der Münzen nicht nur von der Größe des Gebietes abhängt, sondern auch von dessen Form (Rechteck, Kreis, ...). Daher ist die bestmögliche Dichte der Überdeckung – das ist die Gesamtfläche der Münzen geteilt durch die Fläche des Gebiets – nicht konstant, sondern hängt von Form und Größe des Gebiets ab.

Dichte von Kreispackungen

Um diese Komplikationen auszuschließen betrachtet man für das Keplersche Problem statt endlicher Bereiche die ganze Ebene und daher (natürlich) unendlich viele Kreisscheiben, und definiert als Dichte einer solchen Kreispackung in der Ebene den Grenzwert der Dichten für immer größere Gebiete (z.B., konzentrische Kreise mit unbeschränkt wachsenden Radien). Wie die Anschauung erwarten lässt, ist dieser Wert am größten, wenn jede der Kreisscheiben von sechs Scheiben berührt wird, und beträgt dafür

$$\frac{\pi\sqrt{3}}{6} \approx 0,9069$$

(Dieser Wert ändert sich übrigens nicht, wenn man einige der Kreisscheiben weglässt.) Dass dieser Wert tatsächlich der beste (d.h. größte) Wert ist, der erreicht werden kann, hat zuerst *Lagrange* (1773) bewiesen, allerdings nur für *gitterförmige* Packungen (d.h., durch Kreise, deren Mittelpunkte auf den Schnittpunkten zweier Scharen von parallelen Geraden liegen). Der Beweis für den allgemeinen Fall (für Kreise in beliebiger Lage) wurde erst viel später von *Axel Thue* (1910) erbracht.

Kugelpackungen

Auf ganz ähnliche Weise wird nach der dichtesten Kugelpackung im Raum gesucht, wobei man –so wie Kepler– immer überzeugt war, dass die von ihm betrachteten Anordnungen optimal sind. Für sie ergibt sich die Dichte

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{6} \approx 0,74048$$

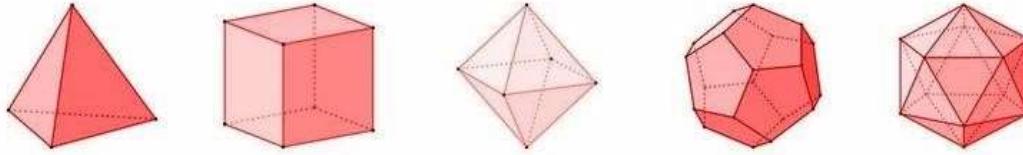
Beginnt man mit einer quadratischen Schicht, so erhält man eine gitterförmige Packung. Beginnt man mit einer hexagonalen Schicht, gibt es für jede weitere Schicht zwei mögliche Lagen, und daher sind nicht alle so erzeugten Packungen gitterförmig. Erst *C.F. Gauß* (1831) konnte beweisen, dass die Keplersche Vermutung zumindest für *gitterförmige* Packungen (wie sie in der Kristallographie verwendet werden) richtig ist.

Lösung des Keplerschen Problems

Der allgemeine Fall blieb jedoch – trotz großer Anstrengungen und immer besserer Abschätzungen – offen und wurde erst von *Thomas Hales* (1998) durch massiven Computereinsatz bestätigt. Wegen des enormen Umfangs der verwendeten Programme und Rechenkapazitäten konnte dieser Beweis allerdings nicht wie üblich überprüft werden und wurde nur *mit Vorbehalt* anerkannt.

In den folgenden Jahren hat Hales – mit internationaler Zusammenarbeit – den Beweis so formalisiert, dass dessen Korrektheit durch – immer noch sehr umfangreiche – computerisierte Beweismethoden bestätigt werden konnte (2017). Aus der Keplersche *Vermutung* ist somit ein mathematischer *Satz* geworden.

1. Festvortrag – 5 Jahresfeier



Warum gibt es genau 5 Platonische Körper?

(Mag. Franz Josef Vrabec)

Einleitung

Das umfangreiche Werk des griechischen Philosophen *Platon* (428-348 v.Chr.) ist fast vollständig erhalten geblieben. Mittels der literarischen Form des Dialogs gelingt es Platon, die Leser auf das beabsichtigte Ziel seiner Überlegungen behutsam hinzuführen. In einem seiner

Spätwerke, dem Dialog „Timaios“, lässt Platon eben diesen von der Entstehung und der Beschaffenheit des Kosmos berichten. Dabei werden den vier Elementen Feuer, Erde, Wasser und

Luft die „...wohl vier schönsten Körper...“ [1] zugeordnet (Abb. 1), eben vier jener geometrischen Körper, die wir heute nach Platon benennen und die von regelmäßigen und kongruenten Vielecken begrenzt sind. Die fünfte Möglichkeit einer Zusammensetzung dieser Art steht für den Kosmos selbst!



Abb.: 1

Die von Platon für seine kosmologische Schau verwendeten fünf Körper waren vermutlich bereits den Pythagoräern bekannt. Das für die Entwicklung der mathematischen Methoden so bedeutsame Werke des *Euklid*, seine *Elemente*, enthalten als krönenden Abschluss im Buch 13 (Theaitetos) eine Darstellung der Eigenschaften dieser Körper, wo auch bewiesen wird, dass es genau fünf dieser Körper gibt.

Was ist (mathematisch exakt) ein Platonischer Körper?

Wir wollen uns nun ebenfalls davon überzeugen, dass die Platonischen Körper in einer Fünfzahl auftreten. Dazu müssen wir aber zuerst mathematisch exakt definieren, was ein *Platonischer Körper* ist. Fragen wir MathematikerInnen, so erhalten wir die Antwort:

Ein *Platonischer Körper* ist ein reguläres, konvexes Polyeder.

Damit können wir noch wenig anfangen - wir müssen eine Stufe tiefergehen:

Unter *Polyeder* verstehen Mathematiker einen Körper, der von ebenen Flächen begrenzt wird. Kugel, Kegel und Zylinder sind daher keine Polyeder, aber ein Quader (z.B. eine Schuhsschachtel) wäre ein solches. Nun zum Wort *regulär*: Damit ist gemeint, dass die begrenzenden ebenen Flächen kongruente, regelmäßige Vielecke sind und an jeder Ecke gleichviele dieser Flächen zusammenstoßen. Jetzt haben wir es gleich: Bei *regelmäßigen* Vielecken sind alle Seiten gleich lang und alle Winkel gleich groß und *kongruent* bedeutet, dass alle diese Vielecke deckungsgleich sind, also nahtlos übereinandergelegt werden können. Die Erklärung für *konvex* ist einfach: Ein Körper ist konvex, wenn die Verbindungsgeraden zweier beliebiger Punkte des Körpers gänzlich innerhalb dieses Körpers liegen.

Ja, so eine exakte Definition hat es in sich, aber in der Mathematik ist es ganz wichtig, von Anfang an sorgfältig vorzugehen!

Aufbau der Platonischen Körper und Nachweis ihrer Fünfzahl

Wir werden nun - Schritt für Schritt - Platonische Körper aufbauen. „Baumaterial“ sind regelmäßige Vielecke, die Abb. 2 zeigt genau jene, die für Platonischen Körper in Frage kommen.

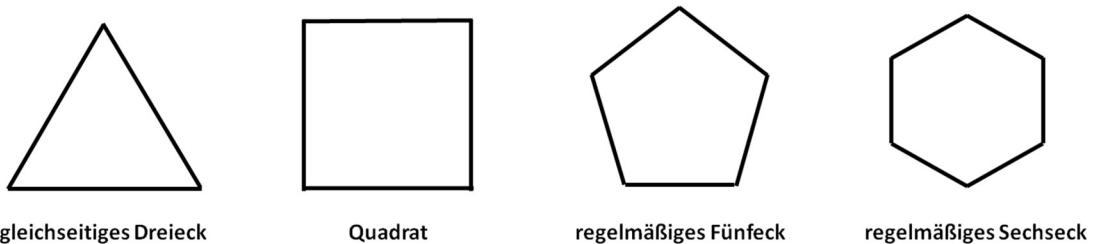


Abb.: 2

Selbstverständlich gibt es auch regelmäßige Siebenecke, Achtecke, usw. Wir werden aber in Kürze feststellen, dass wir mit den abgebildeten vier regelmäßigen Vielecken auskommen werden.

Die im Folgenden durchgeführten Überlegungen sind nicht streng mathematisch, sondern sind eher anschaulich gehalten. Beim Vortrag im *Erlebnis Mathematik* wurde diese Anschaulichkeit noch zusätzlich durch Modelle aus Pappe für die auftretenden *Raumecken* unterstützt, die sich mit den gegebenen regelmäßigen Vielecken bilden lassen. Es ist lehrreich, sich diese Konfigurationen aus Papier auszuschneiden (Abb. 3, 5, 7, 11, 14) und damit zu experimentieren!

Beginnen wir mit gleichseitigen Dreiecken als Begrenzungsflächen. Die Verbindung von nur zwei solcher Dreiecke an einer gemeinsamen Seite ergibt keine Ecke - es müssen daher mindestens drei dieser Dreiecke an einer Ecke zusammenkommen (Abb. 3).

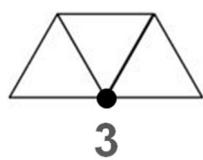


Abb.: 3

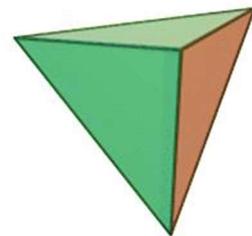


Abb.: 4

Diese drei miteinander verbundenen Dreiecke lassen sich zu einer Pyramide zusammenfalten, die dabei freibleibende ebene Fläche ist zu den Dreiecken kongruent und bildet damit zwanglos die vierte Fläche des einfachsten der Platonischen Körper, des *Tetraeders* (Abb. 4).

Wir lassen nun vier kongruente, gleichseitige Dreiecke an einer Ecke zusammenstoßen (Abb. 5).

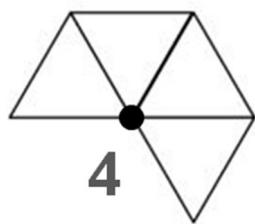


Abb. 5

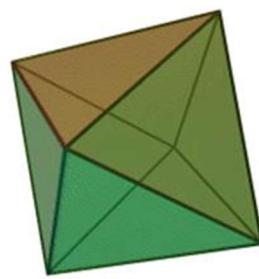


Abb. 6

Diese Konfiguration kann so zu einer Pyramide zusammengefaltet werden, dass deren freibleibende ebene Fläche ein Quadrat ist. Setzen wir auf dieses die freigebliebene Fläche einer zweiten solcherart gebildeten Pyramide, so erhalten wir einen Körper, der von acht kongruenten, gleichseitigen Dreiecken begrenzt ist. Bei den durch das Zusammenfügen der Quadrate entstandenen vier Ecken haben treffen ebenfalls vier Dreiecke zusammen, sodass tatsächlich ein zweiter Platonischer Körper entstanden ist, das *Oktaeder* (Abb. 6).

Können wir auch fünf kongruente gleichseitige Dreiecke an einer Ecke zusammenkommen lassen (Abb. 7) ? Ja, das geht gerade noch und liefert nach dem Zusammenfalten eine

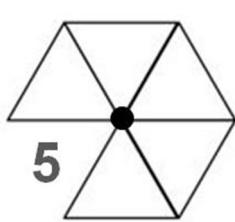


Abb.: 7

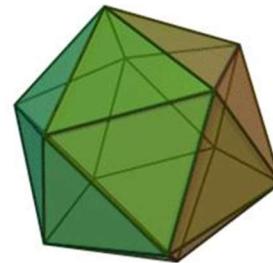


Abb.: 8

„Haube“, deren freibleibende Fläche ein Fünfeck ist. Wir dürfen aber nicht eine zweite solcherart gebildete Haube entlang der beiden Fünfecke verbinden, denn dann würden an den fünf Ecken des Fünfecks nur vier Dreiecke zusammenkommen, also nicht fünf wie bei den Spitzen der Hauben.

Wir können die beiden Hauben nur durch einen „Ring“ (Abb. 9) von zehn aneinander geketteten kongruenten, gleichseitigen Dreieck verbinden. So entsteht ein Körper, der von 20 Dreiecken begrenzt ist und bei dem nun in jeder Ecke 5 Dreiecke zusammenkommen (Abb. 8): das *Ikosaeder*.

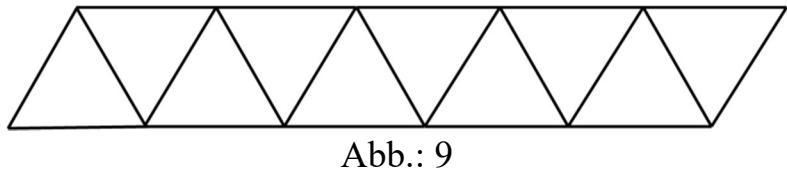


Abb.: 9

Wenn sechs kongruente, gleichseitige Dreiecke an einer Ecke zusammentreffen (Abb. 10), so liegen sie ausgebreitet in einer Ebene. Um ein Raumgebilde zu erzeugen, müsste man dieses Gebilde auffalten, was aber ohne Verletzung der Konvexität nicht möglich ist. Die Konvexität ist auch dann verletzt, wenn mehr als sechs Dreiecke an einer Ecke zusammentreffen.

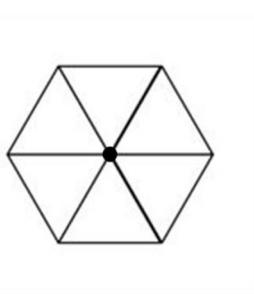


Abb.: 10

Um den nächsten der Platonischen Körper zu finden, müssen wir bei den Begrenzungsflächen von den Dreiecken zu den Quadraten übergehen.

Wir beginnen mit drei Quadraten (Abb. 11). Diese können wir zu einer „Raumecke“ zusammenfalten und mit zwei weiteren solcher Raumecken erhalten wir mühelos einen von sechs kongruenten Quadraten begrenzten Würfel (Abb. 12), bei dem an jeder Ecke drei Quadrate zusammenstoßen. Die zu den bisherigen Benennungen der Platonischen Körper passende lautet dafür *Hexaeder*.

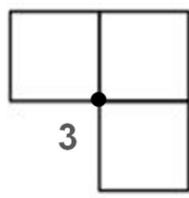


Abb.: 11

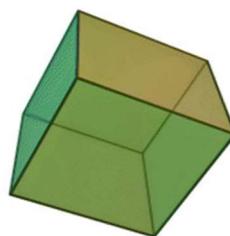


Abb.: 12

Kommen vier kongruente Quadrate an einer Ecke zusammen (Abb. 13), so kann man aus denselben Gründen wie bei den sechs Dreiecken kein konvexes Raumgebilde mehr erzeugen.

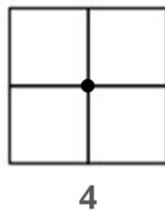


Abb.: 13

Wir betrachten daher nun Körper, die von kongruenten, regelmäßigen Fünfecken begrenzt sind und beginnen mit drei davon (Abb. 14):

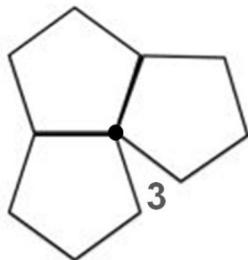


Abb.: 14

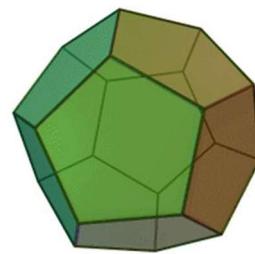


Abb.: 15

Der Innenwinkel eines Fünfeckes beträgt 108° . Da $3 \times 108^\circ = 324^\circ < 360^\circ$ ist, bleibt ein Zwickel von 36° über, sodass durch dessen Schließung eine konvexe „Haube“ entsteht. Vier solcher Hauben lassen sich dann zu einem geschlossenen Körper (Abb. 15) verbinden, dem *Dodekaeder*.

Es ist nicht möglich, vier kongruente regelmäßige Fünfecke an einer Ecke zusammenkommen zu lassen, sodass die Konvexität nicht verletzt wird. Aus diesem Grund können auch drei (oder mehr) regelmäßige Sechsecke (Abb. 16), die an einer Ecke zusammenkommen, für den Aufbau eines Körpers nicht verwendet werden:

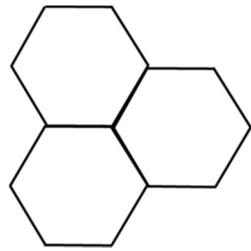


Abb.: 16

Wir haben nun alle Möglichkeiten erschöpft und daher gibt es genau die fünf Platonischen Körper: *Tetraeder*, *Oktaeder*, *Ikosaeder*, *Hexaeder*, *Dodekaeder*.

Die Platonischen Körper bei Kepler

Die Platonischen Körper haben nach Euklid einige weitere „Liebhaber“ gefunden, die sich mit diesem auch ästhetisch sehr anregenden Thema näher beschäftigt haben. So hat *Johannes Kepler* in seinem Frühwerk *Mysterium Cosmographicum* (1596) mit Hilfe von ineinander geschachtelten Platonischen Körpern versucht, die Ausmaße des Sonnensystems zu erklären (Abb.: 17 und Abb.: 18).

