Relasjoner → Funksjon

Fyller 2 krav

Funksjon

Egenskaper

2 piler kan ikke treffe samme

Injektiv

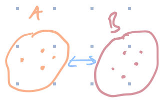
Alle punkter må treffes

Surjektiv

Både injektiv og surjektiv

Bijektive

Kardinalitet → **Tellbarhet**



Bijektiv funksjon mellom A og B

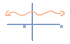
⇒ $|A| = |B|$

A og B har samme kardinalitet

$|A| = |\mathbb{N}|$

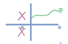
Samme kardinalitet som naturlige tallene

Definisjonsmengde



På hele tallinjen

Totale



Kun på et bestemt område

Partielle

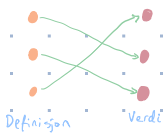
Definisjoner og regler

1 Funksjoner

En funksjon f er en relasjon fra $A \to B$ som fyller 2 krav:

1. Alle elementer i A har en relasjon
2. Elementene fra A relaterer seg til kun en verdi fra B ($\langle 2,a\rangle$ og $\langle 2,b\rangle$) er ikke lov

- Definisjonsområdet : Verdier som kan settes inn i en funksjon
- Verdiområdet : Verdier som kan hentes ut av funksjonen

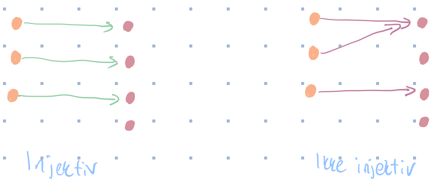


2 Injektivitet

Dersom $f(a) = f(b)$ så må $a = b$

Verdiene kan bare treffes av en pil $\to$ 2 forskjellige argumenter gir 2 ulike verdier

Forskjellig input $\to$ Forskjellig output

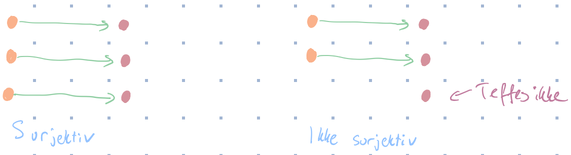


3 Surjektivitet

For alle $y \in B$ må være en $x \in A$

slik at $f(x) = y$

Alle potensielle verdier må treffes



4 Bijektivitet

Både injektiv og surjektiv

5 Sammensetning av funksjoner

Dersom $f: A \to B$ og $g: B \to C$ er funksjonen $f \circ g : A \to C$

Merk: $f \circ g = f(g(x))$

6 Venstre vs høyre inves

Venstre inves:

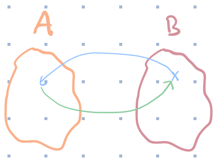
f er injektiv $\to$ f har en venstre invers g

$g(f(x)) = x$, for alle $x \in D_f$

Høyre invers:

f er surjektiv $\to$ f har en høyre invers g

$f(g(y)) = y$, for alle y i V_f



Starter med et element i B

g sender den $B \to A$

f sender den tilbake

Oppskrifter

1 Hvor mange funksjoner?

- Må huske på at en funksjon er bare en relasjon fra $A \to B$ som fyller 2 krav
- Antall elementer i definisjonsområdet er antall valg vi kan gjøre
- Antall elementer i verdiområdet er antall muligheter hvert ele $\in A$ har

$\to$ v^d, v er elementer i verdi og d er elementer i definisjon

Eks: Hvor mange funksjoner $f: \{1,2,3\} \to \{1,2\}$

$f(1) = 2$ valg, $f(2) = 2$ valg $f(3) = 2$ valg

3 elementer som hvert har 2 valg $\to$ $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$

2 Sammensetning av funksjoner

- $g \circ f(a) = g(f(a))$

Eks: - $f(x) = 2x$, $g(x) = x+3$ hva blir $(g \circ f)(x)$?

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x) = 2x+3$

- Motsatt $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+3) = 2x+6$

Eks:

Vi bruker sammensetningsfunksjonen til å lage sammensetningen av funksjonene

$$f: \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3\} \text{ og } g: \{1,2,3\} \to \{1,2,3,4,5\}$$

der

$$f = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 4,2\rangle\}$$

og

$$g = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,5\rangle\}.$$

Hvilken av disse funksjonene er lik $(g \circ f)$?

Merk: $g \circ f = g(f(x)) \to f$ er den innerste så starter med den

Ser først på f og så g

$\langle 1,2\rangle \to \langle 2,3\rangle = \langle 1,3\rangle$ $\quad$ $\langle 3,1\rangle \to \langle 1,1\rangle = \langle 3,1\rangle$

$\langle 2,3\rangle \to \langle 3,5\rangle = \langle 2,5\rangle$ $\quad$ $\langle 4,2\rangle \to \langle 2,3\rangle = \langle 4,3\rangle$

$(g \circ f) = \{\langle 1,3\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 4,3\rangle\}$

3 Finne venstre / høyre invers

1. Finne invers ved å bytte x og y og løse for y

2. Se om $g(f(x)) = x$ eller $f(g(x)) = x$

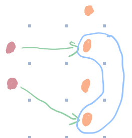
3. Se om det er en veldefinert funksjon fra verdimengde → definisjonsmengde for f.

Eks: $f: D_f \to V_f$ må vi finne

$g: V_f \to D_f$

Viktige detaljer

1 Bildemengden til en verdi



→ Mengden av de verdiene som blir truffet

2 Injektivitet og surjektiv gjelder bare for funksjoner

Må derfor oppfylle kravene for funksjon før man tester for inj/sur

3 Hvis argumentet til en funksjon er en tuppel skriver vi ikke < >

Eks: $f(\langle 1,2 \rangle)$ blir til $f(1,2)$

4 Forskjellen på funksjon og relasjon?

Funksjoner er relasjoner som oppfyller 2 krav:
- Alle elementer i A har en relasjon
- Elementer kan kun ha 1 relasjon

5 Operasjoner på en mengde A er en funksjon fra $A \to A$. Vi må derfor få ut noe fra den mengden vi setter inn.

Eks: Minus funksjonen på mengden positive tall er ikke en operasjon da vi kan få ut negative tall som ikke er en del av den opprinnelige mengden

6 Injektiv kalles også en-til-en

Surjektiv kalles også på

Bijeksjon kalles også en-til-en korrespondanse