Métodos Matemáticos I

Prof. Aparecido J. de Souza
aparecidosouza@ci.ufpb.br

Isomorfismos Lineares
Funcionais Lineares e o Espaço Dual
Anuladores e Complemento Ortogonal

Isomorfismos Lineares

Definição. Uma transformação linear **T** de um espaço vetorial $\mathbb{V}$ num espaço vetorial $\mathbb{W}$ é um **isomorfismo linear** entre $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ se **T** é **injetiva e sobrejetiva (bijetora, ou inversível)**.

Definição. Dois espaços vetoriais são **linearmente isomorfos** se existir um isomorfismo linear entre eles.

Teorema. Seja $\mathbf{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ uma Transformação Linear. **T** é um isomorfismo linear se, e somente se, transforma base de $\mathbb{V}$ em base de $\mathbb{W}$.

Consequência. Dois espaços vetoriais linearmente isomorfos tem a mesma dimensão. **Por isto,** todo espaço vetorial $\mathbb{V}$ de dimensão finita é linearmente isomorfo à algum $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$.

Assim, os seguintes espaços são isomorfos:

$$\mathbb{P}_{\mathbf{n-1}}(\mathbb{R}) \text{ e } \mathbb{R}^{\mathbf{n}}, \qquad \mathbb{M}_{\mathbf{m\times n}},\ \mathbb{R}^{\mathbf{mn}}, \mathbb{P}_{\mathbf{m\times n-1}}(\mathbb{R}).$$

Isomorfismos Lineares

Um isomorfismo linear básico. Sejam $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ espaços vetoriais de mesma dimensão finita $\mathbf{n}$. Sejam $\mathbf{B}_{\mathbb{V}} = \{v_1, v_2, \ldots, v_{\mathbf{n}}\}$ e $\mathbf{B}_{\mathbb{W}} = \{w_1, w_2, \ldots, w_{\mathbf{n}}\}$ bases de $\mathbb{V}$ e de $\mathbb{W}$, respectivamente. Um isomorfismo linear básico entre $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ pode ser obtido definindo $\mathbf{T}(v_i) = w_i$, $i = 1, 2, \cdots, \mathbf{n}$.

O Isomorfismo Linear Inverso. Se $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ têm a mesma dimensão **finita** e $\mathbf{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ é um isomorfismo linear com matriz $\mathbf{A}$, então $\mathbf{T}^{-1} : \mathbb{W} \to \mathbb{V}$ é dado por $\mathbf{T}^{-1}(w) = \mathbf{A}^{-1} w$, $\forall w \in \mathbb{W}$, em que $\mathbf{A}^{-1}$ é a matriz inversa de $\mathbf{A}$.

Obs. Quando $\mathbb{W} = \mathbb{V}$ e $\mathbf{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ é um isomorfismo linear, então $w = \mathbf{T}(v)$ representa apenas uma **mudança de variáveis** de w para v, enquanto $v = \mathbf{T}^{-1}(w)$ representa uma **mudança de variáveis** de w para v.

Exemplo 1 (rotação de $\pi/4$). $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $\mathbf{T}(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, \quad x_1 + x_2) = (y_1, y_2)$.

Funcionais Lineares

Definição. Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial. Um **funcional linear** é uma transformação linear cujo domínio é espaço vetorial $\mathbb{V}$ e o **contradomínio é o corpo dos escalares $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)**.

Obs. Se $\mathbb{V}$ tem dimensão finita $\mathbf{n}$, **então** a matriz de um funcional linear é uma matriz linha $\mathbf{A}_{1\times\mathbf{n}}$.

Exemplo 2 (Funcionais Coordenadas/Projeções):

$$p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ tal que } p_i(x_1, x_2, \ldots, x_\mathbf{n}) = x_i,\ i = 1, 2, \ldots, \mathbf{n}.$$

Matriz de p_i: $\mathbf{A}_i$ $= \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}_{1\times\mathbf{n}}$
(matriz linha com cuja entrada i é 1 e a demais entradas nulas).

Exemplo 3 (Funcional de Dirac): Seja $\mathbb{V} = \mathscr{C}(\mathbb{R})$. Definimos:

$$\delta_0 : \mathscr{C}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \text{ tal que } \delta_0(f) = f(0), \forall f \in \mathbb{V}.$$

Note que $\mathbb{V} = \mathscr{C}(\mathbb{R})$ tem dimensão **infinita**.

Exercício. Determine os núcleos dos dois funcionais acima.

Funcionais Lineares

Exemplo 4 (Produto escalar por um vetor fixo):
Sejam $\mathbb{V}$ um espaço vetorial de dimensão **n**, munido de um PI $\langle , \rangle$, com uma base $\mathbf{B}_{\mathbb{V}} = \{v_1, v_2, \dots, v_{\mathbf{n}}\}$ e **v** um vetor fixo em $\mathbb{V}$.

Definimos os seguinte funcional linear $\mathbf{L_v} : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$:

$$\boxed{\mathbf{L_v}(x) = \langle \mathbf{v}, x \rangle, \quad \forall x \in \mathbb{V}.}$$

Note que, **se** $[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_{\mathbb{V}}} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_{\mathbf{n}} v_{\mathbf{n}}$ e $[x]_{\mathbf{B}_{\mathbb{V}}} = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_{\mathbf{n}} v_{\mathbf{n}}$, **então** $\mathbf{L_v}(x) = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_{\mathbf{n}}$**.**

Lembrando que a base canônica de $\mathbb{W} = \mathbb{R}$ é o número **1**, obtenhamos a **Matriz A** de $\mathbf{L_v}$:

$$\mathbf{L_v}(v_1) = \langle \mathbf{v}, v_1 \rangle \mathbf{1} = \alpha_1, \quad \mathbf{L_v}(v_2) = \langle \mathbf{v}, v_2 \rangle \mathbf{1} = \alpha_2, \ \cdots, \quad \mathbf{L_v}(v_{\mathbf{n}}) = \langle \mathbf{v}, v_{\mathbf{n}} \rangle \mathbf{1} = \alpha_{\mathbf{n}}.$$

Logo,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{v}, v_1 \rangle & \langle \mathbf{v}, v_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{v}, v_{\mathbf{n}} \rangle \end{bmatrix}_{1 \times \mathbf{n}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{\mathbf{n}} \end{bmatrix}.$$

Funcionais Lineares

Exemplo 1 do Exemplo 4. Sejam $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ como PI usual.

(i) **Se** $\mathbf{v} = \mathbf{e}_i$ é o i-ésimo vetor da base canônica do $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$, **então**

$$\boxed{\mathbf{L}_{\mathbf{e}_i}(x) = \langle e_i, x \rangle = x_i \,.}$$

funcional coordenada-i (ou projeção na direção -i).

(ii) **Se n** é par e $\mathbf{v} = (1, -1, 1, -1, \ldots, 1, -1)$, **então**

$$\mathbf{L}_{\mathbf{v}}(x) = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \cdots + x_{\mathbf{n}-1} - x_{\mathbf{n}}.$$

Se $x = (1, 1, \ldots, 1)$, **então** $L_{\mathbf{v}}(x) = 0$.

Funcionais Lineares

Exemplo 2 do Exemplo 4. Seja
$\mathbb{V} = \mathscr{C}([0,1]) = \{$funções contínuas no intervalo $[0,1]\}$.
Considere o PI $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$.
Seja $\omega(x)$ uma função fixa em $\mathscr{C}([0,1])$. Então

$$\mathbf{L}_\omega(f) = \langle \omega, f \rangle = \int_0^1 \omega(x)f(x)dx, \forall f \in \mathscr{C}([0,1]).$$

(i) **Se** $\omega(x) \equiv 1$, **então** $\mathbf{L}_\omega(f) = \int_0^1 f(x)dx$.

Se $f(x) = 1 + x^2$, **então** $\mathbf{L}_\omega(f) = \int_0^1 (1 + x^2)dx = \frac{4}{3}$.

Se $g(x) = x - 2$, **então** $\mathbf{L}_\omega(g) = \int_0^1 (x - 2)dx = \frac{-3}{2}$.

(ii) **Se** $\omega(x) = e^{-x^2}$, **então** $\mathbf{L}_\omega(f) = \int_0^1 e^{-x^2} f(x)dx$.

Se $f(x) = x$, **então** $\mathbf{L}_\omega(f) = \int_0^1 e^{-x^2} x\,dx = \frac{e-1}{2e} \approx 0.31606$.
Se $g(x) \equiv 1$, **então** $\mathbf{L}_\omega(g) = \int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 0.746824$.

Funcionais Lineares

Exemplo 3 do Exemplo 4: Seja $\mathbb{V} = \mathbb{M}_{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}$ com o PI $\langle A, B\rangle = tr(A^tB)$ e $\mathbf{C}$ uma matriz fixa. Então

$$\mathbf{L_C}(M) = \langle \mathbf{C}, M\rangle = tr(\mathbf{C}^t M),\ \forall M \in \mathbb{M}_{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}.$$

(i) **Se $\mathbf{C} = \mathbf{Id}$**, então $\mathbf{L_C}(M) = tr(M)$.

(ii) **Se** $n = 3$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$

então $\mathbf{C}^t = \mathbf{C}$,

$\mathbf{C}^t M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{bmatrix}$ e $\mathbf{L_C}(M) = m_{11} + m_{23} + m_{32}$.

Exercício. Mostre que no caso **(ii)**, a Matriz de $\mathbf{L_C}$ é

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{1}\times\mathbf{9}}.$$

Funcionais Lineares

Teorema. Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial. O conjunto dos funcionais lineares $\mathbf{F} : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ também é um espaço vetorial com as operações usuais de soma de funções e multiplicação de função por escalar.

