Analisis Komparatif Metode *Metaheuristics* dalam Optimisasi Portofolio Saham LQ45 Berdasarkan Klasterisasi dengan *Gaussian Mixture Model* (GMM)

Erlin Shofiana¹, Annisa Sekartierra Mulyanto², Cintya Kusumawardhani³

¹²³ Program Studi Statistika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Gadjah Mada, Sekip Utara No. 21, Bulaksumur, Yogyakarta, 55281, Indonesia

¹annisasekartierramulyanto@mail.ugm.ac.id ²erlinshofiana0804@mail.ugm.ac.id ³cintyakusumawardhani@mail.ugm.ac.id

Abstrak

Optimisasi portofolio merupakan aspek krusial dalam investasi keuangan. Penelitian ini menganalisis tiga metode metaheuristik—*Genetic Algorithm* (GA), *Particle Swarm Optimization* (PSO), dan *Simulated Annealing* (SA)—untuk optimisasi portofolio saham. Data yang digunakan adalah harga saham LQ45 dari 6 Desember 2023 hingga 6 Desember 2024, yang telah diklasterisasi menggunakan Gaussian Mixture Model (GMM) berdasarkan fitur *Return on Equity* (ROE), *Market Capitalization* (Market Cap), *mean return*, dan varian return. Dari klasterisasi diperoleh tiga saham, yaitu ADMR.JK, BBCA.JK, dan PGAS.JK. Hasil analisis menunjukkan bahwa metode metaheuristik menghasilkan Sharpe Ratio lebih tinggi dibandingkan metode *Minimum Variance* (MV). Particle Swarm Optimization (PSO) memberikan Sharpe Ratio tertinggi, menjadikannya pilihan terbaik untuk investor konservatif dengan keseimbangan risiko dan return yang optimal. Penelitian ini menegaskan keunggulan metode metaheuristik dalam menyesuaikan portofolio dengan profil risiko investor.

Keyword: Optimisasi Portofolio, Metaheuristik, Genetic Algorithm, Particle Swarm Optimization, Simulated Annealing, Gaussian Mixture Model, LQ45

1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pengelolaan risiko pasar dan optimalisasi portofolio merupakan aspek penting dalam dunia keuangan, terutama bagi para investor dan institusi keuangan yang terlibat dalam perdagangan saham. Salah satu pendekatan yang banyak digunakan dalam optimalisasi portofolio adalah Metode Variance Minimum (MV) yang bertujuan meminimalkan portofolio tanpa pengembalian. mempertimbangkan tingkat Namun, dalam kondisi pasar yang dinamis dan kompleks, metode klasik seperti MV memiliki keterbatasan, terutama dalam menangani data dengan pola non-linear dan multi-modalitas.

Untuk mengatasi keterbatasan tersebut, metode metaheuristik menjadi solusi alternatif yang efektif. Metode metaheuristik, seperti Simulated Annealing (SA), Genetic Algorithm (GA), dan Particle Swarm Optimization (PSO), menawarkan pendekatan yang lebih fleksibel dalam menemukan solusi optimal dari masalah yang bersifat non-konveks. Metode ini mampu mengeksplorasi ruang solusi secara lebih luas dan menghindari jebakan pada solusi lokal, sehingga peluang untuk menemukan solusi terbaik menjadi lebih besar.

Dalam penelitian ini, portofolio saham yang dianalisis merupakan bagian dari indeks LQ45, yang terdiri dari 45 saham paling likuid di Bursa Efek Indonesia. Untuk memperkuat proses optimalisasi, digunakan klasterisasi dengan Gaussian Mixture Model (GMM) sebagai langkah awal. GMM memungkinkan identifikasi pola-pola tersembunyi dalam data dan pembentukan klaster saham dengan karakteristik risiko dan pengembalian yang serupa. Pendekatan ini diharapkan dapat meningkatkan akurasi dalam proses optimalisasi portofolio.

1.2 Tujuan dan Manfaat

Penelitian ini bertujuan untuk membandingkan kinerja metode klasik Minimum Variance (MV) dengan metode metaheuristik, yaitu *Simulated Annealing* (SA), *Genetic Algorithm* (GA), dan *Particle Swarm Optimization* (PSO). Hasil dari penelitian ini diharapkan dapat memberikan wawasan yang lebih mendalam mengenai efektivitas dan efisiensi metode metaheuristik dalam menghasilkan portofolio optimal dengan risiko minimum.

2. METODOLOGI

2.1 Saham dan Portfolio

Saham merupakan salah satu sekuritas yang relatif sering menjadi pilihan untuk investasi. Saham dapat diartikan klaim atas pendapatan yang diperoleh dari aktivitas pengelolaan aset bisnis atau perusahaan (Manurung dan Adler, 2009:5). Di pasar, harga saham cenderung fluktuatif mengikuti kondisi perekonomian dan permintaan akan suatu saham. Persepsi pasar atau calon kondisi fundamental perusahaan, prospek lingkungan bisnis dan ekonomi global, dan beberapa faktor lainnya mempengaruhi naik turunnya harga suatu saham (Wiagustini, 2010:212). Bermain di pasar modal memerlukan kemampuan dalam meminimalisasi kemungkinan risiko yang dihadapi dan sensitivitas terhadap perubahan-perubahan yang mungkin terjadi pada sekuritas yang menjadi tujuan investasi. Diversifikasi membantu investor dalam menyebar peluang risiko pada berbagai aset (Bangun, dkk, 2012).

Pembentukan portofolio adalah salah satu alternatif diversifikasi risiko. Pembentukan portofolio melibatkan analisis risiko untuk mengantisipasi potensi kerugian. Setelah bobot risiko tiap sekuritas diketahui, kombinasi portofolio yang menawarkan keuntungan tinggi dengan risiko tertentu dipilih sebagai portofolio efisien. Portofolio efisien ini menjadi dasar untuk menentukan portofolio optimal, yaitu kombinasi yang memberikan hasil maksimal dengan risiko tertentu.

