



# Cálculo Numérico

## **Equações Diferenciais Ordinárias**

## Equações diferenciais ordinárias

- 7.1 Solução numérica de EDO
- 7.2 Métodos de Runge-Kutta
- 7.3 Métodos de Adams
- 7.4 Comparação de métodos para EDO
- 7.5 Sistemas de equações diferenciais ordinárias
- 7.6 Exemplos de aplicação: controle de poluição e deflexão de viga
- 7.7 Exercícios

## Equações diferenciais ordinárias

- Ferramentas fundamentais para modelagem matemática de vários fenômenos físicos, químicos, biológicos etc.
- Fenômenos descritos em termos de taxa de variação.
- Taxa de variação da corrente  $i$  em função do tempo  $t$  em circuito RL

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{V - i(t)R}{L}, \quad (1)$$

onde  $V$ : tensão entre dois pontos do circuito,  $R$ : resistência e  $L$ : indutância.

- Equação diferencial ordinária de primeira ordem.
- Equação diferencial é ordinária porque corrente  $i$  é função apenas de uma variável independente, o tempo  $t$ .

## Ordem de uma EDO

- Se função fosse definida em termos de duas ou mais variáveis, ter-se-ia uma equação diferencial parcial.
- Equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0.$$

- A EDO (1) é de primeira ordem, pois a derivada de maior ordem,  $di(t)/dt$ , é de ordem 1.
- Quando a equação contiver uma derivada de ordem  $n$ , ela é dita EDO de ordem  $n$

$$L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = \frac{dV(t)}{dt}$$

é EDO de segunda ordem, sendo  $C$  a capacitância do circuito.

## Solução de EDO

- Solução de EDO é uma função que satisfaz à equação diferencial.
- Também satisfaz certas condições iniciais na função.
- Resolver uma EDO, analiticamente, é encontrar uma solução geral contendo constantes arbitrárias.
- Determinar essas constantes de modo que a expressão combine com as condições iniciais.

## Solução numérica de EDO

- Métodos analíticos são restritos apenas à algumas formas especiais de função.
- Nem toda EDO tem solução analítica.
- Métodos numéricos não possuem tal limitação.
- Solução numérica obtida como tabela de valores da função em vários valores da variável independente.
- Solução analítica é uma relação funcional.
- Praticamente, qualquer EDO pode ser resolvida numericamente.
- Se as condições iniciais forem alteradas então toda tabela deve ser recalculada.
- Métodos numéricos para solução de equações diferenciais ordinárias sujeitas às condições iniciais.

## Problema de valor inicial

- Problema de valor inicial (PVI) de primeira ordem

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(a) = \eta, \\ a \leq x \leq b \text{ e } -\infty \leq y \leq \infty. \end{cases} \quad (2)$$

- Solução do PVI é uma função  $y = y(x)$  contínua e diferenciável que satisfaz a (2).
- Teorema 1 estabelece condições suficientes para existência de solução única do PVI.

## Métodos numéricos para EDO

- Calcular uma aproximação  $y_i$  da solução exata  $y(x_i)$  do PVI nos pontos

$$x_i = a + ih, \quad h = \frac{b - a}{m}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m,$$

onde  $m$ : número de subintervalos de  $[a, b]$  e  $h$ : incremento ou passo.

- Solução numérica do PVI é uma tabela contendo os pares  $(x_i, y_i)$ , sendo

$$y_i \approx y(x_i).$$



## Método de Euler

- Expansão da solução exata  $y(x)$ , em série de Taylor, em torno do valor inicial  $x_0$

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2}y''(x_0) + \frac{h^3}{6}y'''(x_0) + \dots$$

- Truncando a série após derivada primeira, sendo  $x_1 = x_0 + h$ ,  $y_1$ : uma aproximação de  $y(x_1)$  e  $y' = f(x, y)$

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

- Sucessivas aproximações  $y_i$  de  $y(x_i)$  obtidas pela fórmula de recorrência

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i). \quad (4)$$

- Fórmula conhecida como método de Euler.
- Leonhard Euler propôs este método em 1768.

## Algoritmo de Euler para solução de problema de valor inicial

### Algoritmo Euler

{ **Objetivo:** Resolver um PVI pelo método de Euler }

**parâmetros de entrada**  $a, b, m, y_0$

{ limite inferior, limite superior, número de subintervalos e valor inicial }

**parâmetros de saída**  $VetX, VetY$  { abscissas e solução do PVI }

$h \leftarrow (b - a)/m; x \leftarrow a; y \leftarrow y_0$

$F_{xy} \leftarrow f(x, y)$  { avaliar  $f(x, y)$  em  $x = x_0$  e  $y = y_0$  }

$VetX(1) \leftarrow x; VetY(1) \leftarrow y$

**para**  $i \leftarrow 1$  **até**  $m$  **faça**

$x \leftarrow a + i * h$

$y \leftarrow y + h * F_{xy}$

$F_{xy} \leftarrow f(x, y)$  { avaliar  $f(x, y)$  em  $x = x_i$  e  $y = y_i$  }

**escreva**  $i, x, y, F_{xy}$

$VetX(i + 1) \leftarrow x; VetY(i + 1) \leftarrow y$

**fimpara**

**fimalgoritmo**

## Exemplo de uso do algoritmo

**Exemplo 1** Calcular a solução do PVI

$$y' = x - 2y + 1, \text{ com } y(0) = 1, \quad (5)$$

no intervalo  $[0, 1]$ , com  $m = 10$  subintervalos, utilizando o algoritmo de Euler.

```
% Os parametros de entrada
```

```
a = 0
```

```
b = 1
```

```
m = 10
```

```
y0 = 1
```

```
% produzem os resultados
```

```
Metodo de Euler
```

i	x	y	f(x,y)
0	0.00000	1.00000	-1.00000
1	0.10000	0.90000	-0.70000
2	0.20000	0.83000	-0.46000
3	0.30000	0.78400	-0.26800
4	0.40000	0.75720	-0.11440
5	0.50000	0.74576	0.00848
6	0.60000	0.74661	0.10678
7	0.70000	0.75729	0.18543
8	0.80000	0.77583	0.24834
9	0.90000	0.80066	0.29867
10	1.00000	0.83053	0.33894

Comparação da solução pelo método de Euler

• Solução exata do PVI (5)

$$y(x) = \frac{1}{4}(3e^{-2x} + 2x + 1).$$

(6)

$i$	$x_i$	$y_i$	$ y_i - y(x_i) $	$i$	$x_i$	$y_i$	$ y_i - y(x_i) $
0	0,0	1,0000	0,0000	0	0,0	1,0000	0,0000
1	0,1	0,9000	0,0140	10	0,1	0,9128	0,0012
2	0,2	0,8300	0,0227	20	0,2	0,8507	0,0020
3	0,3	0,7840	0,0276	30	0,3	0,8091	0,0025
4	0,4	0,7572	0,0298	40	0,4	0,7843	0,0027
5	0,5	0,7458	0,0301	50	0,5	0,7731	0,0028
6	0,6	0,7466	0,0293	60	0,6	0,7732	0,0027
7	0,7	0,7573	0,0277	70	0,7	0,7823	0,0026
8	0,8	0,7758	0,0256	80	0,8	0,7990	0,0024
9	0,9	0,8007	0,0233	90	0,9	0,8217	0,0022
10	1,0	0,8305	0,0210	100	1,0	0,8495	0,0020

(a)  $m = 10 \rightarrow h = 0,1.$

(b)  $m = 100 \rightarrow h = 0,01.$

- Método de Euler com  $h = 0,1$  fornece só uma decimal exata para o PVI (5).
- Redução do passo  $h$  para 0,01 melhora solução numérica do PVI.
- Exatidão da solução melhorada quando o valor do passo for reduzido.