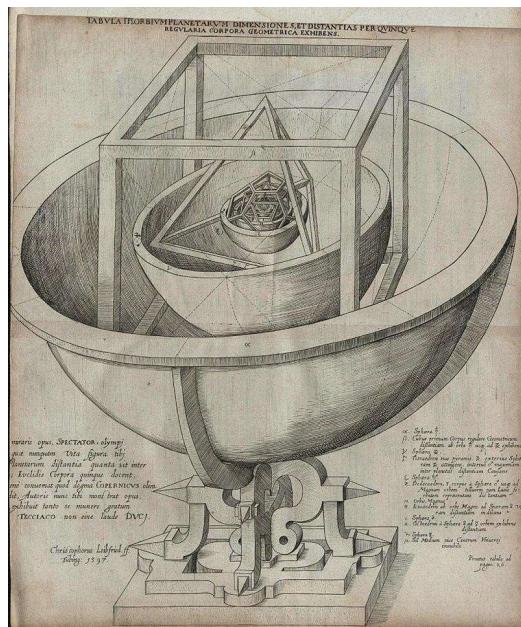


Abb.: 17

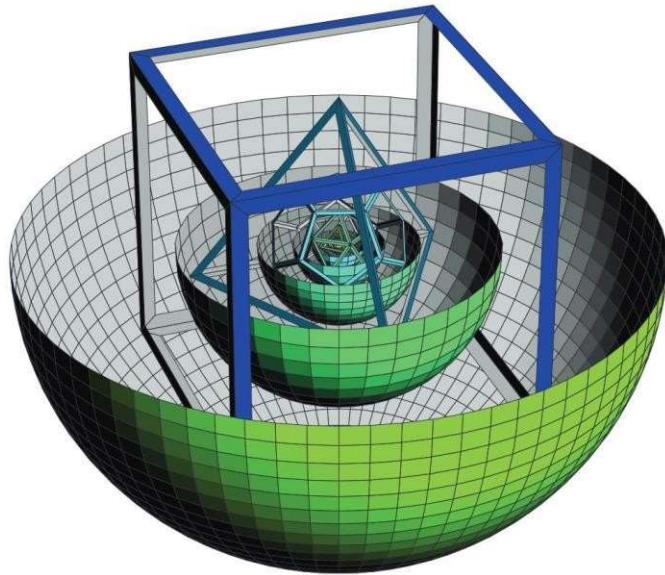


Abb.: 18

Eine der vielen Formeln, die wir Euler verdanken

Der wohl produktivste Mathematiker aller Zeiten war Leonhard Euler (1707-1783). Er baute nicht nur die von Leibniz und Newton begründete Infinitesimalrechnung zu „schwindelnder Höhe“ aus, sondern beschäftigte sich auch mit Algebra, Zahlentheorie und geometrischen Fragestellungen. So fand Euler 1750 den nach ihm benannten *Eulerschen Polyedersatz*, den er einige Jahre später mit einem (nicht ganz vollständigen) Beweis veröffentlichte [3]. Dieser schöne Satz lässt sich kurz durch eine elegante Formel ausdrücken, die

Eulersche Polyederformel

Bezeichnet man mit E die Anzahl der Ecken, mit K die Anzahl der Kanten und mit F die Anzahl der begrenzenden Flächen eines Polyeders, so gilt

$$E - K + F = 2$$

Wir wollen diese Formel an Hand des bekanntesten Platonischen Körpers, des Würfels, überprüfen:

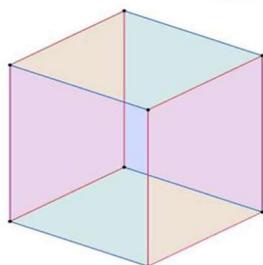


Abb.: 19

Ecken: $E = 8$

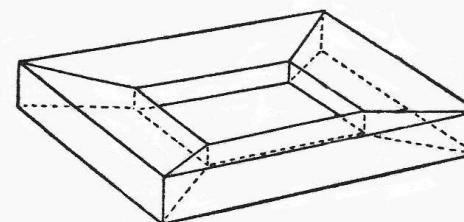
Kanten: $K = 12$

Flächen: $F = 6$

$$E - K + F = 8 - 12 + 6 = 2$$

Polyeder	Ecken E	Kanten K	Flächen F	$E - K + F$
Tetraeder	4	6	4	2
Hexaeder	8	12	6	2
Oktaeder	6	12	8	2
Dodekaeder	20	30	12	2
Ikosaeder	12	30	20	2

Allerdings gilt diese leicht zu merkende Formel nicht für alle Körper! Ausgenommen sind Körper, die „Löcher“ haben, z.B. ein Bilderrahmen (überprüfen Sie es - was kommt da heraus?):



Eine „Dualität“ bei den Platonischen Körpern

In der Tabelle der Zusammensetzung der Platonischen Körper aus den drei geometrischen Grundgebilden Ecken, Kanten und Flächen fallen bei genauerer Betrachtung drei Merkwürdigkeiten auf:

Polyeder	Ecken	Kanten	Flächen
Tetraeder	4	6	4
Hexaeder	8	12	6
Oktaeder	6	12	8
Dodekaeder	20	30	12
Ikosaeder	12	30	20

Hexaeder und Oktaeder haben gleich viele Kanten. Die Anzahl ihrer Ecken und Flächen sind gegeneinander vertauscht.

- Dodekaeder und Ikosaeder haben gleich viele Kanten. Die Anzahl ihrer Ecken und Flächen sind gegeneinander vertauscht.
- Der Tetraeder hat exakt so viele Ecken, wie es Flächen hat.

Aus diesem Grund werden Hexaeder und Oktaeder (bzw. Dodekaeder und Ikosaeder) als zueinander *dual* bezeichnet. Beispiel: Die Mittelpunkte der 6 Quadrate eines Hexaeders (Würfels) bilden die 6 Eckpunkte eines Oktaeders (Abb. 20, zweiter Körper von links). Diese schöne grafische Darstellung ist der empfehlenswerten Arbeit [2] entnommen.

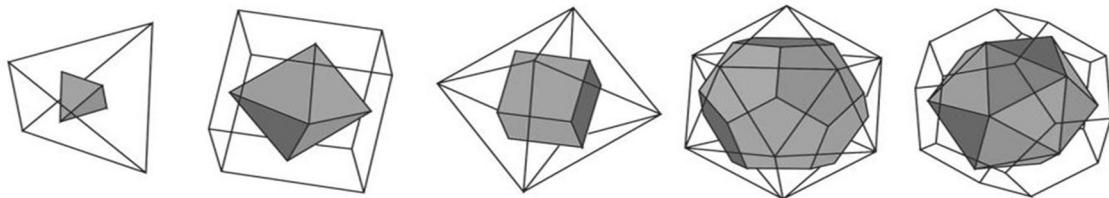


Abb.: 20

Das Tetraeder ist ein Sonderfall: Die Mittelpunkte seiner 4 Flächen ergeben wieder die Eckpunkte eines Tetraeders - das Tetraeder ist *zu sich selbst dual*.

Lässt sich die Anzahl der Platonischen Körper auch „berechnen“?

Die Antwort darauf ist nur ein bedingtes: Ja! Durch eine Rechnung können wir zwar zeigen, welche Platonische Körper *möglich* sind - ob sie dann tatsächlich existieren, muss durch zusätzliche geometrische Überlegungen nachvollzogen werden. Und auch die im vorigen Abschnitt erwähnte Eulersche Polyederformel werden wir für die Rechnung benötigen.

In der Mathematik ist es sehr wichtig, einen geeigneten *Ansatz* zu treffen; wir versuchen es mit:

Platonischer Körper werden von gleichartigen, regelmäßigen Vielecken begrenzt, die $S > 2$ Seiten haben und an jeder Raumecke $R > 2$ dieser Vielecke zusammentreffen.

Multiplizieren wir die Anzahl der Seiten S eines Vieleckes mit der Anzahl der Vielecke (= Flächen) F , so erhalten wir das Doppelte der Kantenanzahl K , da jede Kante bei zwei Flächen vorkommt:

$$2K = SF$$

Multiplizieren wir die Anzahl R der Kanten, die an einer Ecke zusammenkommen, mit der Anzahl der Ecken E , so erhalten wir ebenfalls das Doppelte der Kantenanzahl K , da jede Kante zwei Ecken verbindet:

$$2K = RE$$

Zusätzlich verwenden wir noch die uns schon geläufige Eulersche Polyederformel:

$$E - K + F = 2$$

Aus diesen drei Gleichungen lassen sich nun nach einiger Rechnung Formeln für E , K und F ableiten, die nur von S und R abhängen:

$$E = \frac{4S}{4 - (S - 2)(R - 2)}$$

$$K = \frac{2SR}{4 - (S - 2)(R - 2)}$$

$$F = \frac{4R}{4 - (S - 2)(R - 2)}$$

Da der Nenner $4 - (S - 2)(R - 2)$ dieser drei Brüche eine positive Zahl sein muss, erhalten wir für die noch unbekannten Größen $S > 2$ und $R > 2$ die Ungleichung

$$(S - 2)(R - 2) < 4.$$

Diese Ungleichung kann durch systematisches Probieren gelöst werden. Beginnen wir mit $S = 3$. Die Ungleichung lautet dann $R - 2 < 4$ oder $R < 6$. Wegen $R > 2$ sind für R nur die Fälle 3, 4 oder 5 möglich:

$S = 3, R = 3$: Dreiecke, von denen je 3 an einer Ecke zusammenkommen:

Tetraeder

$S = 3, R = 4$: Dreiecke, von denen je 4 an einer Ecke zusammenkommen:

Oktaeder

$S = 3, R = 5$: Dreiecke, von denen je 5 an einer Ecke zusammenkommen:

Ikosaeder

Wählen wir $S = 4$, so lautet die Ungleichung $2(R - 2) < 4$ oder $R < 4$. Wegen $R > 2$ ist nur mehr der Fall $R = 3$ möglich:

$S = 4, R = 3$: Quadrate, von denen je 3 an einer Ecke zusammenkommen:
Hexaeder

Wählen wir $S = 5$, dann lautet die Ungleichung $3(R - 2) < 4$ oder $R < 10/3$. Wegen $R > 2$ ist nur $R = 3$ möglich:

$S = 5, R = 3$: Fünfecke, von denen je 3 an einer Ecke zusammengenommen:
Dodekaeder

Für $S \geq 6$ lautet die Ungleichung $R < 3$ und wegen $R > 2$ gibt es nun keine Lösungen mehr. Wir konnten also rein rechnerisch zeigen, dass es (auf Grund des Bestehens einer Ungleichung) höchstens fünf Platonische Körper geben kann.

Daraus folgt aber nur, dass diese 5 Körper *möglich* sind. Die Erfüllung der Ungleichung ist nur eine *notwendige Bedingung* für die Existenz dieser Körper. Dass es tatsächlich zu jedem dieser fünf gefundenen (S, R) -Lösungspaare einen Körper gibt, ist durch zusätzliche geometrische Überlegungen nachzuvollziehen.

Literatur / Internet

- [1] Platon, *Sämtliche Werke, Band 4: Timaios, Kritias, Minos, Nomoi*. Rowohlt Taschenbuch Verlag GmbH, 2006. Seite 55.
- [2] Deborah C. DeHovitz, *The Platonic Solids*, Whitman College, Washington, 2016.
<https://www.whitman.edu/Documents/Academics/Mathematics/2016/DeHovitz.pdf>
- [3] Leonhard Euler, *Elementa doctrinae solidorum*, 1758. Euler-Archiv:
<https://scholarlycommons.pacific.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1229&context=euler-works>
- [4] Wikipedia-Eintrag: *Platonischer Körper*.
https://de.wikipedia.org/wiki/Platonischer_Körper



XII. Simulation elektromagnetischer Felder

(*Ing. Hans Preineder*)

Dieser Vortrag zeigt die Anwendung der Simulation elektromagnetischer Felder als Teil der angewandten Mathematik und stellt auch die Frage: Wann kann eine Simulation hilfreich sein?

1.Elektromagnetisches Feld, damit habe ich doch nichts zu tun - oder?

Wie sehr wir von elektromagnetischen Feldern beeinflusst bzw. abhängig sind, zeigt unsere Fähigkeit zu sehen. Denn das sichtbare Licht ist Teil des elektromagnetischen Feldes.

Nicht zufällig sehen wir in dem Frequenzbereich, in dem unsere Atmosphäre durchsichtig ist.

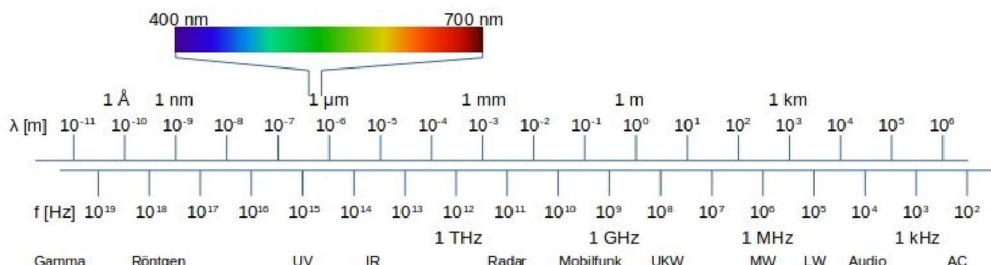


Abb 1: Sichtbares Licht im elektromagnetischen Spektrum

1.1. Elektromagnetisches Störfeld im Bahnbereich

Die elektromagnetische Störemission eines Bahnfahrzeugs könnte empfindliche elektronische Geräte oder Funkdienste stören. Für die

Zulassungsprüfung sind unter anderem Messungen des magnetischen Störfeldes im Frequenzbereich 9 kHz bis 30 MHz erforderlich.

Da diese Messungen nicht trivial sind, wurden unterschiedliche Einflüsse untersucht.

Mögliche Untersuchungsmethoden

- Messung mit Loopantenne
- Direkte Berechnung, z.B. nach Biot Savart
- Simulation z.B. auf Basis der Maxwell Gleichungen

2. Simulation

2.1 Werkzeug

- Simulationstool

FDTD Tool OpenEMS mit GNU Octave und ParaView unter Linux und Windows 10 auf Standard PC 2,6 GHz und 8 GB RAM

2.2 Simulationsmodell - Parameter

Topologisches Modell mit den relevanten elektrischen Leitern der Bahn

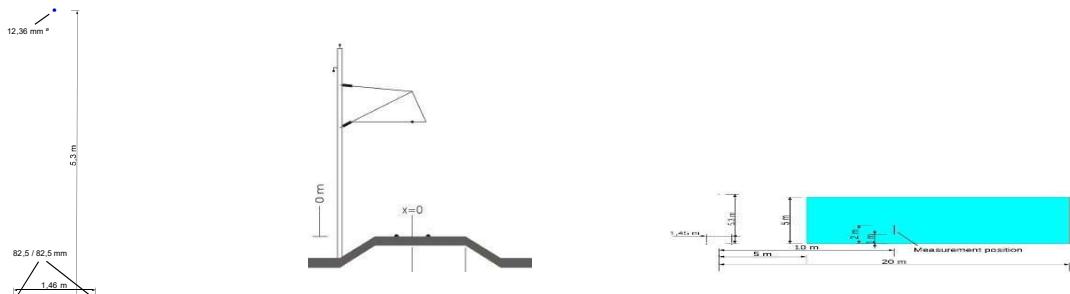


Abb. 2: relevante Leiter Abb. 3: Gleiskonfiguration Abb 4: Ergebnisfenster für Magnetfeld

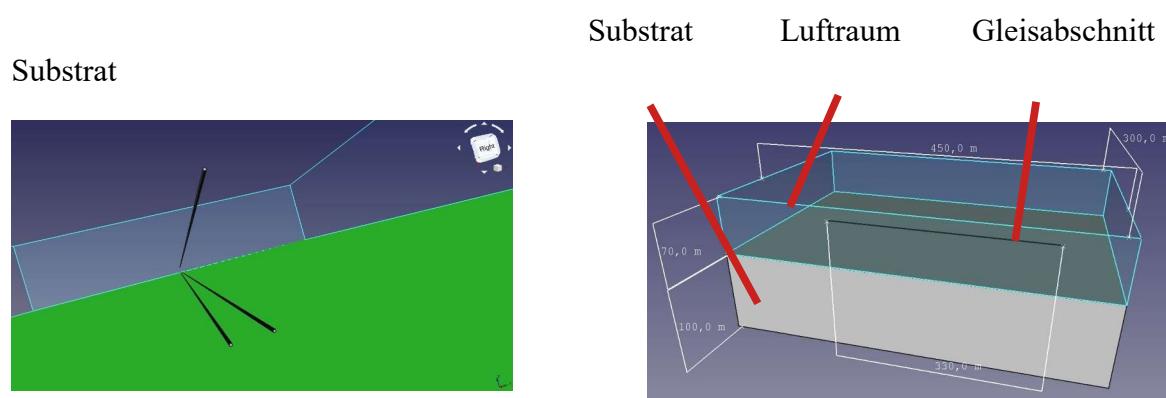


Abb. 5: Gleise u. Oberleitung auf dem Substrat

Abb. 6: gesamte Simulationsbox

Parameter

- Erdreich Erde typisch, Sand trocken und Erde feucht
- Stimulus 500 kHz Gauß
- Schritte $5 \cdot 10^6$
- Laufzeit ca 50 h
- Frequenzbereich 9 kHz – 500 kHz
- Ergebnisfenster der Magnetischen Feldstärke 5 – 20 m von Gleismitte, 0 – 5 m über Schienenoberkante

3. Simulation – Ergebnis

3.1 Magnetfeld

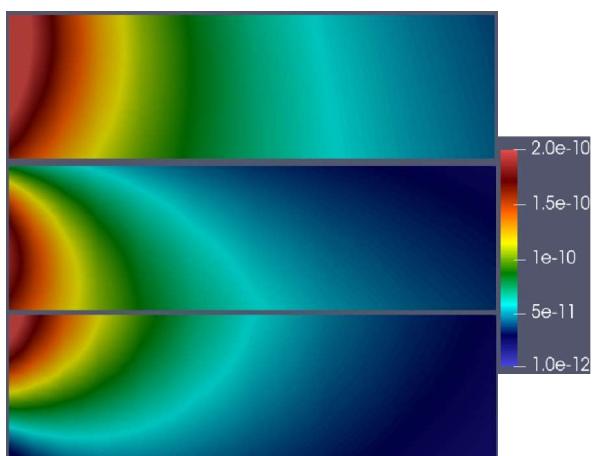


Abb 7a: 150 kHz, typ. Erdreich

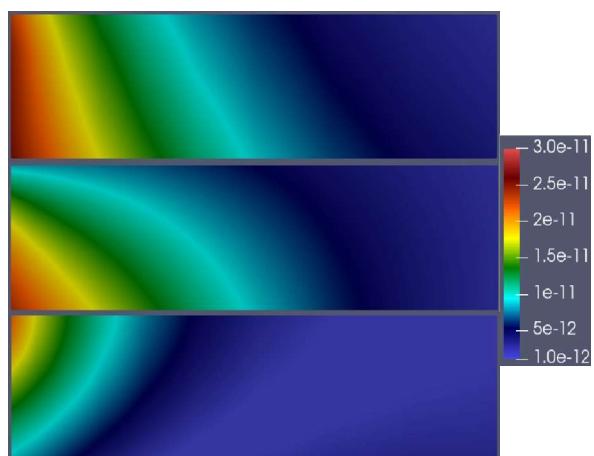


Abb 7b: 500 kHz, typ. Erdreich

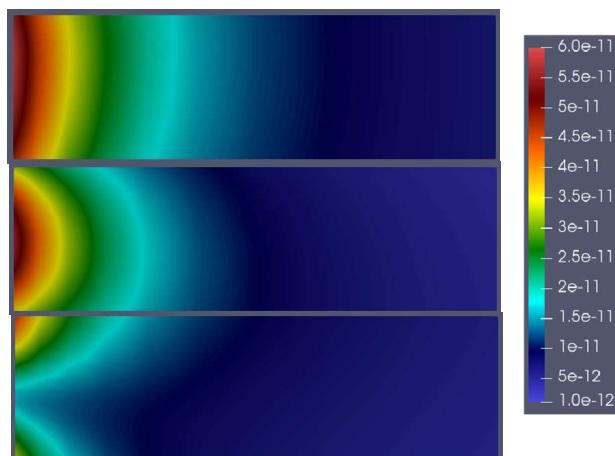


Abb 8: 9 kHz, trockener Sand

In jedem Bild ist oben die Magnitude, in der Mitte die horizontale und unten die vertikale Feldkomponente gezeigt.

Diese Bilder zeigen auch die wichtigste Aussage der Untersuchung, dass es nicht in allen Fällen reicht, nur, wie in der Norm vorgesehen, die horizontale Feldkomponente zu messen, um das Störmagnetfeld korrekt zu bewerten.

3.2 Stromdichte im Erdreich

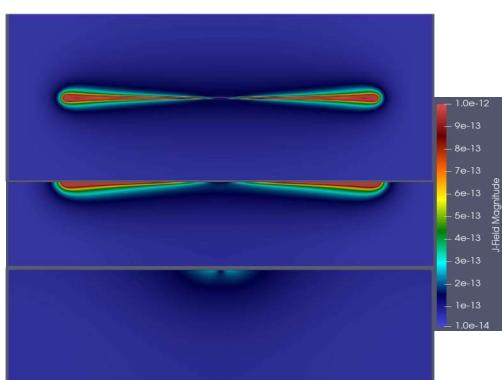


Abb 9: 9 kHz, typ. Erde

Grundriss

Längsschnitt

Querschnitt

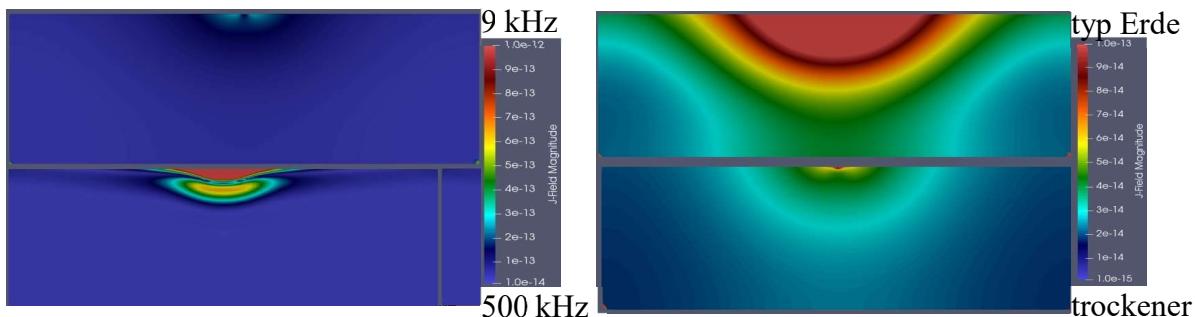


Abb 10: Querschnitt, typ Erde

Abb 11: Querschnitt, 9 kHz Sand

Achtung in Abb. 10 enthält das obere Teilbild die identischen Daten wie das obere Teilbild in Abb. 11 jedoch mit einer unterschiedlichen Farbcodierung (Skalierung).