2.2 Return

Return adalah tingkat pengembalian yang didapatkan oleh investor dari kegiatan investasi yang dilakukannya (Tandelilin, 2017). Return digunakan untuk mengevaluasi kinerja investasi serta menjadi dasar dalam pengambilan keputusan investasi, seperti pemilihan portofolio perencanaan keuangan. Salah satu cara menghitung return adalah menggunakan metode logaritmik, yang sering disebut log return. Log return memiliki keunggulan seperti additivitas dalam periode waktu yang berurutan dan simetri untuk kenaikan dan penurunan harga. Log return dihitung dengan rumus

$$R_t = ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

Dengan

 R_t : log return pada periode t, P_t : harga aset pada periode t,

 P_{t-1} : harga aset pada periode sebelumnya

2.3 Return On Equity (ROE)

Return On Equity (ROE) merupakan rasio profitabilitas yang menunjukkan perbandingan antara laba (setelah pajak) dengan modal (modal inti) bank, rasio ini menunjukkan tingkat persentase yang dapat dihasilkan dalam mengelola modal yang tersedia untuk mendapat net income. Rasio ini mengkaji sejauh mana suatu perusahaan mempergunakan sumberdaya yang dimiliki untuk mampu memberikan laba atas ekuitas (Riyadi, 2006). Adapun formula dari ROE sebagai berikut

$$ROE = \frac{Earnings\ After\ Interest\ and\ Tax}{Equity}$$

2.4 Market Capital

Market capitalization, atau kapitalisasi pasar, merupakan ukuran yang digunakan untuk menilai nilai total suatu perusahaan berdasarkan harga sahamnya yang berlaku di pasar. Kapitalisasi pasar dihitung dengan mengalikan jumlah saham yang beredar dengan harga pasar per saham (Ross et al., 2020). Dalam literatur keuangan, kapitalisasi pasar sering digunakan sebagai indikator untuk

mengkategorikan perusahaan menjadi beberapa kelompok, seperti perusahaan berkapitalisasi besar (large-cap), menengah (mid-cap), dan kecil (small-cap). Perusahaan dengan kapitalisasi besar umumnya dianggap lebih stabil dan mapan, namun memiliki potensi pertumbuhan yang lebih lambat dibandingkan perusahaan dengan kapitalisasi kecil (Damodaran, 2012). Di sisi lain, perusahaan berkapitalisasi kecil sering kali menawarkan peluang pertumbuhan yang tinggi, namun disertai dengan risiko yang lebih besar.

2.5 Sharpe Ratio

Sharpe ratio adalah salah satu metrik yang dapat digunakan untuk melihat performa dari portofolio. Sharpe ratio membandingkan antara return dari suatu portofolio dengan risikonya (Fernando, 2024). Nilai ini dapat diformulasikan sebagai berikut.

$$Sharpe\ Ratio = rac{R_p - R_f}{\sigma_p}$$

dimana R_p menunjukkan return dari portofolio, σ_p menunjukkan standar deviasi dari portofolio, dan R_f adalah risk-free rate. Risk-free rate dari suatu return adalah nilai yang merepresentasikan pengembalian atau return dari suatu investasi yang nol risiko. Nilai ini bekerja sebagai benchmark untuk mengevaluasi ekspektasi dari return pada investasi lainnya yang memiliki derajat risiko.

2.6 Clustering Gaussian Mixture Model

Gaussian Mixture Models (GMM) telah lama menjadi alat fundamental dalam model-based clustering. GMM adalah model probabilistik yang mengasumsikan bahwa data dihasilkan dari kombinasi beberapa distribusi Gaussian, di mana setiap distribusi memiliki parameter tersendiri. Pendekatan ini lebih fleksibel dibandingkan hanya menggunakan satu distribusi Gaussian, sehingga GMM berguna dalam berbagai aplikasi seperti kepadatan clustering, estimasi (density estimation), dan pengenalan pola (pattern recognition). (Kasa, Kasa, & Rajan, 2024)

Gaussian Mixture Model adalah algoritma Expectation-Maximization (EM) dengan titik-titik data yang diasumsikan memiliki distribusi Gaussian (Normal). Algoritma ini membutuhkan dua parameter, yaitu rata-rata dan kovariansi, untuk menggambarkan posisi dan bentuk setiap cluster. Model ini didasarkan pada distribusi Gaussian multivariat yaitu:

$$N(x: \mu, \Sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Sigma}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T E^{-1}(x-\mu)}$$

dimana untuk setiap klaster x adalah vektor data, μ adalah vektor mean tiap klaster, dan Σ adalah kovarians matriks antara setiap dimensi. (Jones, 2021)

Algoritma GMM terdiri dari lima proses

- 1. Memilih jumlah klaster, k
- Menginisiasikan parameter (mean, kovarians, dan bobot) untuk setiap centroid secara random
- Menghitung likelihood data apakah berasal dari klaster yang dimiliki dengan parameter terkini
- 4. Memaksimalkan likelihood dengan mengganti parameter (proporsi klaster, center, dan sebaran di sekitar center)
- Mengulang kembali langkah 3 dan 4 hingga nilai parameter konvergen atau ketika telah mencapai iterasi maksimum yang telah diinisiasikan sebelumnya

2.7 Portofolio Minimum Variance (MV)

Portofolio *Minimum Variance* merupakan pengembangan dari teori portofolio yang diperkenalkan oleh Harry Markowitz pada tahun 1952 (Han, Kolari, & Liu, 2024), yang dikenal dengan *Modern Portfolio Theory* (MPT). Dalam model MV, ekspektasi return dan kovarians antar aset digunakan untuk membentuk portofolio optimal. Proses optimasi didasarkan pada asumsi bahwa return aset mengikuti distribusi normal dan risiko diukur menggunakan varian atau kovarian aset. Untuk membentuk MV Portfolio, bobot portofolio (*w*) dihitung dengan menyelesaikan masalah optimasi berikut:

minimalkan $\sigma_p^2 = w^T \Sigma w$

dengan batasan

$$w^{T} \mathbf{1} = 1$$

di mana w adalah vektor bobot portofolio, Σ adalah matriks kovarian return aset, σ_p^2 adalah varians portofolio, dan $\mathbf{1}$ adalah vektor satuan dengan dimensi yang sama dengan jumlah aset dalam portofolio.

Untuk mendapatkan portofolio MV, adapun langkah-langkah yang harus dilakukan yaitu sebagai berikut:

- 1. Menghitung log return data saham.
- 2. Mengecek normalitas data log return.

Pada kesempatan ini, uji Jarque-Bera digunakan untuk menguji normalitas data dengan memeriksa skewness (kemiringan) dan kurtosis (keruncingan) data. Dengan hipotesis nol (H₀) data log return mengikuti distribusi normal dan hipotesis alternatif (H₁) data log return tidak mengikuti distribusi hasil uji normal, jika Jarque-Bera menunjukkan nilai p-value yang lebih kecil dari tingkat signifikansi (α), maka hipotesis nol (H₀) akan ditolak. Untuk penelitian ini, tingkat signifikansi yang digunakan sebesar 5% atau 0,05.