## Definições

**Definição 1 (Passo simples)** *Um método será de passo simples quando a aproximação  $y_{i+1}$  for calculada a partir somente do valor  $y_i$  do passo anterior. Sendo  $\phi$  a função incremento, um método de passo simples é definido na forma*

$$y_{i+1} = y_i + h\phi(x_i, y_i; h).$$

**Definição 2 (Passo múltiplo)** *Sejam os  $p$  valores  $y_i, y_{i-1}, y_{i-2}, \dots, y_{i-p+1}$  previamente calculados por algum método. Um método é de passo múltiplo se estes  $p$  valores  $y_i, y_{i-1}, y_{i-2}, \dots, y_{i-p+1}$  forem utilizados para calcular  $y_{i+1}$ , para  $i = p - 1, p, p + 1, \dots, m - 1$ .*

## Definições

**Definição 3 (Erro local)** *Supondo que o valor calculado por um método de passo  $k$  seja exato, isto é,  $y_{i+j} = y(x_{i+j})$  para  $j = 0, 1, \dots, k-1$ , então o erro local em  $x_{i+k}$  é definido por*

$$e_{i+k} = y(x_{i+k}) - y_{i+k}.$$

**Definição 4 (Ordem)** *Um método de passo simples terá ordem  $q$  se a função incremento  $\phi$  for tal que*

$$y(x+h) = y(x) + h\phi(x, y; h) + O(h^{q+1}).$$

**Definição 5 (Consistência)** *Um método numérico é dito consistente com o PVI (2) se a sua ordem  $q \geq 1$ .*

## Definições

**Definição 6 (Convergência)** *Um método de passo  $k$  é convergente se, para o PVI (2),*

$$\lim_{h \rightarrow 0} y_i = y(x_i), \quad ih = x - a$$

*é válido para todo  $x \in [a, b]$ , e os valores iniciais são tais que*

$$\lim_{h \rightarrow 0} y_j(h) = \eta, \quad j = 0, 1, \dots, k - 1.$$

- Consistência significa que a solução numérica corresponde à solução do PVI.
- Consistência de um método limita a magnitude do erro local cometido em cada passo.
- Estabilidade controla a propagação do erro durante os cálculos.
- Um método é convergente se ele for consistente e estável.
- Por (4) e pelas Definições 1 e 4, o método de Euler é de passo simples e tem ordem 1.

## Métodos de Runge-Kutta

- Exatidão dos resultados melhorada se passo  $h$  for reduzido.
- Se exatidão requerida for elevada redução do passo pode acarretar grande esforço computacional.
- Melhor exatidão obtida mais eficientemente pela formulação denominada métodos de Runge-Kutta.
- C. D. T. Runge desenvolveu o primeiro método em 1895.
- M. W. Kutta elaborou a formulação geral em 1901.
- Runge-Kutta são métodos de passo simples de acordo com Definição 1.



## Métodos de Runge-Kutta explícitos

- Forma geral dos métodos explícitos de  $s$  estágios

$$y_{i+1} = y_i + h\phi(x_i, y_i; h), \text{ onde } \phi(x, y; h) = b_1k_1 + b_2k_2 + \dots + b_s k_s, \text{ com } (7)$$

$$k_1 = f(x, y),$$

$$k_2 = f(x + c_2h, y + a_{21}hk_1),$$

$$k_3 = f(x + c_3h, y + h(a_{31}k_1 + a_{32}k_2)),$$

...

$$k_s = f(x + c_sh, y + h(a_{s1}k_1 + a_{s2}k_2 + \dots + a_{s,s-1}k_{s-1})),$$

sendo  $a$ ,  $b$  e  $c$  constantes definidas para cada método particular.

## Constantes na notação de Butcher

$$\begin{array}{c|cccc}
 0 & & & & \\
 c_2 & a_{21} & & & \\
 c_3 & a_{31} & a_{32} & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
 c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{s,s-1} \\
 \hline
 & b_1 & b_2 & \dots & b_{s-1} & b_s
 \end{array}$$

## Métodos de Runge-Kutta de segunda ordem

- Expansão em série de Taylor, com derivadas em  $y$  escritas em termos de  $f$ , a partir de  $dy/dx = f(x, y)$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2}f'(x_i, y_i) + \dots$$

- Como

$$f'(x, y) \equiv \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} \rightarrow f'(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial f}{\partial y}.$$

- Simplificando a notação:  $f_i = f(x_i, y_i)$ .

- Sendo

$$\frac{\partial f_i}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i) \text{ e } \frac{\partial f_i}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i),$$
$$y_{i+1} = y_i + hf_i + h^2 \left( \frac{1}{2} \frac{\partial f_i}{\partial x} + \frac{1}{2} f_i \frac{\partial f_i}{\partial y} \right).$$

(8)

- Escrevendo (7) em termos de  $k_1$  e  $k_2$

$$y_{i+1} = y_i + b_1 h f(x_i, y_i) + b_2 h f(x_i + c_2 h, y_i + a_{21} h f(x_i, y_i)).$$

- Expandindo  $f(x, y)$ , em série de Taylor, em termos de  $(x_i, y_i)$ .
- Retendo somente os termos de derivada primeira

$$f(x_i + c_2 h, y_i + a_{21} h f(x_i, y_i)) \approx f_i + c_2 h \frac{\partial f_i}{\partial x} + a_{21} h f_i \frac{\partial f_i}{\partial y}.$$

- Substituindo na equação anterior

$$y_{i+1} = y_i + b_1 h f_i + b_2 h \left( f_i + c_2 h \frac{\partial f_i}{\partial x} + a_{21} h f_i \frac{\partial f_i}{\partial y} \right).$$

- Rearranjando

$$y_{i+1} = y_i + h(b_1 + b_2) f_i + h^2 \left( b_2 c_2 \frac{\partial f_i}{\partial x} + b_2 a_{21} f_i \frac{\partial f_i}{\partial y} \right). \quad (9)$$

- Comparando (8) e (9).
- Sistema não linear com 3 equações e 4 incógnitas

$$b_1 + b_2 = 1,$$

$$b_2 c_2 = 1/2,$$

$$b_2 a_{21} = 1/2.$$

- Variedade de métodos de segunda ordem.

## Método de Euler modificado

- Método de Runge-Kutta de segunda ordem é chamado método de Euler modificado.
- Constantes do método de Euler modificado

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1/2 & 1/2 & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}.$$

- Método de Euler modificado

$$y_{i+1} = y_i + hf \left( x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i) \right). \quad (10)$$

## Método de Euler melhorado

- Método de Runge-Kutta de segunda ordem.
- Constantes do método de Euler melhorado

$$\begin{array}{c|c} 0 & \\ 1 & 1 \\ \hline & 1/2 \quad 1/2 \end{array}.$$

- Método de Euler melhorado

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i))). \quad (11)$$

## Comparação dos métodos de Euler

**Exemplo 2** Comparar a solução do PVI  $y' = -2xy^2$ , com  $y(0) = 0,5$ , no intervalo  $[0, 1]$ , com  $m = 10$  subintervalos, utilizando os métodos de Euler, Euler modificado e Euler melhorado, sabendo que a solução exata é

$$y(x) = \frac{1}{x^2 + 2}.$$

$i$	$x_i$	$ y_i^E - y(x_i) $	$ y_i^{\text{Emod}} - y(x_i) $	$ y_i^{\text{Emel}} - y(x_i) $
0	0,0	0	0	0
1	0,1	$2,49 \times 10^{-3}$	$1,24 \times 10^{-5}$	$1,24 \times 10^{-5}$
2	0,2	$4,80 \times 10^{-3}$	$4,76 \times 10^{-5}$	$2,32 \times 10^{-5}$
3	0,3	$6,73 \times 10^{-3}$	$9,83 \times 10^{-5}$	$2,97 \times 10^{-5}$
4	0,4	$8,11 \times 10^{-3}$	$1,55 \times 10^{-4}$	$2,89 \times 10^{-5}$
5	0,5	$8,88 \times 10^{-3}$	$2,06 \times 10^{-4}$	$1,91 \times 10^{-5}$
6	0,6	$9,04 \times 10^{-3}$	$2,45 \times 10^{-4}$	$2,60 \times 10^{-8}$
7	0,7	$8,69 \times 10^{-3}$	$2,67 \times 10^{-4}$	$2,70 \times 10^{-5}$
8	0,8	$7,94 \times 10^{-3}$	$2,71 \times 10^{-4}$	$5,96 \times 10^{-5}$
9	0,9	$6,93 \times 10^{-3}$	$2,59 \times 10^{-4}$	$9,48 \times 10^{-5}$
10	1,0	$5,77 \times 10^{-3}$	$2,35 \times 10^{-4}$	$1,30 \times 10^{-4}$