Die Stromdichte im Erdreich ist ein Zwischenschritt zur Berechnung der magnetischen Feldstärke.

4. Diskussion

4.1 Was ist an der Messung problematisch

- Der Messort ist kein genormter Messplatz
- Das Magnetfeld ist in Orientierung und Größe von der Stromverteilung in den elektrischen Leitern abhängig
- Die Anordnung der Leiter kann sehr komplex sein

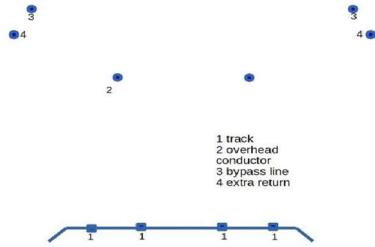


Abb. 12: Beispiel für Anordnung

der relevanten Leiter

- Der Anteil des Rückstromes im Untergrund ist von vielen Faktoren abhängig, variabel und meist unbekannt
- Die Stromverteilung in den Leitern kann sich durch Schaltvorgänge im Bahnsystem rasch ändern
- Die quasi stationären Störsignale, harmonische der Nutzfrequenzen, sind von transienten Signalen unterschiedlicher Quellen überlagert

4.2 Simulation versus Messung

- Simulation
 - Möglichkeit Parameter zu variieren, die in der Realität nicht beeinflussbar und auch nicht bekannt sind
 - Es können auch Messgrößen erfasst werden, die sonst nur schwer zugänglich sind, auch viele gleichzeitig
- Messung
 - Vorteil – realitätsnah
 - Nachteile
 - der Zustand des Systems ist meist nur vage bekannt
 - alle Messungen müssen vollständig geplant und durchgeführt werden, eine Wiederholung im selben Zustand ist nicht möglich

4.3 Wann ist eine Simulation hilfreich

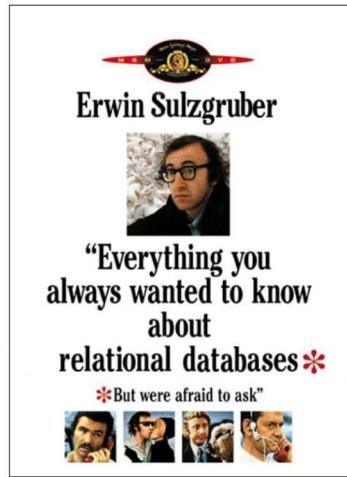
Je besser ich das zu untersuchende System verstehe, d.h. zumindest in den wesentlichen Teilen mathematisch formulieren kann, umso größer kann der Nutzen einer Simulation sein.

- Visualisierung für Kommunikation und besseres Verständnis

- Einfluss bestimmter Parameter auf das Systemverhalten- was wäre wenn -
- Untersuchung von Messgrößen, die für etablierte Messverfahren unzugänglich sind
- Nur wenn ich das untersuchte System gut verstehe, kann ich die Simulationsergebnisse richtig interpretieren.

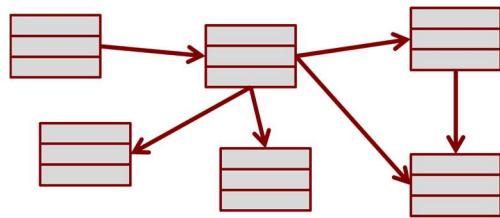
Ist mein Wissen über das System mangelhaft, dann kann eine Simulation helfen, zumindest Teilespekte besser zu verstehen. Manchmal wird das nicht ausreichen.

Für Messungen gilt jedoch dieselbe Einschränkung. Salopp formuliert: wenn ich nicht weiß was ich messe, kann ich zwar die Anforderung einer Vorschrift erfüllen, aber weitere Folgerungen aus dem Messergebnis kann ich nicht ziehen.



XIII. Was Sie schon immer über Relationale Datenbanken wissen wollten

(DI Erwin Sulzgruber)



Aber bisher nicht zu fragen wagten

1. Was ist ein Datenbanksystem

Wikipedia definiert ein Datenbanksystem als ein System zur elektronischen Datenverwaltung. Diese Definition setzt den Begriff der *Daten* als bekannt voraus, mit dem wir uns zunächst auseinandersetzen wollen, um darauf aufbauend eine genauere Vorstellung vom Begriff *Datenbanksystem* zu gewinnen.

Im allgemeinen Sprachgebrauch wird unter einem Datum gewöhnlich die Bezeichnung eines bestimmten Tages im Kalender verstanden, also beispielsweise ein Geburtsdatum oder das Datum eines Feiertags, eines Arzttermins oder einer Sonnenfinsternis. Wir wollen den Begriff Datum etwas weiter fassen und darunter auch andere elementare Informationen bzw. Eigenschaften von irgendwelchen Personen oder Gegenständen verstehen. Als eine verschwindend kleine Auswahl an Beispielen seien hier nur ein Vor- oder Familienname, eine Hausnummer, eine Konfektionsgröße, ein Laborwert, eine

Farbe, eine Höhe, Breite oder Tiefe, ein Preis, eine Schulnote oder ähnliche Bewertung angeführt.

2. Wozu braucht man Datenbanksysteme

Nun könnte man einwenden, dass man solche Daten ja auch mit gängigen Computerprogrammen wie Textverarbeitung oder Tabellenkalkulation bearbeiten könne. Dabei treten allerdings eine Reihe von Problemen auf, die durch spezielle Software – eben Datenbanksysteme – vermieden werden können.

Wir wollen hier auf die zwei wichtigsten dieser Probleme näher eingehen:

- Erstens verfügen Datenbanksysteme über eine besondere Funktionalität, die wir *Mehrbenutzerfähigkeit* nennen. Darunter verstehen wir, dass viele Anwender mehr oder weniger gleichzeitig auf die Daten zugreifen und diese auch verändern wollen. Dabei soll vermieden werden, dass die Änderungen, die eine Person an den Daten vornimmt, dadurch verloren gehen könnten, dass eine andere Person den gleichen Datensatz ebenfalls gerade bearbeitet und beim Speichern die Änderungen des einen durch die Änderungen des anderen überschrieben werden.

Ein Beispiel: eine Mitarbeiterin aus der Kundenevidenz holt sich die Daten eines Kunden auf den Bildschirm, um seine Hausnummer zu ändern. Unmittelbar danach holt sich ihr Kollege den gleichen Datensatz, um die Telefonnummer zu ändern. Beide haben somit die „alten Daten“ auf ihrem Bildschirm bzw. auf ihrem PC. Wenn nun einer der beiden die Daten ändert und den Datensatz speichert und danach der zweite die Daten ändert und speichert, geht dadurch die erste Änderung verloren.

- Zweitens implementieren Datenbanksysteme eine sogenannte Transaktionskontrolle. Darunter ist zu verstehen, dass mehrere Änderungen von Daten zu einer Einheit zusammengeschlossen werden, die entweder alle zusammen oder gar nicht durchgeführt werden. Auf diese Weise wird vermieden, dass Daten nur teilweise erfasst werden und dadurch nicht richtig zusammenpassen (= *inkonsistent* sind).

Wiederum ein Beispiel: jemand bestellt mehrere Artikel in einem Webshop, es wird eine Bestellung erfasst, eine Rechnung ausgestellt und der Lagerbestand reduziert. Wenn mitten in der Bearbeitung der Computer kaputtgeht oder der Strom ausfällt, soll nicht der Fall eintreten, dass die Bestellung im Datenbestand bereits aufscheint und eine Rechnung erzeugt, aber Lagerbestand nicht angepasst wurde.

Darüber hinaus leisten Datenbanksysteme noch zahlreiche weitere Aufgaben, wie beispielsweise Sicherstellung der Datenintegrität („Pflichtfelder“, Eindeutigkeit, Syntaxprüfungen, Fremdschlüssel, etc.), Zugriffsschutz (Benutzernamen, Passwörter, Rollen, Hackerabwehr, etc.), Ausfallsicherheit (Überbrücken von Ausfällen von Speichermedien, Computern oder in besonders kritischen Fällen ganzer Rechenzentren), Datensicherung und -wiederherstellung, Archivierung, u.v.a.m.

3. Historische Entwicklung von Datenbanksystemen

In den Anfangszeiten der Datenbanken wurden sogenannte Netzwerk-Datenbanken und Hierarchische Datenbanken verwendet. Ende der 70er Jahre begann der Aufstieg der relationalen Datenbanken, die bis heute die wichtigste Gruppe der Datenbankanwendungen darstellen. Neuere Entwicklungen sind objektorientierte Datenbanken, dokumentenorientierte Datenbanken, sogenannte „NoSQL“-Datenbanken (*not only SQL*) und noch einige weitere. Daneben werden noch zahlreiche Mischformen eingesetzt.

Als Geburtsstunde der Relationalen Datenbanksysteme wird allgemein das Erscheinen eines Artikels von Edgar F. Codd in der Zeitschrift *Communications of the ACM* im Jahr 1970 angesehen. Der Artikel trägt den Titel *A Relational Model of Data for Large Shared Data Banks* und definiert ausgehend vom mathematischen Begriff der Relation – als Teilmenge des Kartesischen Produktes von Mengen – eine Reihe von Operationen, die auf solche Relationen anzuwenden sind, um größere Datenmengen bearbeiten und vor allem auswerten zu können. Bereits zu Codds Zeiten wurden die Daten eher selten als mathematische Relation betrachtet, sondern vielmehr meist in Form von Tabellen gedeutet, dargestellt und beschrieben.

Codd hat in seinem Artikel folgende Operationen auf den Relationen bzw. Tabellen definiert:

- *Permutation*, d.h. die Umordnung der Spalten einer Tabelle
- *Projektion*, d.h. die Auswahl einer Untermenge der Spalten
- *Join* (Verbund) und *Composition* (Zusammensetzung), d.h. die Verbindung von zwei Tabellen zu einer neuen Tabelle, wobei eine (oder mehrere) Spalten der Tabellen, die in beiden Tabellen vorhanden sind, als Verbindungsglied fungiert
- *Auswahl* oder *Selektion*, d.h. die Einschränkung der Zeilen (= *Datensätze*) einer Tabelle aufgrund von Bedingungen, die einzelne Werte erfüllen müssen (z.B. Postleitzahl zwischen 1000 und 1999). Die Operation

Auswahl pickt also eine einzelne Zeile oder auch mehrere Zeilen aus der ganzen Tabelle heraus.

4. Die Sprache SQL

Codd hat sich in seinem Artikel nicht damit beschäftigt, wie die Menschen, die ein relationales Datenbanksystem verwenden wollen, mit diesem in Verbindung treten sollen und wie die Befehle aussehen könnten, mit denen die von ihm definierten relationalen Operationen von außen angestoßen werden können. Es wurde aber relativ bald nach Erscheinen des Artikels – unter der Beteiligung von Codd – bei der Computerfirma IBM die Abfragesprache SEQUEL (*Structured English Query Language*) entwickelt und 1975 erstmals publiziert. SEQUEL wurde später in SQL umbenannt und 1986 als ANSI als Standard verabschiedet. Seither hat es noch mehrere Anpassungen und Ergänzungen gegeben.

Die Sprache SQL enthält zunächst einmal Anweisungen zur Durchführung der von Codd definierten Operationen, wobei diese im Wesentlichen durch die SELECT Anweisung implementiert sind. Die einfachste Form realisiert die Permutation und Projektion (vgl. Abb. 1).

Die SELECT Anweisung mit WHERE-Bedingung realisiert die Auswahl, wobei ein mathematischer Ausdruck, der wahr oder falsch sein kann, festlegt, ob ein Datensatz ausgewählt wird oder nicht. (vgl. Abb. 2)

Für die Join Operation hat man sich die JOIN-Klausel für die SELECT Anweisung einfallen lassen (vgl. Abb. 3).

Neben der SELECT Anweisung, die der Abfrage von Daten dient, die sich bereits in der Datenbank befinden, gibt es noch Anweisungen die der *Datenmanipulation* dienen, also Anweisungen zum Einfügen,

```
SELECT Vorname,  
       Zuname,  
       GebDat  
  FROM Mathematiker;
```

Abb. 1: Anweisung zur Projektion der Spalten Vorname, Zuname und Geburtsdatum aus der Relation „Mathematiker“

```
SELECT Vorname, Zuname, GebDat  
  FROM Mathematiker  
 WHERE GebDat  
   BETWEEN to_date('1700-01-01')  
     AND to_date('1799-12-31')
```

Abb. 2: Anweisung zur Auswahl jener Mathematiker, deren Geburtsdatum zwischen dem

```
SELECT Vorname, Zuname,  
       Mathematiker.plz, Stadt  
  FROM Mathematiker  
 JOIN Plz  
    ON Mathematiker.Plz = Plz.Plz
```

Abb. 3: SQL-Anweisung, die zwei Tabellen („Mathematiker“ und „Plz“ mit einander verbindet, wobei die Spalte Plz als Verbindungsglied

zum Ändern und zum Löschen von Datensätzen.

Ebenso gibt es Anweisungen für den Beginn und den Abschluss von Transaktionen, mit denen solche Datenmanipulationsanweisungen zu größeren Einheiten zusammengefasst werden können.

Außerdem enthält die Sprache SQL noch Anweisungen zum Bearbeiten der in der Datenbank gespeicherten Tabellen, der in den Tabellen enthaltenen Spalten, diverser Integritätsbedingungen und verschiedener Datenbank-Objekte, die wir erst noch kennen lernen werden, wie Schlüssel oder Indices.

Schließlich haben verschiedene Hersteller von Datenbanksystemen noch herstellerspezifische Anweisungen in SQL eingefügt, wie z.B. Anweisungen zum Erstellen neuer Datenbanken, Anweisungen, die die Verteilung der Datenbank auf die Festplatten und Dateisysteme der Computer regeln, auf denen die Software läuft, Anweisungen für Sicherung und Archivierung, Anweisungen für Protokollierung der Zugriffe, und vieles mehr.

5. Datenmodellierung

Unter Datenmodellierung verstehen wir die Tätigkeit, die Informationen, die wir in der realen Welt über die zu verarbeitenden Objekte haben, auf Tabellen, Datensätze und Daten abzubilden. Wenn wir zum Beispiel die Adressen von Personen speichern wollen, könnten wir eine Tabelle mit zwei Spalten erzeugen und die Spalten „Name“ und „Adresse“ nennen. Wir könnten aber auch den Namen weiter aufspalten in „Vorname“, „Zuname“, „Anrede“, „Titel“ und je nach Bedarf sogar weitere Spalten. Dies hätte den Vorteil, dass wir z.B. Akademiker leichter herausfinden könnten, oder womöglich – aufgrund des Vornamens – das Geschlecht der Person. Für letztere Aufgabe könnte sich allerdings auch eine eigene Spalte mit der Bezeichnung „Geschlecht“ als nützlich erweisen.

Ebenso können wir die Adresse weiter aufspalten in Postleitzahl, Ort, Straße, Hausnummer, Türnummer, was es uns ermöglicht, unsere Kunden spezifisch nach dem Gebiet, wo sie wohnen, auszuwählen.

Darüber hinaus wäre es noch eine Überlegung wert, für Postleitzahlen und die dazu gehörenden Ortsbezeichnungen überhaupt eine separate Tabelle einzuführen, was erstens Speicherplatz spart, weil nicht bei jeder Adresse ein Ortsname mitgespeichert werden muss, zweitens Mehrdeutigkeiten vermeidet, weil verschiedene Schreibweisen von Ortsnamen (Wr. Neustadt vs. Wiener Neustadt, St. Georg vs. Sankt Georg, Bruck/Mur vs. Bruck a.d. Mur vs. Bruck an der Mur) nicht vorkommen, und drittens bei einer Änderung der Schreibweise

eines Ortsnamens nur ein einziger Datensatz geändert werden muss und nicht alle Adressen, in denen der Ortsname vorkommt.

Ein entscheidender und tausendfach bewährter Schritt bei der Datenmodellierung ist es, jeder Tabelle eine zusätzliche, nach außen meist gar nicht in Erscheinung tretende Spalte hinzuzufügen, wo eine Nummer gespeichert wird, die den zugehörigen Datensatz eindeutig identifiziert. Deshalb wird diese Spalte auch meist als *Identifikation* oder kurz als ID bezeichnet. In unserem Beispiel mit der Postleitzahl hätte eine ID-Spalte in der Postleitzahlentabelle den Vorteil, dass man in den Datensätzen mit den Adressen anstelle der Postleitzahl die ID speichern könnte und sich dadurch auch die Postleitzahl selbst leicht ändern ließe, ohne alle Adressdatensätze bearbeiten zu müssen.

Eine solche ID, die einen Datensatz eindeutig identifiziert wird auch als *Schlüssel* bezeichnet. Etwas allgemeiner bezeichnet ein Schlüssel eine Spalte (oder auch eine Kombination von zwei oder noch mehr Spalten), die einen Datensatz eindeutig identifiziert. Wie man sich denken kann kommt einem Schlüssel eine entscheidende Rolle beim Auffinden von Datensätzen zu. Es ist daher wichtig, beim Entwurf einer Datenbank die „richtigen“ Schlüsselspalten festzulegen.

Je nachdem, nach welchen formalen Regeln beim Entwurf einer Datenbank vorgegangen wird, sprechen die Theoretiker von sogenannten *Normalformen*, die mit den Kürzeln 1NF, 2NF, 3NF, 4NF, 5NF (für erste, zweite, dritte Normalform, usw.) bezeichnet werden. Am häufigsten zitiert und angewendet wird dabei die dritte Normalform 3NF.

Man sieht also, dass die Datenmodellierung ein durchaus kreativer Prozess ist, der von der beabsichtigten Verwendung der Daten stark abhängig ist.

6. Implementierung von Relationalen Datenbanksystemen

Zum Abschluss wollen wir uns damit beschäftigen, wie relationale Datenbanken auf Computersystemen in der Praxis realisiert werden können, wie also die Daten auf einem Speichermedium organisiert und wieder aufgefunden werden.

Zum besseren Verständnis vergleichen wir ein Datenbanksystem mit einer Bibliothek, wo Bücher verwaltet werden: Wenn in einer Bibliothek neue Bücher angeschafft werden, werden sie meist einfach in ein Regal gestellt, wo noch Platz ist. Das ist einfach, geht schnell und, um die Bücher wieder zu finden, muss man sich sowieso geeignete zusätzliche Mechanismen ausdenken. Analog dazu werden beim Eintragen von neu erfassten Daten in einer Datenbank normalerweise die einzelnen Datensätze einfach am Ende einer passenden Datei angefügt.