- 3. Menghitung matriks kovarians log return.
- 4. Menghitung bobot portofolio.

Berdasarkan pendekatan Lagrange, bobot GMV dapat diperoleh menggunakan rumus berikut (Maillet, Tokpavi, & Vaucher, 2015):

$$w_{GMV} = \frac{\Sigma^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}}$$

dimana Σ^{-1} adalah invers dari matriks kovarians Σ . Rumus ini menunjukkan bahwa bobot GMV bergantung sepenuhnya pada struktur kovarians dari return aset-aset tersebut.

5. Menghitung risiko dan pengembalian portofolio.

Risiko total portofolio dapat dihitung dengan rumus berikut:

$$\sigma_p = \sqrt{w^T \Sigma w}$$

di mana w adalah vektor bobot portofolio, Σ adalah matriks kovarian log return saham, dan σ_p adalah risiko (standar deviasi) portofolio.

2.8 Algoritma Metaheuristics

Metaheuristik adalah teknik optimasi yang dirancang untuk menemukan solusi mendekati optimal dalam masalah yang kompleks dan sulit diselesaikan menggunakan metode konvensional. Pendekatan ini sangat berguna dalam situasi di mana ruang solusi terlalu besar untuk dieksplorasi secara ekshaustif, seperti dalam optimisasi portofolio. Optimisasi portofolio melibatkan pencarian kombinasi alokasi aset memberikan keseimbangan terbaik antara risiko dan pengembalian. Metode metaheuristik bekerja dengan pendekatan iteratif, menggunakan mekanisme eksplorasi dan eksploitasi untuk menjelajahi ruang solusi secara efisien. (Santosa, dkk, 2011). Beberapa algoritma metaheuristik yang populer dalam optimisasi portofolio meliputi Genetic Algorithm, Particle Swarm Optimization, dan Simulated Annealing.

2.9 Algoritma *Particle Swarm Optimization* (PSO)

Particle Swarm Optimization atau PSO merupakan algoritma optimisasi berbasis metaheuristik yang dikembangkan dari pola perilaku kawanan serangga, seperti semut, rayap, lebah, atau burung (Putri Z, 2018). Algoritma ini memanfaatkan sekelompok partikel (solusi potensial) yang bergerak melalui ruang pencarian dengan memperbarui posisi mereka berdasarkan pengalaman pribadi dan informasi terbaik yang ditemukan kawanan. Setiap partikel mewakili solusi potensial yang terdiri dari bobot alokasi untuk masing-masing saham dalam portofolio. [2]

Komponen utama yang digunakan dalam algoritma PSO meliputi posisi partikel (x_i) , kecepatan posisi partikel di perbarui (v_i) , solusi terbaik partikel (p_i) , dan solusi terbaik secara keseluruhan (g) (Erwin & Engelbrecht, 2023).

Pada kasus ini, posisi partikel yang dimaksud adalah bobot masing-masing saham yang akan diperbarui secara iteratif untuk memaksimalkan nilai fitness dengan fungsi tertentu. Adapun langkah-langkah algoritma PSO sebagai berikut (Putri Z, 2018):

- 1. Inisialisasi posisi dan kecepatan acak setiap partikel dalam ruang pencarian.
- Evaluasi posisi dengan menghitung nilai fungsi objektif untuk setiap partikel, seperti memaksimalkan return portofolio dan meminimalkan risiko.
- 3. Pembaruan p_i dan g. Jika solusi baru lebih baik dari p_i , maka p_i diperbarui. Jika solusi baru lebih baik dari g, maka g diperbarui.
- 4. Pembaruan v_i dan x_i . Kecepatan partikel diperbarui menggunakan formula:

$$v_i = wv_i + c_1r_1(p_i - x_i) + c_2r_2(g - x_i)$$

di mana w adalah faktor inersia, c_1 dan c_2 adalah konstanta pembelajaran, serta r_1 dan r_2 adalah bilangan acak antara 0 dan 1. Faktor inersia memungkinkan komponen kecepatan sebelumnya tetap ada, konstanta pembelajaran c_1 mengontrol seberapa besar pengaruh posisi terbaik yang pernah ditemukan oleh partikel itu sendiri (p_i) terhadap kecepatan dan pergerakan partikel, dan konstanta mengontrol seberapa besar pengaruh posisi terbaik yang pernah ditemukan oleh seluruh populasi (swarm) terhadap kecepatan dan pergerakan partikel. Kemudian, posisi baru dihitung sebagai:

$$x_i = x_i + v_i.$$

- 5. Lalu, langkah 2-4 diulangi hingga kriteria penghentian tercapai (misalnya jumlah iterasi atau konvergensi solusi).
- Hasil dari iterasi akan berupa posisi terbaik atau dalam kasus ini adalah bobot saham portofolio yang dapat digunakan untuk menghitung return dan risk portofolio.

2.10 Genetic Algorithm

Genetic Algorithm merupakan suatu metode metaheuristik yang dikembangkan berdasarkan prinsip genetika dan proses seleksi ilmiah teori evaluasi Darwin. Genetic Algorithm telah digunakan secara luas oleh para peneliti mengenai penyelesaian masalah pengoptimuman portofolio. Genetic Algorithm dimulai dengan membentuk populasi berupa sejumlah individu yang disebut kromosom, mewakili nilai variabel yang dioptimalkan. Setiap kromosom terdiri dari gen, dengan jumlah gen sesuai variabel dalam pengoptimuman (Fahria, Kustiawan, 2020).

Fungsi *fitness* digunakan untuk menilai kualitas kromosom berdasarkan fungsi objektif. Nilai fitness yang lebih tinggi meningkatkan peluang kromosom untuk dipertahankan ke generasi berikutnya. *Fitness* dapat mencakup penalti untuk mengakomodasi kendala pada pengoptimuman (Fahria, Kustiawan, 2020).

Berdasarkan teori evolusi Darwin, populasi dalam Genetic Algorithm mengalami seleksi (memilih individu dengan nilai fitness tinggi), mutasi (perubahan gen dalam kromosom), dan crossover (persilangan antarindividu untuk membentuk individu baru). Proses ini menghasilkan kandidat solusi optimum. Namun, karena seleksi bersifat acak, individu dengan fitness tertinggi tidak selalu terpilih dan dapat rusak selama persilangan. Oleh karena itu, prosedur elitisme digunakan untuk memastikan individu terbaik tetap ada dengan membuat salinan. Proses evolusi dihentikan ketika jumlah generasi tertentu tercapai atau jika nilai fitness tertinggi tidak berubah setelah beberapa generasi.

