Gram-Schmidt Modificado

Exemplo: Determinemos a matriz ortogonal Q de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \end{bmatrix}$$

para $0 < \varepsilon << 1$, usando o algoritmo GS.
Nota: considere $\epsilon =$ Épsilon da máquina.

Resposta: Segundo o computador temos que

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \epsilon \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.707107 \\ 0.707107 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Além disso,

$$w_1^T w_2 = -1.57009 \times 10^{-16} \approx 0, \quad w_1^T w_3 = -2.22045 \times 10^{-16} \approx 0 \quad \text{e} \quad w_2^T w_3 = 0.707107$$

Portanto,

w_1, w_2 e w_3 não são ortonormais e não é possível construir a matriz Q.

- Infelizmente a ortogonalização de Gram-Schmidt tem propriedades numéricas muito fracas uma vez que os w_i perdem precisão no que diz respeito à ortogonalidade.

- Um rearranjo deste algoritmo nos dá uma maneira mais eficiente de calcular a ortogonalização de Gram-Schmidt conhecido na literatura como

Algoritmo de Gram-Schimdt Modificado.

Projetores

Definição: Um projetor é uma matriz quadrada P tal que

$$P = P^2$$

Exemplos:

$$I_n, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Exemplo: Sejam

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Então:

$$\mathrm{Ker}(P) = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \alpha : \alpha \in \mathbb{R} \right\}, \quad \mathrm{Im}(P) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \beta : \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$Pu = \begin{bmatrix} -17 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Pu - u = -6 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Pv = \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Pv - v = -4 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Propriedades:

- Todo projetor P projeta sobre $\mathrm{Im}(P)$ na direção do $\mathrm{Ker}(P)$:

$$Pv \in \mathrm{Im}(P) \quad \text{e} \quad Pv - v \in \mathrm{Ker}(P)$$

- Se $v \in \mathrm{Im}(P)$, então $Pv = v$;
- Projetores não necessariamente são ortogonais.

Projetores e Subespaços Complementares

- Se P é um projetor, então $I - P$ é um projetor, denominado de projetor complementar de P;
- $I - P$ projeta sobre $\mathrm{Ker}(P)$ na direção do $\mathrm{Im}(P)$:

$$\mathrm{Im}(I-P) = \mathrm{Ker}(P) \quad \text{e} \quad \mathrm{Ker}(I-P) = \mathrm{Im}(P);$$

- Para qualquer projetor P

$$\mathrm{Ker}(I-P) \cap \mathrm{Ker}(P) = \{0\} \quad \text{e} \quad \mathrm{Ker}(P) \cap \mathrm{Im}(P) = \{0\}$$

Teorema: Um projetor P separa $\mathbb{C}^n$ em dois subespaços

$$\mathbb{C}^n = \mathrm{Ker}(P) \oplus \mathrm{Im}(P)$$

Projetores Ortogonais

Exemplo: Sejam

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad u = \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Então:

$$\mathrm{Ker}(P) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \alpha : \alpha \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\mathrm{Im}(P) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \beta_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \beta_2 : \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$Pu = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Pu - u = \frac{9}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Definição: Seja P um projetor. Diz-se que P é um projetor ortogonal, ou projeção ortogonal, se

$$\mathrm{Ker}(P) \perp \mathrm{Im}(P).$$

Teorema: P é um projetor ortogonal se, e somente se, $P^T = P$.

Construção de Projetor Ortogonal via Base Ortonormal

Seja Q uma matriz, de ordem $n \times m$ com colunas ortonormais $(m \leqslant n)$, então $P = QQ^T$ é uma projeção ortogonal.

Propriedades:

- O Complemento $\widetilde{P} = I - QQ^T$ também é uma projeção ortogonal, e projeta sobre o espaço ortogonal $\mathrm{Im}(Q)$;

- Seja q a $i-$ésima coluna de Q, então:
  - q gera um projetor ortogonal de posto 1 e fornece a componente na direção de q:

$$P_q = qq^T$$

  - $Q \setminus \{q\}$ gera um projetor ortogonal de posto $m-1$, e elimina a componente na direção de q:

$$P_{\perp q} = I - qq^T$$

Construção de Projetor Ortogonal via Base Arbitrária

Seja A uma matriz complexa, de ordem $n \times m$, com posto máximo e $v \in \mathbb{C}^m$.

