Prinsipper for hvordan man teller

Inklusjon -og eksklusjonsprinsippet

Multiplikasjonsprinsippet

Regne ut oppgaver

Rekkefølge er viktig

Rekkefølge ikke viktig

Alle elementer

Permutasjoner

Ordnet utvalg

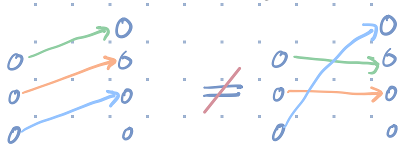
k elementer

Kombinasjoner

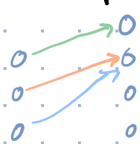
Regne ut $\binom{n}{k}$

Binomialkoeffesientene

Ordnet



m/repitisjon



Definisjoner

1 Inklusjon -og eksklusjonsprinsippet

A og B er endelige mengder

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Merk: $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

2 Multiplikasjonsprinsippet

Sjansen for A så B = $A \cdot B$

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

3 Permutasjon

Hvis vi ikke har en ordning → Lage en ordning

Hvis vi har en ordning → lage en ny ordning

Eks:

To måter å ordne $\{1,2\}$ på:

12 og 21

Seks måter å ordne $\{1,2,3\}$ på:

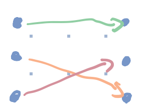
123, 132, 213, 231, 312, 321

Merk:

En permutasjon er det samme som en bijektiv funksjon

Vi ordner mengden $\{1,2,3\}$ som f.eks 132.

Dette blir som funksjonen



4 Ordnet utvalg

Mengde med n elementer, men vi vil bare ha k av de

Notasjon: $_nP_k = \frac{n!}{(n-k)!}$

5 Kombinasjoner

Utvalg der rekkefølge ikke er viktig

Merk: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$\binom{10}{7} = \binom{10}{3}$ fordi $\binom{10}{7} = \frac{10!}{3! \cdot 7!}$ og $\binom{10}{3} = \frac{10!}{7! \cdot 3!}$

Oppskrifter

1 Uavhengige valg

- Like valg
  - a^b, der a er muligheter hver gang
    b er antall valg
- Ulike valg
  - Gange sammen ved hvert valg med hvor mange muligheter

Eks: Hvor mange bitstrenger av lengde 5 ?

Vi tar 5 uavhengige valg med 2 muligheter hver gang

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$

Eks: Hvor mange relasjoner på $\{1, 2\}$?

Vi har 4 muligheter som kan være med $\{\langle 1,1\rangle \langle 1,2\rangle \langle 2,1\rangle \langle 2,2\rangle\}$

Alle kan være med eller ikke $2^4 = 16$ muligheter

Eks: Hvor mange relasjoner på $\{1, 2, 3\}$?

Vi har $3 \cdot 3 = 9$ muligheter $2^9 = 512$

2 Hvor mange permutasjoner

På hvor mange måter kan vi ordne n elementer : $n!$ = $n!$ permutasjoner

Eks: Hvor mange permutasjoner av $\{1, 2, 3, 4\}$

$n! = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Merk: Det er da 24 bijektive funksjoner på $\{1, 2, 3, 4\}$

3 Hvor mange i ordnet utvalg

n elementer totalt

Velger k av de

$$\underbrace{(n) \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots (n-(k-1))}_{k \text{ ganger}}$$

Eks: ${}^{20}P_3$ → vi har 20 elementer og velger 3 av de

$$= \frac{20!}{(20-3)!} = 6840$$

4 Hvor mange kombinasjoner

$\binom{n}{k}$ - Hvor mange forskjellige delmengder med k elementer er det av en mengde med n elementer

$${}^nP_k = \binom{n}{k} \cdot k! \Rightarrow \binom{n}{k} = \frac{{}^nP_k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Eks: $\binom{9}{2} = \frac{9!}{(9-2)!\,2!} = \frac{9!}{7! \cdot 2!} = \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} = 36$

5 Overtelling

Vi teller bevisst for mange og så minus/dele bort etterpå

Eks: Hvor mange ulike strenger kan vi få ved å stokke om "pappa"?

Vi får totalt $5! = 120$ strenger. Fjerner de som er like

Hver streng kan skrives på 12 ulike måter. Dette fordi:

Vi kan skrive p-ene som 123, 132, 213, 231, 312, 321 = 6 måter.

a-ene kan skrives som 12 eller 21 = 2 måter.

Ettersom at hver streng kan skrives på 12 måter og vi har 120 strenger får vi $\frac{120}{12} = 10$ unike strenger

Formel: $$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots n_r!}$$

6 Utregning med binomial koeffesienter

Formler:

- $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Eks: Hva er $\binom{16}{8}$ hvis $\binom{15}{7} = 6435$?

$$\binom{16}{8} = \binom{15}{7} + \binom{15}{8}$$

Vet at $\binom{15}{7} = \binom{15}{8}$ siden $7+8 = 15$

Vi får $\binom{15}{7} + \binom{15}{7} = 2 \cdot 6435 = 12870$

7 Opptellingsproblemer

	ordnet / ikke identiske	Uordnet / er identiske
m/repitisjon alle funksjoner	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
u/repitisjon kun injektiv	${}^{n}P_k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$

$10+3-1$

Merk:
- Ordnet / Uordnet utvalg er det samme som identiske k.
- u/repitisjon er det samme som at funksjonen $k \to n$ er injektiv

Eks: Tre premier skal fordeles på ti personer, og den samme personen kan få flere premier. På hvor mange måter kan premiene fordeles?

Uordnet: 3 premier som er identiske. Har ingenting å si hvem som får hvilken pris

m/repitisjon: Samme person kan få flere priser

Svar: $n = 10$ $k = 3$ $\binom{n+k-1}{k} = \binom{12}{3} = \frac{12!}{(12-3)! \cdot 3!} = 220$

Viktige detaljer

1 Størrelsen for et kartesisk produkt med n mengder

$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|$

2 Forskjell og likhet på ordnet utvalg og kombinasjon

Likhet: Vi velger k av n elementer

Forskjell: Ordnet utvalg er rekkefølge viktig. Kombinasjon er bare velg 2 av 5 f.eks