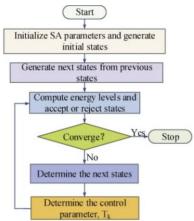
2.11 Algoritma Simulated Annealing

Simulated Annealing adalah algoritma local search (metaheuristik) yang mampu keluar dari jebakan local optima. Algoritma ini populer karena mudah diimplementasikan, memiliki sifat konvergen, dan menggunakan langkah hill-climbing untuk mencari solusi lebih baik. Biasanya, algoritma ini digunakan untuk masalah

optimasi diskret dan, dalam beberapa kasus, masalah optimasi kontinu. (Nikolaev & Jacobson, 2010)

Nama Simulated Annealing berasal dari analogi dengan proses annealing pada material kristal. Dalam proses ini, material dipanaskan dan didinginkan perlahan untuk mencapai struktur kristal paling stabil dengan energi minimum, bebas dari cacat. Jika proses pendinginan dilakukan cukup lambat, struktur kristal yang dihasilkan memiliki kualitas yang sangat baik. Algoritma ini memanfaatkan prinsip serupa untuk mencari solusi global terbaik dalam masalah optimasi diskret.

Pada setiap iterasi, algoritma membandingkan solusi saat ini dengan solusi baru. Solusi yang lebih baik selalu diterima, sementara solusi yang lebih buruk kadang-kadang diterima untuk membantu keluar dari local optima. Kemungkinan menerima solusi yang lebih buruk tergantung pada parameter suhu (temperature), yang secara bertahap menurun. Saat suhu mendekati nol, kemungkinan menerima solusi buruk berkurang, dan algoritma cenderung menemukan solusi optimal global (jika algoritma dirancang dengan baik).



Gambar 1. Alur Simulated Annealing (SA) (Bo, Wang, Zhang, & Yu, 2020)

Ciri utama *Simulated Annealing* adalah kemampuannya menerima langkah untuk menghindari jebakan local optima. Ketika suhu

terus menurun, algoritma akan lebih fokus pada solusi optimal global.

3. DESKRIPSI DATA

Analisis komparatif metode dalam optimisasi portofolio dilakukan dengan didasarkan pada 3 jenis data, yaitu data harga penutupan harian saham yang termasuk dalam indeks saham LQ45, data fundamental saham (ROE dan Market Cap), serta data Bank Indonesia (BI) rate bulan November 2024, yaitu 6% (Bank Indonesia, 2024). Data BI rate ini digunakan sebagai risk return free rate. Data ini mencakup data harga saham historis dari tanggal 6 Desember 2023 hingga 6 Desember 2024, dengan tota 239 titik data harga saham. Secara komprehensif, data dijabarkan pada **Lampiran 1**.

Dalam analisis ini, indeks LQ45 dipilih sebagai basis dalam optimisasi portofolio karena indeks ini mencakup 45 saham dengan likuiditas tinggi dan kapitalisasi pasar besar. Penggunaan indeks LQ45 memberikan keunggulan strategis karena saham-saham dalam indeks ini memiliki volatilitas yang cukup terukur dan risiko yang lebih dapat dikelola secara *real-time*. Likuiditas yang tinggi juga memastikan bahwa saham-saham ini lebih mudah diperdagangkan, sehingga meminimalkan risiko likuiditas dalam pengelolaan portofolio. Dengan memilih LQ45 sebagai acuan, portofolio yang dihasilkan diharapkan lebih stabil dan lebih mudah untuk diimplementasikan dalam praktik nyata.

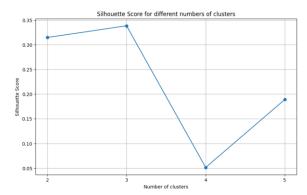
Selain harga penutup saham, diambil pula data (ROE) Return on *Equity* dan Market Capitalization (Market Cap). Penggunaan ROE dan Market Cap sebagai parameter dalam klasterisasi Gaussian Mixture Model (GMM) didasarkan pada pertimbangan fundamental dan ukuran pasar yang saling melengkapi. ROE mencerminkan profitabilitas perusahaan, yaitu seberapa efektif perusahaan dalam menghasilkan laba dari ekuitas pemegang saham. Saham dengan ROE tinggi cenderung lebih menarik bagi investor, karena mencerminkan kinerja keuangan yang solid dan potensi pengembalian yang lebih besar. Di sisi lain, Market Cap mencerminkan ukuran dan nilai pasar perusahaan. Saham dengan Market Cap besar biasanya lebih stabil dan likuid, sedangkan saham dengan Market Cap kecil cenderung lebih fluktuatif dan berisiko tinggi. Dengan menggabungkan ROE dan Market Cap dalam proses klasterisasi, saham dapat dikelompokkan berdasarkan profitabilitas dan stabilitas ukuran pasar. Pendekatan ini memungkinkan identifikasi klaster saham dengan karakteristik risiko dan pengembalian yang sehingga mendukung pembentukan portofolio yang lebih terdiversifikasi, stabil, dan optimal.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Bagian makalah ini akan membahas pembentukan portofolio saham LQ45 berdasarkan dua metode utama, yaitu metode Minimum Variance (MV) dan metode Metaheuristik. Metode Metaheuristik yang akan dibandingkan dengan metode MV ada tiga, yaitu Simulated Annealing (SA), Genetic Algorithm (GA), dan Particle Swarm Optimization (PSO). Namun, sebelum memasuki perhitungan kedua metode tersebut, akan dilakukan perhitungan log return harga saham penutupan. Dilakukan perhitungan log return terhadap harga penutupan setiap saham dalam rentang periode dari 6 Desember 2023 hingga 6 Desember 2024. Dari hasil perhitungan tersebut, diperoleh mean return dan variance return sebagaimana terlampir pada Lampiran 2.

4.1 Clustering

Dalam pembentukan portofolio, terlebih dahulu dilakukan klasterisasi menggunakan metode *Gaussian Mixture Models* dengan variabel *Return on Equity* (ROE), Market Cap, Mean Return, dan Variance Return. Sebelum melakukan klasterisasi, jumlah klaster optimum ditentukan berdasarkan nilai *Silhouette Score*.



