Métodos Matemáticos I

Prof. Aparecido J. de Souza
aparecidosouza@ci.ufpb.br

Diagonalização de Operadores
(Diagonalização de Matrizes Quadradas)
Aplicações à Equações de Diferenças
Crescimento Populacional

Recapitulando

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial de dimensão finita, ou não.

Definição. Um vetor v **não nulo** é um **autovetor**, ou um **vetor característico**, do operador linear $\mathbf{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ (ou da matriz quadada $\mathbf{A}$) quando existir um escalar λ tal que $\mathbf{T(v)} = \lambda \mathbf{v}$ (ou $\mathbf{Av} = \lambda \mathbf{v}$). No caso, λ é dito um **autovalor**, ou **valor característico** de $\mathbf{T}$ associado à v e vice-versa.

Teorema. O autoespaço
$\mathbb{U}_\lambda = \{v \in \mathbb{V} \text{ tais que } \mathbf{T}(v) = \lambda v\} \cup \{\mathbf{0}\}$ é invariante por $\mathbf{T}$.

Equação característica dos autovalores de T (ou de A):

$$p(\lambda) = det[\mathbf{A} - \lambda \mathbb{I}] = 0 \in \mathbb{R}.$$

Equação dos autovetores associados a um autovalor λ:

$$[\mathbf{A} - \lambda \mathbb{I}]X = \mathbf{0} \in \mathbb{V}.$$

Diagonalização de Operadores (Matrizes)

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial de dimensão finita **n** e **T** $: \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ um operador linear.

Teorema. Autovetores de um mesmo operador linear **T** $: \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ associados à autovalores diferentes são LI entre si.

De fato. Sejam λ_1 e λ_2 autovalores de **T** $: \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ com $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Sejam v_1 e v_2 autovetores de **T** associados a λ_1 e λ_2, respectivamente.

Considere a combinação linear $c_1 v_1 + c_2 v_2 = \mathbf{0}$. (1).

Aplicando **T** em ambos os lados da igualdade obtemos

$$c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 = \mathbf{0} \quad (2).$$

Multiplicando (1) por λ_1 e subtraindo de (2), obtemos

$$c_2(\lambda_2 - \lambda_1) v_2 = \mathbf{0}.$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e $v_2 \neq \mathbf{0}$, então $c_2 = 0$.

Voltando a Eq. (1), com $c_2 = 0$, obtemos que $c_1 = 0$.

Diagonalização de Operadores (Matrizes)

Teorema. Sejam $\mathbb{V}$ um espaço vetorial de dimensão **n** e **T** $: \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ um operador linear com matriz $\mathbf{A_{n\times n}}$ em relação a uma base $\mathbf{B}_1$ de $\mathbb{V}$. **Se T** (ou **A**) possuir **n** autovetores LI entre si, **então** existe uma base $\mathbf{B}_2$ de $\mathbb{V}$ tal que a matriz de **T** nesta "nova" base $\mathbf{B}_2$ é uma matriz diagonal Λ. Os autovalores de **T** (ou de **A**) formam a diagonal de Λ. Além disto, a matriz $\mathbf{S} = \mathbf{M}_{\mathbf{B_2}}^{\mathbf{B_1}}$ mudança da base de autovetores $\mathbf{B}_2$ para a base original $\mathbf{B}_1$, **ou matriz de diagonalização,** tem como colunas os **n** autovetores de **T** e valem as identidades $\boxed{\Lambda = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}}$, ou $\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{S}\Lambda\mathbf{S}^{-1}}$, ou $\boxed{\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{S}\Lambda}$, ou $\boxed{\Lambda\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}}$.

Obs. Se $[v]_{\mathbf{B}_1}$ é a representação de v na base $\mathbf{B}_1$ e $[v]_{\mathbf{B_2}}$ é a representação de v na base de autovetores, **então**

$$\boxed{[v]_{\mathbf{B}_2} = \mathbf{S}^{-1}[v]_{\mathbf{B}_1}, \text{ ou } [v]_{\mathbf{B}_1} = \mathbf{S}[v]_{\mathbf{B}_2}.}$$

Potências de matriz. $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A} = (\mathbf{S}\Lambda\mathbf{S}^{-1})(\mathbf{S}\Lambda\mathbf{S}^{-1}) = \mathbf{S}\Lambda^2\mathbf{S}^{-1}$.
Assim, $\mathbf{A}^k = \mathbf{S}\Lambda^k\mathbf{S}^{-1}, \forall k \in \mathbb{N}$.

