① La $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ være gitt av
$f(x) := x^4 - x^3 + 4x^2 - x - 7$

a) Skjæringssetningen sier at dersom vi har en funksjon $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ $g\in C[a,b]$, og $g(a)\cdot g(b)<0$, så finnes en $c\in(a,b)$ s.a $g(c)=0$. Mer generelt, det eksisterer en $c \in [a,b]$ s.a $g(c)=d$, der $d$ ligger mellom $g(a)$ og $g(b)$.

Vi skal vise at det finnes en $c$ s.a $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, dvs stigningstallet til linjen som går gjennom $f(a)$ og $f(b)$.
$f$ er et polynom av grad 4. Da er $f$ og $\frac{df}{dx}$ kontinuerlig på hele vårt intervall.
Ser vi på ligningen, kan vi se at vi prøver å løse
$$f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0.$$

La nå $g(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Vi vil da løse $g(x) = 0$. Siden $f'(x)$ er et polynom og $f' \in C^4$ og $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ er et tall, er også $g \in C^4(a,b)$. Så evaluerer vi $g$ i $a = 0$ og $b = 2$

$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 8x - 1$

$$g(0) = f'(0) - \overbrace{\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0}}^{11} = f'(0) - 11$$

$$\underline{= -12}$$

$$g(2) = f'(2) - 11 = 4 \cdot 8 - 3 \cdot 4 + 16 - 1 - 11$$
$$= 32 - 12 + 16 - 12$$
$$\underline{= 24}$$

$g(0) \cdot g(2) < 0$, da finnes det minst én $c$ slik at $g(c) = 0$. For å vise at denne er unik, skal vi se at $g(x)$ er monoton. Se på $g'(x)$:

$g'(x) = 12x^2 - 6x + 8$. For $x \in [0,1)$, så vil $-6x + 8 > 0$. For $x \in [1,2]$ er $g'(x) > 0$ siden $x^2 > x$ for $x > 1$.

Da må $g(x) > 0$ for alle $x \in [0,2]$.
g er da monoton, og vokser bare i intervallet. Siden g er monoton på $[0,2]$, og $g(0) \cdot g(2) < 0$, så finnes det nøyaktig én løsning på $g(x) = 0$.
Det betyr at det finnes en c slik at $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ w IVT, som skulle vises ■

b) Skal bruke halveringsmetoden, da er $a_1 = 0$, $b_1 = 2$ og $m_i = \frac{a_i + b_i}{2}$
Vi gjetter da først med $m_1 = 1$
Siden vi ønsker nøyaktighet på $\frac{1}{32}$, må vi gjøre 6 iterasjoner ($m_1 = 1$ telles som én)
Vi ønsker altså å løse $g(x) = 0$,
$g(x) = 4x^3 - 3x^2 + 8x - 12$. $= f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$i = 1$: $g(m_1) = 4 - 3 + 8 - 12 = -3 < 0$

Setter $a_2 = m_1 = 1$, $b_2 = b_1$

nøyaktighet $= 1$

$i=2$: $m_2 = \frac{a_2+b_2}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$

$g(m_2) = \frac{27}{4} > 0$ nøyaktighet $= \frac{1}{2}$

$a_3 = a_2 = 1$ $b_3 = m_2 = 1,5$

$i=3$: $m_3 = \frac{1+1,5}{2} = 1,25$

$g(1,25) = \frac{9}{8} > 0$

$a_4 = a_3 = 1$ $b_4 = m_3 = 1,25$ nøyaktighet $= \frac{1}{4}$

$i=4$: $m_4 = \frac{1+1,25}{2} = 1,125$

$g(1,125) = -\frac{141}{128} < 0$ nøyaktighet $= \frac{1}{8}$

$a_5 = m_4 = 1,125$ $b_5 = b_4 = 1,25$

$i=5$: $m_5 = \frac{1,125+1,25}{2} = \frac{19}{16}$

$g(19/16) = -\frac{33}{1024} < 0$

$a_6 = m_5 = \frac{19}{16}$ $b_6 = b_5 = \frac{5}{4}$

La nå $s = a_6 = \frac{19}{16}$ og $t = b_6 = \frac{5}{4}$

Da vil $c \in [s,t]$, og $|t-s| = |\frac{5}{4} - \frac{19}{16}| \leq \frac{1}{16}$

Vi har da bestemt intervallet

$[s,t] = [\frac{19}{16}, \frac{5}{4}] \subseteq [0,2]$ $\blacksquare$

② La $f(x) = 1 - \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$ være gitt

a) La $g(x) = x - \sin(x) + 1$, anta $r$ en rot for $f$, dvs at $f(r) = 0$. Da vil $g(r) = r$.

De fikserte punktene er når $g(x)$ skjærer linjen $h(x) = x$.