Gambar 3. Grafik Silhoutte Score Clustering

Berdasarkan grafik, jumlah klaster optimum yang memiliki nilai Silhouette Score tertinggi adalah tiga klaster. Berikut hasil klasterisasi menggunakan Gaussian Mixture Models

Tabel 1. Hasil Klasterisasi GMM

| Klaster | Saham | | | | |
|---------|-------------------------------|--|--|--|--|
| 0 | ADMR, ARTO, BRPT, BUKA, GOTO, | | | | |
| | MAPI, MBMA, MDKA, SMGR, UNVR | | | | |
| 1 | ACES, ADRO, AKRA, AMMN, AMRT, | | | | |
| | ANTM, ASII, BBNI, BBRI, BBTN, | | | | |
| | BMRI, BRIS, CPIN, ESSA, EXCL, | | | | |
| | ICBP, INCO, INDF, INKP, ISAT, | | | | |
| | ITMG, JSMR, KLBF, MEDC, MTEL, | | | | |
| | PGAS, PGEO, PTBA, SIDO, SMRA, | | | | |
| | TLKM, TOWR, UNTR | | | | |
| 2 | BBCA | | | | |

Dari setiap klaster, saham dengan nilai *Sharpe Ratio* tertinggi dipilih. Berikut adalah saham yang terpilih dari masing-masing klaster beserta nilai *Sharpe Ratio*-nya.

Tabel 2. *Sharpe Ratio* Setiap Klaster GMM

| Cluster | Saham | Sharpe Ratio |
|---------|---------|--------------|
| 0 | ADMR.JK | 0,004564 |
| 1 | PGAS.JK | 0,097624 |
| 2 | BBCA.JK | 0,039002 |

4.2 Metode *Minimum-Variance*

Metode *Minimum-Variance* merupakan untuk meminimalkan risiko yang berfokus untuk meminimalkan volatilitas portofolio tanpa mengharapkan nilai return tertentu. Dalam penentuan bobot portofolio ini, diterapkan metode

perhitungan *minimum-variance* dengan *single constraint* dimana bobot-bobot yang dihasilkan dari proses optimisasi akan berjumlah 1.

Portofolio yang telah dioptimasikan kemudian ditinjau kembali performanya dengan *sharpe ratio*. Diambil nilai *risk free rate* untuk pasar Indonesia adalah 0,06. Bobot hasil optimasi *minimum-variance* dengan menggunakan matriks kovarians pada Tabel 3.

Tabel 3. Minimum Variance

| Saham | Bobot | Expected Return | Risk | Sharpe Ratio |
|-------------|--------|--------------------|---------|-----------------|
| BBCA | 0,5510 | | | |
| ADMR | 0,1503 | 0,00094 | 0,00011 | 0,02222 |
| PGAS | 0,2987 | | | |

Metode *Minimum-Variance* menghasilkan bobot yang besar untuk saham BBCA.JK, diikuti saham PGAS.JK. Saham dengan bobot terkecil adalah ADMR.JK. Hasil optimalisasi ini memberikan nilai expected *return* yang positif, menunjukkan adanya *profit*.

4.3 Metode *Particle Swarm Optimization* (PSO)

Algoritma Particle Swarm Optimization (PSO) memanfaatkan sekelompok partikel yang bergerak di ruang swarm. Pada kasus ini, partikel tersebut mewaikili bobot alokasi untuk masingmasing saham. Metode PSO dimulai dengan menginisialisasikan komponen untuk posisi partikel (x_i) dan kecepatan acak (v_i) setiap partikel dalam ruang pencarian. Pada kesempatan ini, algoritma PSO dijalankan sebanyak 1000 iterasi dengan jumlah partikel sebanyak 20. Posisi awal partikel-partikel didapat dari hasil random inisialisasi awal dan dapat dilihat pada **Lampiran** 2, sedangkan kecepatan acak awal setiap partikel diatur menjadi nol yang berarti partikel awalnya diam—tanpa kecepatan.

Kemudian, selama iterasi dijalankan, pembaruan kecepatan dan posisi partikel didasarkan pada formula yang telah dijabarkan pada bagian metodologi dengan faktor inersia w sebesar 0,5, konstanta pembelajaran c_1 bernilai 4 dan c_2 bernilai 7. Iterasi dijalankan untuk mencari solusi bobot saham terbaik berdasarkan evaluasi

performa dengan memaksimalkan *sharpe ratio*. Bobot hasil optimasi *Particle Swarm Optimization* (PSO) dapat dilihat pada Tabel 4.

Tabel 4. Particle Swarm Optimization

| Saham | Bobot | Expected | Risk | Sharpe | | |
|-------------|--------|----------|----------|----------|--|--|
| | | Return | | Ratio | | |
| BBCA | 0,2880 | | | | | |
| ADMR | 0,0002 | 0,00152 | 0,000187 | 0,093467 | | |
| PGAS | 0,7118 | | | | | |

Hasil optimasi menggunakan Particle Swarm Optimization (PSO) menunjukkan bahwa saham PGAS memiliki bobot terbesar dalam portofolio (71,18%), diikuti BBCA (28,80%), sementara ADMR hanya 0,02%. Alokasi terbesar pada PGAS mengindikasikan bahwa saham memberikan kontribusi dalam terbaik keseimbangan risiko dan pengembalian portofolio secara keseluruhan. Secara keseluruhan, metode PSO menghasilkan nilai expected return yang positif sebesar 0,001515 dengan risiko yang kecil sebesar 0,000187, serta evaluasi performa sharpe ratio sebesar 0,093467.

4.4 Metode Genetic Algorithm

Berdasarkan hasil clustering dengan metode GMM *diperoleh* bahwa tiga saham terbaik dari setiap cluster diantaranya BBCA.JK, PGAS.JK, dan ADMR.JK. Penentuan bobot optimum dengan metode *genetic algorithm* dilakukan dengan langkah berikut.

- 1. Melakukan inisiasi awal dengan membentuk populasi yang terdiri dari 100 kromosom, dimana masing-masing kromosom terdiri atas saham-saham yang merupakan kandidat penyusun portofolio optimum. Berdasarkan hasil *clustering* terdapat 3 kombinasi saham penyusun portofolio, yang berarti kromosom mempunyai panjang 3 gen. Masing-masing gen tersebut berisi bobot/proporsi tiap tiap saham. Proses inisialisasi dilakukan secara acak.
- Membentuk fungsi fitness (kebugaran) untuk mendapatkan portofolio dengan return tertinggi. Terlebih dahulu dengan menghitung

nilai indeks *sharpe*. Untuk menghitung sharpe ratio, diperlukan nilai mean portfolio dan variance portfolio yang diperoleh serta melakukan evaluasi *fitness* untuk tiap-tiap kromosom.