Seja $y \in \mathrm{Im}(A)$ a projeção ortogonal de v, isto é $Pv = y$. Então

$$\mathrm{Im}(A) \perp (y - v) \quad \Leftrightarrow \quad a_j^T (y - v) = 0, \quad \forall j$$

Seja $x \in \mathbb{C}^n : \quad y = Ax$

$$a_j^T (Ax - v) = 0, \quad \forall j \quad \Leftrightarrow \quad A^T (Ax - v) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A^T A x = A^T v$$

Desde que $A^T A$ é invertível

$$x = (A^T A)^{-1} A^T v$$

Como

$$Pv = y = Ax = \underbrace{A(A^T A)^{-1} A^T}_{P} v$$

Portanto,

$$P = A(A^T A)^{-1} A^T \quad \text{é um projetor ortogonal.}$$

No algoritmo de Gram-Schmidt temos que:

$$
\begin{aligned}
u_k &= A(:,k) - \left(w_1^T A(:,k)\, w_1 + w_2^T A(:,k)\, w_2 + \cdots + w_{k-1}^T A(:,k)\, w_{k-1}\right) \\
&= A(:,k) - \left(w_1 w_1^T A(:,k) + w_2 w_2^T A(:,k) + \cdots + w_{k-1} w_{k-1}^T A(:,k)\right) \\
&= A(:,k) - \begin{bmatrix} w_1 & | & w_2 & | & \ldots & | & w_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^T \\ w_2^T \\ \vdots \\ w_{k-1}^T \end{bmatrix} A(:,k) \\
&= \left(I - Q_{k-1} Q_{k-1}^T\right) A(:,k)
\end{aligned}
$$

Ou seja,

$$\widetilde{P}_k = I - Q_{k-1} Q_{k-1}^T$$

é a projeção ortogonal sobre o complemento ortogonal de $\langle w_1, w_2, \ldots, w_k \rangle$

Em outas palavras, os vetores ortogonais produzidos por Gram-Schmidt podem ser escritos em termos de projetores:

$$w_1 = \frac{\widetilde{P}_1 A(:,1)}{\|\widetilde{P}_1 A(:,1)\|}, \quad w_2 = \frac{\widetilde{P}_2 A(:,2)}{\|\widetilde{P}_2 A(:,2)\|}, \ldots, w_n = \frac{\widetilde{P}_n A(:,n)}{\|\widetilde{P}_n A(:,n)\|}$$

Além disso:

$$\mathrm{Posto}(\widetilde{P}_k) = m - (k-1)$$

Por outro lado, para qualquer $q \in \mathbb{C}^n$, temos que

$$\widetilde{P}_{\perp q} = I - qq^T$$

é a projeção ortogonal sobre o complemento ortogonal de $\langle q \rangle$, e

$$\widetilde{P}_{\perp q_2} \widetilde{P}_{\perp q_1} = (I - q_2 q_2^T)(I - q_1 q_1^T) = I - q_1 q_1^T - q_2 q_2^T + q_1 q_1^T q_2 q_2^T$$

Se $q_1 \perp q_2$, então

$$\widetilde{P}_{\perp q_1} \widetilde{P}_{\perp q_2} = I - q_1 q_1^T - q_2 q_2^T$$

Logo, para qualquer conjunto $\{ q_1, q_2, \ldots, q_j \}$ ortonormal temos que

$$\widetilde{P}_{\perp q_j} \ldots \widetilde{P}_{\perp q_2} \widetilde{P}_{\perp q_1} = \prod_{i=1}^{j} (I - q_i q_i^T) = I - \sum_{i=1}^{j} Q_i Q_i^T = \widetilde{P}_k$$

e é esta idéia a usada na modificação de Gram-Schmidt

Algoritmo Gram-Schmidt Modificado

Neste algoritmo u_k será calculado da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
u_k^{(1)} &= A(:,k) \\
u_k^{(2)} &= \widetilde{P}_{\perp w_1} u_k^{(1)} = u_k^{(1)} - w_1 w_1^T u_k^{(1)} \\
u_k^{(3)} &= \widetilde{P}_{\perp w_2} u_k^{(2)} = u_k^{(2)} - w_2 w_2^T u_k^{(2)} \\
&\vdots \\
u_k = u_k^{(k)} &= \widetilde{P}_{\perp w_{k-1}} u_k^{(k-1)} = u_k^{(k-1)} - w_{k-1} w_{k-1}^T u_k^{(k-1)}
\end{aligned}
$$

Algoritmo GS Modificado: Dada uma matriz A, de ordem n, com colunas l.i.

