2) e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$

Seja $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$, definida no intervalo contínuo $[2, \infty)$.

$f(x)$ é não negativa.

$f(x)$ é não crescente pois $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2-1)^2} \leq 0$

Com todas as hipóteses satisfeitas, vamos utilizar o teste da integral:

$$\lim_{R \to \infty} \left[\int_2^R \frac{1}{x^2-1} dx \right] = \lim_{R \to \infty} \left[-\frac{1}{2} \ln|R+1| + \frac{1}{2} \ln|R-1| + \frac{1}{2} \ln(3) \right]$$

$$= \frac{\log(3)}{2} \simeq 0.549307$$

(wolfram)

Utilizando o programa para S_{49}, obtemos

$$S_{49} \simeq 0.73$$

Se considerarmos $\lim_{R \to \infty} \left[\int_2^R \frac{1}{x^2-1} dx \right] \simeq 0.55$, temos que o erro é de aproximadamente 0.18.

1) e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{\sqrt{n^3+1}}$

Vamos testar a convergência pelo teste da raiz:

Seja $L = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

$$a_n = \frac{3n}{\sqrt{n^3+1}}$$

Fazendo:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{\left| \frac{3n}{\sqrt{n^3+1}} \right|} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{3.n}}{\sqrt{\sqrt{n^3+1}}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{n}}{\left((n^3+1)^{1/2}\right)^{1/2}}$$

$$= \sqrt{3} \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{n^{1/2}}{(n^3+1)^{1/4}}$$

$$= \sqrt{3} \cdot \lim_{n \to \infty} n^{1/2} \cdot (n^2+1)^{-1/4} \rightarrow \infty$$

(diverge)

Temos que $L = \infty$, logo a <u>série</u> é divergente.