## Métodos de quarta ordem

- Mesmo desenvolvimento utilizado para obter métodos de Runge-Kutta de ordem mais elevada.
- No caso de quarta ordem: sistema não linear com 11 equações e 13 incógnitas.
- Um dos métodos mais comuns desta ordem é o método clássico de Runge-Kutta.
- Constantes do método de Runge-Kutta de quarta ordem

0				
1/2	1/2			
1/2	0	1/2		
1	0	0	1	
<hr/>				
	1/6	1/3	1/3	1/6

## Algoritmo de Runge-Kutta de ordem 4 para a solução de PVI

### Algoritmo RK4

{ **Objetivo:** Resolver um PVI pelo método de Runge-Kutta de ordem 4 }

**parâmetros de entrada**  $a$ ,  $b$ ,  $m$ ,  $y_0$

{ limite inferior, limite superior, número de subintervalos e valor inicial }

**parâmetros de saída**  $VetX$ ,  $VetY$

{ abscissas e solução do PVI }

$h \leftarrow (b - a)/m$ ;  $xt \leftarrow a$ ;  $yt \leftarrow y_0$ ;  $VetX(1) \leftarrow xt$ ;  $VetY(1) \leftarrow yt$

escreva  $0, xt, yt$

**para**  $i \leftarrow 1$  **até**  $m$  **faça**

$x \leftarrow xt$ ;  $y \leftarrow yt$ ;  $k1 \leftarrow f(x, y)$  { avaliar  $f(x, y)$  }

$x \leftarrow xt + h/2$ ;  $y \leftarrow yt + h/2 * k1$ ;  $k2 \leftarrow f(x, y)$  { avaliar  $f(x, y)$  }

$y \leftarrow yt + h/2 * k2$ ;  $k3 \leftarrow f(x, y)$  { avaliar  $f(x, y)$  }

$x \leftarrow xt + h$ ;  $y \leftarrow yt + h * k3$ ;  $k4 \leftarrow f(x, y)$  { avaliar  $f(x, y)$  }

$xt \leftarrow a + i * h$ ;  $yt \leftarrow yt + h/6 * (k1 + 2 * (k2 + k3) + k4)$

escreva  $i, xt, yt$

$VetX(i + 1) \leftarrow xt$ ;  $VetY(i + 1) \leftarrow yt$

**fimpara**

**finalgoritmo**

## Exemplo de uso do algoritmo

**Exemplo 3** Calcular a solução do PVI do Exemplo 1,  $y' = x - 2y + 1$ , com  $y(0) = 1$ , no intervalo  $[0, 1]$ , com  $m = 10$  subintervalos, pelo algoritmo de Runge-Kutta de ordem 4.

```
% Os parametros de entrada
a = 0
b = 1
m = 10
y0 = 1
% fornecem os resultados
Metodo de Runge-Kutta - ordem 4
```

i	x	y
0	0.00000	1.00000
1	0.10000	0.91405
2	0.20000	0.85274
3	0.30000	0.81161
4	0.40000	0.78700
5	0.50000	0.77591
6	0.60000	0.77590
7	0.70000	0.78495
8	0.80000	0.80143
9	0.90000	0.82398
10	1.00000	0.85150

## Comparação da solução pelo método de Runge-Kutta

- Diferença entre o valor aproximado  $y_i$  dado pelo método de Runge-Kutta de ordem 4 e a solução exata  $y(x_i)$  dada por (6).

$i$	$x_i$	$y_i$	$ y_i - y(x_i) $
0	0,0	1,0000	0
1	0,1	0,9141	$1,94 \times 10^{-6}$
2	0,2	0,8527	$3,17 \times 10^{-6}$
3	0,3	0,8116	$3,89 \times 10^{-6}$
4	0,4	0,7870	$4,25 \times 10^{-6}$
5	0,5	0,7759	$4,35 \times 10^{-6}$
6	0,6	0,7759	$4,27 \times 10^{-6}$
7	0,7	0,7850	$4,08 \times 10^{-6}$
8	0,8	0,8014	$3,82 \times 10^{-6}$
9	0,9	0,8240	$3,52 \times 10^{-6}$
10	1,0	0,8515	$3,20 \times 10^{-6}$

(a)  $m = 10 \rightarrow h = 0,1$ .

$i$	$x_i$	$y_i$	$ y_i - y(x_i) $
0	0,0	1,0000	0
10	0,1	0,9140	$1,66 \times 10^{-10}$
20	0,2	0,8527	$2,73 \times 10^{-10}$
30	0,3	0,8116	$3,35 \times 10^{-10}$
40	0,4	0,7870	$3,66 \times 10^{-10}$
50	0,5	0,7759	$3,74 \times 10^{-10}$
60	0,6	0,7759	$3,68 \times 10^{-10}$
70	0,7	0,7849	$3,51 \times 10^{-10}$
80	0,8	0,8014	$3,28 \times 10^{-10}$
90	0,9	0,8240	$3,03 \times 10^{-10}$
100	1,0	0,8515	$2,75 \times 10^{-10}$

(b)  $m = 100 \rightarrow h = 0,01$ .

## Método de Runge-Kutta-Fehlberg

- Verificar se um método de Runge-Kutta produz valores dentro da exatidão desejada.
- Recalcular o valor de  $y_{i+1}$  no final de cada intervalo, utilizando o passo  $h$  dividido ao meio.
- Valor aceito se houver apenas uma pequena diferença entre os dois resultados.
- Passo  $h$  dividido ao meio até que a exatidão desejada seja alcançada.
- Esta estratégia pode requerer grande esforço computacional.
- Processo proposto por E. Fehlberg, no final da década de 1960, utiliza dois métodos de ordens diferentes, um de ordem 4 e outro de ordem 5.
- Compara os valores de  $y_{i+1}$  obtidos nos dois casos.
- Método de Runge-Kutta-Fehlberg é considerado um método de ordem 4.

## Método de Dormand-Prince

- No início da década de 1980, J. R. Dormand e P. J. Prince propuseram um método similar ao de Runge-Kutta-Fehlberg, porém de ordem 5.
- Constantes do método de Dormand-Prince

0							
1/5	1/5						
3/10	3/40	9/40					
4/5	44/45	-56/15	32/9				
8/9	19372/6561	-25360/2187	64448/6561	-212/729			
1	9017/3168	-355/33	46732/5247	49/176	-5103/18656		
1	35/384	0	500/1113	125/192	-2187/6784	11/84	
	35/384	0	500/1113	125/192	-2187/6784	11/84	0
$e_i$	71/57600	0	-71/16695	71/1920	-17253/339200	22/525	-1/40

- Constantes  $a_{7i} = b_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$ .
- Linha  $e_i$  contém coeficientes para calcular erros globais: diferenças entre  $y_{i+1}$  obtido pelo processo de ordem 5 e o de ordem 4.

## Algoritmo de Dormand-Prince para a solução de PVI

### Algoritmo DOPRI(5,4)

{ **Objetivo:** Resolver um PVI pelo método de Dormand-Prince }

**parâmetros de entrada**  $a, b, m, y0$  { limite inferior, limite superior, número de subintervalos e valor inicial }

**parâmetros de saída**  $VetX, VetY, EG$  { abscissas, solução do PVI e erro global }

{ parâmetros do método }

$a21 \leftarrow 1/5; a31 \leftarrow 3/40; a32 \leftarrow 9/40; a41 \leftarrow 44/45; a42 \leftarrow -56/15; a43 \leftarrow 32/9$

$a51 \leftarrow 19372/6561; a52 \leftarrow -25360/2187; a53 \leftarrow 64448/6561; a54 \leftarrow -212/729$

$a61 \leftarrow 9017/3168; a62 \leftarrow -355/33; a63 \leftarrow 46732/5247; a64 \leftarrow 49/176$

$a65 \leftarrow -5103/18656; a71 \leftarrow 35/384; a73 \leftarrow 500/1113; a74 \leftarrow 125/192$

$a75 \leftarrow -2187/6784; a76 \leftarrow 11/84$

$c2 \leftarrow 1/5; c3 \leftarrow 3/10; c4 \leftarrow 4/5; c5 \leftarrow 8/9; c6 \leftarrow 1; c7 \leftarrow 1$

$e1 \leftarrow 71/57600; e3 \leftarrow -71/16695; e4 \leftarrow 71/1920; e5 \leftarrow -17253/339200; e6 \leftarrow 22/525; e7 \leftarrow -1/40$

$h \leftarrow (b - a)/m; xt \leftarrow a; yt \leftarrow y0; VetX(1) \leftarrow xt; VetY(1) \leftarrow yt; EG(1) \leftarrow 0; escreva 0, xt, yt$

**para**  $i \leftarrow 1$  **até**  $m$  **faça**

$x \leftarrow xt; y \leftarrow yt; k1 \leftarrow h * f(x, y)$  { avaliar  $f(x, y)$  }

$x \leftarrow xt + c2 * h; y \leftarrow yt + a21 * k1; k2 \leftarrow h * f(x, y)$  { avaliar  $f(x, y)$  }

$x \leftarrow xt + c3 * h; y \leftarrow yt + a31 * k1 + a32 * k2; k3 \leftarrow h * f(x, y)$  { avaliar  $f(x, y)$  }

$x \leftarrow xt + c4 * h; y \leftarrow yt + a41 * k1 + a42 * k2 + a43 * k3; k4 \leftarrow h * f(x, y)$  { avaliar  $f(x, y)$  }

$x \leftarrow xt + c5 * h; y \leftarrow yt + a51 * k1 + a52 * k2 + a53 * k3 + a54 * k4; k5 \leftarrow h * f(x, y)$  { avaliar  $f(x, y)$  }

$x \leftarrow xt + c6 * h; y \leftarrow yt + a61 * k1 + a62 * k2 + a63 * k3 + a64 * k4 + a65 * k5; k6 \leftarrow h * f(x, y)$  { avaliar  $f(x, y)$  }

$x \leftarrow xt + c7 * h; y \leftarrow yt + a71 * k1 + a73 * k3 + a74 * k4 + a75 * k5 + a76 * k6; k7 \leftarrow h * f(x, y)$  { avaliar  $f(x, y)$  }

$xt \leftarrow a + i * h; yt \leftarrow yt + a71 * k1 + a73 * k3 + a74 * k4 + a75 * k5 + a76 * k6$

$ErroGlobal \leftarrow e1 * k1 + e3 * k3 + e4 * k4 + e5 * k5 + e6 * k6 + e7 * k7$

$VetX(i + 1) \leftarrow xt; VetY(i + 1) \leftarrow yt; EG(i + 1) \leftarrow ErroGlobal; escreva i, xt, yt, ErroGlobal$

**fimpara**

**fimalgoritmo**

## Exemplo de uso do algoritmo

**Exemplo 4** Calcular a solução do PVI do Exemplo 1,  $y' = x - 2y + 1$ , com  $y(0) = 1$ , no intervalo  $[0, 1]$ , com  $m = 10$  subintervalos, pelo algoritmo de Dormand-Prince.

```
% Os parametros de entrada
```

```
a = 0
```

```
b = 1
```

```
m = 10
```

```
y0 = 1
```

```
% produzem os resultados
```

```
Metodo de Dormand-Prince
```

i	x	y	Erro
0	0.00000	1.00000	
1	0.10000	0.91405	2.100e-07
2	0.20000	0.85274	1.719e-07
3	0.30000	0.81161	1.408e-07
4	0.40000	0.78700	1.153e-07
5	0.50000	0.77591	9.436e-08
6	0.60000	0.77590	7.725e-08
7	0.70000	0.78495	6.325e-08
8	0.80000	0.80142	5.179e-08
9	0.90000	0.82397	4.240e-08
10	1.00000	0.85150	3.471e-08



## Comparação da solução pelo método de Dormand-Prince

- Diferença entre valor aproximado  $y_i$  dado pelo método de Dormand-Prince e solução exata  $y(x_i)$  dada por (6).

$i$	$x_i$	$y_i$	$ y_i - y(x_i) $
0	0,0	1,0000	0
1	0,1	0,9140	$1,52 \times 10^{-8}$
2	0,2	0,8527	$2,49 \times 10^{-8}$
3	0,3	0,8116	$3,05 \times 10^{-8}$
4	0,4	0,7870	$3,33 \times 10^{-8}$
5	0,5	0,7759	$3,41 \times 10^{-8}$
6	0,6	0,7759	$3,35 \times 10^{-8}$
7	0,7	0,7849	$3,20 \times 10^{-8}$
8	0,8	0,8014	$3,00 \times 10^{-8}$
9	0,9	0,8240	$2,76 \times 10^{-8}$
10	1,0	0,8515	$2,51 \times 10^{-8}$

(a)  $m = 10$  subintervalos.

$i$	$x_i$	$y_i$	$ y_i - y(x_i) $
0	0,0	1,0000	0
10	0,1	0,9140	$1,13 \times 10^{-13}$
20	0,2	0,8527	$1,86 \times 10^{-13}$
30	0,3	0,8116	$2,27 \times 10^{-13}$
40	0,4	0,7870	$2,48 \times 10^{-13}$
50	0,5	0,7759	$2,54 \times 10^{-13}$
60	0,6	0,7759	$2,49 \times 10^{-13}$
70	0,7	0,7849	$2,38 \times 10^{-13}$
80	0,8	0,8014	$2,23 \times 10^{-13}$
90	0,9	0,8240	$2,05 \times 10^{-13}$
100	1,0	0,8515	$1,87 \times 10^{-13}$

(b)  $m = 100$  subintervalos.

## Métodos lineares de passo múltiplo

- Classe de métodos para resolver o problema de valor inicial (Definição 2).
- Método de passo  $k$  na forma

$$\alpha_k y_{i+k} + \alpha_{k-1} y_{i+k-1} + \dots + \alpha_0 y_i = h(\beta_k f_{i+k} + \beta_{k-1} f_{i+k-1} + \dots + \beta_0 f_i), \quad (12)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes específicas de um método particular, sujeitas às condições

$$\alpha_k = 1 \text{ e } |\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0.$$

- Quando  $\beta_k = 0$ , método é dito explícito e para  $\beta_k \neq 0$  ele é implícito.
- Explícitos são chamados métodos de Adams-Bashforth.
- J. C. Adams e F. Bashforth propuseram, em 1883, um método para resolver um problema de ação capilar.
- Implícitos são conhecidos como métodos de Adams-Moulton.
- F. R. Moulton melhorou o método de Adams para calcular trajetórias balísticas na Primeira Guerra Mundial.

## Métodos de Adams

- Obtidos por integração do PVI (2)

$$y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t, y(t)) dt.$$

- Função integrando  $f(x, y(x))$  aproximada por polinômio interpolador.
- Polinômio  $P(x)$  passa pelos pontos de coordenadas  $(x_j, f(x_j, y_j))$

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} P(x) dx. \quad (13)$$

## Métodos explícitos de passo dois

- Polinômio de Lagrange de grau 1 que passa por  $(x_0, f_0)$  e  $(x_1, f_1)$

$$P_1(x) = f_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}. \quad (14)$$

- Valor de  $f_0 = f(x_0, y_0)$  obtido a partir de  $y_0$  (condição inicial).
- Valor de  $y_1$  para  $f_1 = f(x_1, y_1)$  calculado por método de passo simples.
- Fazendo

$$u = \frac{x - x_0}{h} \rightarrow x - x_0 = hu \text{ e } x - x_1 = x - x_0 - h = h(u - 1).$$

- Substituindo as expressões em (14)

$$P_1(x) = f_1 \frac{hu}{h} + f_0 \frac{h(u - 1)}{-h} \longrightarrow P_1(x) = f_1 u + f_0(1 - u).$$

- Integrando

$$y_2 = y_1 + \int_{x_1}^{x_2} P_1(x) dx.$$

## Método explícito de Adams-Bashforth de passo dois

- Mudança de variável:  $x \rightarrow u$  e sendo  $dx = hdu$

$$\begin{aligned}y_2 &= y_1 + \int_1^2 [f_1 u + f_0(1 - u)] h du, \\&= y_1 + h \left[ f_1 \left( \frac{u^2}{2} \right) + f_0 \left( u - \frac{u^2}{2} \right) \right] \Big|_1^2, \\&= y_1 + h \left( \frac{3}{2} f_1 - \frac{1}{2} f_0 \right), \\y_2 &= y_1 + \frac{h}{2} (3f_1 - f_0).\end{aligned}$$

- Fórmula explícita de Adams-Bashforth de passo  $k = 2$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (3f_i - f_{i-1}). \quad (15)$$

## Métodos implícitos de passo dois

- Método explícito obtido pela integração do polinômio no intervalo  $[x_1, x_2]$ .
- Polinômio  $P(x)$  determinado a partir dos pontos em  $[x_0, x_1]$ .
- Extrapolação não produz bons resultados.
- Se polinômio for construído usando pontos no intervalo  $[x_0, x_2]$  consegue-se método mais exato.
- Polinômio de Lagrange de grau 2 que passa por  $(x_0, f_0)$ ,  $(x_1, f_1)$  e  $(x_2, f_2)$

$$P_2(x) = f_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

- Definindo variável auxiliar

$$u = \frac{x - x_0}{h} \rightarrow x - x_0 = hu, \quad x - x_1 = h(u - 1) \quad \text{e} \quad x - x_2 = h(u - 2),$$

$$P_2(x) = f_2 \frac{u(u - 1)}{2} - f_1 u(u - 2) + f_0 \frac{(u - 1)(u - 2)}{2}. \quad (16)$$

- Substituindo (16) em (13)

$$y_2 = y_1 + \int_{x_1}^{x_2} P_2(x) dx.$$

- Mudança de variável:  $x \rightarrow u$

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + \int_1^2 \left[ f_2 \frac{u(u-1)}{2} - f_1 u(u-2) + f_0 \frac{(u-1)(u-2)}{2} \right] h du, \\ &= y_1 + h \left[ f_2 \left( \frac{u^3}{6} - \frac{u^2}{4} \right) - f_1 \left( \frac{u^3}{3} - u^2 \right) + f_0 \left( \frac{u^3}{6} - \frac{3u^2}{4} + u \right) \right] \Big|_1^2, \end{aligned}$$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{12} (5f_2 + 8f_1 - f_0).$$

## Método implícito de Adams-Moulton de passo dois

- Fórmula implícita de Adams-Moulton de passo  $k = 2$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}(5f_{i+1} + 8f_i - f_{i-1}). \quad (17)$$

- Valor de  $f_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1})$  necessário para obter o próprio  $y_{i+1}$ .
- Valor de  $y_{i+1}$  obtido por Adams-Bashforth usado em Adams-Moulton para avaliar  $f_{i+1}$  e calcular valor melhor de  $y_{i+1}$ .
- Método do tipo preditor-corretor
  - preditor: Adams-Bashforth
  - corretor: Adams-Moulton.



## Comparação da solução pelo método preditor-corretor de passo dois

**Exemplo 5** Calcular a solução do PVI do Exemplo 1,  $y' = x - 2y + 1$ , com  $y(0) = 1$ , no intervalo  $[0, 1]$  utilizando o método preditor-corretor de passo dois.

- Diferença entre valor aproximado  $y_i$  e solução exata  $y(x_i)$  dada por (6).
- Valores de  $f_1$  calculados pelo método de Dormand-Prince.

$i$	$x_i$	$y_i$	$ y_i - y(x_i) $
0	0,00	1,0000	0
1	0,10	0,9140	$1,52 \times 10^{-8}$
2	0,20	0,8526	$1,35 \times 10^{-4}$
3	0,30	0,8114	$2,19 \times 10^{-4}$
4	0,40	0,7867	$2,68 \times 10^{-4}$
5	0,50	0,7756	$2,92 \times 10^{-4}$
6	0,60	0,7756	$2,99 \times 10^{-4}$
7	0,70	0,7847	$2,94 \times 10^{-4}$
8	0,80	0,8011	$2,80 \times 10^{-4}$
9	0,90	0,8237	$2,62 \times 10^{-4}$
10	1,00	0,8513	$2,41 \times 10^{-4}$

(a)  $m = 10$  subintervalos.

$i$	$x_i$	$y_i$	$ y_i - y(x_i) $
0	0,00	1,0000	0
10	0,10	0,9140	$1,19 \times 10^{-7}$
20	0,20	0,8527	$2,06 \times 10^{-7}$
30	0,30	0,8116	$2,58 \times 10^{-7}$
40	0,40	0,7870	$2,84 \times 10^{-7}$
50	0,50	0,7759	$2,92 \times 10^{-7}$
60	0,60	0,7759	$2,88 \times 10^{-7}$
70	0,70	0,7849	$2,75 \times 10^{-7}$
80	0,80	0,8014	$2,58 \times 10^{-7}$
90	0,90	0,8240	$2,38 \times 10^{-7}$
100	1,00	0,8515	$2,17 \times 10^{-7}$

(b)  $m = 100$  subintervalos.

### Método explícito de Adams-Bashforth de passo três

- Integração do polinômio de Lagrange de grau 2 no intervalo  $[x_2, x_3]$ .
- Substituindo na expressão de  $y_{i+1}$

$$\begin{aligned}y_3 &= y_2 + \int_{x_2}^{x_3} P_2(x) dx, \\&= y_2 + \int_2^3 \left[ f_2 \frac{u(u-1)}{2} - f_1 u(u-2) + f_0 \frac{(u-1)(u-2)}{2} \right] h du, \\&= y_2 + h \left[ f_2 \left( \frac{u^3}{6} - \frac{u^2}{4} \right) - f_1 \left( \frac{u^3}{3} - u^2 \right) + f_0 \left( \frac{u^3}{6} - \frac{3u^2}{4} + u \right) \right] \Big|_2^3, \\y_3 &= y_2 + \frac{h}{12} (23f_2 - 16f_1 + 5f_0).\end{aligned}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12} (23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2}). \quad (18)$$

- $f_0$  avaliada a partir de  $y_0$  e,  $f_1$  e  $f_2$  obtidos por método de passo simples.