Para $k = 1, 2, \ldots, n$, faça:

$$u_k = A(:, k)$$

Para $k = 1, 2, \ldots, n$, faça:

$$r_{kk} \quad \leftarrow \quad \|u_k\|_2 \quad \text{e} \quad w_k \quad \leftarrow \quad \frac{u_k}{r_{kk}}$$

Para $j = k + 1, \ldots, n$, faça:

$$r_{kj} \quad \leftarrow \quad w_k^T u_j$$

$$u_j \quad \leftarrow \quad u_j - r_{kj} w_k$$

$$j \quad \leftarrow \quad j + 1$$

$k \leftarrow k + 1$;

Então, depois de aplicar o Algoritmo GS Modificado, fazemos

$$Q = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \ldots & w_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad R = [r_{ij}]$$

Exemplo: Determinemos a matriz ortogonal Q de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \end{bmatrix}$$

para $0 < \varepsilon << 1$, usando o algoritmo GS Modificado.
Nota: considere $\epsilon =$ Épsilon de máquina.

Resposta: Segundo o computador temos que

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \epsilon \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.707107 \\ 0.707107 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.707107 \\ -0.707107 \end{bmatrix}$$

Além disso,

$$w_1^T w_2 = -1.57009 \times 10^{-16} \approx 0, \quad w_1^T w_3 = -1.57009 \times 10^{-16} \approx 0 \quad \text{e} \quad w_2^T w_3 = 2.22045 \times 10^{-16} \approx 0$$

Portanto,

w_1, w_2 e w_3 são ortonormais.

Logo

$$Q = \begin{bmatrix} 1. & 0. & 0. \\ \epsilon & -0.707107 & -0.707107 \\ 0. & 0.707107 & -0.707107 \end{bmatrix}$$

Exemplo: Determinemos a decomposição QR de

$$A = \begin{bmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{bmatrix}$$

Usando o algoritmo GS Modificado.

Solução: Da definição de A temos que $n = 3$ e as suas colunas são:

$$A(:,1) = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad A(:,2) = \begin{bmatrix} -51 \\ 167 \\ 24 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A(:,3) = \begin{bmatrix} 4 \\ -68 \\ -41 \end{bmatrix}$$

Assim, aplicando o algoritmo GS Modificado para este vetores temos:

$$k = 1, 2, 3.$$

Para $k = 1, 2, 3$ faça:

$$u_k = A(:, k)$$

Ou seja,

$$u_1 = A(:, 1) \quad \Rightarrow \quad u_1 = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = A(:, 2) \quad \Rightarrow \quad u_2 = \begin{bmatrix} -51 \\ 167 \\ 24 \end{bmatrix}$$

$$u_3 = A(:, 3) \quad \Rightarrow \quad u_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -68 \\ -41 \end{bmatrix}$$

Para $k = 1$ faça:

$$\begin{aligned} r_{11} &\leftarrow \quad \|u_1\|_2 = \sqrt{12^2 + 6^2 + (-4)^2} = \sqrt{196} = 14 \\ w_1 &\leftarrow \quad \frac{u_1}{r_{11}} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/7 \\ 3/7 \\ -2/7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para $j = 2, 3$ faça:

$$r_{1j} \quad \leftarrow \quad w_1^T u_j \quad \text{e} \quad u_j \quad \leftarrow \quad u_j - r_{1j} w_1$$

Ou seja: **Para $j = 2$ temos:**

$$r_{12} \quad \leftarrow \quad w_1^T u_2 = 21 \quad \text{e} \quad u_2 \quad \leftarrow \quad u_2 - r_{12} w_1 = \begin{bmatrix} -51 \\ 167 \\ 24 \end{bmatrix} - 21 \begin{bmatrix} 6/7 \\ 3/7 \\ -2/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -69 \\ 158 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Para $j = 3$ temos:

$$r_{13} \quad \leftarrow \quad w_1^T u_3 = -14 \quad \text{e} \quad u_3 \quad \leftarrow \quad u_3 - r_{13} w_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -68 \\ -41 \end{bmatrix} - (-14) \begin{bmatrix} 6/7 \\ 3/7 \\ -2/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -62 \\ -45 \end{bmatrix}$$

$k \leftarrow 1 + 1 = 2$

Valores atuais:

$$r_{11} = 14, \quad r_{12} = 21 \quad \text{e} \quad r_{13} = -14$$

$$u_1 = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} -69 \\ 158 \\ 30 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad u_3 = \begin{bmatrix} 16 \\ -62 \\ -45 \end{bmatrix}$$

$$w_1 = \begin{bmatrix} 6/7 \\ 3/7 \\ -2/7 \end{bmatrix}$$

Para $k = 2$ faça:

$$r_{22} \quad \leftarrow \quad \|u_2\|_2 = \sqrt{(-69)^2 + 158^2 + 30^2} = \sqrt{30625} = 175$$

$$w_2 \quad \leftarrow \quad \frac{u_2}{r_{22}} = \frac{1}{175}\begin{bmatrix} -69 \\ 158 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{69}{175} \\ \frac{158}{175} \\ \frac{6}{35} \end{bmatrix}$$

