Utvidet algoritme

↑

Euklids algoritme $\xrightarrow{\text{Brukes for å finne}}$ Største felles divisor — Minste felles multiplum

$\frac{A}{B} \rightarrow \frac{a \cdot \cancel{c}}{b \cdot \cancel{c}}$

Redusert brøk

$a \cdot b = \gcd(a,b) \cdot \operatorname{lcm}(a,b)$

$\boxed{\gcd = 1}$

↓

a og b har ingen felles faktorer

↓

De er relativt primske

↓

Diofantisk ligning har alltid en løsning

$\boxed{\gcd \neq 1}$

↓

a og b har felles faktorer

↓

Brøk kan forkortes

↓

Diofantisk ligning har løsning hvis $\gcd(a,b) \mid c$

Definisjoner

1 Delbarhet

Disse setningene er ekvivalente

- a er delelig på b
- $\frac{a}{b}$ er lik et heltall
- $a = q \cdot b$
- $b \mid a$

Merk: a ikke delelig på b sier $b \nmid a$

Merk: Delelighet er transitiv

2 Største felles divisor

Største tall som er delelig med både a og b

Merk: Vi bruker notasjonen $\gcd(a,b)$

3 Relativt primske tall

a og b har ingen felles faktorer

Formel: To tall er relativt primske dersom

$$\gcd(a,b) = 1.$$

Vi skriver $a \perp b$

Merk: a og b er relativt primske dersom det finnes en x og y slik at $ax + by = 1$. Ingen felles faktorer

4 Diofantiske ligninger

En ligning på formen $a \cdot x + b \cdot y = c$

5 Minste felles multiplum

Det minste tallet som er en multippel av både a og b

Eks: $\operatorname{lcm}(6,8) = 24$ fordi $6 \cdot 4 = 24$ og $8 \cdot 3 = 24$

Oppskrifter

1 Euklids algoritme

Hvis $a > b$: $\gcd(a,b) = \gcd(b, a \bmod b)$

$a = b \cdot c + d$

$b = d \cdot e + f$

$d = f \cdot g + h$

Eks: $\gcd(321, 78)$

$321 = 78 \cdot (4) + 9$ — 78 > 9 så den blir til høyre

$78 = 9 \cdot (8) + 6$ — Utrykker 78 som en faktor × 9

$9 = 6 \cdot 1 + 3$

$6 = 3 \cdot 2 + 0$

Merk: Siste remainder som ikke er 0 er svaret

2 Har en diofantisk ligning en løsning

Hvis vi har $ax + by = c$ har denne en løsning dersom $\gcd(a,b)$ deler c

Formel: $ax + by = c$ er løsbar dersom $\gcd(a, b) \mid c$

3 Finne løsning diofantisk – Euklids utvidete algoritme

- Start med euklids algoritme nest siste linje
- Skriv ut resten ved å bruke linjen over
- Gjør for alle linjene oppover

Eks: Finn x og y slik at $321x + 78y = 9$

Vi vet at $\gcd(321, 78) = 3$, så vi har en løsning da $\gcd(a,b) \mid c$

Skriver opp hele prosessen: $3 \mid 9$

$\gcd(321, 78)$

1 $321 = 78 \cdot (4) + 9$

2 $78 = 9 \cdot (8) + 6$

3 $9 = 6 \cdot 1 + 3$

4 $6 = 3 \cdot 2 + 0$

Jobber meg oppover fra linje 3

$3 = 9 - 6 \cdot 1$

$3 = 9 - 1 \cdot [78 - 9 \cdot 8]$ 6 fra linje 2.

$3 = 9 - 78 + 9 \cdot 8 = -78 + 9 \cdot 9$

$3 = -78 + 9 \cdot [321 - 78 \cdot 4]$ 9 fra linje 1

$3 = -78 + 9 \cdot 321 - 36 \cdot 78$

$3 = -37 \cdot 78 + 9 \cdot 321$

$-37 \cdot 78 + 9 \cdot 321 = 3$

Ganger begge sider med 3

$-111 \cdot 78 + 27 \cdot 321 = 9$

$x = -111$ og $y = 27$

4 Finne $\text{lcm}(a,b)$, $\gcd(a,b)$

For $a, b > 0$ har vi at $a \cdot b = \gcd(a,b) \cdot \text{lcm}(a,b)$

Viktige detaljer

1 Dersom $\gcd(a,b) = 1$ vil ligningen $ax + by = c$ alltid ha en løsning

Oppskrift: Vi finner x og y slik at $ax + by = 1$

så ganger vi begge sider med c