#H24/DiskMat

Binær relasjon

Fra A til B

En delmengde av $A \times B$

På mengden C

En delmengde av $C \times C$

Spesielle relasjoner

Ingen

Den tomme relasjonen

$\{1,2,3\} = \emptyset$

Midterste

Identitetsrelasjonen

$\{1,2,3\} = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$

Alle

Den universelle relasjonen

$\{1,2,3\} = \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$

Alle mulige kombinasjoner

Elementer → Delmengde → Mengde $\xrightarrow{\text{Relasjon mellom 2 mengder}}$ Relasjoner

Delmengde → Potensmengde (Alle delmengder av en mengde)

Relasjoner → Funksjoner

Egenskaper for relasjoner

Anti symmetri

Ingen symmetriske relasjoner

Refleksivitet

Relaterer alt til seg selv

Transitiv

Alt du kan gjøre i 2 steg må du også kunne gjøre i 1 steg

Symmetri

Hvis det er pil en vei -> pil tilbake

Anti symmetri, Refleksivitet, Transitiv → **Partiell ordning**

Refleksiv, transitiv og antisymmetrisk

Refleksivitet, Transitiv, Symmetri → **Ekvivalens**

Refleksiv, transitiv og symmetrisk

Partiell ordning → **Total ordning**

Kan legges på en linje etter hverandre

Andre — **Irrefleksiv**

Ingen elementer har en løkke til seg selv

Definisjoner

1 Relasjoner

En relasjon fra $A \to B$ er en delmengde av $A \times B$

En relasjon på M er en delmengde av $M \times M$

2 Invers for relasjoner

Den inverse for en relasjon R fra $A \to B$ er de eksakt samme relasjonene bare fra $B \to A$

Merk: Hvordan: Snu om på alle tuplene

$R = \{ \langle a_1, b_1 \rangle, \langle a_2, b_2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle c, d \rangle \}$

$R^{-1} = \{ \langle b_1, a_1 \rangle, \langle b_2, a_2 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle d, c \rangle \}$

Oppskrifter

1 Er relasjonen refleksiv

- $\langle a,a \rangle \in R$ for alle $a \in A$
- Se om alle elementene inneholder relasjoner til seg selv

Eksempel:

La S være $\{1,2,3\}$. Er disse relasjonene refleksive

$\{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle\}$: ikke en refleksiv relasjon ✗

$\{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$: en refleksiv relasjon ✓

2 Er relasjonen symmetrisk

- Dersom $\langle a,b \rangle$ er med må $\langle b,a \rangle$ være med

Eksempel:

La S være $\{a,b,c\}$

- $\{\langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle\}$ ✓
- $\{\langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle, \langle c,d\rangle\}$ ✗

3 Er relasjonen transitiv

- Dersom $\langle a,b \rangle$ og $\langle b,c \rangle \in R$ må $\langle a,c \rangle \in R$
- Dersom man komme seg fra a til b på 2 steg -> kan man gå fra a -> b på 1 steg

Eksempel

La $S = \{1,2,3\}$

- $\{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 1,3\rangle\}$ ✓
- $\{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle\}$ ✗

Merk: $\{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle\}$ er ikke transitiv

Den mangler $\langle 1,1\rangle$ og $\langle 2,2\rangle$. Vi kan gå fra $1 \to 1$ på 2 steg og da må vi også kunne gå fra $1 \to 1$ på ett steg. Samme med $\langle 2,2\rangle$

4 Er relasjonen antisymmetrisk

- Har ikke en symetrisk relasjon mellom ulike elementer
- Dersom $\langle a,b \rangle \in R$ og $\langle b,a \rangle \in R$ så må $a = b$

Eks: La $S = \{1,2,3\}$

- $\{\langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle\}$ ✓
- $\{\langle 1,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle\}$ ✗

5 Er relasjonen irrefleksiv

- $\langle a,a \rangle \notin R$ for alle $a \in A$
- Ingen elementer har en relasjon til seg selv

6 Ekvivalensrelasjon

Refleksiv, transitiv, symmetrisk

7 Partiell ordning

Refleksiv, transitiv, anti-symmetrisk

8 Er relasjonen en total ordning

- Må først være en partiell ordning
- For alle $a,b \in S$ må a og b ha en relasjon til hverandre

Eks: La $S = \{1,2,3\}$

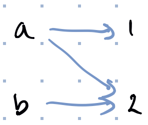
- $\{\langle 1,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 1,3 \rangle\}$ ✓ siden 1og2, 1og3, 2og3 har relasjoner
- $\{\langle 1,2 \rangle \langle 1,3 \rangle\}$ ✗ siden 2og3 ikke har en relasjon

- Mindre enn eller lik relaterer alle elementer til hverandre fordi $a \leq b$ eller $b \leq a$ ✓
- Delmengde relasjonen er ikke en total ordning fordi det er ikke slik at $a \subseteq b$ eller $b \subseteq a$ ✗

Viktige detaljer

1 En binær relasjon fra $\{a,b\}$ til $\{1,2\}$ kan utrykkes på flere måter

1. $\{\langle a,1\rangle, \langle a,2\rangle, \langle b,2\rangle\}$

2. 

3.

	1	2
a	1	1
b	0	1

2 Identitetsrelasjonen må være på en mengde

3 Er delmengderelasjonen transitiv: Ja

Dersom $A \subseteq B$ og $B \subseteq C$ må også $A \subseteq C$

4 For at en relasjon skal være refleksiv må alle elementene i mengden ha en refleksiv relasjon.

Eks: Mengden $S = \{1,2,3\}$ har relasjonen $\{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$. Denne er ikke refleksiv da $\langle 3,3\rangle$ ikke er med