Para $j = 3$ faça:

$$r_{2j} \quad \leftarrow \quad w_2^T u_j \quad \text{e} \quad u_j \quad \leftarrow \quad u_j - r_{2j} w_2$$

Ou seja: **Para $j = 3$ temos:**

$$r_{23} \quad \leftarrow \quad w_2^T u_3 = -70 \quad \text{e} \quad u_3 \quad \leftarrow \quad u_3 - r_{13} w_2 = \begin{bmatrix} 16 \\ -62 \\ -45 \end{bmatrix} - (-70)\begin{bmatrix} -\frac{69}{175} \\ \frac{158}{175} \\ \frac{6}{35} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{58}{5} \\ \frac{6}{5} \\ -33 \end{bmatrix}$$

$$k \leftarrow 2 + 1 = 3$$

Valores atuais:

$$r_{11} = 14, \quad r_{12} = 21, \quad r_{13} = -14, \quad r_{22} = 175 \quad \text{e} \quad r_{23} = -70$$

$$u_1 = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} -69 \\ 158 \\ 30 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad u_3 = \begin{bmatrix} -\frac{58}{5} \\ \frac{6}{5} \\ -33 \end{bmatrix}$$

$$w_1 = \begin{bmatrix} 6/7 \\ 3/7 \\ -2/7 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad w_2 = \begin{bmatrix} -\frac{69}{175} \\ \frac{158}{175} \\ \frac{6}{35} \end{bmatrix}$$

Para $k = 3$ faça:

$$r_{33} \quad \leftarrow \quad \|u_3\|_2 = \sqrt{(-\frac{58}{5})^2 + (\frac{6}{5})^2 + (-33)^2} = \sqrt{1225} = 35$$

$$w_3 \quad \leftarrow \quad \frac{u_3}{r_{33}} = \frac{1}{35}\begin{bmatrix} -\frac{58}{5} \\ \frac{6}{5} \\ -33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{58}{175} \\ \frac{6}{175} \\ -\frac{33}{35} \end{bmatrix}$$

Valores atuais:

$$r_{11} = 14, \quad r_{12} = 21, \quad r_{13} = -14, \quad r_{22} = 175, \quad r_{23} = -70 \quad \text{e} \quad r_{33} = 35$$

$$u_1 = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} -69 \\ 158 \\ 30 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad u_3 = \begin{bmatrix} -\frac{58}{5} \\ \frac{6}{5} \\ -33 \end{bmatrix}$$

$$w_1 = \begin{bmatrix} 6/7 \\ 3/7 \\ -2/7 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} -\frac{69}{175} \\ \frac{158}{175} \\ \frac{6}{35} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad w_3 = \begin{bmatrix} -\frac{58}{175} \\ \frac{6}{175} \\ -\frac{33}{35} \end{bmatrix}$$

Portanto

$$Q = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{7} & -\frac{69}{175} & -\frac{58}{175} \\ \frac{3}{7} & \frac{158}{175} & \frac{6}{175} \\ -\frac{2}{7} & \frac{6}{35} & -\frac{33}{35} \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} r_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & 175 & -70 \\ 0 & 0 & 35 \end{bmatrix}$$

$$QR = A.$$

Exemplo: Determinemos a decomposição QR de

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Usando o algoritmo GS Modificado.

Solução: Da definição de B temos que $n = 3$ e as suas colunas são:

$$B(:,1) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad B(:,2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B(:,3) = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Assim, aplicando o algoritmo GS Modificado para este vetores temos:

$$k = 1, 2, 3.$$

Assim:
Para $k = 1, 2, 3$ faça:

$$u_k = B(:, k)$$

Ou seja,

$$u_1 = B(:, 1) \quad \Rightarrow \quad u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = B(:, 2) \quad \Rightarrow \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$u_3 = B(:, 3) \quad \Rightarrow \quad u_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para $k = 1$ faça:

$$r_{11} \quad \leftarrow \quad \|u_1\|_2 = 3$$

$$w_1 \quad \leftarrow \quad \frac{u_1}{r_{11}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Para $j = 2, 3$ faça:

$$r_{1j} \quad \leftarrow \quad w_1^T u_j \quad \text{e} \quad u_j \quad \leftarrow \quad u_j - r_{1j} w_1$$

Ou seja: **Para $j = 2$ temos:**

$$r_{12} \quad \leftarrow \quad w_1^T u_2 = 0 \quad \text{e} \quad u_2 \quad \leftarrow \quad u_2 - r_{12} w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Para $j = 3$ temos:

$$r_{13} \quad \leftarrow \quad w_1^T u_3 = -1 \quad \text{e} \quad u_3 \quad \leftarrow \quad u_3 - r_{13} w_1 = \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} \\ -\frac{8}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$k \leftarrow 1 + 1 = 2$

Valores atuais:

$$r_{11} = 3, \quad r_{12} = 0 \quad \text{e} \quad r_{13} = -1$$

$$u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad u_3 = \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} \\ -\frac{8}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$w_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Para $k = 2$ faça:

$$
\begin{aligned}
r_{22} &\quad\leftarrow\quad \|u_2\|_2 = \sqrt{5} \\
w_2 &\quad\leftarrow\quad \frac{u_2}{r_{22}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Para $j = 3$ faça:

$$
r_{2j} \quad\leftarrow\quad w_2^T u_j \quad \text{e} \quad u_j \quad\leftarrow\quad u_j - r_{2j} w_2
$$

Ou seja: **Para $j = 3$ temos:**

$$
r_{23} \quad\leftarrow\quad w_2^T u_3 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad u_3 \quad\leftarrow\quad u_3 - r_{13} w_2 = \begin{bmatrix} -\frac{32}{15} \\ -\frac{8}{3} \\ \frac{16}{15} \end{bmatrix}
$$

$k \leftarrow 2 + 1 = 3$

Valores atuais:

$$r_{11} = 3, \quad r_{12} = 0, \quad r_{13} = -1, \quad r_{22} = \sqrt{5} \quad \text{e} \quad r_{23} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad u_3 = \begin{bmatrix} -\frac{32}{15} \\ -\frac{8}{3} \\ \frac{16}{15} \end{bmatrix}$$

$$w_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad w_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Para $k = 3$ faça:

$$
\begin{aligned}
r_{33} &\leftarrow \quad \|u_3\|_2 = \frac{8}{\sqrt{5}} \\
w_3 &\leftarrow \quad \frac{u_3}{r_{33}} = \frac{\sqrt{5}}{8} \begin{bmatrix} -\dfrac{32}{15} \\ -\dfrac{8}{3} \\ \dfrac{16}{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{4}{3\sqrt{5}} \\ -\dfrac{\sqrt{5}}{3} \\ \dfrac{2}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Valores atuais:

$$
r_{11} = 3, \quad r_{12} = 0, \quad r_{13} = -1, \quad r_{22} = \sqrt{5}, \quad r_{23} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad r_{33} = \frac{8}{\sqrt{5}}
$$

$$
u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad u_3 = \begin{bmatrix} -\dfrac{32}{15} \\ -\dfrac{8}{3} \\ \dfrac{16}{15} \end{bmatrix}
$$

$$
w_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{3} \\ -\dfrac{2}{3} \\ -\dfrac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad w_3 = \begin{bmatrix} -\dfrac{4}{3\sqrt{5}} \\ -\dfrac{\sqrt{5}}{3} \\ \dfrac{2}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix}
$$

Portanto

$$Q = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{5}}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} r_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{5} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & \frac{8}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$QR = B.$$

Método de Householder

Exemplo: Sejam $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ e $Q = I - 2uu^T$. Então

$$uu^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo

$$Qx = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Em geral, dado $u \in \mathbb{R}^n$ um vetor unitário e $Q = I - 2uu^T$.

Então, Q leva cada vetor $x \in \mathbb{R}^n$ em sua reflexão com relação ao hiperplano:

$$H = \left\{ v : u^T v = 0 \right\} \text{ ortogonal a } u.$$

Definição: Seja $u \in \mathbb{R}^n$ um vetor unitário. Então a transformação linear $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$Q = I - 2uu^T$$

é chamada de transformação de Householder, reflexão de Householder ou simplesmente refletor.

Proposição: Sejam $u \in \mathbb{R}^n$ um vetor unitário e $Q = I - 2uu^T$ um refletor. Então

(i) $Qu = -u$;

(ii) $Qv = v$ para todo $v \perp u$;

(iii) $Q = Q^T$;

(iv) $Q^T = Q^{-1}$;

(v) $Q^{-1} = Q$;

(vi) Os autovalores de Q são 1, com multiplicidade $n-1$ e -1, com multiplicidade 1;

(vii) $\det(Q) = -1$.

Qual é a relação que existe entre $Q = I - 2uu^T$ e $P_{\perp u} = I - uu^T$?

Dado $x \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$P_{\perp u}(x) = P_{\perp u}(Qx).$$

Os seguintes resultados, possibilitam usar a transformação de Householder para obter a decomposição QR de uma matriz.

Teorema: Sejam $x,\, y \in \mathbb{R}^n$ tais que $x \neq y$ mas $\|x\| = \|y\|$. Então existe um único refletor Q tal que

$$Qx = y$$

Corolário: Seja $x \in \mathbb{R}^n$ um vetor não nulo. Então existe um refletor Q tal que

$$Q \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm\|x\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad x_j \neq 0 \quad \text{para algum } 2 \leqslant j \leqslant n$$

Algoritmo HH: Passo 0: Dada uma matriz A de ordem n, faça:

$$A_1 = A$$

Passo 1: $x \in \mathbb{R}^n$ igual à primeira coluna de A_1, isto é $x = A_1(:, 1)$, $e_1 = (1, 0, ..., 0)^T \in \mathbb{R}^n$ e determine:

i. $\alpha_1 = \|x\|$;

ii. $v = x - \alpha_1 e_1$;

iii. $u = \dfrac{v}{\|v\|}$;

iv. $Q_1 = I_n - 2uu^T$;

Passo 2: Determine A_2 e A_2' tal que:

$$A_2 = Q_1 A_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \star & \dots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_2' & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

Passo 3: Para $k = 2, \ldots, n-1$,

- Repita o Passo 1 para A'_k, obtenha o α_k e a matriz de Householder Q'_k. Desde que a ordem de Q'_k é menor que a ordem de Q_1, fazemos:

$$Q_k = \begin{bmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & Q'_k \end{bmatrix}$$

- Repita o Passo 2 para obter A_{k+1} e A'_{k+1} tal que:

$$A_{k+1} = Q_k A_k = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \star & \star & \star & \ldots & \star \\ 0 & \alpha_2 & \star & \star & \ldots & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star & \ldots & \star \\ 0 & & 0 & \alpha_k & \ldots & \star \\ \vdots & & \vdots & \vdots & A'_{k+1} & \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & & \end{bmatrix}.$$

Depois de aplicar este algoritmo, temos que

$$R = A_n = Q_n \cdots Q_2 Q_1 A$$

é uma matriz triangular superior, e

$$Q = Q_1 Q_2 \cdots Q_n$$

é uma matriz ortogonal. Assim,

$A = QR$ é uma decomposição QR de A.

Exemplo:
Usando o algoritmo acima, determinemos a decomposição QR de

$$A = \begin{bmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{bmatrix}.$$

Solução:

Passo 0: $n = 3$ e $A_1 = \begin{bmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{bmatrix}$

Passo 1: Para $x = A_1(:,1) = (12, 6, -4)^T$, temos que $e_1 = (1, 0, 0)^T$

$$\alpha_1 = \|x\|_2 = 14, \quad v = x - \alpha_1 e_1 = (-2, 6, -4)^T, \quad u = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(-1, 3, -2)^T$$

$$Q_1 = I_3 - 2uu^T = I_3 - \frac{2}{\sqrt{14}\sqrt{14}} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} (-1, 3, -2) = \begin{bmatrix} 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ 3/7 & -2/7 & 6/7 \\ -2/7 & 6/7 & 3/7 \end{bmatrix}$$

Passo 2: Determinemos A_2 e A_2':

$$A_2 = Q_1 A_1 = \begin{bmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -49 & -14 \\ 0 & 168 & -77 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A_2' = \begin{bmatrix} -49 & -14 \\ 168 & -77 \end{bmatrix}$$

Passo 3: Desde que $n = 3$, então $n - 1 = 2$ e $k = 2$. Ou seja, vamos a repetir os Passos 1 e 2 para A_2'.

Passo 1: Para $x = A_2'(:, 1) = (-49, 168)^T$, temos que $e_1 = (1, 0)^T$

$$\alpha_2 = \|x\|_2 = 175, \quad v = A'(:, 1) - \alpha_2 e_1 = (-224, 168)^T,$$
$$u = \tfrac{v}{\|v\|} = \tfrac{1}{280}(-224, 168)^T = \left(-\tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{5}\right)^T$$

$$Q_2' = I_2 - 2uu^T = I_2 - 2\begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = \begin{bmatrix} -7/25 & 24/25 \\ 24/25 & 7/25 \end{bmatrix} \Rightarrow Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7/25 & 24/25 \\ 0 & 24/25 & 7/25 \end{bmatrix}$$

Passo 2: Determinemos A_3 e A_3':

$$A_3 = Q_2 A_2 = \begin{bmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & 175 & -70 \\ 0 & 0 & -35 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A_3' = (-35).$$

Portanto,

$$Q = Q_1 Q_2 = \begin{bmatrix} \frac{6}{7} & -\frac{69}{175} & \frac{58}{175} \\ \frac{3}{7} & \frac{158}{175} & -\frac{6}{175} \\ -\frac{2}{7} & \frac{6}{35} & \frac{33}{35} \end{bmatrix}$$

$$R = A_3 = \begin{bmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & 175 & -70 \\ 0 & 0 & -35 \end{bmatrix}$$

A matriz Q é ortogonal e R triangular superior, de forma que $A = QR$ é a decomposição QR de A.

Exemplo:
Usando o algoritmo acima, determinemos a decomposição QR de

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Com 6 dígitos de precisão.
Solução:

Passo 0: $n = 3$ e $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Passo 1: Para $x = A_1(:,1) = (2, -2, -1)^T$, temos que $e_1 = (1, 0, 0)^T$

$$\alpha_1 = \|x\|_2 = 3, \quad v = x - \alpha_1 e_1 = (-1, -2, -1)^T,$$

$$u = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -2, -1)^T = (-0.408248, -0.816497, -0.408248)^T$$

$$Q_1 = I_3 - 2uu^T = I_3 - \frac{2}{\sqrt{6}\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} (-1, -2, -1) = \begin{bmatrix} 0.666667 & -0.666667 & -0.333333 \\ -0.666667 & -0.333333 & -0.666667 \\ -0.333333 & -0.666667 & 0.666667 \end{bmatrix}$$

Passo 2: Determinemos A_2 e A_2':

$$A_2 = Q_1 A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A_2' = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Passo 3: Desde que $n = 3$, então $n - 1 = 2$ e $k = 2$. Ou seja, vamos a repetir os Passos 1 e 2 para A_2'.

Passo 1: Para $x = A_2'(:, 1) = (-2, 1)^T$, temos que $e_1 = (1, 0)^T$

$$\alpha_2 = \|x\|_2 = \sqrt{5} = 2.23607, \quad v = x - \alpha_2 e_1 = (-2 - \sqrt{5}, 1)^T,$$
$$u = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}}(-2 - \sqrt{5}, 1)^T = (-0.973249, 0.229753)^T$$

$$Q_2' = I_2 - 2uu^T = \begin{bmatrix} -0.894427 & 0.447214 \\ 0.447214 & 0.894427 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.894427 & 0.447214 \\ 0 & 0.447214 & 0.894427 \end{bmatrix}$$

Passo 2: Determinemos A_3 e A_3':

$$A_3 = Q_2 A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2.23607 & -0.447214 \\ 0 & 0 & 3.57771 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A_3' = \begin{bmatrix} 3.57771 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$Q = Q_1 Q_2 = \begin{bmatrix} 0.666667 & 0.447214 & -0.596285 \\ -0.666667 & 0 & -0.745356 \\ -0.333333 & 0.894428 & 0.298142 \end{bmatrix}$$

$$R = A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2.23607 & -0.447214 \\ 0 & 0 & 3.57771 \end{bmatrix}$$

A matriz Q é ortogonal e R triangular superior, de forma que $B = QR$ é a decomposição QR de B.

Exemplo:

Usando o algoritmo acima, determinemos a decomposição QR de

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

com 6 dígitos de precisão. **Solução:** Passo 0: $n = 4$ e $A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

Passo 1: Para $x = A_1(:,1) = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ temos que

- $\alpha_1 = \|x\|_2 = \sqrt{4^2 + 1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 5$
- $v = x - \alpha_1 e_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

- $u = \frac{v}{\|v\|_2} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.316228 \\ 0.316228 \\ -0.632456 \\ 0.632456 \end{bmatrix}$
- $Q_1 = I_4 - 2uu^T = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & -0.4 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 & 0.4 & -0.4 \\ -0.4 & 0.4 & 0.2 & 0.8 \\ 0.4 & -0.4 & 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}$

Passo 2: Determinemos A_2 e A'_2:

$$A_2 = Q_1 A_1 = \begin{bmatrix} 5 & 1.6 & -3.6 & 2.2 \\ 0 & 1.4 & 1.6 & 0.8 \\ 0 & 1.2 & -0.2 & -1.6 \\ 0 & -0.2 & 1.2 & -1.4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A'_2 = \begin{bmatrix} 1.4 & 1.6 & 0.8 \\ 1.2 & -0.2 & -1.6 \\ -0.2 & 1.2 & -1.4 \end{bmatrix}$$

Passo 3: Desde que $n = 4$, então $n - 1 = 3$ e $k = 2, 3$,
Para $k = 2$:

- Vamos a repetir os Passos 1 e 2 para A_2'.

