Método das aproximações sucessivas de Picard

Definição: Uma **E**quação **D**iferencial **O**rdinária (**EDO**) de ordem ***n*** é uma igualdade do tipo

$$\boxed{F(x,y,y',\ldots,y^{(n)})=0} \qquad (1)$$

Onde *F* é uma função de *n+2* variáveis e $y^{(n)}(x)=\dfrac{d^n y}{dx^n}(x)$.

OBS: Quando se pode explicitar a n-ésima derivada, $y^{(n)}$, na equação acima obtem-se a seguinte EDO

$$\boxed{y^{(n)}=f(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})} \qquad (2)$$

A qual é denominada ***forma normal*** de (1).

Método das aproximações sucessivas de Picard

OBS: O teorema da função implícita nos diz que a condição para que se possa reduzir uma EDO à sua forma normal é que se tenha F diferenciável com $\partial F / \partial y^{(n)}$ não identicamente nula.

OBS: Pode acontecer de se ter várias EDO's do tipo (2) associadas a apenas uma EDO do tipo (1). Como mostra o seguinte

Método das aproximações sucessivas de Picard

Exemplo: Reduzir a EDO de 1ª ordem

$$2(y')^2 - 10y' + 12 = 0$$

a forma normal.

Tem-se que $F(t, y, y') = 2(y')^2 - 10y' + 12$ é uma função diferenciável na variável y' e $\partial F / \partial y' = 4y' - 10$ só se anula em $y' = 5/2$ logo não é identicamente nula. Portanto, pode ser reduzida e obtemos que

$$2(y')^2 - 10y' + 12 = 2(y' - 2)(y' - 3)$$

Ou seja, a EDO possui duas EDO's normais associadas a ela

$$y' = 2 \quad \text{e} \quad y' = 3$$

Método das aproximações sucessivas de Picard

1.1 EDO Fundamental de 1ª ordem

$$\boxed{y' = f(x) \quad ,a < x < b} \qquad (4)$$

Neste tipo de EDO a “mudança”, dada por *f*(*x*), depende apenas da variável independente.Seu método de resolução é uma aplicação imediata do TFC, exigindo que f seja integrável em $]a,b[$.

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

é derivável em $]a,b[$, $F'(x) = f(x), \forall x \in]a,b[$ e $F(a) = 0$.

Método das aproximações sucessivas de Picard

TFC: Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua. Seja F uma primitiva de f, então

$$F(x)-F(a)=\int_a^x f(t)dt \quad ,\forall x\in[a,b].$$

Aplicação do TFC a EDO Fundamental:

$$\boxed{y'=f(x), a<x<b \Leftrightarrow y(x)=y(x_0)+\int_{x_0}^x f(t)dt, \forall x\in[a,b]} \qquad (5)$$

Para qualquer x_0 fixo em $[a,b]$.

OBS: A EDO (4) possui uma infinidade de soluções! De fato, para cada valor da constante $y(x_0)$, tem-se que $y(x)$ dado por (5) é uma solução.

Método das aproximações sucessivas de Picard

No caso da EDO fundamental acima basta particularizarmos a constante $y(x_0)$ para obtermos a unicidade da solução. Com isto somos levados, por **A. Cauchy**, a montarmos o protótipo de "quase" todo Modelo Matemático; um **Problema de Valor Inicial** (**PVI**) ou um **Problema de Cauchy**:

$$PVI: \begin{cases} y' = f(x), a < x < b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (6)$$

Onde x_0 foi tomado em $[a,b]$ e y_0 foi o valor escolhido para constante de integração $y(x_0)$, neste caso y_0 é denominado **valor inicial**.

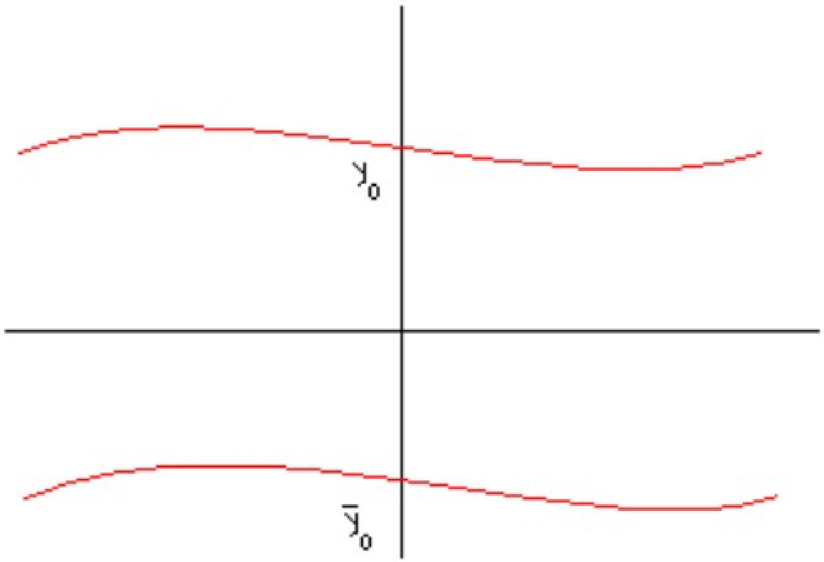
De modo que, pelo o que foi visto, o **PVI** acima possui uma única solução dada por

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x)dx \quad ,a < x < b \qquad (7)$$

Método das aproximações sucessivas de Picard

Definição: A solução *y*(*x*) dada por (7) denomina-se **curva integral.**

Interpretação gráfica:



Método das aproximações sucessivas de Picard

De maneira mais geral...

Considere-se o **problema de valor inicial**

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{2.1}$$

onde $f(x, y)$ é uma função contínua num domínio $D \subset \mathbb{R}^2$, que contém (x_0, y_0).