- 3. Melakukan pergantian kromosom-kromosom dengan operator mutasi maupun persilangan (cross over). Metode crossover yang digunakan pada analisis ini adalah blend crossover dan arithmatic crossover.
- Melakukan elitisme untuk menjaga agar individu dengan nilai *fitness* tertinggi tetap dipertahankan atau tidak hilang selama proses evolusi
- Melakukan langkah (3) dan (4) secara terus menerus hingga didapatkan solusi yang stabil. Portfolio terbaik dinyatakan dengan portofolio dengan nilai *fitness* tertinggi.

Tabel 5. Blend Crossover

| Saham | Bobot | Expected Return | Risk | Sharpe Ratio |
|-------|--------|--------------------|---------|-----------------|
| BBCA | 0,1284 | | | |
| ADMR | 0,1329 | 0,00146 | 0,00020 | 0,03873 |
| PGAS | 0,7386 | | | |

Tabel 6. Arithmatic Crossover

| Saham | Bobot | Expected Return | Risk | Sharpe Ratio |
|-------------|--------|--------------------|---------|-----------------|
| BBCA | 0,0058 | | | |
| ADMR | 0,3583 | 0,00142 | 0,00016 | 0,03747 |
| PGAS | 0,6357 | | | |

Hasil optimasi menggunakan *Genetic* Algorithm menunjukkan bahwa penggunaan blend crossover menghasilkan nilai sharpe ratio lebih tinggi dibanding metode arithmaric crossover. Pada portfolio yang dihasilakan, saham PGAS memiliki bobot terbesar dalam portofolio (73,86 %), diikuti ADMR (13,29%), dan BBCA 12,84%. Secara keseluruhan, metode GA menghasilkan nilai expected return yang positif sebesar 0.00146 dengan risiko sebesar 0.00020

serta evaluasi performa sharpe ratio sebesar 0.03873.

4.5 Metode Simulated Annealing

Metode Simulated Annealing menyelesaikan masalah optimasi portofolio dengan memaksimalkan return yang diharapkan relatif menggunakan terhadap risiko pendekatan probabilistik. Fungsi ini memulai dengan bobot portofolio awal yang dipilih secara acak, kemudian iterasi dilakukan hingga mencapai batas maksimum iterasi. Pada setiap iterasi, suhu dikurangi menggunakan rasio pendinginan, dan bobot kandidat baru dihasilkan. Jika kandidat memberikan return yang lebih baik atau diterima berdasarkan probabilitas, maka solusi diperbarui. Metode ini akhirnya mengembalikan bobot portofolio terbaik, nilai sharpe ratio terbaik, risiko portofolio, dan return yang diharapkan yang teringkas pada Tabel 7.

Tabel 7. Simulated Annealing

| Saham | Bobot | Expected Return | Risk | Sharpe Ratio |
|-------|--------|--------------------|---------|-----------------|
| BBCA | 0,1202 | | | _ |
| ADMR | 0,0230 | 0,00167 | 0,00025 | 0,04527 |
| PGAS | 0,8568 | | | |

Dalam hasil optimasi, saham dengan bobot terbesar adalah PGAS.JK, yang menunjukkan keyakinan tinggi terhadap kontribusi saham ini dalam memberikan return optimal bagi portofolio. Bobot terbesar ini berarti PGAS.JK diperkirakan memiliki potensi return relatif tinggi atau peran penting dalam mengurangi risiko portofolio secara keseluruhan. Di sisi lain, saham dengan bobot terkecil, yaitu ADMR.JK, menunjukkan kontribusi yang lebih rendah baik dalam hal potensi return maupun peran dalam diversifikasi risiko.

4.6 Komparasi Metode

Berdasarkan hasil optimasi dengan keempat metode sebelumnya, didapatkan tabel komparasi sebagaimana dijabarkan pada Tabel 8.

Tabel 8. Tabel Komparasi Metode

(a) Tabel Komparasi Bobot Portofolio

| Saham | | | Bobot | | |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Sanam | MV | PSO | GA-BC | GA-AC | SA |
| BBCA | 0,5499 | 0,2880 | 0,1329 | 0,0059 | 0,1202 |
| ADMR | 0,1480 | 0,0002 | 0,1284 | 0,3583 | 0,0230 |
| PGAS | 0,3021 | 0,7118 | 0,7386 | 0,6358 | 0,8568 |

(b) Tabel Komparasi Expected Return, Risk, dan Sharpe Ratio

| Metode | Expected Return | Risk | Sharpe Ratio |
|--------|------------------------|---------|--------------|
| MV | 0,00094 | 0,00011 | 0,02222 |
| PSO | 0,00152 | 0,00019 | 0,09347 |
| GA-BC | 0,00146 | 0,00020 | 0,03874 |
| GA-AC | 0,00173 | 0,00016 | 0,03747 |
| SA | 0,00167 | 0,00025 | 0,04527 |

Tabel 8 memberikan gambaran perbandingan performa lima metode optimisasi portofolio, yaitu MV (Minimum Variance), PSO (Particle Swarm Optimization), GA-BC (Genetic Algorithm Blend Crossover), GA-AC (Genetic Algorithm Arithmetic Crossover), dan SA (Simulated Annealing). Sub-tabel (a) menunjukkan distribusi bobot portofolio untuk saham BBCA, ADMR, dan PGAS, sedangkan sub-tabel (b) membandingkan expected return, risiko, dan Sharpe ratio yang dihasilkan oleh setiap metode.

Dari sisi distribusi bobot portofolio, metode SA menunjukkan distribusi yang relatif merata, dengan bobot pada BBCA sebesar 0,1202, ADMR sebesar 0,0230, dan PGAS sebesar 0,8568. Sebaliknya, metode GA-AC memberikan bobot terkecil untuk BBCA (0,0059) dan alokasi yang lebih signifikan pada ADMR (0,3583) serta PGAS (0,6358). Metode PSO cenderung memusatkan bobot pada PGAS (0,7118), sementara alokasi untuk ADMR sangat kecil (0,0002). Metode MV menunjukkan bobot yang tinggi pada BBCA (0,5499) tetapi lebih rendah untuk ADMR (0,1480) dan PGAS (0,3021). Perbedaan dalam distribusi ini mencerminkan pendekatan unik dari masing-masing metode dalam menentukan alokasi portofolio optimal.