  Passo 1: Para $x = A_2'(:, 1) = (1.4, 1.2, -0.2)^T$, temos que $e_1 = (1, 0, 0)^T$

$$\alpha_2 = \|x\|_2 = 1.85472, \quad v = x - \alpha_2 e_1 = (-0.454724, 1.2, -0.2)^T,$$
$$u = \frac{v}{\|v\|} = (-0.350122, 0.923959, -0.153993)^T$$

$$Q_2' = I_3 - 2uu^T = \begin{bmatrix} 0.754829 & 0.646997 & -0.107833 \\ 0.646997 & -0.707402 & 0.284567 \\ -0.107833 & 0.284567 & 0.952572 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.754829 & 0.646997 & -0.107833 \\ 0 & 0.646997 & -0.707402 & 0.284567 \\ 0 & -0.107833 & 0.284567 & 0.952572 \end{bmatrix}$$

  Passo 2: Determinemos A_3 e A_3':

$$A_3 = Q_2 A_2 = \begin{bmatrix} 5 & 1.6 & -3.6 & 2.2 \\ 0 & 1.85472 & 0.948928 & -0.280365 \\ 0 & 0 & 1.51816 & 1.25105 \\ 0 & 0 & 0.913641 & -1.87517 \end{bmatrix} \Rightarrow A_3' = \begin{bmatrix} 1.51816 & 1.25105 \\ 0.913641 & -1.87517 \end{bmatrix}$$

Para $k = 3$:

- Vamos a repetir os Passos 1 e 2 para A_3'.

  Passo 1: Para $x = A_3'(:,1) = (1.51816, 0.913641)^T$, temos que $e_1 = (1,0)^T$

$$\alpha_3 = \|x\|_2 = 1.77187, \quad v = x - \alpha_3 e_1 = (-0.253718, 0.913641)^T,$$
$$u = \frac{v}{\|v\|} = (-0.267574, 0.963537)^T$$

$$Q_3' = I_2 - 2uu^T = \begin{bmatrix} 0.856808 & 0.515636 \\ 0.515636 & -0.856808 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad Q_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.856808 & 0.515636 \\ 0 & 0 & 0.515636 & -0.856808 \end{bmatrix}$$

Passo 2: Determinemos A_4 e A_4':

$$A_4 = Q_3 A_3 = \begin{bmatrix} 5 & 1.6 & -3.6 & 2.2 \\ 0 & 1.85472 & 0.948928 & -0.280365 \\ 0. & 0 & 1.77187 & 0.105 \\ 0 & 0 & 0 & 2.25175 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A_4' = \begin{bmatrix} 2.25175 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$Q = Q_1 Q_2 Q_3 = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.150966 & 0.5775 & 0.0608586 \\ 0.2 & 0.905795 & -0.0787501 & 0.365149 \\ -0.4 & 0.345065 & 0.695625 & -0.486864 \\ 0.4 & 0.194099 & -0.42 & -0.791155 \end{bmatrix}$$

$$R = A_4 = \begin{bmatrix} 5 & 1.6 & -3.6 & 2.2 \\ 0 & 1.85472 & 0.948928 & -0.280365 \\ 0 & 0 & 1.77187 & 0.105 \\ 0 & 0 & 0 & 2.25175 \end{bmatrix}$$

A matriz Q é ortogonal e R triangular superior, de forma que $C = QR$ é a decomposição QR de C.

Bibliografia

1. Álgebra Linear e suas aplicações; Strang, G., Cengage Learning, 4° Edição, 2010.
2. Álgebra Linear; Poole, D., Thomson Learning, 2004.
3. Matrix Computations; Golub, G., Van Loan, C.F., Johns Hopkins University Press, 4° Edição, 2012.
4. Applied Numerical Linear Algebra; Demmel, J., SIAM, 1997.
5. Introduction to Applied Linear Algebra; Boyd, S., Vandenberghe, L., Cambridge University Press, 1° Edição, 2018.
6. Numerical Linear Algebra with Julia; Darve, E., Wootters, M., SIAM, 1° Edição, 2021.
7. Linear Algebra and Optimization for Machine Learning; Aggarwal, C. C., Springer, 1° Edição, 2020.
8. Algoritmos Numéricos; Campos, F.F. filho, LTC, 3 Edição, 2018.