Vi må da løse $g(x) = x - \sin(x) + 1 = x$

Vi vet at $\sin(x)$ osillerer mellom $-1$ og $1$. Vi ønsker da at $\sin(x) = 1$. Da kansellerer $(+1)$ i likningen med $-\sin(x)$, og vi står igjen med $x$, som er det vi ønsker. Vi vet at $\sin(x)$ er lik $1$ når $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Det betyr at

$x - \sin(x) + 1 = x$, $x \in \mathbb{R}$ har uendelig mange løsninger. De kommer med et mellomrom på $2\pi$. Da har $f$ uendelig mange fikspunkt.

b) Vi ønsker at

$|g'(x)| \leq L < 1$ for en konstant $L$.

Da får vi

$|1 - \cos(x)| \leq L < 1$

$\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, så da er $g'(\frac{\pi}{2}) = 1$

$\cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$, så da er også $g'(-\frac{\pi}{2}) = 1$

I $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ er $0 < \cos(x) < 1$, dermed blir også $g'(x) < 1$. Det største intervallet er derfor $2\pi \cdot k \cdot [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Intervallet har bredde $2\pi$.

c) $x_0 = \frac{\pi}{4}$ $\qquad x_k = g(x_{k-1})$

$$x_1 = g(x_0) = \frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4} + 1$$
$$= 1{,}0783$$

$$x_2 = g(x_1) = x_1 - \sin x_1 + 1$$
$$= 1{,}1971$$

$$x_3 = g(x_2) = x_2 - \sin x_2 + 1$$
$$= 1{,}2661$$

$$x_4 = g(x_3) = x_3 - \sin x_3 + 1$$
$$= 1{,}3122$$

$$x_5 = g(x_4) = x_4 - \sin x_4 + 1$$
$$\underline{= 1{,}3454}$$

Feilen er da på

$$\frac{\pi}{2} - 1{,}3454 \; \underline{= 0{,}2254}$$

③ Vi vet at å løse $\ln x = 1$ er det samme som å spørre: hvilket tall er det som er $e^1$? Svaret er trivielt, nemlig $e$. Vi må dermed vise at $2 < e < 3$. Fra definisjonen av $e$ vet vi at

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots$$

Samtidig er $1 + 1 = 2 < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2 + \sum_{n=2}^{\infty}$

Vi vet at $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$, samt er

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} > \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Dermed får vi

$$2 < 2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} = e < 2 + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 3.$$

Løsningen på $\ln x = 1$ må derfor ligge i intervallet $(2, 3)$.

b) $x_0 = 3$

Newtons metode er definert til å være:

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$$

Å løse $\ln x = 1 \iff \ln x - 1 = 0$

La $f(x) := \ln x - 1$. Da er $f'(x) = \frac{1}{x}$. Vi har at $x_0 = 3$

$i=1$: $f(x_0) = f(3) = \ln 3 - 1$

$f'(3) = \frac{1}{3}$

$$x_1 = 3 - \frac{\ln 3 - 1}{\frac{1}{3}} = 2,7042$$

$i=2$: $f(x_1) = f(2,7042) = -0,005208$

$f'(x_1) = f'(2,7042) = 0,3698$

$$x_2 = 2,7042 - \frac{-0,005208}{0,3698} = \underline{\underline{2,7182}}$$

```python
import math as ma

def newton(f, df, x0, tol, max_iter):
    count = 0
    x = x0
    while (abs(f(x)) > tol and count < max_iter):
        fx = f(x)
        x = x - fx/df(x)
        print(f"i = {count}, x = {x}, f(x) = {f(x)}")
        count += 1
    return x



def f(x):
    return x+ma.sin(x)-1

def dx(x):
    return 1+ma.cos(x)

print(newton(f,dx,ma.pi/4,10*-9, 5))
```

```python
import math as ma

def newton(f, df, x0, tol, max_iter, force=False):
    count = 0
    x = x0
    while (count < max_iter):
        fx = f(x)
        x = x - fx/df(x)
        print(f"i = {count}, x = {x}, f(x) = {f(x)}")
        count += 1
    return x


def f(x):
    return x+ma.sin(x)-1

def df(x):
    return 1+ma.cos(x)

newton(f, df, ma.pi/4, 10**-9, 5)
```

```
erlendps@pizza ~/Documents/NTNU/sem3/matte4d/oving3 [main *]
± % python newton.py
i = 0, x = 0.4968954463959532, f(x) = -0.026405823139119322
i = 1, x = 0.5109480729902784, f(x) = -4.74741528418976e-05
i = 2, x = 0.5109734293046051, f(x) = -1.5720313939482367e-10
i = 3, x = 0.510973429388569, f(x) = -1.1102230246251565e-16
i = 4, x = 0.5109734293885692, f(x) = 0.0
```