Interessant wird es nun, wenn man ein Buch wiederfinden möchte. Während es in einer Bibliothek nahezu unmöglich sein dürfte, z.B. ein Buch zu finden, auf dessen Seite 77 das erste Wort „König“ lautet, ist es mit einem Computersystem in vielen Fällen möglich, in einem vernünftigen Zeitraum alle Datensätze einer Tabelle zu lesen und diejenigen mit einer solchen Eigenschaft herauszufiltern. Diese Vorgangsweise wird auf neudeutsch als *Full Table Scan* bezeichnet. Obwohl ein Full Table Scan von einem Computer in vergleichsweise kurzer Zeit erledigt werden kann, handelt es sich dabei dennoch um eine sehr aufwändige Zugriffsmethode. Man hat daher effizientere Methoden entwickelt, zu deren am häufigsten angewendeten ein sogenannter *Index* gehört.

Einen Index finden wir auch seit hunderten von Jahren in unseren Bibliotheken. So gibt es in jeder Bibliothek einen Index, in dem alle vorhandenen Titel in alphabetischer Reihenfolge aufgelistet sind, und daneben befindet sich eine Information, wo das betreffende Buch zu finden ist (z.B. Regalnummer, Reihe, Nummer des Buchs in der Reihe). Ebenso findet man in der Bibliothek einen Autorenindex, wo zu den alphabetisch geordneten Autoren deren in der Bibliothek vorhandenen Werke angegeben sind.

Natürlich ist dabei zu berücksichtigen, dass mit jedem neu in die Bibliothek aufgenommenen Werk – und auch mit jedem Werk, das aus der Bibliothek entfernt wird, – alle in der Bibliothek geführten Indices aktualisiert werden müssen, was mitunter einen erheblichen Aufwand darstellen kann. Deshalb wird man sich gut überlegen müssen, welche Indices man zusätzlich zum Titelindex und Autorenindex noch führen möchte (z.B. Index nach Erscheinungsjahr, nach ISBN, nach Seitenanzahl? etc.)

Ähnlich gehen Datenbanksysteme vor. Während der Datenmodellierung werden bei jeder Tabelle diejenigen Spalten definiert, die einen Index bekommen sollen; eine ID Spalte, bzw. allgemein jede Spalte, die einen Schlüssel speichert, bekommt in fast allen Fällen einen Index. Insgesamt ist auch hier darauf zu achten, dass viele Indices die Leistungsfähigkeit des Datenbanksystems stark beeinträchtigen können.

Nachdem wir uns nun mit der Speicherung und dem Zugriff auf die Datensätze auseinandergesetzt haben, können wir uns der Implementierung der in der Praxis am häufigsten benötigten Operation in Datenbanksystemen widmen, nämlich der Join-Operation. Ein Join ist ja im Wesentlichen eine Zusammenführung von zwei Tabellen, wobei es in jeder der beiden Tabellen eine Spalte gibt, deren Werte „zusammenpassen“ müssen.

Die gängigen Methoden zur Implementierung von Joins sind:

- Lesen beider Tabellen, jeweils Sortieren nach der Join-Spalte, dann Mischen
- Lesen der „kleineren“ der Tabellen und, um den zugehörigen Datensatz in der anderen Tabelle zu finden, Zugriff über Index auf die andere Tabelle
- Lesen zweier Indizes (spart das Sortieren)
- Andere, spezifische Methoden z.B. mittels Hash-Werten

Meist entscheidet die Datenbank-Software, welche der vorhandenen Methoden die effizienteste ist und zur Anwendung kommt.

7. Marktüberblick

Heute teilen sich vor allem drei Hersteller den Markt für kommerzielle relationale Datenbanksysteme, das sind die US-Firmen Oracle mit dem Produkt Oracle Database, Microsoft mit dem Produkt SQLServer und IBM mit dem Produkt DB2.

Daneben sind noch einige Open-Source Produkte sehr gebräuchlich, allen voran PostgreSQL, MySQL und SQLite.

Einige Produkte, die in früheren Jahrzehnten sehr gebräuchlich waren, in der Zwischenzeit aber an Bedeutung verloren haben oder überhaupt vom Markt verschwunden sind, sind Informix, Ingres, SYBASE, dBase, Rdb, und andere.



XIV. Wenn Mathematik Schach spielt...

(Univ.-Prof. DI Dr. Michael Feischl)

Einführung: Der historische Wendepunkt

Der Vortrag beginnt mit dem ikonischen Moment im Jahr 1997, als die Mathematik, verkörpert durch einen Computer, das Schachspiel für immer veränderte. Gezeigt wird die Niederlage des damaligen Schachweltmeisters Garry Kasparov gegen den IBM-Supercomputer Deep Blue in New York. Dieser Moment markiert einen historischen Sieg einer Maschine über einen amtierenden Weltmeister im Schach und wohl einen der besten Spieler aller Zeiten. Die Dramatik wird durch Kasparovs frühere, selbstbewusste Aussage aus dem Jahr 1989 unterstrichen: Auf die Frage eines Journalisten, ob er denn jemals von einem Computer geschlagen werden könnte, antwortete Kasparov „Lächerlich, niemals werde ich von einer Maschine geschlagen werden“.

Der Sieg von Deep Blue wird als „unerwartetes, schnelles und brutales“ Ereignis beschrieben, das Kasparov nach nur 19 Zügen zur Aufgabe zwang mit den Worten: „Ich habe meinen Kampfgeist verloren“. Ein Experte verglich die Auswirkung dieses Moments mit einer „griechischen Tragödie“. Nach diesem ersten Sieg der Schachcomputer gegen die besten Menschen dauerte es nur acht Jahre bis zum letzten Sieg eines Menschen über einen Top-Computer im Jahr 2005.

Die immense Komplexität des Schachspiels

Um die Herausforderung zu verdeutlichen, zeigt der Vortrag die kombinatorische Explosion im Schach. Während es nach zwei Zügen bereits 400 mögliche Stellungen gibt, wächst diese Zahl nach nur 15 Zügen auf eine astronomische Größe von über 10^{21} Stellungen an. Diese Komplexität wird mit der sogenannten „Shannon-Zahl“ (10^{120}) visualisiert, eine Schätzung für die Anzahl der möglichen Spielverläufe im Schach. Diese unvorstellbare Zahl übertrifft die Anzahl der

Atome im Universum (10^{80}) um ein Vielfaches. Tatsächlich könnte man in jedes Wassermolekül in unseren Ozeanen ein eigenes Universum packen und dann jedem Atom dieses gigantischen Multiversums einen Spielverlauf zuordnen.

Frühe Konzepte und theoretische Grundlagen

Der Vortrag blickt kurz auf die Geschichte der Schachautomaten zurück und zeigt den „Schachtürken“ von Wolfgang von Kempelen als frühes Beispiel für den menschlichen Wunsch, eine solche Maschine zu erschaffen.

Als eigentlicher theoretischer Vater der Computerschach-Ära wird Claude Shannon vorgestellt. Sein wegweisender Artikel „Programming a Computer for Playing Chess“ aus dem Jahr 1949 legte das Fundament. Shannon definierte die zwei grundlegenden Strategien für eine Schach-KI:

- **Typ A: Stark, aber dumm:** Ein Brute-Force-Ansatz, der versucht, so viele Züge wie möglich durchzurechnen.
- **Typ B: Schwach, aber schlau:** Ein Ansatz, der versucht, intelligent nur die vielversprechendsten Züge zu analysieren.

Klassische KI-Methoden: Die Minimax-Suche

Der Vortrag erklärt den klassischen Algorithmus, der auf Shannons Typ-A-Strategie basiert: die sogenannte **Minimax-Suche**. Anhand des einfacheren Spiels Tic-Tac-Toe wird das Prinzip erläutert. Der Computer erstellt einen Baum aller möglichen Spielverläufe. Endpositionen werden bewertet: Sieg als **1**, Niederlage als **-1** und Unentschieden als **0**. Der Algorithmus arbeitet sich dann im Baum zurück und geht davon aus, dass jeder Spieler stets den für sich besten und für den Gegner schlechtesten Zug wählt (Maximierung des eigenen Gewinns, Minimierung des gegnerischen Gewinns). Bei Tic-Tac-Toe kann man das noch im Kopf schaffen, bei komplexeren Spielen wie 4-Gewinnt braucht man dafür schon einen starken Computer. Bei Schach ist der vollständige Aufbau des Suchbaums auf Grund der vorher diskutierten Komplexität völlig illusorisch. Daher wird die Minimax Suche nach einer bestimmten Anzahl von Zügen abgebrochen und die daraus resultierende Stellung mit Heuristiken bewertet (wer hat mehr Material, wessen König steht sicherer, usw...).

Der Triumph der Brute-Force-Methode: Deep Blue

Deep Blue war die ultimative Realisierung des „Stark, aber dumm“-Prinzips. Der Hauptarchitekt, Feng-Hsiung Hsu, wird mit den Worten zitiert, dass er die Grundlagen hatte, um die „Mutter aller Schach-Maschinen“ zu bauen. Weil er auch Ideen hatte, die ihm damals viel Geld einbringen könnten, ist er sich lange

nicht sicher, wie viel Energie er in seine Schachcomputer investieren soll. Weil aber man nicht jeden Tag die Chance habe, Geschichte zu schreiben, entscheidet er letztendlich sich voll auf Computerschach zu fokussieren. Es gelang ihm und später seinem Team die Rechenleistung der Schachcomputer dramatisch zu steigern, wie seine drei wichtigsten Prototypen beweisen:

- **Chiptest:** 30.000 - 300.000 Positionen/Sekunde
- **Deep Thought:** 720.000 Positionen/Sekunde
- **Deep Blue:** 200.000.000 Positionen/Sekunde

Während Deep Thought schon die meisten Großmeister besiegen konnte, brauchte es noch eine Steigerung der Rechenleistung um das mehr als 200 fache, um Gary Kasparov zu bezwingen.

Moderne KI: Jenseits von Brute Force

Der Vortrag wendet sich komplexeren Spielen wie Go zu, wo reine Brute-Force-Methoden aufgrund einer noch größeren Komplexität versagen. Dies erforderte die Entwicklung neuer Techniken.

1. Monte-Carlo-Baumsuche (MCTS): Statt den gesamten Spielbaum zu analysieren, simuliert die MCTS eine große Anzahl zufälliger Partien bis zum Ende. Anstatt einer exakten Bewertung wird eine Wahrscheinlichkeit für den Sieg ermittelt, basierend darauf, wie oft ein Zug in den Simulationen zum Erfolg geführt hat (z. B. 20 Siege in 30 Versuchen Ø).

2. Neuronale Netzwerke: Diese Netzwerke liefern die „Intelligenz“ für die Bewertung von Spielstellungen. Der Vortrag skizziert ihre Funktionsweise:

- Eine Eingabe (z.B. die Brettstellung) wird durch Schichten verarbeitet.
- Jede Schicht besteht aus einer **affinen Abbildung** (im Wesentlichen eine Matrix-Multiplikation) und einer **Nichtlinearität**.
- Als Nichtlinearität wird oft **ReLU (Rectified Linear Unit)** verwendet, eine Funktion, die einfach den größeren Wert von **0** oder der Eingabe ausgibt (**max(INPUT, 0)**).

3. Training der Netzwerke: Die Netzwerke lernen durch die **Methode des steilsten Abstiegs** (Gradientenabstieg), oft verbessert durch Techniken wie **Momentum**. Dabei werden die internen Parameter (die Zahlen in den Matrizen) schrittweise so angepasst, dass die Vorhersage des Netzwerks (z.B. die Gewinnwahrscheinlichkeit) immer näher an das tatsächliche Ergebnis kommt. Man kann diese Methode als Abstieg in einer hochdimensionalen Landschaft visualisieren (siehe unten). Die Höhe gibt die Fehlerrate an, die Position in der Landschaft gibt den Trainingszustand des Netzwerks an. Ziel ist nun, den tiefsten

Punkte der Landschaft (also die kleinste Fehlerrate zu erreichen). Da es völlig unmöglich ist, die gesamte Landschaft zu visualisieren (Millionen oder Milliarden Dimensionen), kann man nur versuchen, vom jeweiligen Standpunkt möglichst steil nach unten zu gehen. Dabei kann es natürlich passieren, dass man in einem Tal hängen bleibt, das noch weit vom tatsächlichen Tiefpunkt entfernt ist. Daher liefert diese Methode auch keinerlei Garantien und es braucht sehr viel Trial-and-Error sowie adhoc Lösungen, um tatsächlich ein brauchbares Netzwerk zu trainieren.



Schlussfolgerung und Ausblick

Die Kombination dieser modernen Techniken hat zu extrem leistungsfähigen KIs wie **Stockfish** (Schach) und **AlphaFold** (Proteinfaltung) geführt. Der Vortrag schließt mit der philosophischen Frage: „Wann ist die Mathematik dran?“. Dies impliziert, dass die KI bisher Mathematik anwendet, aber die nächste Stufe sein könnte, dass eine KI selbstständig neue mathematische Konzepte entwickelt.



XV. Trost und Moral in der Mathematik

(DI Wolfgang Herold)

0. Kurzfassung

Die gegenständliche Arbeit ist der Versuch von dilettantischen Übersetzungen zwischen Mathematik und Philosophie. Dem Begriff „dilettantisch“ kommt hier durchaus respektvolle Bedeutung zu. Es scheint nämlich für die Art der Bewegung zwischen zwei Disziplinen, ähnlich einem Segelboot, das zwischen zwei Inseln „über-setzt“, notwendig an der Oberfläche zu bleiben, um auch wirklich Distanzen überwinden zu können. Und ähnlich zweier Inseln, die sich in der Tiefe stets einen gemeinsamen Meeresboden teilen, so verbindet auch die Mathematik und die Philosophie ein gemeinsamer Grund, den wir in vereinzelten Tauchgängen erkunden wollen.

Wir werden uns entlang grundlegender Konzepte der Philosophie fragen, wo die Gemeinsamkeiten, aber auch wo die Abspaltungen ihre Wurzeln haben, um dann in einem kühnen Schluss auf Basis moderner Modallogik einen formalen Gottesbeweis zu wagen, dessen Anmaßung alleine schon diese Arbeit als das Wirken eines wohlwollenden Dilettantismus zwischen den Disziplinen entlarven könnte.

1. Motivation und Grundlagen

Ausgangspunkt für unsere Betrachtungen kann beispielsweise die fundamentale Frage nach dem „Warum“ sein:

„Warum gibt es diesen Text?“

Die Antworten darauf können dabei in 2 Richtungen gehen.

- Die eine Dimension dieser Frage deutet in die **Richtung des Zwecks** und könnte etwa mit den obenstehenden einleitenden Worten beantwortet werden: „*Um Gemeinsamkeiten und Differenzen zwischen Mathematik und Philosophie zu beleuchten*“.
- Andererseits aber kann die Frage auch in **Richtung der Ursache** beantwortet werden, die banaler Weise lauten würde: „*Weil es wieder einen Band mit gesammelten Schriften zu den Vorträgen des Erlebnis Mathematik geben sollte*“.

Diese beiden verschiedenen Perspektiven legen damit auch bereits die Grundlage für eine Unterscheidung der wissenschaftlichen Disziplinen. Die Frage nach der Ursache verweist meist auf kausale, beobachtbare Vorgänge und sucht deren Gesetzmäßigkeiten zu beantworten, sohin mündet sie in das, was vereinfacht als **Naturwissenschaften** (oder enger gefasst auch nur als Physik) umschrieben werden könnte. Dem entgegen strebt die Frage nach dem Zweck in eine höhere (oder auch dahinter liegende) Sphäre und mündet in der **Geisteswissenschaft** (oder enger der Metaphysik). Die Sprache (und mit ihr auch ihre Grammatik, die wir Logik nennen könnten) der Naturwissenschaften allerdings ist die **Mathematik**, die der Geisteswissenschaften ist die **Philosophie**.

Eine weitere grundlegende Unterscheidung betrifft die Auffassung von den Dingen, der Natur und letztlich der Welt an sich. Ausgehend von dem **platonischen Konzept der Idee**, die als quasi Wesen und Kern in allem stecke und somit hinter der Erscheinung eines Dings zu begreifen wäre, lässt sich beispielsweise weiter fragen:

„*Was ist die Idee dieses Textes?*“

Und wieder weisen 2 Antworten in verschiedene Richtungen.

- Eine mögliche Anschauung könnte die Idee dieses (und jeden) Textes als geistiges Substrat dessen sehen, was durch diesen (oder einen) Text gesagt werden soll. Sie wäre eine Art Botschaft, die sich in diesem Text manifestiert, jedoch auch unabhängig davon existiert.
- Dem entgegen könnte man allerdings als Idee des Textes auch eine Art Verallgemeinerung verstehen und meinen, dass Worte, in einen (vermeintlich) sinnstiftenden Zusammenhang gebracht, eben „etwas“ aussagen und diese Tatsache wäre dann als Idee eines Textes zu verstehen, die jedoch den konkreten Text benötigt um in die Existenz zu kommen.

Erstere Ansicht wird gemeinhin (und leicht paradox) auch als **Realismus** bezeichnet, weil sie den Ideen reale Existenz zuschreiben. Diese Haltung begründet auch die wissenschaftliche Befassung mit religiösen Fragen und gibt als **Theologie** Antworten auf die Frage nach der Idee aller Ideen, also Gott. Anders hält es der zweite Zugang, der Ideen letztlich nur als Begrifflichkeiten im Rahmen von Bezeichnungen (Nomen) versteht, und somit als **Nominalismus** bezeichnet wird. Er erlaubt streng axiomatische Erklärungssysteme, wie beispielweise die **Geometrie** oder auch unser modernes Verständnis von **Evolution**, das letztlich auf den aristotelischen Kategorien der Substanz beruht.

2. Von der Antike in die Neuzeit

Wir wollen nun einen kurzen geschichtlichen Streifzug entlang dieser fundamentalen Trennlinien zwischen Philosophie und Mathematik unternehmen.

2.1. Antike

Wir haben bereits die Differenzen zwischen Platon und den Realisten auf der einen Seite sowie Aristoteles und den Nominalisten auf der anderen Seite erwähnt. Weitere grundlegende Fragen der (griechischen) Antike drücken sich in den sogenannten Paradoxien aus, die sich mit der Beschaffenheit der Welt befassen und zeigen, wie ungenügend diese Fragen innerhalb eines bestimmten logischen Systems, beispielsweise der Geometrie, beantwortbar waren und bis heute sind.

- Paradoxien der Logik: Wenn Epimenides, der aus Kreta stammt, sagt, dass alle Kreter lügen, wie ist dann diese Aussage zu bewerten? Dieses Paradoxon zeigt, dass für bestimmte Aussagen in einer sprachlichen Auffassung keine Bewertung des Wahrheitsgehalts möglich ist. Moderne Modallogik hat versucht, diese Probleme zu lösen, jedoch hat nicht zuletzt Gödel gezeigt, dass in jedem hinreichend formalen System bestimmte Aussagen unbewiesen bleiben müssen.
- Paradoxien der Zahlen: Das pythagoräische Konzept der natürlichen Zahlen und deren Verhältnisse (rationale Zahlen) scheiterte an der Lösung der Gleichung $x^2=2$. Es mussten weitere (reelle, letztlich auch imaginäre) Zahlen angenommen werden, deren Existenz jedoch nicht direkt aus den Axiomen ableitbar war. Diese Frage berührt im Kern die Möglichkeit eines kontinuierlichen Zahlenspektrums und wurde in der Neuzeit im Rahmen der Überlegungen zur Kontinuumshypothese aufgegriffen und kann

vereinfacht gesagt lediglich axiomatisch (also durch deren Annahme) behandelt werden.

- Paradoxien der Natur: Wenn man einen fliegenden Pfeil betrachtet, so erkennt man ihn in einem bestimmten Augenblick (der Zeitspanne 0) als in einem bestimmten Ort ruhend, jedoch fliegt dieser Pfeil und trifft ein Ziel. Diese Frage adressiert die Unvermittelbarkeit zwischen Ort und Bewegung und stellt letztlich wieder die Frage nach der grundsätzlichen Verfasstheit der Welt, die sich diskret oder kontinuierlich offenbart, je nach Erklärungsmodell, das verwendet wird.