Teorema 2.1.1 *Se $f(x, y)$ é uma função contínua no domínio D então toda a solução de (2.1) é também solução da equação integral*

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \tag{2.2}$$

e reciprocamente.

Método das aproximações sucessivas de Picard

Dado um PVI para uma EDO normal de 1ª ordem, existe um teorema conhecido como método das aproximações sucessivas ou método iterativo de **Picard**, que nos informa sobre a existência e unicidade da solução de um PVI mesmo que não sejamos capazes de obtê-la explicitamente.

2.2 Método das aproximações sucessivas de Picard

Um processo para resolver a equação integral (2.2) é o método de aproximações sucesivas introduzido por Charles Émile Picard (1856 - 1941).

Considera-se como ponto de partida uma função contínua $y_0(x)$, frequentemente $y_0(x) \equiv y_0$, que constitui a "**aproximação inicial**" à solução de (2.2).

No passo seguinte, define-se

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))dt$$

e a terceira aproximação como

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))dt.$$

Iterando este processo otem-se a $(n+2)$-ésima aproximação como

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{2.10}$$

Método das aproximações sucessivas de Picard

A sucessão $(y_n(x))$ converge uniformemente para uma função contínua $y(x)$ num intervalo I que contenha x_0 e $(x, y_n(x)) \in D$, para todo o $x \in I$. Pelo Teorema 2.1.10 pode passar-se ao limite nos dois membros de (2.10), obtendo-se

$$y(x) = \lim y_{n+1}(x) = y_0 + \lim \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt,$$

pelo que $y(x)$ é a solução pretendida.

Teorema 2.1.10 *Sejam $(y_n(x))$ uma sucessão de funções que converge uniformemente para $y(x)$, em $[\alpha, \beta]$, e $f(x, y)$ uma função contínua no domínio D, tal que para todo n e x em $[\alpha, \beta]$ se tem $(x, y_n(x)) \in D$. Então*

$$\lim \int_{\alpha}^{\beta} f\left(x, y_n(x)\right) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \lim f\left(x, y_n(x)\right) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f\left(x, y(x)\right) dx.$$

Exemplo 2.2.1 *O problema de valor inicial*

$$y' = -y, \quad y(0) = 1,$$

é equivalente à equação integral

$$y(x) = 1 - \int_0^x y(t)dt.$$

Considerando $y_0(x) \equiv 1$ *então*

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 - \int_0^x 1dt = 1 - x \\ y_2(x) &= 1 - \int_0^x (1-t)\,dt = 1 - x + \frac{x^2}{2} \\ &\vdots \\ y_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!}. \end{aligned}$$

Recordando os desenvolvimentos em série de Taylor tem-se $\lim y_n(x) = e^{-x}$.
De facto $y(x) = e^{-x}$ *é solução do problema inicial para* $I = \mathbb{R}$.

Método das aproximações sucessivas de Picard

1. Todos os membros da sequência de aproximações sucessivas existirão?

2. A sequencia converge?

3. A solução é única?

Teorema de Existência e Unicidade: (Picard)

Dado o

$$PVI:\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Se as seguintes hipóteses são satisfeitas

(H1) $f(x,y)$ é contínua no retângulo $R: |x - x_0| \le \alpha, |y - y_0| \le \beta$

(H2) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ é contínua em R

Então definindo

$$M = \max_{(x,y)\in R}\{|f(x,y)|\} \quad \text{e} \quad \delta = \min\{\alpha, \frac{\beta}{M}\}$$

Tem-se que a sequência de funções

$$\varphi_n :]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\to \mathbb{R} : x \mapsto \varphi_n(x)$$

obtidas através do seguinte processo iterativo

$$\varphi_{n+1}(x) = T\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_n(s))ds \quad , \varphi_0 \equiv y_0$$

Converge uniformemente para uma função $\varphi(x)$ que é a ***única solução local*** do PVI.

Método das aproximações sucessivas de Picard

Exemplo: Seja o

$$PVI:\begin{cases} y' = xy \quad ,x \in \mathbb{R} \\ \quad y(0) = 1 \end{cases}$$

Como $f(x,y)$ = xy satisfaz as hipóteses do **TEU** em qualquer vizinhança (retângulo) do ponto (0,1), então podemos aplicar o método recursivo de Picard para obtermos a seguinte sequência de funções;

$$\varphi_{n+1}(x) = 1 + \int_0 s\varphi_n(s)ds \quad ,\varphi_0 = 1$$

Tem-se que

$$\varphi_1(x) = T\varphi_0(x) = 1 + \int_0^x sds = 1 + \frac{x^2}{2}$$

$$\varphi_2(x) = T\varphi_1(x) = 1 + \int_0^x s(1 + \frac{s^2}{2})ds = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.4}$$

$$\varphi_3(x) = T\varphi_2(x) = 1 + \int_0^x s(1 + \frac{s^2}{2} + \frac{s^4}{2.4})ds = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.4} + \frac{x^6}{2.4.6}$$

Método das aproximações sucessivas de Picard

De modo que,

$$\varphi_n(x) = 1 + \frac{x^2}{2.4} + \cdots + \frac{x^{2n}}{2^n n!}$$

Logo,

$$\varphi(x) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2/2)^n}{n!} = e^{x^2/2}$$

Portanto, a solução do PVI é dada por

$$y(x) = \varphi(x) = e^{x^2/2}, \forall x \in \mathbb{R} \; .$$

Método das aproximações sucessivas de Picard

Notas de aula do Prof. Paulo Marcelo Dias de Magalhães – UFOP
Notas de aula do Prof. Feliz Manuel Barrão Minhós – Univ. Évora
Boyce, W. DiPrima, R. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno