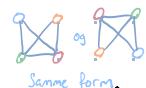




Grafer



Egenskap  
Samme form  
Isomorfi

Form

Kanter

Antall

Urettet

Rettet

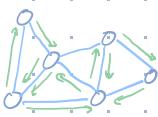
Ingen kanter

Tom



Alle mulige kanter  
komplett

Komplimentet



Vandring

Inneholder alle kanter  
Eulervei

Ingen bant repeteres  
Vei

Ingen node repeteres  
Sti

Inneholder alle noder  
Hamiltonsti

Lukket vandring

Lukket +  
Ingen bant repeteres  
krets

Lukket +  
Ingen node repeteres  
sykel

Inneholder alle kanter  
Eulerkrets

Inneholder alle noder  
Hamiltonsykel

# Definisjoner

1

## Graf

En graf består av en ikke-tom mengde av noder  $V$  og en mengde med kanter  $E$ .

Merk:

Struktur er ikke viktig:  og  er samme graf

Merk:

En graf må ha minst én node, men kan ha ingen kanter

Notasjon:

- Vi skriver  $V(G)$  for noderne i grafen  $G$

- Vi skriver  $ab$  for kanten som ligger mellom  $a$  og  $b$

2

## Enkel graf

Enkel graf kan ikke ha  eller 

parallelle kanter

løkler

3

## Rettet graf

Kantene er orienterte par.

Eks:

Vi får  $\langle u, v \rangle$  istedenfor  $\{u, v\}$

4

## Komplett graf

Har alle mulige kanter

5

## Graden til en node

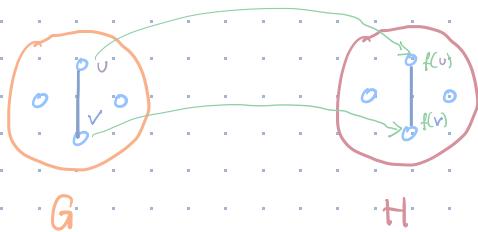
Graden til en node  $v$  er antall kanter som ligger inn til  $v$ .

Notasjon: Vi skriver  $deg(v)$  for graden til  $v$

6

## Isomorfi

La  $G$  og  $H$  være grafene. En **isomorfi** fra  $G$  til  $H$  er en **bijektiv** funksjon  $f$  fra noderne i  $G$  til  $H$  som er slik at noderne  $u$  og  $v$  er nabover i  $G$  hvis og bare hvis  $f(u)$  og  $f(v)$  er nabover i  $H$ .



**Merk:** Vi kan komme oss fra den ene grafen til den andre ved å **flytte** på noder og gi de nye navn

7

## Vandring

En vandring av lengde  $n$  er en sekvens av kanter og noder på formen  $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n$

**Merk:** Kan gå over en node flere ganger

**Formel:** Lengden av en vandring er antall kanter

**Merk:** En vandring hvor den første og siste noden sammenfaller kalles en **lukket vandring**

8

## Sti

En vandring hvor vi **ikke** gjentar noen noder

9

## Krets

En lukket vandring (størter og avslutter på samme node) der ingen kant repeteres.

10

## Sykel

Lukket vandring som ikke gjenter noder (bortsett fra start/slutt)

**Merk:** En graf uten sykler kalles **asyklistisk**

11

## Sammenhengende

Finner en sti mellom alle noder

12

## Tre

Ett tre er en sammenhengende, asyklistisk graf.

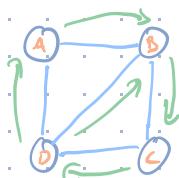
- Merk:
- En node med grad 1 kalles en **livsnøde**
  - Et tre med  $n$  noder har  $(n-1)$  kanter
  - En graf med flere trær kalles en skog

13

## Eulervei

En vandring som inneholder hver kant nødvendig én gang

Eks:

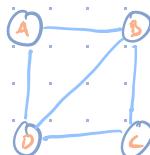


14

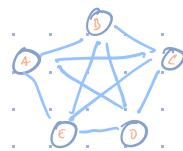
## Eulerkrets

En eulervei der start/slutt er samme node

Eks:



inneholder en eulervei, men  
ingen eulerkrets.



inneholder en eulerkrets

15

## Hamiltonsti

En sti som inneholder alle noder uten å gjenta noen noder

16

## Hamiltonsykkel

En hamiltonsti som starter og slutter på samme node

# Oppskrift

1

## Graden til en node

Tegn en sirkel rundt og tell piler

Eks:



- grad 1



- grad 3



- grad 2

Merk: En løkke telles som 2 grader i multigrafer

Parallelle kanter telles også som 2 i multigrafer

2

## Finne summen av gradene i en graf

Formel:  $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$

Summen av grader i en graf er litt det dobbelte av antall noder

Eks:

Anta at en graf har 8 noder og at hver node har grad 5. Hvor mange kanter har grafen?

8 noder med hver 5 grader gir  $8 \cdot 5 = 40$  grader totalt

Det er derfor  $40/2 = 20$  kanter i grafen

3

Vise om to grafene er isomorfe

**Ikke isomorfe:**

Finn en grafteoretisk egenskap som kun den ene grafen har

- Antall noder
- Antall kanter
- Hvor mange noder av en bestemt grad en graf har
- En graf har en trekant og ikke den andre
- Hvor mange sirkler av en viss størrelse en graf har

**Er isomorfe:**

Vise at det finnes en bijektiv funksjon fra  $G$  til  $H$  som er slik at hvis og bare hvis  $x$  og  $y$  er nabøer i  $G$  er  $f(x)$  og  $f(y)$  nabøer i  $H$ .

Vise at funksjonen sender til noe som har samme nabøer som i den originale grafen

4

Finner det en euler-vei / krets i en graf

Antall noder med odde grad:

- 0  $\rightarrow$  eulerkrets og vei
- 2  $\rightarrow$  kun eulervei
- Ellers  $\rightarrow$  Nei

5

Finner det hamiltonsti / sykkel

Ingen total løsning - må se an hvort til felle.

**Regel:** Dersom alle noder har  $> \frac{n}{2}$  kanter har vi en hamiltonsykkel

## Viktige detaljer

1

Håndhilkelemmaet:

Det er alltid et partall antall noder som har odder grad  
i en graf

2

At vi vet noe om graderen til noderne i en graf gir ikke at vi vet om den har en hamiltonsykkel / sti