2.2. Christentum

Während im paulinischen Sinne der Glaube über das Wissen zu stellen war, hatte das christliche Verständnis von Logik entlang der (neu)platonischen Ideenlehre als einen Fixpunkt stets die Frage nach der logischen (und damit zwingenden) Begründung zur Existenz Gottes. Zahlreiche Versuche wurden in diese Richtung unternommen, als einer der bekanntesten Vertreter gilt Anselm von Canterbury. Er argumentierte, dass Gott das Höchste sei, das gedacht werden könnte (im Sinne der Idee aller Ideen). Weiters meinte er, dass Dinge, die gedacht werden können, auch real existieren könnten. Somit müsse aber Gott existieren, da er sonst hinter andere Dinge, die gedacht werden und existieren, treten würde, was aber der Annahme widerspricht, er sei das höchste Gedachte.

Kant hat später in seinen kritischen Schriften gezeigt, dass letztlich jeder logische Gottesbeweis ein Zirkelschluss sein müsse, da zur Annahme der Voraussetzungen eines logischen Beweises bereits erfahrene Konzepte Verwendung finden müssen, und somit der Logik des Schlusses keine absolute Berechtigung zukommen kann.

2.3. Neuzeit

Moderne Denker, die als Bindeglieder zwischen Philosophie und Mathematik gesehene werden können sind zahlreich. Als prominentester Vertreter ist wahrscheinlich Gottfried Leibnitz zu nennen, der in beiden Disziplinen bahnbrechende Erkenntnisse hervorbrachte. Seine Perspektive in der Differentialrechnung findet sich gleichermaßen in seiner Monadologie wieder und könnte auf einen gemeinsamen Satz reduziert werden, der im mathematischen ebenso wie im philosophischen Sinne als wahr und tief bezeichnet werden kann:

„Der Inhalt differenziert sich an der Form“

So ergibt beispielsweise der Inhalt eines Kreises $r^2\pi$ abgeleitet die Formel für den Umfang $2r\pi$ (und gleichermaßen für Volumina etc). Ebenso gilt aber auch für Individuen und Objekte, dass ihre äußere Grenze (als „Ende“ ihres Inhalts und Differenz zu ihrem Äußeren) in der Regel ihre Form bestimmt.

3. Logik

Kurt Gödel, dem großen österreichischen Logiker, sei hier auch noch eine Fingerübung des Autors gewidmet, die eine seiner zentralen Erkenntnisse, den **Unvollständigkeitssatz** in Verbindung mit der theologischen Fragestellung nach der **Existenz Gottes** bringt. Dieser besagt im Wesentlichen, dass es in jedem hinreichend komplexen formalen System (wie beispielsweise der uns vertrauten Schulmathematik oder darauf aufbauenden Konzepten) stets mindestens eine Aussage geben muss, deren Wahrheitsgehalt innerhalb dieses Systems unbeweisbar bleiben muss.

Wie bereits kurz gestreift, kann als eines der wesentlichen Merkmale Gottes nun angenommen werden, dass an ihn/sie zu „glauben“ ist, das heißt also insbesondere, dass es über „Göttliches“ kein Wissen geben kann. Wir versuchen nun also Definitionen wie folgend:

- **Gott Γ :** Die Summe (Menge) all dessen, woran für alle Zeit geglaubt werden muss, weil es niemals gewusst werden kann.
- **Logische Systeme L_k :** Folge logischer Systeme.
- **Glaubenssatz G_i^k :** eine Aussage, deren Wahrheit / Falschheit im k -ten logischen System nicht beweisbar oder widerlegbar sein kann.
- **Glauben $U(L_k) = \bigcup_i G_i^k$:** (Folge der) Menge aller Glaubenssätze im k -ten logischen System
- **Folgesystem $L_{k+1} := L_k \cup U(L_k)$:** das nächste logische System versucht, alle Glaubenssätze zu eliminieren, indem es die unentscheidbaren Sätze des vorigen Systems zu Axiomen erhebt und somit entscheidbar macht.

Dann folgt nach dem Unvollständigkeitssatz für jedes logische System L_k , dass mindestens ein Glaubenssatz G_i^k existiert, somit ist für alle k der Glauben nicht leer, also $\forall k: U(L_k) \neq \emptyset$. Somit folgt jedoch aus einfacher Anwendung von

vollständiger Induktion (da insbesondere für die Wahl von $L_1 := ZF$ als dem klassischen Axiomensystem die Aussage ebenfalls gilt), dass Gott als der Grenzwert aller Glaubensfolgen nicht die leere Menge sein kann und somit existiert:

$$\Gamma := \lim_{k \rightarrow \infty} U(L_k) \rightarrow \Gamma \neq \emptyset$$

Die Auflösung der Paradoxie, dass somit die Existenz dessen, an was immer zu glauben sein muss, dennoch gewusst werden kann, bleibt der geneigten Leserschaft überlassen. Dabei behilflich sind möglicherweise die Überlegungen, die **Bertrand Russell** in seiner herrlichen Schrift „Philosophie des Abendlandes“ anstellt.

4. Conclusio

Somit schließt sich auch der Bogen zum Titel dieses Textes. Die Moral in der Mathematik kann aus philosophisch-theologischer Sicht darin erkannt werden, dass es das gesicherte Wissen braucht, um in Abgrenzung dazu überhaupt den Glauben und somit letztlich Gott in Begriffe fassen zu können. Der Trost liegt aber jedenfalls darin, dass es die Verfasstheit der Mathematik selbst ist, die notwendigerweise in ihrer Unvollständigkeit zu Aussagen führt, welche lediglich dem Glauben zugänglich sein können und diesen daher stets bewahren wird.



XVI. Mathematiker auf Banknoten

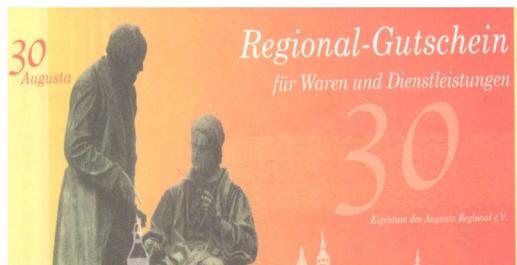
(Thomas Jahre)

Mathematik ist überall, so heißt es. Das mag vielleicht nicht jedem gefallen, warum auch immer.

Jeder ist jeden Tag von Mathematik umgeben – oder hat ein Haus keine Nummer? Ein Blick auf die Uhr zeigt Mathematik. Jede Wohnung hat rechte Winkel. Kontonummer, Geheimzahl und Kontostand – Zahlen, Zahlen, Zahlen. Und sicher sind die Besucher des Vortrages zu ihrer eigenen Sicherheit über Rechtecke gelaufen – schöne weiße Rechtecke, die auf die Straße gemalt wurden.

Wie aber ist das nun mit Mathematik auf Banknoten – von der Nummer der Banknoten und dem Wertaufdruck 5, 10, ... 500 Euro mal abgesehen? Dazu sollte man den Blick weiten, schließlich gibt es ja nicht nur die Euronoten. (Wobei die letzte Ziffer der Seriennummer eine Kontrollziffer ist, die es zu berechnen gilt.)

In dem Vortrag wurde auf Banknoten aus aller Welt zurückgegriffen. Hinzu kamen Regionalgeld, Notgeld, Gutscheine, Theatergeld, Testnoten, Werbenoten und Fantasienoten.



So sieht man auf dem Regionalgeld Carl Friedrich Gauß und Wilhelm Eduard Weber, auf dem Notgeld den Mathematiker und Astronomen Friedrich Wilhelm Bessel (linke Seite). Isaac Newton ist auf einer Testnote zu sehen. Die Fantasienote zeigt Albert Einstein.

Der erste Mathematiker, der vorgestellt wurde, war Leonard Euler.

Leonard Euler wurde am 15.04.1707 in Basel geboren und verstarb am 18.09.1783 in Sankt Petersburg.

Im Alter von 13 Jahren begann er ein Theologiestudium an der Universität Basel, wechselte dann recht schnell zur Mathematik und debattierte regelmäßig mit dem berühmten Johann Bernoulli auftretende mathematische Probleme. Im Alter von 16 Jahren erlangte er durch einen Vergleich der Newtonschen und Kartesischen Philosophie die Magisterwürde. ...

Die 10 Franken-Banknote aus der Schweiz ist voller Mathematik, insbesondere der angewandten Mathematik. Die Note selbst gehört zur 6. Serie und war von 1979 – 1992 in Umlauf.



Euler schaut auf eine Evolventenverzahnung, diese Form von Zahnrädern ist die beste Variante, die es gibt. Was wie Kringel erscheint sind Mengendiagramme, die auch als Venn-Diagramme bezeichnet werden und der Veranschaulichung von Mengen und deren Teilmengen dienen.

Auch die Rückseite der Banknote steckt voller Mathematik. Da ist zum einen die große Turbine. Jeder Ingenieur, der Turbinen konstruiert, nutzt die Eulersche Turbinengleichung. Weiterhin sind der Strahlengang durch Linsen und ein Ausschnitt unseres Planetensystems zu erkennen.

Geplant war eine Reservebanknotenserie. Davon existieren aber nur die Entwürfe, eventuell gedruckte Exemplare wurden vernichtet. Neben dem Portrait ist ein Ikosaeder zu erkennen. Die Kennzeichnung einer Ecke und einer Kante sind als Hinweis auf die Eulersche Polyederformel zu deuten. Hinter



dem Ikosaeder ist der Stadtplan von Königsberg zu erkennen. Das Königsberger Brückenproblem ist die Grundlage für die Graphentheorie Eulers.

Auf dem letzten 10 -DM-Schein der BRD ist der Mathematiker Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855) abgebildet. Links im Hintergrund sind verschiedene Wirkungsstätten, so die Sternwarte von Göttingen, zu erkennen. Die berühmte Gaußsche Glockenkurve, samt Gleichung ist mit dabei.



Auf der Rückseite ist sein Vizeheliotrop zu sehen, ein Winkelmessgerät, welches Gauß bei der Triangulation des Königreichs Hannover eingesetzt hat.

Auf einer amerikanischen Note ist Archimedes zu finden, zumindest ist da ein Mann erkennbar, der mittels eines Hebels die Welt aus den Angeln hebt. Ein Sujet, welches etliche amerikanische Privatbanken im 19. Jahrhundert verwendet haben. Auch der Satz des Pythagoras ist mehrfach auf solchen Noten zu sehen.

Auf der letzten 1-Pound-Note von Großbritannien ist auf der Rückseite Isaac Newton. Er liest in seinem Buch Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. Die aufgeschlagene Seite passt zum ebenfalls dargestellten Gravitationsgesetz.

Weitere Mathematiker waren Maupertuis (Deutsches Notgeld). Christopher Polhem (500 Kroner-Schein aus Schweden), Jorge Juan (10000 Peseten – Spanien, Fibonacci – Testnote und Samuel Morse – 2 Dollar, USA 1896. Diese waren alle auch auf den Noten zu sehen.

Bis ins 15. Jahrhundert hinein war es ja üblich, dass berühmte Persönlichkeiten mit ihren jeweiligen Geburtsorten „verbunden“ wurden. Gezeigt wurden Notgeldscheine aus Peuerbach (Georg von Peuerbach, eigentlich Georg Aunpekh,

1423 – 1461), Gmunden (Johannes von Gmunden, 1384 – 1422) und Königsberg in Franken (Regiomontanus, eigentlich Johann(es) Müller, 1436 – 1476).

In meiner Sammlung sind die Frauen leider nicht so häufig vertreten.

Marie Curie (eine Note aus Frankreich und zwei Noten aus Polen), Sophia Kowalewskaja (Fantasienote), Katherine Johnson (Testnote), die sagenhafte Dido (10 Dinars aus Tunesien) und Florence Nightingale (10 Pounds- UK).



Florence Nightingale kennt man vielleicht eher als Krankenschwester aus dem Krimkrieg von 1853 – 1856, was ja auch auf der Note dargestellt wird. In diesen Vortrag gehört sie vor allem als Statistikerin und wegen der von ihr entwickelten Polar-Area-Diagramme.



Einen speziellen Schwerpunkt bildete ein Abriss über Leben und Wirken von Adam Ries(e). Geboren wurde er in 1492 in Staffelstein (Notgeldschein). Seine ersten Werke entstanden in Erfurt (Notgeldschein mit dem Haus, an dem sich heute eine Gedenktafel befindet und ein Rechenbrett, das in das Straßenpflaster eingelassen ist. Am bekanntesten ist sicherlich sein Wirken in Annaberg. (mehrere Notgeldscheine, die ihn zeigen, aber auch eine Stadtansicht aus der Zeit um 1600.) Adam Ries(e) starb 1559 in Annaberg.

Weitere Banknoten mit Mathematikern zeigten: Blaise Pascal, Descartes, Niels Henrik Abel, Al Hazen, Condorcet und Albert Einstein.

Nicht unbedingt bringt man Napoleon Bonaparte mit Mathematik in Verbindung, aber wegen seines nach ihm benannten Satzes der Elementargeometrie hat er

Aufnahme in den Vortrag gefunden. Hinzu kamen noch Leonardo da Vinci und Albrecht Dürer.



Zu den Künstlern, die sich mathematisch betätigten, gehört zweifellos auch M. C. Escher. Eine Banknote mit ihm gibt es leider nicht, aber dafür Banknotenentwürfe von ihm, die leider nicht realisiert wurden.



Den Abschluss bildeten Banknoten mit verschiedenen Anwendungen.

So gibt es eine Reihe von Banknoten, auf denen deutlich Gleichungen zu sehen sind.

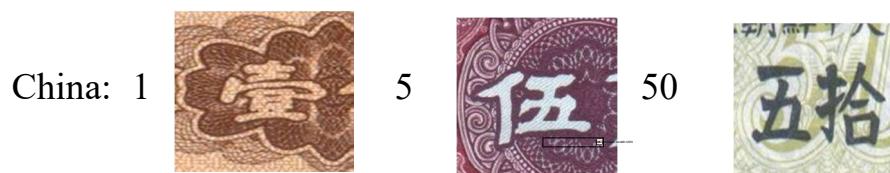


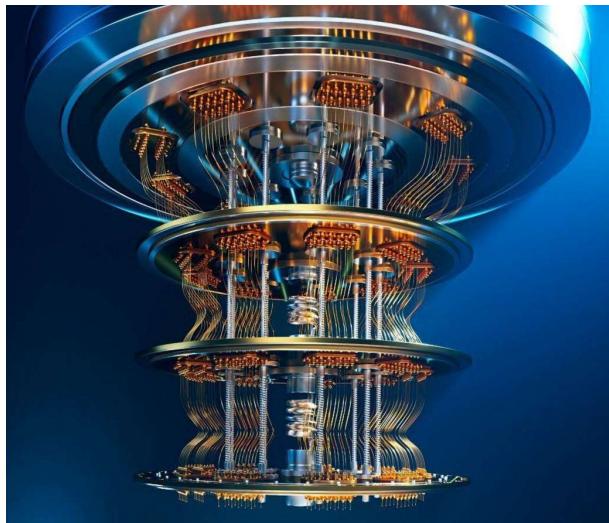
Abbildungen aus dem Bereich der Geometrie befinden sich auf einer Banknote aus Kolumbien.

Gewidmet ist der Schein dem Mathematiker und Astronomen Julio Garavito Armero (1865 - 1920).



Die meisten Europäer verbinden Zahlen mit einer Schreibweise arabischer Ziffern – ٠ ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ – aber auch noch mit den veraltet anmutenden römischen Zahlzeichen I V X L C D und M. Schaut man sich Weltbanknoten genauer an, dann lassen sich ungewohnte Schreibweisen finden.





XVII. Quantum Computing – Ein Quantensprung?

(DI Dr. Markus Faustmann)

Quantencomputer und die Fähigkeiten mit ihnen komplexe Rechnungen durchzuführen, auch Quantum Computing genannt, hat in den letzten Jahren einen enormen Popularitätsschub erfahren. Auf Grund rasanter Hardware-Entwicklungen liest man immer wieder, dass Quantencomputer unsere Welt revolutionieren werden, bisher unmögliche Rechnungen durchführen können, oder jegliche Verschlüsselungen knacken können.

In diesem Artikel wird eine Idee vermittelt, wie Quantencomputer eigentlich funktionieren, welches Potential in ihnen steckt und dass Mathematik dabei die zentrale Rolle spielt.

Wir beginnen hierfür mit einem berühmten Zitat des Nobelpreisträgers Richard Feynman (1918-1988), der in seinem Keynote Vortrag 1981 über seine Arbeit “Simulating Physics with Computers” sagte:

“Nature isn't classical, dammit, and if you want to make a simulation of nature, you'd better make it quantum mechanical.”

Feynman sah die Quantenmechanik also als Motivation Computer zu bauen, die, anders als die gängige von-Neumann-Architektur klassischer Computer, basierend auf Gesetzen der Quantenmechanik Rechnungen durchführen. Quantenmechanische Effekte treten in der Physik üblicherweise auf kleiner, subatomarer Ebene auf und Grundprinzipien, wie dass die Position von Elektronen nicht deterministisch ist, wirken schwer verständlich. Historisch hat

sich die moderne Quantenmechanik Anfang des 20. Jahrhunderts entwickelt, wobei die großen Namen Niels Bohr, Werner Heisenberg, Paul Dirac oder Erwin Schrödinger entscheidende Beiträge lieferten. Albert Einstein sagte allerdings über die Quantenphysik, da ihm der unintuitive Charakter missfiel:

“Wenn sie stimmt, ist das das Ende der Physik als Wissenschaft.”

Auch der Wiener Erwin Schrödinger äußerte sich abfällig:

“Ich mag sie nicht, und es tut mir leid, dass ich jemals etwas mit ihr zu tun hatte.”

Und das obwohl er für seine Forschungen in dem Bereich 1933 den Nobelpreis gewann. Tatsächlich war in den darauffolgenden Jahrzehnten ein Bestreben in der Physik, Effekte der Quantenmechanik auszunützen und nicht sie zu verstehen. Schrödinger führte allerdings ein wichtiges Gedankenexperiment durch, auch bekannt als “Schrödingers Katze”, das zeigte, dass sich Quanteneffekt nicht nur auf kleinen Skalen abspielen müssen und ein grundlegendes Prinzip für Quantum Computing aufzeigt. Er propagierte folgenden theoretischen Versuchsaufbau: In einer versiegelten, von der Umwelt isolierten Kiste ist eine Katze eingeschlossen gemeinsam mit einem radioaktiven Präparat (wir denken hier einfach nur an ein einzelnes Teilchen), einem Geiger-Zähler, einem Hammer und einem Fläschchen Zyankali. Zerfällt das radioaktive Teilchen, dann misst der Geigerzähler das, löst einen Mechanismus aus, der den Hammer das Zyankali-Fläschchen zerstören lässt, das Gift entweicht und tötet die Katze. Zerfällt das Teilchen nicht, passiert nichts und die Katze ist lebendig.

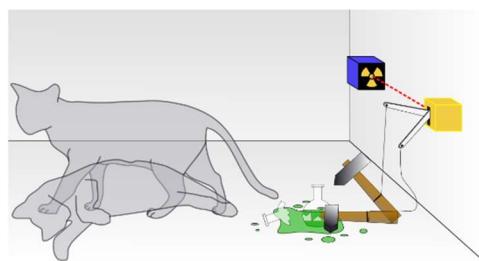


Abb. 4: Schrödingers Katze (Quelle: wikipedia.org).