Dari sisi performa, metode SA menghasilkan expected return sebesar 0,00167 dengan risiko tertinggi sebesar 0,00025, menghasilkan Sharpe ratio sebesar 0,04527. Metode PSO memberikan expected return yang lebih rendah sebesar 0,001625 tetapi memiliki risiko yang sangat kecil (0,00018), menghasilkan Sharpe ratio yang lebih tinggi (0,09347). Sebaliknya, metode MV menunjukkan expected return terendah (0,00094) dengan risiko terkecil (0,00011), menghasilkan Sharpe ratio yang paling rendah (0,02222). Dua metode berbasis Genetic Algorithm, yaitu GA-BC dan GA-AC, memiliki expected return yang serupa (masing-masing 0,00146 dan 0,00173) tetapi Sharpe ratio yang lebih kecil (0,03874 dan 0,03747), menunjukkan kurangnya efisiensi dalam mengelola risiko dibandingkan metode lain.

Secara keseluruhan, metode PSO memberikan keseimbangan yang baik antara risiko rendah dan return yang moderat, menjadikannya pilihan yang cocok untuk investor dengan profil konservatif. Sementara itu, metode SA dapat dipertimbangkan oleh investor yang lebih toleran terhadap risiko, mengingat distribusi bobotnya yang lebih fleksibel dan return yang tinggi. Hasil ini menegaskan pendekatan metaheuristik kekuatan dalam menangani portofolio dengan optimisasi

karakteristik yang beragam, terutama bila dikombinasikan dengan klasterisasi menggunakan *Gaussian Mixture Model* (GMM) untuk meningkatkan presisi analisis.

5. KESIMPULAN

Penelitian ini membandingkan dua metode utama optimisasi portofolio, yaitu metode Minimum Variance (MV) dengan metode Metaheuristik, vaitu Simulated Annealing (SA), Genetic Algorithm (GA), dan Particle Swarm Optimization (PSO), dengan menggunakan data harga saham LQ45 berdasarkan hasil klasterisasi Gaussian Mixture Model (GMM). Hasil analisis menunjukkan bahwa metode optimisasi portofolio memberikan hasil yang berbeda sesuai dengan karakteristik dan tujuan penggunaannya. Secara keseluruhan, pendekatan metaheuristik menawarkan fleksibilitas dan keunggulan dalam menyesuaikan portofolio dengan profil risiko yang berbeda, menjadikannya pilihan yang lebih adaptif untuk skenario pasar yang kompleks. Kombinasi metaheuristik metode dengan pendekatan clustering seperti Gaussian Mixture Model (GMM) lebih efektif untuk diversifikasi portofolio dibandingkan pendekatan klasik Minimum Variance (MV).

DAFTAR PUSTAKA

- Bank Indonesia. (2024, November 20). *BI-Rate Tetap 6,00%: Mempertahankan Stabilitas, Mendukung Pertumbuhan Ekonomi*. Retrieved from www.bi.go.id: https://www.bi.go.id/id/publikasi/ruan g-media/news-release/Pages/sp_2625424.aspx
- Bo, Y., Wang, J., Zhang, X., & Yu, T. (2020). Comprehensive overview of metaheuristic algorithm applications on PV cell parameter identification. *Energy Conversion and Management*.

- Erwin, K., & Engelbrecht, A. (2023). Metaheuristics for portfolio optimization. *Soft Computing*, *27*, 19045–19073. doi:10.1007/s00500-023-08177-x
- Fernando, J. (2024). *Sharpe ratio: Definition, formula, and examples.* Retrieved from Investopedia: https://www.investopedia.com/terms/s/sharperatio.asp
- Han, Y., Kolari, J. W., & Liu, W. (2024).

 Minimum-variance portfolio optimization: an asset pricing model approach. *Applied Economics*, 1-14. doi:10.1080/00036846.2024.2423903
- Jones, J. (2021, Februrary 9). Clustering: Out of the Black Box K-Means and Gaussian Mixture Models. Retrieved from Towards Data Science: https://towardsdatascience.com/clustering-out-of-the-black-box-5e8285220717
- Kasa, S. R., Kasa, S. K., & Rajan, V. (2024).

 Mixture-Models: a one-stop Python

 Library for Model-based Clustering

 using various Mixture Models.
- Maillet, B., Tokpavi, S., & Vaucher, B. (2015). Global minimumvariance portfolio optimisation under some model risk: A robust regression-based approach. *European Journal of Operational Research*, 244, 289-299. doi:10.1016/j.ejor.2015.01.010
- Nikolaev, A. G., & Jacobson, H. S. (2010). Simulated Annealing.
- Putri Z, R. W. (2018). METODE PARTICLE SWARM OPTIMIZATION UNTUK OPTIMASI. *Jurnal String*, 2 (3), 233-240.
- Manurung, Jonni, Adler Haymans Manurung. 2009. Ekonomi Keuangan dan Kebijakan Moneter. Jakarta: Salemba Empat

- Wiagustini, Ni Luh Putu. 2010. Dasar-dasar Mnajemen Keuangan.Denpasar:Udayana University Press.
- Tandelilin, Eduardus. 2017. Pasar Modal: Manajemen Portofolio dan Investasi. Yogyakarta: PT Kanisius
- Selamet Riyadi, Banking Assets and Liability management. Edisi Ketiga (Jakarta: FE UI, 2006)
- Ross, S. A., Westerfield, R., & Jaffe, J. (2020). *Corporate Finance*. McGraw-Hill Education
- Damodaran, A. (2012). Investment Valuation: Tools and Techniques for Determining the Value of Any Asset. Wiley

- Santosa, Budi dan Paul Willy, 2011, Metode Metaheuristik Konsep dan Implementasi, Surabaya: Guna Widya
- Fahria, I., & Kustiawan, E. (2020). Algoritma genetika dalam pembentukan portofolio optimum perusahaan emiten. *Jurnal Matematika dan Statistika serta Aplikasinya*, 8(2), Juli-Desember.