## Método implícito de Adams-Moulton de passo três

- Fórmula explícita obtida por extrapolação
  - Integração no intervalo  $[x_i, x_{i+1}]$ .
  - Polinômio construído a partir de pontos em  $[x_{i-2}, x_i]$ .
- Método implícito de Adams-Moulton de passo  $k = 3$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}). \quad (19)$$

### Método de Adams-Bashforth-Moulton de quarta ordem

- Um dos métodos mais populares de passo múltiplo.
- Preditor explícito: Adams-Bashforth de passo  $k = 4$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}), \quad (20)$$

- Corretor implícito: Adams-Moulton de passo  $k = 3$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}).$$

- Corretor aplicado mais de uma vez para melhorar ainda mais o resultado.

## Algoritmo de Adams-Bashforth-Moulton de ordem 4 para a solução de PVI

### Algoritmo ABM4

{ **Objetivo:** Resolver PVI pelo método de Adams-Bashforth-Moulton de ordem 4 }

**parâmetros de entrada**  $a, b, m, y0$

{ limite inferior, limite superior, número de subintervalos e valor inicial }

**parâmetros de saída**  $VetX, VetY, Erro$

{ abscissas, solução do PVI e erro }

$h \leftarrow (b - a)/m$ ;  $[VetX, VetY, Erro] \leftarrow \mathbf{DOPRI}(a, a + 3 * h, 3, y0)$  (ver algoritmo)

{ parâmetros de saída de **DOPRI** retornam em  $VetX, VetY, Erro$  }

**para**  $i \leftarrow 1$  **até** 4 **faça**; **escreva**  $i - 1, VetX(i), VetY(i), Erro(i)$ ; **fimpara**

**para**  $i \leftarrow 4$  **até**  $m$  **faça**

$x \leftarrow VetX(i - 3)$ ;  $y \leftarrow VetY(i - 3)$ ;  $f0 \leftarrow f(x, y)$  { avaliar  $f(x, y)$  }

$x \leftarrow VetX(i - 2)$ ;  $y \leftarrow VetY(i - 2)$ ;  $f1 \leftarrow f(x, y)$  { avaliar  $f(x, y)$  }

$x \leftarrow VetX(i - 1)$ ;  $y \leftarrow VetY(i - 1)$ ;  $f2 \leftarrow f(x, y)$  { avaliar  $f(x, y)$  }

$x \leftarrow VetX(i)$ ;  $y \leftarrow VetY(i)$ ;  $f3 \leftarrow f(x, y)$  { avaliar  $f(x, y)$  }

$Ypre \leftarrow h * (55 * f3 - 59 * f2 + 37 * f1 - 9 * f0)/24 + VetY(i)$

$VetY(i + 1) \leftarrow Ypre$ ;  $VetX(i + 1) \leftarrow a + i * h$ ;  $x \leftarrow VetX(i + 1)$

**para**  $j \leftarrow 1$  **até** 2 **faça**

$y \leftarrow VetY(i + 1)$ ;  $f4 \leftarrow f(x, y)$  { avaliar  $f(x, y)$  }

$Ycor \leftarrow h * (9 * f4 + 19 * f3 - 5 * f2 + f1)/24 + VetY(i)$ ;  $VetY(i + 1) \leftarrow Ycor$

**fimpara**

$Erro \leftarrow \text{abs}(Ycor - Ypre) * 19/270$ ; **escreva**  $i, VetX(i + 1), VetY(i + 1), Erro$

**fimpara**

**fimalgoritmo**

## Exemplo de uso do algoritmo

**Exemplo 6** Calcular a solução do PVI do Exemplo 1,  $y' = x - 2y + 1$ , com  $y(0) = 1$ , no intervalo  $[0, 1]$ , utilizando o algoritmo de Adams-Bashforth-Moulton de ordem 4.

```
% Os parametros de entrada
```

```
a = 0
```

```
b = 1
```

```
m = 10
```

```
y0 = 1
```

```
% produzem os resultados
```

```
Metodo de Adams-Bashforth-Moulton - ordem 4
```

i	x	y	Erro
0	0.00000	1.00000	0.00000e+00
1	0.10000	0.91405	2.10000e-07
2	0.20000	0.85274	1.71933e-07
3	0.30000	0.81161	1.40767e-07
4	0.40000	0.78699	4.23161e-06
5	0.50000	0.77590	3.51703e-06
6	0.60000	0.77589	2.82201e-06
7	0.70000	0.78494	2.33307e-06
8	0.80000	0.80142	1.90865e-06
9	0.90000	0.82397	1.56299e-06
10	1.00000	0.85150	1.27961e-06

## Comparação da solução pelo método preditor-corretor de ordem 4

- Diferença entre resultado exato, dado por (6), e os obtidos pelo método preditor-corretor de Adams-Bashforth-Moulton de ordem 4.

$i$	$x_i$	$y_i$	$ y_i - y(x_i) $
0	0,00	1,0000	0
1	0,10	0,9140	$1,52 \times 10^{-8}$
2	0,20	0,8527	$2,49 \times 10^{-8}$
3	0,30	0,8116	$3,05 \times 10^{-8}$
4	0,40	0,7870	$3,07 \times 10^{-6}$
5	0,50	0,7759	$4,94 \times 10^{-6}$
6	0,60	0,7759	$6,07 \times 10^{-6}$
7	0,70	0,7849	$6,62 \times 10^{-6}$
8	0,80	0,8014	$6,77 \times 10^{-6}$
9	0,90	0,8240	$6,65 \times 10^{-6}$
10	1,00	0,8515	$6,35 \times 10^{-6}$

(a) 10 subintervalos.

$i$	$x_i$	$ y_i - y(x_i) $
0	0,00	0
10	0,10	$3,69 \times 10^{-10}$
20	0,20	$7,33 \times 10^{-10}$
30	0,30	$9,53 \times 10^{-10}$
40	0,40	$1,07 \times 10^{-9}$
50	0,50	$1,11 \times 10^{-9}$
60	0,60	$1,10 \times 10^{-9}$
70	0,70	$1,06 \times 10^{-9}$
80	0,80	$9,99 \times 10^{-10}$
90	0,90	$9,25 \times 10^{-10}$
100	1,00	$8,44 \times 10^{-10}$

(b) 100 subintervalos.

$i$	$ y_i - y(x_i) $
0	0
100	$5,02 \times 10^{-14}$
200	$8,39 \times 10^{-14}$
300	$1,03 \times 10^{-13}$
400	$1,14 \times 10^{-13}$
500	$1,16 \times 10^{-13}$
600	$1,15 \times 10^{-13}$
700	$1,10 \times 10^{-13}$
800	$1,03 \times 10^{-13}$
900	$9,43 \times 10^{-14}$
1000	$8,56 \times 10^{-14}$

(c) 1000 subintervalos.

## Comparação de métodos para EDO

- Métodos de passo simples (Runge-Kutta).
- Métodos de passo múltiplo (Adams).



## Métodos de Runge-Kutta

- Vantagens:

1. Auto-iniciáveis não dependendo do auxílio de outros métodos.
2. Fácil alteração do incremento  $h$  para reduzir esforço computacional.

- Desvantagens:

1. Número elevado de avaliações da função  $f(x, y)$ , por passo.
2. Escolha de  $h$  pequeno para limitar erro de discretização pode causar aumento do erro de arredondamento.

## Métodos de Adams

- Vantagens:

1. Número pequeno de avaliações da função  $f(x, y)$ , a cada iteração  $i$ : uma vez nas fórmulas explícitas e  $i + 1$  vezes nas implícitas.
2. Fórmulas simples podendo ser utilizadas com calculadora.

