Solução de sistemas lineares

usando fatoração QR

Suponhamos que queremos resolver o sistema

$$Ax = b$$

onde A é uma matriz de ordem n, não-singular. Se $A = QR$ é uma fatoração QR, então podemos escrever

$$QRx = b \quad \Rightarrow \quad Rx = Q^T b$$

Assim, o sistema triangular

$$Rx = Q^T b,$$

que pode ser resolvido por substituição reversa.

Isto sugere o seguinte método para determinar a solução de $Ax = b$:

1. Determine a fatoração QR, $A = QR$.

2. Calcule $y = Q^T b$.

3. Resolva o sistema $Rx = y$.

Exemplo: Determinemos a solução do sistema linear

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{7}{2} \\ \frac{259}{2} \\ \frac{49}{2} \end{bmatrix}}_{b}$$

usando o método acima.

Solução: Aplicando algum algoritmo para determinar a decomposição QR de A temos que

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 6/7 & -69/175 & 58/175 \\ 3/7 & 158/175 & -6/175 \\ -2/7 & 6/35 & 33/35 \end{bmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{bmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & 175 & -70 \\ 0 & 0 & -35 \end{bmatrix}}_{R}$$

Assim

$$y = Q^T b = \begin{bmatrix} \frac{91}{2} \\ \frac{245}{2} \\ -\frac{35}{2} \end{bmatrix}$$

Agora precisamos resolver

$$\begin{bmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & 175 & -70 \\ 0 & 0 & -35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{91}{2} \\ \frac{245}{2} \\ -\frac{35}{2} \end{bmatrix}$$

Aplicando o algoritmo para matrizes triangulares superiores temos que

$$x^* = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Algoritmo QR

Este método determina todos os autovalores de uma matriz, sem determinar o polinômio característico.

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. O método consiste em construir uma sequência de matrizes $\{A_k\}$ obtida recursivamente.

Algoritmo QR:

Iteração 0: Faça $A_0 = A$ e obtenha a decomposição QR de A_0. Isto é, obtenha uma matriz Q_1 ortogonal e uma matriz R_1 triangular superior:

$$A_0 = Q_1 R_1$$

Iteração 1: Faça $A_1 = R_1 Q_1$ e obtenha a decomposição QR de A_1. Isto é, obtenha uma matriz Q_2 ortogonal e uma matriz R_2 triangular superior:

$$A_1 = Q_2 R_2$$

Iteração k: Faça $A_k = R_k Q_k$ e obtenha a decomposição QR de A_k. Isto é, obtenha uma matriz Q_k ortogonal e uma matriz R_k triangular superior:

$$A_k = Q_{k+1} R_{k+1}$$

OBS: Na iteração k temos que

$$A_k = R_k Q_k$$

Como

$$\begin{array}{rrcccc} & A_{k-1} & = & Q_k R_k & & \\ \Rightarrow & A_{k-1} Q_k & = & Q_k R_k Q_k & = & Q_k A_k \\ \Rightarrow & Q_k^{-1} A_{k-1} Q_k & = & Q_k^T A_{k-1} Q_k & = & A_k \end{array}$$

Assim, todas as matrizes da sequência, que denominaremos sequência QR, possuem os mesmos autovalores.

OBS:

- O algortimo QR é simplesmente uma implementação de um procedimento conhecido como iteração simultânea, o qual é uma extensão natural do método das potências.
- Consequentemente, pode ser mostrado que a sequência QR converge, sob certas condições, para uma matriz triangular superior na forma

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ & \lambda_2 & \dots & * \\ & 0 & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

onde os autovalores da diagonal principal aparecem em ordem decrescente de magnitude.

Exemplo: Determinemos os autovalores da seguinte matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Usando o algoritmo QR.
Solução:

Iteração 0**:** Faça $A_0 = A$. Logo, a decomposição QR de A_0 é:

$$A_0 = \underbrace{\begin{bmatrix} -0.242536 & -0.970143 \\ -0.970143 & 0.242536 \end{bmatrix}}_{Q_1} \underbrace{\begin{bmatrix} -4.12311 & -3.3955 \\ 0 & -1.21268 \end{bmatrix}}_{R_1}$$

Iteração 1**:** Faça

$$A_1 = R_1 Q_1 = \begin{bmatrix} 4.29412 & 3.17647 \\ 1.17647 & -0.294118 \end{bmatrix}$$

Logo, a decomposição QR de A_1 é

$$A_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} -0.964458 & -0.264235 \\ -0.264235 & 0.964458 \end{bmatrix}}_{Q_2} \underbrace{\begin{bmatrix} -4.45236 & -2.98586 \\ 0 & -1.123 \end{bmatrix}}_{R_2}$$

Iteração 2**:** Faça

$$A_2 = R_2 Q_2 = \begin{bmatrix} 5.08309 & -1.70326 \\ 0.296736 & -1.08309 \end{bmatrix}$$

Logo, a decomposição QR de A_2 é

$$A_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} -0.9983 & -0.0582779 \\ -0.0582779 & 0.9983 \end{bmatrix}}_{Q_3} \underbrace{\begin{bmatrix} -5.09174 & 1.76349 \\ 0 & -0.981983 \end{bmatrix}}_{R_3}$$