LAMPIRAN

Lampiran 1. Data LQ45

| Ticker | ROA | ROE | Market Cap | Mean Return | Variance Return |
|---------|-----------|-----------|------------------|-------------|-----------------|
| ACES.JK | 0,098476 | 0,124282 | 13182707957760 | 0,000655 | 0,000534 |
| ADMR.JK | 0,260126 | 0,451713 | 53555809484800 | 0,000354 | 0,000646 |
| ADRO.JK | 0,156735 | 0,242362 | 71052591890432 | 0,002643 | 0,000822 |
| AKRA.JK | 0,091898 | 0,246865 | 25658361118720 | 0,000129 | 0,000345 |
| AMMN.JK | 0,027717 | 0,055417 | 683483982725120 | 0,001989 | 0,000777 |
| AMRT.JK | 0,099388 | 0,235166 | 127480207769600 | 0,000442 | 0,000293 |
| ANTM.JK | 0,071821 | 0,100435 | 35325275537408 | -0,000017 | 0,000513 |
| ARTO.JK | 0,003398 | 0,008659 | 36721051828224 | -0,000005 | 0,001129 |
| ASII.JK | 0,075927 | 0,170353 | 206466359230464 | 0,000089 | 0,000259 |
| BBCA.JK | 0,034542 | 0,200693 | 1241995691425790 | 0,000782 | 0,000194 |
| BBNI.JK | 0,019242 | 0,139275 | 181264883646464 | 0,000062 | 0,000340 |
| BBRI.JK | 0,030585 | 0,193022 | 647790657011712 | -0,000594 | 0,000327 |
| BBTN.JK | 0,007979 | 0,114865 | 16911452602368 | 0,000183 | 0,000468 |
| BMRI.JK | 0,025324 | 0,211077 | 573999763423232 | 0,000635 | 0,000358 |
| BRIS.JK | 0,016129 | 0,147235 | 137004020924416 | 0,002639 | 0,000720 |
| BRPT.JK | 0,002573 | 0,015468 | 89488176971776 | -0,000417 | 0,001853 |
| BUKA.JK | -0,052263 | -0,053949 | 12684006260736 | -0,001646 | 0,000997 |
| CPIN.JK | 0,056591 | 0,085834 | 82399954206720 | 0,000154 | 0,000302 |
| ESSA.JK | 0,049774 | 0,091268 | 13781600043008 | 0,001807 | 0,000859 |
| EXCL.JK | 0,014496 | 0,048221 | 30065368760320 | 0,000582 | 0,000400 |
| GOTO.JK | -1,670984 | -2,383206 | 91717776703488 | -0,000042 | 0,001415 |
| ICBP.JK | 0,058613 | 0,171547 | 137318870548480 | 0,000646 | 0,000286 |
| INCO.JK | 0,093757 | 0,106972 | 38364870868992 | -0,000548 | 0,000602 |
| INDF.JK | 0,043663 | 0,137635 | 69145890652160 | 0,001071 | 0,000160 |
| INKP.JK | 0,040638 | 0,068582 | 38843956854784 | -0,000478 | 0,000413 |
| INTP.JK | 0,065777 | 0,093005 | 23302485573632 | -0,001118 | 0,000312 |
| ISAT.JK | 0,039281 | 0,146569 | 81272013586432 | 0,000728 | 0,000563 |
| ITMG.JK | 0,228686 | 0,279893 | 31270537003008 | 0,001180 | 0,000168 |
| JSMR.JK | 0,052536 | 0,243571 | 32950729048064 | -0,000159 | 0,000330 |
| KLBF.JK | 0,102254 | 0,129173 | 67839327207424 | -0,000407 | 0,000239 |
| MAPI.JK | 0,068814 | 0,189401 | 23403534745600 | -0,000212 | 0,000777 |
| MBMA.JK | 0,002123 | 0,004523 | 55077448450048 | -0,000059 | 0,001194 |
| MDKA.JK | -0,004161 | -0,022287 | 46499719282688 | -0,000775 | 0,000746 |
| MEDC.JK | 0,051000 | 0,216900 | 27071927549952 | 0,000651 | 0,000627 |
| MTEL.JK | 0,035263 | 0,059062 | 55146499276800 | -0,000203 | 0,000313 |
| PGAS.JK | 0,042140 | 0,103040 | 38422777430016 | 0,002017 | 0,000332 |
| PGEO.JK | 0,055191 | 0,082980 | 40470298230784 | -0,000054 | 0,000575 |
| PTBA.JK | 0,157509 | 0,284861 | 31130313031680 | 0,001247 | 0,000284 |
| SIDO.JK | 0,244338 | 0,280764 | 17250001092608 | 0,000431 | 0,000319 |

| SMGR.JK | 0,026528 | 0,050172 | 22145052704768 | -0,002506 | 0,000458 |
|---------|----------|----------|-----------------|-----------|----------|
| SMRA.JK | 0,024575 | 0,077947 | 9079729684480 | 0,000176 | 0,000504 |
| TLKM.JK | 0,085233 | 0,180172 | 272421051432960 | -0,001082 | 0,000317 |
| TOWR.JK | 0,047547 | 0,197680 | 35275870830592 | -0,000943 | 0,000363 |
| UNTR.JK | 0,133818 | 0,260084 | 100964321198080 | 0,001568 | 0,000246 |
| UNVR.JK | 0,288101 | 1,419876 | 71340497305600 | -0,002145 | 0,000595 |

Lampiran 2. Posisi Awal Partikel pada Metode PSO

| Partikel | ADMR.JK | BBCA.JK | PGAS.JK |
|----------|----------|----------|----------|
| 1 | 0,182059 | 0,462129 | 0,355812 |
| 2 | 0,657381 | 0,171323 | 0,171296 |
| 3 | 0,038078 | 0,567845 | 0,394077 |
| 4 | 0,416865 | 0,012119 | 0,571017 |
| 5 | 0,678655 | 0,173111 | 0,148234 |
| 6 | 0,181158 | 0,300515 | 0,518328 |
| 7 | 0,323548 | 0,218145 | 0,458307 |
| 8 | 0,174804 | 0,366096 | 0,4591 |
| 9 | 0,316513 | 0,544913 | 0,138574 |
| 10 | 0,445958 | 0,513758 | 0,040283 |
| 11 | 0,720591 | 0,202254 | 0,077156 |
| 12 | 0,348482 | 0,354632 | 0,296887 |
| 13 | 0,280358 | 0,089895 | 0,629748 |
| 14 | 0,416272 | 0,115417 | 0,468311 |
| 15 | 0,028598 | 0,756199 | 0,215204 |
| 16 | 0,443366 | 0,2086 | 0,348034 |
| 17 | 0,321377 | 0,108664 | 0,569959 |
| 18 | 0,297047 | 0,360036 | 0,342917 |
| 19 | 0,371767 | 0,57321 | 0,055024 |
| 20 | 0,345929 | 0,079831 | 0,57424 |