- Desvantagens:

1. Não são auto-iniciáveis causando dependência de outro método.
2. Mudança do incremento  $h$  mais difícil.

## Comparação de métodos para EDO para solução de cinco PVI's

- Métodos: Euler, Dormand-Prince e Adams-Bashforth-Moulton.
- Solução exata do  $j$ -ésimo PVI é dada por  $y_j(x)$ .

$$f_1(x, y) = -2x^2y^2, \quad y(0) = 2, \quad x \in [0, 2], \quad y_1(x) = \frac{6}{4x^3 + 3},$$

$$f_2(x, y) = 3x^2y, \quad y(1) = 1, \quad x \in [1, 2], \quad y_2(x) = e^{x^3 - 1},$$

$$f_3(x, y) = -2xy^3, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0, 5], \quad y_3(x) = \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 1}},$$

$$f_4(x, y) = \cos(x)y, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0, 10], \quad y_4(x) = e^{\sin(x)},$$

$$f_5(x, y) = \sin(x) - y, \quad y(0) = 0, \quad x \in [0, \pi], \quad y_5(x) = \frac{e^{-x} + \sin(x) - \cos(x)}{2}.$$

- Erro: maior diferença, em valor absoluto, entre solução numérica e exata.
- $t_{rel}$ : razão entre tempo gasto pelo método e pelo método de Euler.

$$f_1(x, y) = -2x^2y^2, \quad y(0) = 2, \quad x \in [0, 2]$$

$m = 10$			$m = 100$			$m = 1000$		
Método	Erro	$t_{rel}$	Método	Erro	$t_{rel}$	Método	Erro	$t_{rel}$
Euler	$1,43 \times 10^{-1}$	1,0	Euler	$1,26 \times 10^{-2}$	1,0	Euler	$1,24 \times 10^{-3}$	1,0
DOPRI	$3,51 \times 10^{-5}$	4,7	DOPRI	$7,26 \times 10^{-11}$	6,4	DOPRI	$3,33 \times 10^{-15}$	6,1
ABM4	$2,48 \times 10^{-3}$	4,3	ABM4	$3,62 \times 10^{-7}$	5,3	ABM4	$3,75 \times 10^{-11}$	4,9

$$f_2(x, y) = 3x^2y, \quad y(1) = 1, \quad x \in [1, 2]$$

$m = 10$			$m = 100$			$m = 1000$		
Método	Erro	$t_{rel}$	Método	Erro	$t_{rel}$	Método	Erro	$t_{rel}$
Euler	$9,59 \times 10^2$	1,0	Euler	$2,89 \times 10^2$	1,0	Euler	$3,48 \times 10^1$	1,0
DOPRI	$1,54 \times 10^{-1}$	7,0	DOPRI	$1,18 \times 10^{-5}$	6,4	DOPRI	$1,34 \times 10^{-10}$	6,0
ABM4	$4,96 \times 10^1$	6,5	ABM4	$2,82 \times 10^{-2}$	5,2	ABM4	$3,17 \times 10^{-6}$	4,8

$$f_3(x, y) = -2xy^3, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0, 5]$$

$m = 10$			$m = 100$			$m = 1000$		
Método	Erro	$t_{rel}$	Método	Erro	$t_{rel}$	Método	Erro	$t_{rel}$
Euler	$1,84 \times 10^{-1}$	1,0	Euler	$1,05 \times 10^{-2}$	1,0	Euler	$9,97 \times 10^{-4}$	1,0
DOPRI	$1,51 \times 10^{-4}$	6,2	DOPRI	$1,99 \times 10^{-10}$	6,4	DOPRI	$3,00 \times 10^{-15}$	6,1
ABM4	$3,99 \times 10^{-3}$	5,6	ABM4	$4,89 \times 10^{-6}$	5,3	ABM4	$6,23 \times 10^{-10}$	4,9

$$f_4(x, y) = \cos(x)y, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0, 10]$$

$m = 10$			$m = 100$			$m = 1000$		
Método	Erro	$t_{rel}$	Método	Erro	$t_{rel}$	Método	Erro	$t_{rel}$
Euler	$2,66 \times 10^0$	1,0	Euler	$3,90 \times 10^{-1}$	1,0	Euler	$4,15 \times 10^{-2}$	1,0
DOPRI	$7,25 \times 10^{-4}$	6,8	DOPRI	$1,02 \times 10^{-8}$	6,6	DOPRI	$1,06 \times 10^{-13}$	6,0
ABM4	$5,65 \times 10^{-1}$	6,0	ABM4	$4,82 \times 10^{-5}$	5,3	ABM4	$3,65 \times 10^{-9}$	4,6

$$f_5(x, y) = \text{sen}(x) - y, \quad y(0) = 0, \quad x \in [0, \pi]$$

$m = 10$			$m = 100$			$m = 1000$		
Método	Erro	$t_{rel}$	Método	Erro	$t_{rel}$	Método	Erro	$t_{rel}$
Euler	$7,73 \times 10^{-2}$	1,0	Euler	$7,18 \times 10^{-3}$	1,0	Euler	$7,13 \times 10^{-4}$	1,0
DOPRI	$4,90 \times 10^{-7}$	7,0	DOPRI	$4,05 \times 10^{-12}$	6,6	DOPRI	$1,22 \times 10^{-15}$	6,1
ABM4	$5,63 \times 10^{-5}$	6,0	ABM4	$8,72 \times 10^{-9}$	5,3	ABM4	$8,75 \times 10^{-13}$	4,6



## Sistemas de equações diferenciais ordinárias

- Uso de sistemas de EDO é comum na modelagem de problema real.
- Equação diferencial de ordem  $n > 1$  resolvida por um sistema de ordem  $n$ .
- Sistema de  $p$  equações diferenciais ordinárias com  $p$  incógnitas

$$y_1' = f_1(x, y_1, \dots, y_p),$$

$$y_2' = f_2(x, y_1, \dots, y_p),$$

...

$$y_p' = f_p(x, y_1, \dots, y_p),$$

- $f_i$ : função dada do problema e
- $y_i(a) = \eta_i, \ i = 1, 2, \dots, p$ : condições iniciais.

## Algoritmo de Runge-Kutta de ordem 4 para sistema de ordem 2

### Algoritmo RK4sis2

{ **Objetivo:** Resolver sistema de EDO pelo método de Runge-Kutta de ordem 4 }

**parâmetros de entrada**  $a$ ,  $b$ ,  $m$ ,  $y10$ ,  $y20$

{ limite inferior, limite superior, número de subintervalos e valores iniciais }

**parâmetros de saída**  $VetX$ ,  $VetY1$ ,  $VetY2$

{ abscissas e soluções do PVI }

$h \leftarrow (b - a)/m$ ;  $xt \leftarrow a$ ;  $y1t \leftarrow y10$ ;  $y2t \leftarrow y20$ ;  $VetX(1) \leftarrow xt$ ;  $VetY1(1) \leftarrow y1t$ ;  $VetY2(1) \leftarrow y2t$

escreva  $0, xt, y1t, y2t$

para  $i \leftarrow 1$  até  $m$  faça

$x \leftarrow xt$ ;  $y1 \leftarrow y1t$ ;  $y2 \leftarrow y2t$

$k11 \leftarrow f_1(x, y1, y2)$  { avaliar  $f_1(x, y1, y2)$  };  $k12 \leftarrow f_2(x, y1, y2)$  { avaliar  $f_2(x, y1, y2)$  }

$x \leftarrow xt + h/2$ ;  $y1 \leftarrow y1t + h/2 * k11$ ;  $y2 \leftarrow y2t + h/2 * k12$

$k21 \leftarrow f_1(x, y1, y2)$  { avaliar  $f_1(x, y1, y2)$  };  $k22 \leftarrow f_2(x, y1, y2)$  { avaliar  $f_2(x, y1, y2)$  }

$y1 \leftarrow y1t + h/2 * k21$ ;  $y2 \leftarrow y2t + h/2 * k22$

$k31 \leftarrow f_1(x, y1, y2)$  { avaliar  $f_1(x, y1, y2)$  };  $k32 \leftarrow f_2(x, y1, y2)$  { avaliar  $f_2(x, y1, y2)$  }

$x \leftarrow xt + h$ ;  $y1 \leftarrow y1t + h * k31$ ;  $y2 \leftarrow y2t + h * k32$