Iteração 3**:** Faça

$$A_3 = R_3 Q_3 = \begin{bmatrix} 4.98031 & 2.05723 \\ 0.0572279 & -0.980314 \end{bmatrix}$$

Logo, a decomposição QR de A_3 é

$$A_3 = \underbrace{\begin{bmatrix} -0.999934 & -0.0114901 \\ -0.0114901 & 0.999934 \end{bmatrix}}_{Q_4} \underbrace{\begin{bmatrix} -4.98064 & -2.04583 \\ 0 & -1.00389 \end{bmatrix}}_{R_4}$$

Iteração 4**:** Faça

$$A_4 = R_4 Q_4 = \begin{bmatrix} 5.00382 & -1.98847 \\ 0.0115347 & -1.00382 \end{bmatrix}$$

Logo, a decomposição QR de A_4 é

$$A_4 = \underbrace{\begin{bmatrix} -0.999997 & -0.00230518 \\ -0.00230518 & 0.999997 \end{bmatrix}}_{Q_5} \underbrace{\begin{bmatrix} -5.00383 & 1.99077 \\ 0 & -0.999234 \end{bmatrix}}_{R_5}$$

Iteração 5**:** Faça

$$A_5 = R_5 Q_5 = \begin{bmatrix} 4.99923 & 2.0023 \\ 0.00230341 & -0.999231 \end{bmatrix}$$

Logo, a decomposição QR de A_5 é

$$A_5 = \underbrace{\begin{bmatrix} 4.99923 & 2.0023 \\ 0.00230341 & -0.999231 \end{bmatrix}}_{Q_6} \underbrace{\begin{bmatrix} -4.99923 & -2.00184 \\ 0 & -1.00015 \end{bmatrix}}_{R_6}$$

Iteração 6**:** Faça

$$A_6 = R_6 Q_6 = \begin{bmatrix} 5.00015 & -1.99954 \\ 0.000460824 & -1.00015 \end{bmatrix}$$

Logo, a decomposição QR de A_6 é

$$A_6 = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -0.0000921619 \\ -0.0000921619 & 1 \end{bmatrix}}_{Q_7} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -0.0000921619 \\ -0.0000921619 & 1 \end{bmatrix}}_{R_7}$$

Iteração 7**:** Faça

$$A_7 = R_7 Q_7 = \begin{bmatrix} 4.99997 & 2.00009 \\ 0.0000921591 & -0.999969 \end{bmatrix}$$

Logo, a decomposição QR de A_7 é

$$A_7 = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -0.0000184319 \\ -0.0000184319 & 1 \end{bmatrix}}_{Q_7} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -0.0000184319 \\ -0.0000184319 & 1 \end{bmatrix}}_{R_7}$$

Iteração 8**:** Faça

$$A_8 = R_8 Q_8 = \begin{bmatrix} 5.00001 & -1.99998 \\ 0.000018432 & -1.00001 \end{bmatrix}$$

Logo, a decomposição QR de A_8 é

$$A_8 = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -3.686403 \times 10^{-6} \\ -3.686403 \times 10^{-6} & 1 \end{bmatrix}}_{Q_9} \underbrace{\begin{bmatrix} -5.00001 & 1.99999 \\ 0 & -0.999999 \end{bmatrix}}_{R_9}$$

Iteração 9**:** Faça

$$A_9 = R_9 Q_9 = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3.6863 \times 10^{-6} & -0.999999 \end{bmatrix}$$

Logo, a decomposição QR de A_9 é

$$A_9 = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -7.3727 \times 10^{-7} \\ -7.3727 \times 10^{-7} & 1 \end{bmatrix}}_{Q_9} \underbrace{\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{R_9}$$

Assim,

$$A_{10} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 7.372 \times 10^{-7} & -1 \end{bmatrix} \quad \approx \quad \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = A_{\hat{k}}$$

Portanto,

$$(Q_{\hat{k}}^T Q_{\hat{k}-1}^T \ldots Q_1^T) A (Q_1 \ldots Q_{\hat{k}-1} Q_{\hat{k}}) = A_{\hat{k}} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Assim, os autovalores de A são os elemento da diagonal de $A_{\hat{k}}$, isto é:

$$\lambda_1 = 5 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -1.$$

Exercício: Determine os autovalores da seguinte matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Usando o algoritmo QR, faça 4 iterações.

Bibliografia

1. Álgebra Linear e suas aplicações; Strang, G., Cengage Learning, 4° Edição, 2010.
2. Álgebra Linear; Poole, D., Thomson Learning, 2004.
3. Matrix Computations; Golub, G., Van Loan, C.F., Johns Hopkins University Press, 4° Edição, 2012.
4. Applied Numerical Linear Algebra; Demmel, J., SIAM, 1997.
5. Introduction to Applied Linear Algebra; Boyd, S., Vandenberghe, L., Cambridge University Press, 1° Edição, 2018.
6. Numerical Linear Algebra with Julia; Darve, E., Wootters, M., SIAM, 1° Edição, 2021.
7. Linear Algebra and Optimization for Machine Learning; Aggarwal, C. C., Springer, 1° Edição, 2020.
8. Algoritmos Numéricos; Campos, F.F. filho, LTC, 3 Edição, 2018.