Das radioaktive Teilchen agiert auf einer atomaren Skala, also dort wo die Quantenphysik Gültigkeit haben soll. Radioaktiver Zerfall ist statistisch und passiert nicht immer zum gleichen Zeitpunkt, also zur so genannten Halbwertszeit ist das Teilchen mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ zerfallen und Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ nicht zerfallen. Der Zustand lässt sich somit als so genannte “Superposition” verstehen, beide Einzelzustände sind gleichzeitig möglich und hier auch gleich wahrscheinlich. Man schreibt dafür in der so genannten Dirac Bra-Ket Notation

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|zerfallen\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|unzerfallen\rangle$$

wobei die Vorfaktoren der Zustände Wahrscheinlichkeiten angeben und sich im Quadrat immer auf 1 addieren müssen.

Betrachtet man jetzt den gesamten Versuchsaufbau, so sieht man, dass sich diese "Superposition" von dem atomaren Teilchen direkt auf die Katze überträgt. Ist das Teilchen zerfallen, stirbt die Katze, ist das Teilchen nicht zerfallen, lebt die Katze. Sie befindet sich also in Superposition "tot" und "lebendig" und zeigt somit quantenmechanische Effekte. Natürlich kann man einfach nachsehen, ob die Katze lebendig ist oder nicht, was man in der Quantenmechanik "Messung" eines Zustandes nennt. Allerdings ist dann die Superposition zerstört und ein deterministischer Zustand da. Wiederholt man das Experiment inklusive Messung, so kann man bei gleichem Aufbau auf Grund der wahrscheinlichkeitstheoretischen Natur des radioaktiven Zerfalls ein anderes Resultat bekommen.

Die Idee des Quantum Computings ist eine Rechenarchitektur zu verwenden, die mittels solcher Superpositionen arbeitet. Hat ein klassischer Computer als elementare Informationseinheit ein Bit mit möglichen Zuständen 0 und 1, also Strom oder nicht Strom, so basiert ein Quantencomputer auf lauter "Schrödinger-Katzenboxen" als Informationseinheiten, die Qubits genannt werden. Qubits haben die Basiszustände $|0\rangle$ oder $|1\rangle$, können aber potentiell in allen kombinierten Zuständen dazwischen sein, sie sind also mathematisch gesehen in einem 2-dimensionalen komplexen Vektorraum.



Abb. 5: Darstellung eines Qubits, links Basiszustand $|0\rangle$, Mitte Basiszustand $|1\rangle$, rechts (farbliche) Überlagerung $0.44|0\rangle + 0.9|1\rangle$.

Qubits können zu so genannten Registern kombiniert werden, womit es bei zwei kombinierten Qubits 4 Basiszustände (anstatt von nur $|0\rangle$ und $|1\rangle$) gibt. Allgemein bei einem Register aus n Qubits erhält man 2^n mögliche Basiszustände, also wächst die Anzahl der möglichen Basiszustände exponentiell mit der Anzahl der Qubits.

Ein Quantencomputer ist jetzt nichts anderes als ein Rechner, der die Gesetze der Quantenmechanik nutzt, um Berechnungen mittels Qubit-Registern durchführt. Die momentan gängige Technologie zur Realisierung von Qubits sind Supraleiter, wobei Basiszustand $|0\rangle$, der Zustand minimaler Energie ist und Basiszustand $|1\rangle$

der Zustand von angeregter Energie. Zustände werden mit Hilfe von Mikrowellen manipuliert.

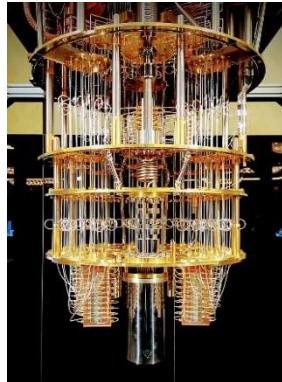


Abb. 6: IBM
Quantencomputer
(Quelle:
[wikipedia.org](https://en.wikipedia.org)).

Die Stärke dieser Architektur zeigt sich dann, wenn man Rechnungen auf Superpositionen durchführt. Ein Quantencomputer kann das nämlich komplett gleichzeitig mit einer einzigen Rechnung machen. Wertet man beispielsweise die Funktion $f(x) = x^2$ für $x = 0, 1, 2, 3$ aus, so braucht ein klassischer Computer 4 Rechenschritte. Ein Quantencomputer schafft dies auf einer Superposition von 4 Basiszuständen $|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle + |3\rangle$ mit einer einzigen Rechnung. Das Resultat erhält man allerdings wieder als Superposition von Zuständen, also man bekommt eine Kombination aller Resultate der Rechnung.

Da mit 330 Qubits 10^{99} Basiszustände dargestellt werden können, ist es also theoretisch möglich, dass Rechnungen in der Größenordnung aller Teilchen im gesamten Universum parallel durchgeführt werden können, was das enorme Potential von Quantencomputern demonstrieren soll.

Allerdings gibt es hierbei eine gravierende Einschränkung. Betrachtet man nochmal das obige Beispiel $f(x) = x^2$ für $x = 0, 1, 2, 3$. Oftmals ist man an einem einzelnen Ergebnis interessiert, also zum Beispiel $f(2) = 4$, aber auf der Superposition würde man $|0\rangle + |1\rangle + |4\rangle + |8\rangle$ bekommen. Misst man den Zustand, so kann (je nach Vorfaktoren, die hier weggelassen wurden) jedes dieser Ergebnisse auftreten und potentiell muss man oft das Experiment neu starten, bis man wirklich das gewünschte Ergebnis, hier $|4\rangle$, erhält. Dadurch kann der gesamte Vorteil an Rechenersparen durch die parallele Rechnung auf einer Superposition verloren gehen und ein Quantencomputer würde keine Vorteile bringen!

Und hier kommt der Mathematiker ins Spiel. Das Spielziel eines so genannten Quanten-Algorithmus ist es mit cleveren (wenigen oder billigen) weiteren Rechnungen die ungewünschten Zustände so zu kombinieren, dass sich diese auslöschen und nur der gewünschte Zustand übrigbleibt. Eine einmalige Messung gibt dann den gewünschten Zustand ohne den Aufwand der Rechnung drastisch zu erhöhen.

Das ist alles andere als einfach und auf Quantencomputern zusätzlich herausfordernd, da die Quantenmechanik nur unitäre Operationen, also reversible Rechnungen, erlaubt.

Bisher gibt es noch für sehr wenige Probleme solche Quanten-Algorithmen. Der erste derartige Algorithmus geht auf den israelisch-britischen Physiker David Deutsch (geb. 1953) zurück. Deutsch gilt als einer der Väter des Quantum Computings, da er 1985 ein Modell für einen Rechner entwickelte, der in der Lage sein soll, beliebige physikalische Systeme effizient zu simulieren. Sein Modell liefert das quantenmechanische Analogon zu der klassischen Turing-Maschine, also eine Quanten-Turing-Maschine. Gemeinsam mit dem australischen Mathematiker Richard Josza (geb. 1953), fand er für ein sehr künstliches Problem einen Algorithmus, sodass ein Quantencomputer das Problem im Vergleich zu einem klassischen Computer mit exponentieller Laufzeitverbesserung lösen kann.

Die Problemstellung hierbei, grob beschrieben, zu entscheiden ob eine Münze komplett fair (genau Hälfte Kopf/Zahl) oder komplett unfair (nur Kopf) ist, hat wenig praktische Relevanz.

Ein wesentlich relevanteres mathematisches Problem ist die Faktorisierung großer Zahlen in ihre Primfaktoren, worauf unsere aktuellen Verschlüsselungsalgorithmen, konkret der RSA-Algorithmus, basieren. Unsere momentanen Computer brauchen hierfür für enorm große Zahlen zu lange, wodurch verschlüsselte Dateien sicher sind. Wenn man also deutlich schneller, mit exponentieller Laufzeitverbesserung, große Zahlen faktorisieren kann, dann sind alle Verschlüsselungen problemlos zu entschlüsseln. Diese Problemstellung führt uns zu dem ersten praxisrelevanten Durchbruch im Feld des Quantum Computing, nämlich einem Algorithmus der genau das auf einem Quantencomputer macht, dem so genannte Shor-Algorithmus, benannt nach seinem Erfinder Peter Shor (geboren 1959). Shor stellte diesen in einem Seminarvortrag 1994 vor und schnell war dessen Relevanz klar.

Da der Algorithmus auf einfachen Prinzipien basiert, werden im Folgenden die Ideen kurz skizziert: Man möchte eine Zahl y in zwei (oder auch mehr) Primfaktoren zerlegen und geht nach den folgenden Schritten vor.

1. Rate einen Faktor x . Ob man zufällig richtig geraten hat, kann einfach durch Division überprüft werden. Falls man zufällig eine Zahl errät, die einen gemeinsamen Faktor mit der Zahl x hat (beispielsweise $x=21$ für $y=77$), so kann man mit dem euklidischen Algorithmus (auf einem klassischen Computer) effizient den gemeinsamen Faktor berechnen. Im Allgemeinen muss man davon ausgehen, dass man für große Zahlen keinen gemeinsamen Faktor errät, also teilerfremde Zahlen x und y hat.

2. Verbessere die geratene Zahl. Hierfür verwendet man folgendes Resultat aus der Zahlentheorie: Für teilerfremde Zahlen x, y existieren natürliche Zahlen p und m , sodass

$$x^p = m \cdot y + 1.$$

Elementare Umformungen machen daraus

$$(x^{p/2} - 1) \cdot (x^{p/2} + 1) = m \cdot y.$$

Somit hat man ein Produkt und potentiell bessere Faktoren $(x^{p/2} \pm 1)$ gefunden.

3. Obige Rechnung kann allerdings nutzlos sein, falls entweder p ungerade ist, oder einer der Faktoren $(x^{p/2} \pm 1)$ ein Vielfaches von y ist. Dies tritt, abhängig von der geratenen Zahl x , zu 63,5% der Fälle ein. Falls also obige Rechnung nicht zum Ziel führt, muss man den Versuch mit einer neu geratenen Zahl neu starten. Macht man dies 10-mal mit zufälligen geratenen Zahlen, dann erhält man zu 99% einen brauchbaren Faktor.
4. Die primäre Schwierigkeit bei der obigen Rechnung versteckt sich in der Berechnung der Potenz p , was auch als „period-finding problem“ bekannt ist. Auf einem klassischen Computer kann man im Wesentlichen nur so lange Zahlen probieren, bis man p gefunden hat, was ähnlich teuer ist wie gängige Primzahl faktorisierungs-Algorithmen. Auf einem Quantencomputer kann man diesen Schritt hingegen mit Hilfe der Rechenersparnis auf Superpositionen enorm schneller durchführen. Peter Shor konnte mathematisch beweisen, dass man das Finden von p auf eine Variante der Fourier Transformation, ein bekanntes Tool in der Signalverarbeitung, auf einem Quantencomputer zurückführen kann, die mit exponentieller Laufzeitverbesserung berechnet werden kann.

Die ersten praxisrelevanten Quanten-Algorithmen trieben auch die Motivation zur Entwicklung von Quanten-Hardware voran. Trotzdem dauerte es bis 2012 bis die ersten kommerziellen Quantenrechner verfügbar wurden, die eigentlich keine echten Quantencomputer in dem Sinn von David Deutsch waren, sondern so genannte Quanten-Annealer der Firma D-Wave. Man kann sich diese als Quanten-Taschenrechner vorstellen, die nur für ganz spezielle Probleme konzipiert sind. Der erste kommerzielle Quantencomputer mit 27 Qubits wurde 2019 von IBM

gebaut, basierend auf Supraleitern als Qubits. Aktuell gibt es schon Quantencomputer mit über 1000 Qubits.

Ist Quantum Computing also jetzt ein Durchbruch?

Hierfür kann man in klassischer quantenphysikalischer Manier sowohl JA als auch NEIN antworten. Von theoretischer Seite zeigen Beispiele wie Shors Algorithmus, dass ein enormes Potential besteht und Quanten-Algorithmen für andere relevante Probleme, wie beispielsweise Grovers Algorithmus zur Suche in unsortierten Listen, zeigen viele potentielle Anwendungen.

Auch wenn mehrmals so genannte “quantum supremacy”, also Überlegenheit eines Quantencomputers gegenüber einem klassischen Supercomputer bei einer konkreten Rechnung, proklamiert wurde, konnte dies noch nie für ein praxisrelevantes Problem, wie der Faktorisierung einer großen Zahl, gezeigt werden. Dies liegt daran, dass es auf Seite der Hardware trotz bestehender Rechner mit über 1000 Qubits noch keinen echten Durchbruch gibt. Das Problem hierbei besteht darin, dass enorm viele Qubits für Redundanzen und nicht für echte Rechnungen verwendet werden müssen. Einerseits können Supraleiter-Qubits nur 10^{-2} Sekunden ihren Zustand halten und sind sehr anfällig für äußere Störungen, wodurch viele Qubits zur Fehlerkorrektur verwendet werden müssen. Andererseits benötigt die Zahlendarstellung (naiv als Binärzahl ein Qubit pro Stelle) und Manipulation mittels unitärer Operationen etliche Hilfs-Qubits. Da auch die Programmierung mittels Quanten-Schaltkreisen umständlich, und Kopieren von Informationen nur mittels so genannter Quanten-Verschränkung funktioniert, besteht von der Hardware-Seite noch enormer Verbesserungsbedarf.

Nichtsdestotrotz kann man sagen, dass Quantum Computing ein spannendes und zukunftsträchtiges Forschungsfeld ist, in dem die Rolle der Mathematik, in der Entwicklung von Quanten-Algorithmen, absolut zentral ist.



Abb.: Mathematicum in Gießen

XVIIIa. Liebes π - bist du „normal“ ?

(Mag. Franz Josef Vrabec)

0. Inhalt

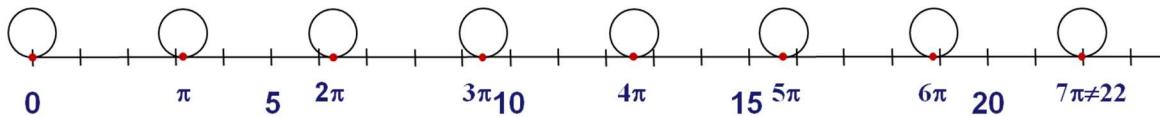
Der Vortrag gliedert sich in drei Teile. Im ersten Teil erläutere ich einige Eigenschaften der Zahl π , die schon sehr lange bekannt sind - wie zum Beispiel jene, dass sich π nicht als Bruchzahl (= rationale Zahl) darstellen lässt. Dann mache ich einen Abstecher in das Gebiet der sogenannten „normalen Zahlen“. Für diese seltsame Eigenschaft (fast aller!) reeller Zahlen ist leider, was die Zahl π betrifft, noch sehr wenig bekannt. Der abschließende dritte Teil widmet sich der humorvollen Seite der Mathematik - dazu kann die Zahl π einiges beitragen!

1. Unser gesichertes Wissen über die Zahl π



Seit der Antike (man denke an Archimedes und seine für π gegebene Abschätzung: $3 \frac{10}{71} < \pi < 3 \frac{1}{7}$) beschäftigt Mathematiker die Frage, ob diese Zahl eine rationale Zahl ist, also ob es zwei ganze positive Zahlen p und q gibt, sodass $\pi = p/q$ gilt. Die bis ins 18. Jhd. mühsam ermittelten Näherungswerte für π zeigten, dass dann die Zahlen p und q (relativ) große Zahlen sein müssten, sodass Zweifel an der Rationalität von π aufkamen. Erst 1761 konnte der geniale, aber manchmal im Schatten seiner Zeitgenossen stehende elsässische Mathematiker und Physiker Johann Heinrich Lambert (Bild links) mathematisch einwandfrei beweisen, dass π tatsächlich keine rationale Zahl ist! Er verwendete dazu die Methode der Kettenbrüche, wies damit eine sehr merkwürdige Eigenschaft der Tangens-Funktion nach, aus der dann ganz leicht die Irrationalität der Zahl π folgt.

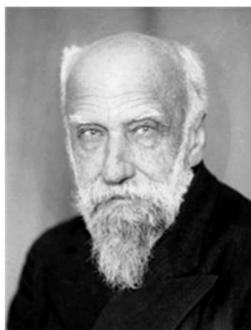
Kann man sich unter der „Irrationalität“ der Zahl π auch etwas „vorstellen“? Ich denke „ja“ und lade Sie dazu zu einem Gedankenexperiment ein. Wir wollen einen Kreis mit Durchmesser 1 auf einem beliebig weit nach rechts laufenden Strahl abrollen:



Jedesmal, wenn der erste Aufsetzpunkt des Kreises (= roter Punkt bei 0) wieder auf den Strahl trifft, machen wir dort eine rote Markierung. Die erste dieser Markierungen fällt wegen $3 < \pi < 4$ zwischen 3 und 4; die zweite wegen $\pi < 2\pi < 7$ zwischen 6 und 7; und so fort. Die letzte der in Abb. 1 sichtbaren Markierungen wird nach siebenmaligen Abrollen des Kreises erreicht. Sie liegt bei $7\pi = 21,9911\dots$, also ganz knapp vor der Zahl 22. Dass π eine irrationale Zahl ist bedeutet nun, dass bei immerwährendem Abrollen des Kreises die roten Markierungspunkte **nie wieder** auf eine ganze Zahl treffen! Denn käme nach m -maligen Abrollen die betreffende Markierung genau auf die ganze Zahl n zu liegen, dann wäre $\pi = n/m$, also rational.

Ergänzend bemerke ich hier noch, dass es immer wieder Markierungspunkte gibt, die sehr nahe bei einer ganzen Zahl liegen. Das zeigt schon das Beispiel des siebenmaligen Abrollens, nach welchem der Markierungspunkt fast genau bei der Zahl 22 liegt und zur Näherung $\pi \approx 22/7$ führt. Einen „Fast-Volltreffer“ erreicht man nach 113-maligen Abrollen, der Markierungspunkt liegt dann bei $354,999969\dots$ ganz knapp vor der Zahl 355. Die daraus folgende Näherung $\pi \approx 355/113$ wird nach Metius benannt, war aber schon vor dem Jahr 500 dem chinesischen Mathematiker Zu Chongzhi bekannt.

Dass π keine rationale Zahl ist, lässt sich – in algebraischer Sprechweise – auch so ausdrücken: π ist nicht die Lösung x einer linearen Gleichung $c_1 x + c_0 = 0$, mit ganzen Zahlen c_1 und c_0 . Es ist nun naheliegend zu fragen, ob π Lösung einer quadratischen Gleichung $c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = 0$ ist, mit ganzen Zahlen c_2, c_1 und c_0 .

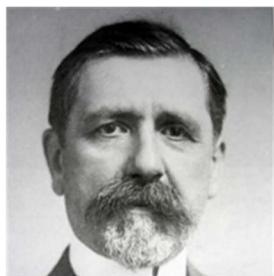


Aber schon dieser etwas allgemeinere Fall wurde von Lambert als nicht möglich erkannt. Eine weitere Steigerung ist die Frage, ob π Lösung einer polynomialen Gleichung n -ten Grades $c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0 = 0$ ist, mit ganzen Zahlen c_n, c_{n-1}, \dots, c_1 und c_0 . Lösungen solcher Gleichungen nennt man „algebraisch“, hingegen „transzendent“, wenn sie diese Eigenschaft nicht besitzen. Dass es tatsächlich transzidente Zahlen gibt, wurde erst 1844 durch den französischen

Mathematiker Joseph Liouville gezeigt. Da gab es nun eine neue Fragestellung: Ist π eine algebraische Zahl oder ist sie transzendent? Diese Frage wurde 1882 vom deutschen Mathematiker Ferdinand Lindemann (Bild links) beantwortet: π ist eine transzendente Zahl!