$k41 \leftarrow f_1(x, y1, y2)$  { avaliar  $f_1(x, y1, y2)$  };  $k42 \leftarrow f_2(x, y1, y2)$  { avaliar  $f_2(x, y1, y2)$  }

$xt \leftarrow a + i * h$

$y1t \leftarrow y1t + h/6 * (k11 + 2 * (k21 + k31) + k41)$ ;  $y2t \leftarrow y2t + h/6 * (k12 + 2 * (k22 + k32) + k42)$

escreva  $i, xt, y1t, y2t$

$VetX(i + 1) \leftarrow xt$ ;  $VetY1(i + 1) \leftarrow y1t$ ;  $VetY2(i + 1) \leftarrow y2t$

fimpara

fimalgoritmo

## Exemplo de uso do algoritmo

**Exemplo 7** Resolver o sistema de EDO  $y_1' = y_1 + y_2 + 3x$  e  $y_2' = 2y_1 - y_2 - x$ , com  $y_1(0) = 0$  e  $y_2(0) = -1$  no intervalo  $[0, 2]$  com 10 subintervalos, utilizando o algoritmo **RK4sis2**.

```
% Os parametros de entrada
```

```
a = 0
```

```
b = 2
```

```
m = 10
```

```
y10 = 0
```

```
y20 = -1
```

```
% produzem os resultados
```

```
Metodo RK4 para sistema de ordem 2
```

i	x	y1	y2
0	0.00000	0.00000	-1.00000
1	0.20000	-0.14073	-0.86747
2	0.40000	-0.16119	-0.82388
3	0.60000	-0.04768	-0.80741
4	0.80000	0.22970	-0.75950
5	1.00000	0.72072	-0.61782
6	1.20000	1.50106	-0.30864
7	1.40000	2.68142	0.26206
8	1.60000	4.42101	1.22000
9	1.80000	6.94680	2.73780
10	2.00000	10.58102	5.05594

## Equações diferenciais de segunda ordem

- Equação diferencial ordinária de ordem  $n > 1$  reduzida a sistema de EDO de primeira ordem com  $n$  equações.
- Transformação por meio de mudança de variáveis.
- PVI de segunda ordem

$$y'' = f(x, y, y') \quad \text{com} \quad y(a) = \eta_1 \quad \text{e} \quad y'(a) = \eta_2.$$

- Equivalente ao sistema de equações de primeira ordem

$$y_1' = y_2,$$

$$y_2' = f(x, y_1, y_2),$$

$$\text{com } y_1(a) = \eta_1 \text{ e } y_2(a) = \eta_2.$$

- Mudanças de variáveis

$$y_1 = y \text{ e } y_2 = y_1'.$$

## Exemplo de equações diferenciais de segunda ordem

**Exemplo 8** Resolver o PVI de segunda ordem  $y'' = y' + 2y - x^2$ , com  $y(0) = 1$  e  $y'(0) = 0$ , intervalo  $[0, 1]$  com 10 subintervalos.

- Mudanças de variáveis:  $y_1 = y$  e  $y_2 = y'_1$ .
- Sistema de ordem dois de EDO de primeira ordem

$$y'_1 = y_2,$$

$$y'_2 = y_2 + 2y_1 - x^2,$$

com  $y_1(0) = 1$  e  $y_2(0) = 0$ .

## Exemplo de uso do algoritmo

- Sistema de EDO de primeira ordem  $y_1' = y_2$  e  $y_2' = y_2 + 2y_1 - x^2$ , com  $y_1(0) = 1$  e  $y_2(0) = 0$ , intervalo  $[0, 1]$  com 10 subintervalos.
- Usando o algoritmo **RK4sis2**

```
% Os parametros de entrada
```

```
a = 0
```

```
b = 1
```

```
m = 10
```

```
y10 = 1
```

```
y20 = 0
```

```
% produzem os resultados
```

```
Metodo RK4 para sistema de ordem 2
```

i	x	y1	y2
0	0.00000	1.00000	0.00000
1	0.10000	1.01035	0.21070
2	0.20000	1.04295	0.44591
3	0.30000	1.10053	0.71105
4	0.40000	1.18638	1.01276
5	0.50000	1.30456	1.35912
6	0.60000	1.46002	1.76003
7	0.70000	1.65878	2.22756
8	0.80000	1.90823	2.77646
9	0.90000	2.21738	3.42475
10	1.00000	2.59721	4.19443

## Comparação da solução pelo algoritmo RK4sis2

- Resultados obtidos pelo algoritmo **RK4sis2** comparados com valor exato

$$y(x) = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2x^2 - 2x + 3).$$

$i$	$x_i$	$y_i$	$ y_i - y(x_i) $
0	0,0	1,0000	0
1	0,1	1,0103	$8,98 \times 10^{-7}$
2	0,2	1,0430	$2,17 \times 10^{-6}$
3	0,3	1,1005	$3,93 \times 10^{-6}$
4	0,4	1,1864	$6,32 \times 10^{-6}$
5	0,5	1,3046	$9,54 \times 10^{-6}$
6	0,6	1,4600	$1,38 \times 10^{-5}$
7	0,7	1,6588	$1,95 \times 10^{-5}$
8	0,8	1,9082	$2,69 \times 10^{-5}$
9	0,9	2,2174	$3,66 \times 10^{-5}$
10	1,0	2,5972	$4,93 \times 10^{-5}$

(a) 10 subintervalos.

$i$	$x_i$	$ y_i - y(x_i) $
0	0,0	0
10	0,1	$1,04 \times 10^{-10}$
20	0,2	$2,51 \times 10^{-10}$
30	0,3	$4,53 \times 10^{-10}$
40	0,4	$7,29 \times 10^{-10}$
50	0,5	$1,10 \times 10^{-9}$
60	0,6	$1,59 \times 10^{-9}$
70	0,7	$2,25 \times 10^{-9}$
80	0,8	$3,10 \times 10^{-9}$
90	0,9	$4,22 \times 10^{-9}$
100	1,0	$5,68 \times 10^{-9}$

(b) 100 subintervalos.

$i$	$ y_i - y(x_i) $
0	0
100	$1,13 \times 10^{-14}$
200	$2,69 \times 10^{-14}$
300	$4,82 \times 10^{-14}$
400	$7,53 \times 10^{-14}$
500	$1,13 \times 10^{-13}$
600	$1,63 \times 10^{-13}$
700	$2,29 \times 10^{-13}$
800	$3,15 \times 10^{-13}$
900	$4,29 \times 10^{-13}$
1000	$5,76 \times 10^{-13}$

(c) 1000 subintervalos.

## Exemplo de uso do algoritmo

**Exemplo 9** Resolver o PVI de segunda ordem  $y'' = 4y' - 5y + x - 2$ , com  $y(0) = 1$  e  $y'(0) = -1$ ,  $x \in [0, 2]$ , usando 8 subintervalos.

- Mudanças de variáveis:  $y_1 = y$  e  $y_2 = y'_1$ .
- Sistema:  $y'_1 = y_2$  e  $y'_2 = 4y_2 - 5y_1 + x - 2$ , com  $y_1(0) = 1$  e  $y_2(0) = -1$ .

```
% Os parametros de entrada
```

```
a = 0
```

```
b = 2
```

```
m = 8
```

```
y10 = 1
```

```
y20 = -1
```

```
% produzem os resultados
```

```
Metodo RK4 para sistema de ordem 2
```

i	x	y1	y2
0	0.00000	1.00000	-1.00000
1	0.25000	0.29150	-5.22233
2	0.50000	-1.97300	-13.86486
3	0.75000	-7.25688	-30.00220
4	1.00000	-17.95859	-58.07121
5	1.25000	-37.76370	-103.89015
6	1.50000	-71.92819	-173.98777
7	1.75000	-127.22682	-273.40703
8	2.00000	-211.01753	-400.51082



Fim