Diagonalização de Operadores (Matrizes)

Exemplo 1. Diagonalize o operador $\mathbf{T}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$\mathbf{T}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + 2x_2, x_1 + x_2 + x_3).$$

Matriz de T na base canônica $\mathbf{B_1}$: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Equação característica:

$p(\lambda) = det([\mathbf{A} - \lambda \mathbb{I}]) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0.$

Autovalores: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$.

Autovetores associados à $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$: $[\mathbf{A} - 1\,\mathbb{I}]X = \mathbf{0}$

$\iff v^{(1)} = (-1, 1, 0), \quad v^{(2)} = (-1, 1, 1).$

Autovetores associados à $\lambda_3 = 2$: $[\mathbf{A} - 2\,\mathbb{I}]X = \mathbf{0}$

$\iff v^{(3)} = (0, 1, 1).$

Base de autovetores: $\mathbf{B}_2 = \{(-1, 1, 0), (-1, 1, 1), (0, 1, 1)\}.$

Diagonalização de Operadores (Matrizes)

Exemplo 1(cont). $\mathbf{T}(x_1, x_2, x_3)_C = (x_1, x_1 + 2x_2, x_1 + x_2 + x_3)_C$.

Matriz de diagonalização :

$$\mathbf{M}_{\mathbf{B_2}}^{\mathbf{B_1}} = \mathbf{S} = \begin{bmatrix} v^{(1)} & v^{(2)} & v^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matriz (diagonal) de T na base de autovetores $\mathbf{B_2}$:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Expressão do operador T na base de autovetores $\mathbf{B}_2$:

Se $v = av^{(1)} + bv^{(2)} + cv^{(3)}$, isto é, **se** $[v]_{\mathbf{B}_2} = (a, b, c)$, **então**

$$\mathbf{T}([v]_{\mathbf{B}_2}) = \Lambda[v]_{\mathbf{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_{\mathbf{B}_2} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 2c \end{bmatrix}_{\mathbf{B}_2}.$$

Ou seja, $\mathbf{T}(a, b, c)_{\mathbf{B}_2} = (a, b, 2c)_{\mathbf{B}_2}$.

Diagonalização de Operadores (Matrizes)

Exemplo 1(cont). $\mathbf{T}(x_1, x_2, x_3)_{\mathbf{B_1}} = (x_1, x_1 + 2x_2, x_1 + x_2 + x_3)_{\mathbf{B_1}}$,
$\mathbf{T}(a, b, c)_{\mathbf{B_2}} = (a, b, 2c)_{\mathbf{B_2}}$.

Matriz mudança da base canônica $\mathbf{B_1}$ para a base de autovetores $\mathbf{B_2}$: $\mathbf{M}_{\mathbf{B_1}}^{\mathbf{B_2}} = \mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Exemplo do Exemplo 1.
Seja $[v]_{\mathbf{B_1}} = (1, 2, 3)_{\mathbf{B_1}}$. Então $\mathbf{T}(1, 2, 3)_{\mathbf{B_1}} = (1, 5, 6)_{\mathbf{B_1}}$.

Passando para a base de autovetores $\mathbf{B_2}$:

$[v]_{\mathbf{B}_2} = \mathbf{S}^{-1}[v]_{\mathbf{B_1}} = (-1, 0, 3)_{\mathbf{B}_2}$, $\qquad \mathbf{T}(-1, 0, 3)_{\mathbf{B_2}} = (-1, 0, 6)_{\mathbf{B_2}}$.

Note que
$(-1, 0, 3)_{\mathbf{B}_2} = -1v^{(1)} + 3v^{(3)} = -(-1, 1, 0) + 3(0, 1, 1) = (1, 2, 3)_{\mathbf{B_1}}$,
$(-1, 0, 6)_{\mathbf{B}_2} = -1v^{(1)} + 6v^{(3)} = -(-1, 1, 0) + 6(0, 1, 1) = (1, 5, 6)_{\mathbf{B_1}}$.

Diagonalização de Operadores (Matrizes)

Problema(Strang, pg 257). As populações de duas ilhas vizinhas X e Y têm o seguinte comportamento: todo ano $\frac{1}{10}$ dos habitantes da ilha Y mudam para a ilha X, $\frac{2}{10}$ dos habitantes da ilha X mudam para a ilha Y e as quantidade de nascimentos e de óbitos das populações somadas são iguais. O que esperar da distribuição populacional nas duas ilhas com o passar dos anos?

Solução. Modelagem matemática: Sejam x_k e y_k as quantidades de habitantes nas ilhas X e Y, respect., no ano k.

Então tem-se o sistema de equações:

$$\begin{cases} x_{k+1} = 0.8x_k + 0.1y_k \\ y_{k+1} = 0.2x_k + 0.9y_k \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}.$$

Ou seja, o comportamento é regido pela matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{bmatrix}$, ou pelo operador linear $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$\mathbf{T}(x, y) = (0.8x + 0.1y, 0.2x + 0.9y).$$

Diagonalização de Operadores (Matrizes)

Solução(cont). Analisemos a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{bmatrix}$.

Observe que os elementos de cada coluna da matriz **A** somam **1** (**matriz de Markov**).

Autovalores de A:

$$det(\mathbf{A} - \lambda \mathbb{I}) = \lambda^2 - 1.7\lambda + 0.7 = 0 \iff \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0.7.$$

Autovetores de A associados à λ_1: $v^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \\ 2 \end{bmatrix}$

Autovetores de A associados à λ_2: $v^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ \\ 1 \end{bmatrix}$

Matriz de diagonalização: $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \\ 0 & 0.7 \end{bmatrix}.$

Diagonalização de Operadores (Matrizes)

Solução(cont).

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{bmatrix}, \mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{S}\Lambda\mathbf{S}^{-1}.$$

Conhecidas as populações iniciais x_0 e y_0, então

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \mathbf{A}\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = \mathbf{A}^2\begin{bmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \end{bmatrix} = \mathbf{A}^3\begin{bmatrix} x_{k-2} \\ y_{k-2} \end{bmatrix} = \cdots = \mathbf{A}^{k+1}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

Como $\mathbf{A}^{k+1} = \mathbf{S}\Lambda^{k+1}\mathbf{S}^{-1}$, então $\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \mathbf{S}\Lambda^{k+1}\mathbf{S}^{-1}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$,

ou seja, $\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \mathbf{S}\begin{bmatrix} 1^{k+1} & 0 \\ 0 & (0.7)^{k+1} \end{bmatrix}\mathbf{S}^{-1}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$.

Tomando o limite com $k \to \infty$, obtemos a tendência (**estado estacionário**) das populações:

$$\begin{bmatrix} x_\infty \\ y_\infty \end{bmatrix} = \mathbf{S}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{S}^{-1}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

Diagonalização de Operadores (Matrizes)

Solução(cont). Conhecidas as populações iniciais x_0 e y_0, então $\begin{bmatrix} x_\infty \\ y_\infty \end{bmatrix} = \mathbf{S}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{S}^{-1}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$. **Substituindo S** e $\mathbf{S}^{-1}$ obtemos

$$\begin{bmatrix} x_\infty \\ y_\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{x_0+y_0}{3} \\ \frac{-2x_0+y_0}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{x_0+y_0}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(x_0+y_0) \\ \frac{2}{3}(x_0+y_0) \end{bmatrix} = \frac{1}{3}(x_0+y_0)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Conclusão: com o passar dos anos a população tende a estabilizar com a ilha Y possuindo o dobro da população da ilha X, independentemente de como a proporção populacional se inicie. **Se** as populações iniciais definem um autovetor de **A** associado à $\lambda_1 = 1$, **então** nada mudará.

Diagonalização de Operadores (Matrizes)

Equações da forma $X_{k+1} = \mathbf{A}X_k$ são ditas **equações de diferenças** cuja solução é $X_k = \mathbf{A}^k X_0$.

Se $\mathbf{A}$ pode ser diagonalizada por $\mathbf{S}$, isto é, se $\mathbf{A} = \mathbf{S}\Lambda\mathbf{S}^{-1}$, **então** $\mathbf{A}^k = \mathbf{S}\Lambda^k\mathbf{S}^{-1}$ e $X_k = \mathbf{S}\Lambda^k\mathbf{S}^{-1}X_0$.

Dado o valor inicial X_0 e calculadas $\mathbf{S}$, $\mathbf{S}^{-1}$ e Λ, então fazendo $\mathbf{S}^{-1}X_0 = (c_1, c_2, \cdots, c_\mathbf{n})$, obtém-se

$$X_k = \begin{bmatrix} & & \\ v^{(1)} & \dots & v^{(\mathbf{n})} \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \lambda_\mathbf{n}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_\mathbf{n} \end{bmatrix}$$

$$= c_1\lambda_1^k v^{(1)} + c_2\lambda_2^k v^{(2)} + \cdots + c_n\lambda_\mathbf{n}^k v^{(\mathbf{n})}.$$

Conclusão. Se $\lambda_1 = 1$ e $|\lambda_j| < 1$, para $j = 2, 3, \cdots, \mathbf{n}$, **então** a solução assintótica (estacionária, ou de equilíbrio, ou quando $k \to \infty$) é proporcional ao autovetor associado à λ_1.