Damit ist sie in guter Gesellschaft: auch die Eulersche Zahl e , die Basis der natürlichen Logarithmen, ist eine transzendente Zahl.

Damit meinten die Mathematiker um die Wende des 19./20. Jahrhunderts, ausreichend viel über die Eigenschaften der Zahl π zu wissen. Überraschend



brachte 1909 der französische Mathematiker Emile Borel (Bild links) eine neue Eigenschaft ins Spiel, die reelle Zahlen aufweisen können (oder auch nicht): die der „Normalität“. Diesen Begriff werde ich im nächsten Abschnitt näher erläutern und dann versuchen darzustellen, wie sich unsere Zahl π dazu verhält.

2. Wann ist eine reelle Zahl „normal“ und vor allem: ist π von dieser Art ?

Wir wollen uns dem Begriff der Normalität einer Zahl schrittweise nähern. Die Normalität einer reellen Zahl sagt etwas darüber aus, mit welchen Häufigkeiten die Ziffern (bzw. die Ziffernblöcke) in ihrer Dezimalbruchentwicklung vorkommen. Betrachten Sie z.B. die ersten 35 Stellen von π (berechnet von Ludolph Van Ceulen und 1610 nach seinem Tod publiziert):

3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50289 ...

Darin kommen alle 10 Dezimalziffern vor (die Null zwar erst an der 32. Stelle, aber sie kommt vor). Wenn in einer Zahl „auf lange Sicht gesehen“ alle 10 Ziffern gleich oft vorkommen, nennt man diese Zahl „einfach normal zur Basis 10“. Ein simples Beispiel dafür ist die Zahl $0, \overline{1234567890} = 137174210/1111111111$; sie ist eine rationale Zahl, in ihrer periodischen Dezimalbruchentwicklung tritt offensichtlich jede der 10 Dezimalziffern - auf lange Sicht gesehen - gleich oft auf.

Jetzt dehnt man diese Forderung aus, zunächst auf Ziffernpaare (d.h. Ziffernblöcke der Länge 2) aus, man verlangt also (wieder auf lange Sicht gesehen!) dass jedes der 100 möglichen Ziffernpaare 00, 01, 02, 03, ..., 97, 98, 99 gleich oft in der Dezimalbruchentwicklung der Zahl vorkommen. Diese Forderung kann man dann auf Ziffernblöcke beliebiger Länge k ausdehnen und verlangen, dass - auf lange Sicht gesehen - die 10^k Ziffernblöcke 00...00,

00...01, 00...02, ..., 99...97, 99...98, 99...99 (jeweils der Länge k) in der Dezimalbruchentwicklung der Zahl gleich oft vorkommen.

Eine reelle Zahl wird nun „normal zur Basis 10“ genannte, wenn in ihrer Dezimalbruchentwicklung die oben genannte Forderung für jede natürliche Zahl k erfüllt ist. Diese Definition enthält jetzt unendlich viele Anforderungen und man könnte meinen, dass es gar keine Zahlen gibt, bei denen diese alle erfüllt sind. Borel zeigte aber bereits in seiner ersten Arbeit zu diesem Thema, dass „bis auf eine Menge vom Maß Null“ alle reellen Zahlen normal sind! Sein Beweis für deren Existenz zeigt allerdings keinen Weg auf, wie man konkrete Beispiele für normale Zahlen finden könnte.

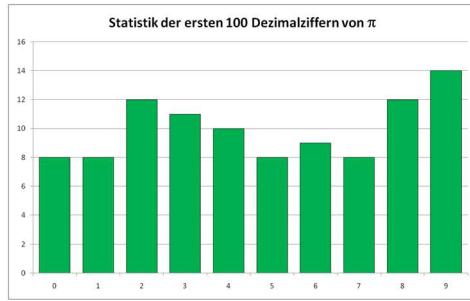
Es war es eine kleine Sensation, als der britische Mathematiker David Champernowne 1933 eine zur Basis 10 normale Zahl veröffentlichte, die ganz einfach aufgebaut war:

0,12...891011...9899100101...99899910001001...

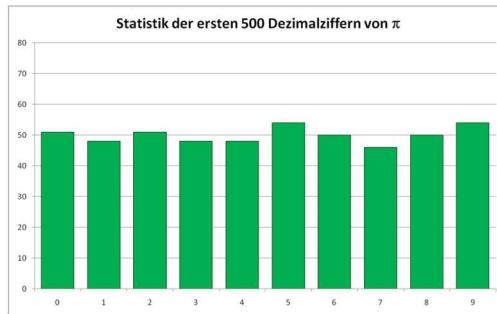
Ihre Darstellung als Dezimalbruch ist einfach die lückenlose Aneinanderreichung der natürlichen Zahlen! Der Beweis, dass sie tatsächlich normal zur Basis 10 ist, ist mühsam aber nicht besonders schwierig. Champernowne zeigte auch, dass die Aneinanderreichung der zusammengesetzten Zahlen (also die Zahl mit der Dezimalbruchdarstellung 0,46891012141516182021)... normal zur Basis 10 ist und vermutete, dass dasselbe auch für die Aneinanderreichung der Primzahlen gilt. Das konnte allerdings erst 1946 von dem umtriebigen ungarischen Mathematiker Paul Erdős (gemeinsam mit dem US-amerikanischen Mathematiker Copeland) gezeigt werden.

Nachdem es gelungen war, einige zur Basis 10 normale Zahlen anzugeben, wurde die Frage immer drängender, wie es mit der Normalität bei den wichtigsten Konstanten der Mathematik (z.B. π , e , $\sqrt{2}$, $\log 2$, γ , $\zeta(3)$, φ , ...) beschaffen ist. Hier muss ich Ihnen zu meinem Leidwesen gestehen, dass wir von keiner dieser aufgelisteten Konstanten wissen, ob sie normal zur Basis 10 ist, insbesondere von unserer Zahl π wissen wir es nicht! Allerdings sind viele MathematikerInnen fest davon überzeugt, dass das bei π der Fall ist, aus gutem Grunde: die bisherigen Statistiken über die Verteilung der Ziffern bzw. Ziffernblöcke in dieser Zahl zeigen ein dahingehendes „normales“ Verhalten.

Lassen Sie mich das ein wenig näher ausführen! Beginnen wir bescheiden und untersuchen die ersten 100 Dezimalstellen von π . Die folgende Grafik zeigt, dass die Häufigkeit der Ziffern 0 - 9 noch ziemlich unausgeglichen ist. Verlängert man



den Untersuchungsbereich auf 500 Dezimalstellen, so stellt sich bereits eine deutlich bessere Ausgeglichenheit bei den Anzahlen der Dezimalziffern ein. Je weiter man



den Untersuchungsbereich ausdehnt, desto besser wird die Annäherung auf die für die Normalität einer Zahl geforderte Gleichverteilung der Häufigkeiten bei den Ziffern 0 – 9. Durch solche statistischen Analysen kann man die Normalität von π natürlich nicht beweisen, aber immer mehr plausibel machen - noch dazu seit dem Einsatz von elektronischen Computern die Anzahl der bekannten Dezimalstellen von π ganz enorm angewachsen ist.

Waren vor Beginn der Computerzeitalters etwa 1000 Stellen bekannt, so ermittelte 1949 der legendär Computer ENIAC bereits etwas mehr als 2000 Stellen und 1958 waren es mit Hilfe einer IBM 704 schon 10000 Stellen. Die Million wurde 1973 überschritten, die Milliarde von bekannten Stellen dann 1989 erreicht. Etwas nach der Jahrtausendwende, im Jahr 2002, errechnete der Japaner Kanada mehr als 1 Billion Dezimalstellen! Der derzeitige Rekord datiert vom 2.4.2025, die „Linus Media Group“ errechnete in einer Zeit von 226(!) Tagen 300 Billionen Dezimalstellen von π . Würde man diese Stellen komplett ausdrucken (doppelseitig, mit 3000 Ziffern/Seite), dann ergäbe das 50 Milliarden Blatt. Mit einer Blattstärke von etwa 0,1 mm wäre der entstehende Papierstapel dann 5000 km hoch – unvorstellbar!

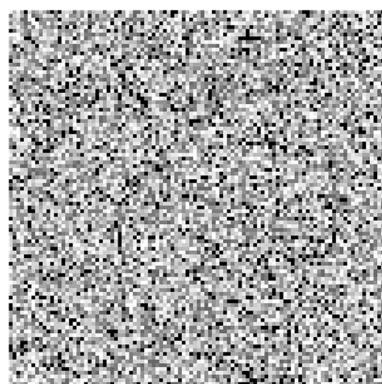
Ich möchte Ihnen nun anschaulich zeigen, wie scheinbar regellos sich die ersten 10000



Dezimalziffern von π verteilen. Dazu bedienen wir uns eines Tricks: wir „kodieren“ die 10 Ziffern durch kleine Quadrate verschiedener Graustufen: je höher die Ziffer, desto dunkler. Die ersten 10 Stellen von π lassen sich dann so darstellen:

3, 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5

Und hier ein Bild von den ersten 10000 Stellen von π . Können Sie darin irgendwo ein Muster erkennen - eine Abweichung von völliger Regellosigkeit? Nein! Es sieht aus wie das Gewimmel in einem Ameisenhaufen ...



Wir dürfen allerdings nicht die Begriffe „Zufälligkeit“ und „Normalität“ gleichsetzen, denn π ist selbstverständlich keine zufällige Zahl: Für die Berechnung von π gibt es eine sehr große Zahl von Algorithmen, also von Vorschriften, nach denen die Dezimalbruchentwicklung dieser Zahl beliebig weit (es hängt nur von der Kapazität des eingesetzten Computers ab!) und streng determiniert ermittelt werden kann. Die Forderungen der Normalität widerspricht dem nicht, sie besagt ja nur, dass jede Ziffernfolge einer bestimmten Länge (in unserer Sichtweise jetzt: jedes Muster von 10 Graustufen einer bestimmten Länge) nicht nur einmal, sondern unendlich oft vorkommt, mit einer Häufigkeit, die durch ihre Länge bestimmt wird. Nicht nur das vorhin gezeigte Muster der ersten 10000 Stellen von π kommt immer wieder vor, sondern auch das Muster des folgenden, ebenfalls 10000 Dezimalstellen umfassenden Ziffernblockes, der irgendwann einmal an einer sehr fernen Stelle in der Zahl π vorkommt - vorausgesetzt, dass π eine normale Zahl zur Basis 10 ist:



Das Muster zeigt den Autor, aufgenommen vor langer Zeit, mit dem kleinen Kater „Archimedes“. Ein Resümee sowohl zu den bekannten als auch zu den vermuteten Eigenschaften der Zahl π wäre:

Die irrationale, ja sogar transzendenten Zahl π lässt sich auf beliebig viele Stellen exakt berechnen, sie ist damit keine zufällige Zahl – aber sie „tut so“! Das zeigt die Statistik der ersten 300 Billionen Stellen ihrer Dezimalbruchentwicklung, die auch völlig im Einklang mit der Forderung der Normalität zur Basis 10 steht.

3. Die humorvolle Seite der Zahl π

Die Zahl π , oder besser gesagt, die Ziffern 314 aus ihrer allseits bekannten Näherung, finden sich manchmal an Stellen, wo man sie gar nicht erwartet hätte!



So trägt die inoffizielle österreichische Hymne, der Johann Strauss Walzer „An der schönen blauen Donau“ die Opuszahl 314. Und die Wiener Verkehrsbetriebe takten die Intervalle der Linie 5 mit der Kreiszahl π , wie das folgende Foto beweist.



Als ich noch Autobesitzer war, besaß ich ein Wunschkennzeichen, welches die Ziffern 314 enthielt.

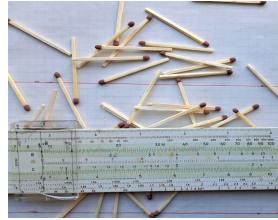
So etwas ist mir als Autofahrer selbstverständlich nie passiert:



Es gibt eine Vielzahl von Merkversen, mit derer Hilfe die Folge der Dezimalstellen von π memoriert werden kann. Als passionierter Kaffeetrinker (eine notwendige Voraussetzung um MathematikerIn zu sein, wie ich meine), schätze ich sehr:



May I have a great container of coffee ... ?
3 1 4 1 5 9 2 6 ...

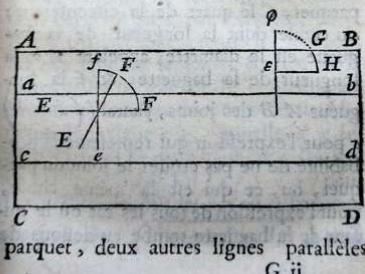
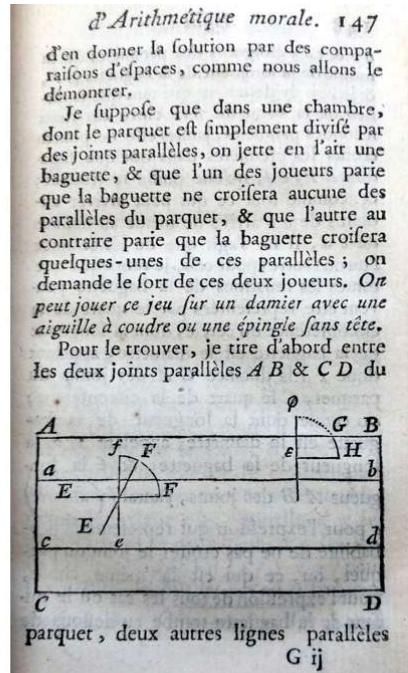


XVIIIb. Fortsetzung - Buffonsches Nadelproblem zur Approximation von π

(Dr. Gerold Petritsch)

Geschichte des Buffonschen Nadelproblems

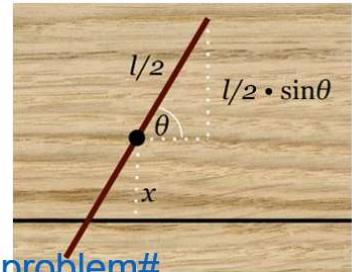
- Georges-Louis Leclerc (1707–1788) „Compte de Buffon“
- Inspiration: adeliges Spiel mit Münzen auf Kachelmuster
- Leclerc, 1733 @ Pariser Akademie der Wissenschaften
- Leclerc, 1777: Histoire Naturelle (s. Folie 3)
- Joseph-Émile Barbier (1839–1889): eleganter Beweis 1860 (s. Folie



parquet, deux autres lignes parallèles
G ij

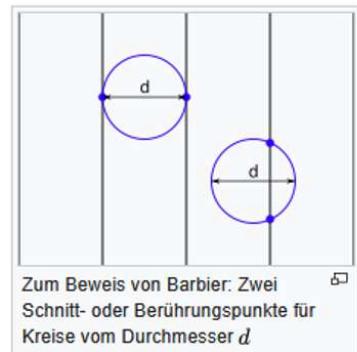
Beweisidee von Buffon (ca. 1760)

- Kleine Nadeln ($l \leq d$)
- 2 voneinander unabhängige ZV:
 - Abstand MP-Linie
 - Winkel relativ zur Linie
- $W(\text{Treffer}) = \int_0^\pi \int_0^{\frac{l}{2}\sin(\theta)} \frac{1}{l} \frac{1}{\pi} dx d\theta$
- Siehe de.wikipedia.org/wiki/Buffonsches_Nadelproblem#

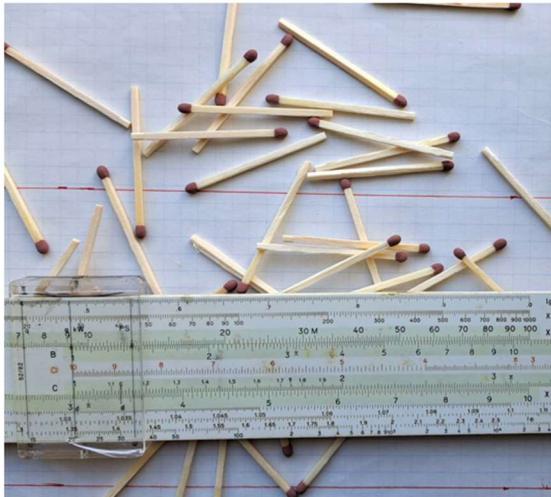


Beweis von Barbier 1860

- Joseph-Émile Barbier (1839–1889)
- frz. Math. + Astronom
- $E(\text{Treffer}) = \text{Konstante} * \text{Länge}$
- Kreise mit Durchmesser d
- ein- und umgeschriebene Vielecke
- Grenzwert $E = \frac{2l}{d\pi}$
- Aigner und Ziegler: [Buch der Beweise](#)



Praxistest: π mit Streichhölzern schätzen

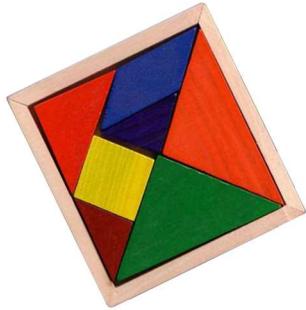


- Formel: $\hat{\pi} = \frac{2 \cdot N_A \cdot l}{N_C \cdot d}$
- N_A = Zahl der geworfenen Stäbchen
- N_C = Zahl jener Stäbchen, die eine Linie kreuzen
- l = Länge der Hölzchen
- d = Linienabstand
- Vereinfachung mit $d = 2 l$, $N_A = 100$

An die Arbeit 😊!

Literatur / Quellenverweise

- Pi ist überall – auch im buffonschen Nadelproblem – Spektrum der Wissenschaft
- https://de.wikipedia.org/wiki/Buffonsches_Nadelproblem
- Martin Aigner, Günter M. Ziegler: Das Buch der Beweise, Springer Verlag 2002, Kapiel 24. Das Nadelproblem von Buffon, S. 179-182.
- Georges-Louis Leclerc de Buffon (1707 – 1788) – Histoire Naturelle Generale et Particuliere – Servant de suite a l'Histoire Naturelle de l'Homme. Tome Dixieme. Paris 1778. Bild Folie 2: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=126005690>
- Bild Folie 3: McZusatz – Eigenes Werk, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=26236866>
- Bild Folie 4: Quartl – Eigenes Werk, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=28466421>



XIX. Kinderspielzeug oder mathematische Herausforderung

(DI Erwin Sulzgruber)

Am Beispiel von vier Kinderspielzeugen

Wer von uns hat nicht als Kind ein Tangram besessen, oder ein 15-Puzzle. Manche von uns vielleicht auch einen Soma Würfel oder die berühmten Türme von Hanoi. So unterhaltsam diese Spielzeuge für Kinder sind, so interessant sind sie auch für uns Mathematiker. Sie liefern zwar nicht unbedingt bahnbrechende Beiträge zum Fortschritt der mathematischen Forschung, aber sie haben doch ihre kleinen, reizvollen Geheimnisse, denen wir in diesem Artikel auf den Grund gehen wollen. Klarerweise werden wir uns ansehen, wie diese Puzzles zu lösen sind, was mit dem richtigen Hintergrund wissen überraschend einfach zu bewerkstelligen ist. Daneben werden wir aber durchaus noch weitere Erkenntnisse gewinnen

1. Das Tangram

Das Tangram ist ein Puzzle aus sieben Teilen, aus denen ein Quadrat zusammengesetzt werden soll.

Das Spiel stammt ursprünglich aus China, von wo es zu Anfang des 19. Jahrhunderts nach Europa und Amerika gekommen ist und sehr schnell recht beliebt wurde.

Werfen wir als erstes einen Blick auf die sieben Teile des Tangrams: es handelt sich um zwei „große“ gleichschenklig rechtwinklige Dreiecke, ein „mittleres“ Dreieck, das genau halb so groß ist wie die beiden Großen und dessen längere Seite somit genau die gleiche Länge hat wie die kürzere Seite der beiden großen. Weiters gibt es noch zwei „kleine“ Dreiecke, die jedes wiederum halb so groß sind wie das mittlere. Schließlich haben wir noch ein Quadrat und ein Parallelogramm, die man sich aus den zwei kleinen Dreiecken zusammengesetzt

vorstellen kann, wobei das Quadrat dadurch entsteht, dass die beiden Hypotenuse aneinander liegen und das Parallelogramm dadurch, dass zwei Katheten aneinander liegen.

Wenn wir die Länge der Hypotenuse mit 1 beziffern dann können daraus bereits unmittelbar die Flächeninhalte der Puzzlesteine bestimmen: die großen Dreiecke haben Flächeninhalt von $\frac{1}{4}$ (zusammen also $\frac{1}{2}$), das mittlere Dreieck $\frac{1}{8}$, das Quadrat, das Parallelogramm sowie die beiden kleinen Dreiecke zusammen ebenfalls $\frac{1}{8}$, was alles in allem eine Summe aller Flächen von 1 ergibt. Das aus allen Teilen zusammengesetzte Lösungsquadrat hat also insgesamt sie Fläche 1, woraus folgt, dass die Seitenlänge der Lösung gleich 1 ist.

Auf der Suche nach der Lösung führen zwei Gedanken schnell ans Ziel:

- Erstens überlegt man sich leicht, dass die beiden großen Dreiecke in der Lösung nicht gegenüberliegen können, da dadurch bereits die Lage des kleinen Quadrates und damit der kleinen Dreiecke festgelegt ist. Das mittlere Dreieck und das Parallelogramm passen dann nicht mehr. Die beiden großen Dreiecke müssen also mit der Kathete aneinander liegen.
- Zweitens lässt sich feststellen, dass die Seitenlänge des kleinen Quadrates eine irrationale Zahl ist ($\frac{\sqrt{2}}{4}$). Dieses kleine Quadrat kann daher nicht mit seinen Seiten parallel zu den Seiten des Lösungsquadrate liegen, da sich mit den sieben Steinen keine Ergänzung zur (rationalen) Seitenlänge des Lösungsquadrate herstellen lässt. Das kleine Quadrat muss also in der Lösung um einen Winkel von 45° gedreht liegen. Die einzige (bis auf Drehung und Spiegelung) mögliche Lösung ist also die am Anfang des Artikels abgebildete.

Man kann sich nun die Frage stellen, wie viele Figuren sich mit den Puzzlesteinen des Tangrams bilden lassen. Dabei können wir auf unzählige Vorlagen und Bücher mit tausenden Menschen, Tieren, Gebäuden, Werkzeugen, Schiffen, Autos, Buchstaben und Ziffern zurückgreifen und stellen dabei fest, dass es mathematisch gesehen unendlich viele Tangram Figuren gibt, denn wir müssen beispielsweise nur den Kopf eines „Mönchs“ unmerklich verschieben oder verdrehen und schon haben wir ein neues Tangram.

Es macht daher Sinn, gewisse Einschränkungen beim Zählen vorzunehmen und zum Beispiel nach konvexen Tangram-Figuren zu suchen.

Und da haben die beiden chinesischen Mathematiker Fu Traing Wang und Chuan Chi Hsiung in einem Artikel im Jahr 1942 gezeigt, dass es genau 13 Stück davon gibt.

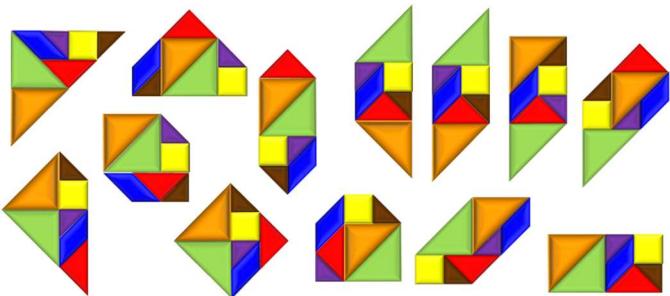


Abb. 7: alle 13 möglichen konvexen Tangram-Figuren

Andere Mathematiker haben sich mit sog. *Zwillings tangrams* beschäftigt, wobei aus den sieben Teilen zwei deckungsgleiche Figuren gelegt werden, wieder andere mit *Gittertangrams*, wobei die Steine nur so gelegt werden, dass ihre Eckpunkte auf die Schnittpunkte von Gitterlinien zu liegen kommen.

2. Das 15-Puzzle

Dieses Spielzeug wurde zwischen 1870 und 1880 von Noyes Palmer Chapman in den USA erfunden, wobei der Erfinder Sam Lloyd behauptete, er sei der Erfinder gewesen. Obwohl diese Behauptung heute als erwiesen ermaßen widerlegt gilt, wird das Spiel noch immer häufig als „Lloyd-Puzzle“ bezeichnet.

Das Puzzle wurde in seiner Anfangszeit häufig mit vertauschten Nummern (14 und 15) ausgeliefert und es gab eine Prämie dafür, wenn man diese Puzzles lösen konnte. Dies führte zu so mancher Verwicklung, da es Leute gab, die behaupteten, dass es ihnen gelungen sei, aber die Lösung nicht vorführen konnten.

Wollen wir uns daher gleich einmal mit dem Problem beschäftigen, ob es möglich ist, die Zahlen 14 und 15 bei sonst unverändertem Puzzle zu vertauschen.

Dazu ist es nötig, dass wir uns mit dem Begriff einer geraden Permutation befassen. Eine Permutation ist eine Umordnung von Objekten, also z.B. den Steinen des 15-Puzzles. Falls nach der Umordnung ein Stein mit einer höheren Nummer vor einen Stein mit einer niederen Nummer zu liegen kommt (z.B. 14 vor 15, oder auch 10 vor 5), dann sprechen wir von einer *Vertauschung*. Entsprechend der Anzahl der Vertauschungen bezeichnen wir eine Permutation als *gerade* oder *ungerade* und die Eigenschaft, ob eine Permutation gerade oder ungerade ist bezeichnen wir als die *Parität*. Wenn wir nun untersuchen, wie sich ein Verschieben des Leerfeldes um einen Platz nach unten auf die Parität der Permutation auswirkt, dann stellen wir fest, dass zwischen der alten und der neuen Position des Steins genau drei andere Steine liegen. Diese drei anderen Steine tragen entweder eine höhere Nummer oder eine niedrigere Nummer als unser zu verschiebender Stein. Für jeden dieser drei Steine kommt daher neue Vertauschung dazu bzw. fällt eine Vertauschung weg. Es wechselt daher drei Mal die Parität der Permutation. Wenn wir uns weiters die Zeilen des Puzzles von 1 bis 4 nummeriert denken, dann wechselt bei einer Verschiebung des Leerfeldes nach unten auch die Parität der Zeilenummer des Leerfeldes. Die Summe der Parität aus Anzahl der Vertauschungen plus Zeilenummer bleibt also stets gleich. Genauso können wir uns überlegen, dass diese Parität auch unverändert bleibt, wenn wir einen Stein nach oben oder horizontal verschieben.

Daraus ergibt sich, dass es nicht möglich ist, die Steine 14 und 15 zu vertauschen, wenn das Leerfeld danach noch in der vierten Zeile sein soll. Wenn Das Leerfeld in der ersten oder dritten Zeile sein soll, dann ist eine solche Vertauschung möglich. Somit ist genau die Hälfte der $16!$ Möglichkeiten (ca. 21 Billionen), durch regelkonformes Verschieben der Steine zu erreichen.



Abb. 8: Verschieben eines Puzzlesteins um eine Zeile nach unten. Die Parität der Permutation ändert sich jeweils für x, y und z

Die Lösung des Puzzles ist relativ einfach und selbst für Volksschulkinder meist kein Problem. Am einfachsten ist es, mit den Nummern 1 und 2 zu beginnen, dann die Nummer 3 ins rechte obere Eck zu befördern und die Nummer 4 unmittelbar unter der 3 zu platzieren. Dann räumt man den Platz 3 leer und kann 3 und 4 an ihren Platz bringen. Analog verfährt man mit der zweiten Reihe. Für die dritte und vierte Reihe verfährt man folgendermaßen: den Stein mit der Nummer 13 an die Stelle wo später die 9 landen soll. Danach die Nummer 9 unmittelbar rechts neben 13. Nach dem Leeren des Feldes ganz links unten kann man dann 13 und 9 an ihre Plätze bringen. Ähnlich geht man mit 14 und 10 vor, womit man praktisch fertig ist.

Eine sehr interessante Variante des 15-Puzzles ist der „Rainbow Ball“. Dieser entspricht geometrisch gesehen einem Dodekaeder, auf dessen Flächen jeweils eine farbige Kugel sitzt, wobei eine der Flächen keine Kugel beinhaltet.

Benachbarte Kugeln können an die freie Stelle geschoben werden, wodurch die freie Stelle „wandert“. Im Unterschied zum 15-Puzzle sind hier bei jedem Zug 5 Kugeln zur Auswahl. Dafür gibt es hier nur 11 Kugeln und keine Beschränkungen durch Parität.



Abb. 9: Rainbow Ball

3. Der Soma Würfel

Der Soma Würfel ist eine Erfindung des schwedischen Mathematikers und Dichters Piet Hein, der angibt, der Einfall sei ihm während eines Vortrags von Werner Heisenberg in Stockholm gekommen. Demnach müsste es 1932 gewesen sein, dem Jahr, in dem Werner Heisenberg den Nobelpreis bekommen hat und daher in Stockholm einen Vortrag gehalten hat. Der Begriff Soma stammt aus dem Roman *Schöne neue Welt* von Aldous Huxley, wo Soma eine Glücksdroge bezeichnet.

Der Soma Würfel ist ein dreidimensionales Puzzle, dessen Puzzlesteine die sieben nicht-konvexen, Körper sind, die sich aus höchstens vier Würfeln bilden lassen.

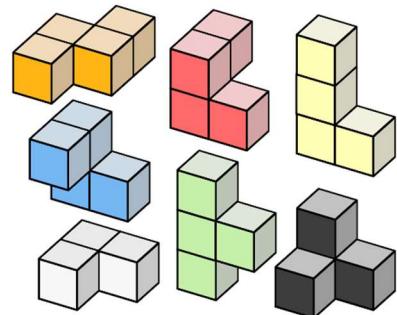


Abb. 10: die Bestandteile eines Soma Würfels

Man erkennt leicht, dass alle Teile zusammen aus 27 Würfeln bestehen, was genau passend für einen 3x3x3 Würfel ist.

Als erstes wollen wir uns ansehen, wie sich die acht Ecken des Würfels auf die sieben Puzzle-steine aufteilen lassen. Wir erkennen, dass vier der sieben Steine genau eine Ecke belegen können, während der grüne und der gelbe Stein auch über zwei Ecken gehen können, das macht in Summe neun mögliche Ecken. Einer der Steine belegt also eine Ecke weniger als möglich. Dies kann nicht der grüne Stein sein, denn der kann nur entweder zwei oder gar keine Ecke belegen. Daraus ergibt sich die folgende Regel: ***der Grüne Stein muss über zwei Ecken gehen!*** Wir nennen den Stein, der keine (oder im Fall des gelben nur eine) Ecke belegt ***unterzählig*** (engl. *deficient*).

Um weitere Erkenntnisse über den Zusammenbau de Würfels zu gewinnen, denken wir uns als nächstes den Würfel wie ein Schachbrettmuster eingefärbt. Er besteht nun aus acht dunklen Eckwürfeln, zwölf hellen Kantenwürfeln, sechs dunklen Flächenwürfeln und einem hellen Mittelwürfel, also insgesamt 13 helle und 14 dunkle Würfel. Es gibt 4 Steine, die, wenn man sie abwechselnd hell und dunkel färbt, jeweils aus zwei hellen und zwei dunklen Würfeln bestehen. Dazu kommt noch der grüne Stein, der – wie wir bereits wissen – aus drei dunklen und einem hellen Würfel bestehen muss. Bleiben noch der schwarze und der weiße Stein. Wie man sich leicht überlegt, kommt man nur dann auf 13 helle und 14 dunkle, wenn der schwarze Stein aus drei dunklen und einem hellen und der weiße Stein aus einem dunklen und zwei hellen Würfel besteht.

Damit ergeben sich die in Abb. 6 dargestellten möglichen Positionen:

- *Normal*: eine Ecke (bzw. im Fall des gelben Steins zwei Ecken), aber nicht den Würfel ganz in der Mitte
- *Zentral*: der Stein belegt eine (bzw. 2) Ecken plus den Würfel ganz in der Mitte



Abb. 12:
"Schachbrett"
Würfel

normal							
mittig (central)							
unterzählig (deficient)							
unterzählig & mittig							

Abb. 11: alle möglichen Positionen der Steine

- *Unterzählig*: der Stein belegt keine (bzw. nur 1) Ecke, aber nicht den Würfel ganz in der Mitte.
- *Unterzählig und zentral*: der Stein belegt keine (bzw. nur 1) Ecke plus den Würfel ganz in der Mitte.

Unter den 240 (bis auf Drehung und Spiegelung) möglichen Lösungen kommen auch alle diese Varianten vor.

Die Mathematiker John Conway und Richard Guy, haben alle diese 240 Lösungen katalogisiert und 1972 eine graphische Darstellung veröffentlicht, in der sie diese Lösungen zu einander in Beziehung setzen. Diese Darstellung haben sie SOMAP (Soma-Landkarte) genannt.

Um die einzelnen Lösungen voneinander unterscheiden zu können, geben Conway und Guy den einzelnen Steinen eine Bezeichnung, die sich aus den Farben der Steine ableitet, also z.B. O für Orange, R für Rot, Y für gelb (Yellow) usw. Bei dem Würfel, den Conway und Guy zur Verfügung hatten, gab es statt des weißen Steins einen braunen, der mit B bezeichnet wurde, der blaue Stein heißt dann U (in manchen Publikationen oft auch L) und der schwarze A (blAck).

Zur Benennung der Lösungen betrachten Conway und Guy, welcher Stein unterzählig ist, welcher Stein die Mitte des Würfels belegt und, ob bzw. mit welcher Orientierung der weiße, der gelbe und der orange Stein an der Oberfläche des Würfels in Erscheinung treten. Wenn sie wie ein „L“ oder ein „Z“ aussehen, dann wird jeweils 1 (für weiß), respektive 2 (für gelb) oder 4 (für orange) zu einer sogenannten *Ordnungszahl* (engl. *dexterity*) zusammengezählt. Schließlich wird fallweise noch ein (fortlaufender) Kleinbuchstabe angefügt, um immer noch gleiche Bezeichnungen endgültig zu unterscheiden.

So bezeichnet beispielsweise RU4b eine Lösung, bei der der rote Stein unterzählig, der blaue Stein mittig und der orange Stein wie in Z orientiert ist. Und es handelt sich um die zweite dieser Lösungen. Ebenso bezeichnet RU2e eine Lösung, bei der der rote Stein unterzählig, der blaue Stein mittig und der gelbe Stein wie ein L orientiert ist. Und Es handelt sich um die fünfte Lösung mit diesen Eigenschaften. Wenn sich zwei Lösungen in einander überführen lassen, indem man zwei Steine miteinander vertauscht, dann werden diese beiden Lösungen in der Soma Landkarte miteinander durch eine ausgezogene Linie miteinander verbunden und diese Linie mit den Buchstaben der zu vertauschenden Steine beschriftet. Wenn man drei Steine untereinander vertauschen muss, um von einer Lösung zur andern zu gelangen, dann verwenden Conway und Guy eine gestrichelte Linie.

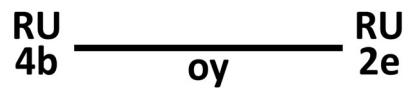


Abb. 13: Beispiel für eine Kante im Graphen der Soma-Landkarte

4. Türme von Hanoi

Die Türme von Hanoi sind ein Puzzle, das aus drei Stäben und einer bestimmten Anzahl von in der Mitte mit einem Loch versehenen Scheiben besteht.

Die Scheiben sollen von einem Stab auf einen anderen befördert werden, indem man immer nur eine Scheibe von einem Stab auf einen anderen versetzt, wobei niemals eine größere auf eine kleinere Scheibe zu liegen kommen darf.

Das Puzzle wurde 1883 von Édouard Lucas erfunden, einem französischen Mathematiker (1842 – 1891), den wir vom Lucas-Lehmer Test und von den Lucas-Folgen kennen. Lucas hat sich auch eine dazu passende Geschichte ausgedacht und mit dem Spiel verbreitet:

Mönche im großen Tempel von Benares sind dabei, einen Turm von 64 Scheiben zu versetzen. Aber noch bevor sie fertig sind, wird der Tempel zu Staub zerfallen und das Ende der Welt kommen

Wir werden noch sehen, wie realistisch diese Geschichte ist.

Im Zeitalter der Computer haben sich die Türme von Hanoi zu einem beliebten Programmierbeispiel für rekursive Prozeduren entwickelt. Wir wollen hier aber zwei iterative Algorithmen angeben, also Algorithmen, die ohne Rekursion auskommen.

Algorithmus 1 (Uhrzeiger-Methode):

Man denke sich die drei Stäbe im Uhrzeigersinn angeordnet, und führe dann folgende Schritte aus, bis das Ziel erreicht ist:

Schritt 1: man versetze die kleinste Scheibe
um einen Stab im Uhrzeigersinn

Schritt 2: man versetze noch eine zweite
Scheibe gemäß den Regeln des
Spiels

Algorithmus 2 (Paritätsmethode):

Man denke sich die Scheiben abwechselnd hell und dunkel eingefärbt.

Man versetze die Scheiben gemäß den Regeln des Spiels und achte zusätzlich darauf, dass man stets nur eine helle auf eine dunkle Scheibe legt oder umgekehrt.

Abschließend wollen wir uns noch mit der Frage beschäftigen, wie viele Züge nötig sind, um die Aufgabe zu bewältigen, n Scheiben von einem Stab auf einen anderen zu befördern.

Dazu überlegen wir uns, dass irgendwann im Zuge der Lösung die größte Scheibe versetzt werden muss. Zu diesem Zeitpunkt müssen zwei Bedingungen erfüllt sein: erstens darf auf der größten Scheibe keine weitere Scheibe liegen und zweitens darf auf dem Stab, auf den wir die größte Scheibe versetzen wollen, keine einzige andere Scheibe liegen. Mit anderen Worten: der Turm, der auf der größten Scheibe gelegen ist, muss komplett auf den dritten Stab versetzt werden, bevor wir die größte Scheibe versetzen können. Wir müssen daher, um das Problem zu lösen, erst einen Turm mit $n-1$ Scheiben versetzen, dann die größte Scheibe, und danach wieder den Turm mit $n-1$ Scheiben auf die größte Scheibe draufsetzen.

Wenn a_n die Anzahl der benötigten Züge für n Scheiben ist, ergibt sich somit die Rekursionsgleichung

$$a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1} = 2 * a_{n-1} + 1$$

Diese Gleichung lässt sich in eine geschlossene Formel umwandeln:

$$a_n = 2^n - 1$$

Damit ergeben sich für n Scheiben folgende Anzahl von Zügen:

Anzahl der Scheiben	Anzahl der Züge
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
8	255
16	65.535
64	18.446.744.073.709.551.615

Wenn die Mönche im Tempel von Benares also jede Sekunde eine Scheibe versetzen dann benötigen sie ca. 580 Milliarden Jahre bis sie fertig sind; das ist etwa 43-mal das bisherige Alter des Universums. Es ist also mit Bestimmtheit davon auszugehen, dass bis dahin der Tempel und die Welt, wie man sie sich zur Zeit der Edouard Lucas vorstellte nicht mehr existieren werden.