Notação. O espaço vetorial estabelecido no Teorema acima é dito o **espaço dual** do espaço $\mathbb{V}$ e é denotado por $\mathbb{V}^*$.

A Base Dual

Sejam $\mathbb{V}$ um espaço vetorial de **dimensão finita** $\mathbf{n}$ e
$\mathbf{B}_{\mathbb{V}} = \{v_1, v_2, \cdots v_{\mathbf{n}}\}$ uma base (primal) de $\mathbb{V}$.

Sejam $p_i : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$, para $i = 1, 2, \cdots \mathbf{n}$, os **funcionais coordenadas (ou projeções)** dados por

$$p_i(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j\,. \end{cases}$$

Então $\mathbf{B}_{\mathbb{V}^*} = \{p_1, p_2, \cdots, p_{\mathbf{n}}\}$ é uma base de $\mathbb{V}^*$, denominada a **base dual** da base $\mathbf{B}_{\mathbb{V}}$.

A prova deste Teorema está no Apêndice.

Conclusão: **em dimensão finita**, os espaços vetoriais $\mathbb{V}$ e $\mathbb{V}^*$ são **isomorfos**.

A Base Dual

Exemplo 5. Sejam $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{B}_{\mathbb{V}} = \{(2,1),(3,1)\}$ uma base.

A base dual $\mathbf{B}_{\mathbb{V}^*}$: $\{p_1, p_2\}$ tais que $p_1(2,1) = 1$, $p_1(3,1) = 0$, $p_2(2,1) = 0$ e $p_2(3,1) = 1$.

Em relação a base $\mathbf{B}_{\mathbb{V}}$ se $v = a_1(2,1) + a_2(3,1)$, então $p_1(v) = a_1$ e $p_2(v) = a_2$ e assim, dado um funcional $\mathbf{F} : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ devem existir escalares α_1 e α_2 tais que $\mathbf{F}(v) = \alpha_1 p_1(v) + \alpha_2 p_2(v) = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = \langle(\alpha_1, \alpha_2), (a_1, a_2)\rangle$.

Em relação a base canônica de $\mathbb{R}^2$ temos que $(x_1, x_2) = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 = a_1(2,1) + a_2(3,1) = (2a_1 + 3a_2, a_1 + a_2)$.

Logo, temos o sistema nas variáveis a_1 e a_2:

$$\begin{cases} 2a_1 + 3a_2 = x_1 \\ a_1 + a_2 = x_2 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = 3x_2 - x_1 \\ a_2 = x_1 - 2x_2 . \end{cases}$$

Assim, na **base canônica** de $\mathbb{R}^2$ os funcionais que definem a base dual $\mathbf{B}_{\mathbb{V}^*}$ são: $p_1(x_1, x_2) = 3x_2 - x_1$ e $p_2(x_1, x_2) = x_1 - 2x_2$.

O isomorfismo entre o espaço primal e seu dual

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial de **dimensão finita** munido de um PI $\langle , \rangle$. Baseando-se no **Exemplo 4** definimos a transformação $\Psi : \mathbb{V} \to \mathbb{V}^*$ dada por $\Psi(\mathbf{v}) = \mathbf{L_v}$, $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}$.

Teorema. A transformação Ψ é um **isomorfismo linear**.

Prova. A linearidade de Ψ segue da linearidade do PI.

Calculemos o núcleo de Ψ:
$\Psi(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \iff \mathbf{L_v}(x) = 0, \forall x \in \mathbb{V} \iff \langle \mathbf{v}, x \rangle = 0, \forall x \in \mathbb{V}$.

$\iff$ $\mathbf{v}$ é ortogonal à todo vetor x de $\mathbb{V}$ $\iff$ $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Logo, Ψ é **injetiva** e **como** $dim(\mathbb{V}^*) = dim(\mathbb{V})$, então Ψ é **sobrejetiva** e portanto é um **isomorfismo linear entre $\mathbb{V}$ e $\mathbb{V}^*$**.

Portanto, qualquer funcional linear $\mathbf{F} : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ avaliado num vetor $x \in \mathbb{V}$ é identificado como o **produto interno** de um vetor fixo $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ por x, isto é, $\mathbf{F}(x) = \langle \mathbf{v}, x \rangle, \forall x \in \mathbb{V}$.

O Segundo Espaço Dual (em dimensão finita)

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial e $\mathbb{V}^*$ o seu espaço dual, isto é,

$$\mathbb{V}^* = \{\text{funcionais lineares de } \mathbb{V} \text{ em } \mathbb{R}\}.$$

Como $\mathbb{V}^*$ é um espaço vetorial ele também admite um espaço dual, chamado de **bidual** de $\mathbb{V}$, denotado por $\mathbb{V}^{**}$.

Portanto $\mathbb{V}^{**} = \{\mathbf{G} : \mathbb{V}^* \to \mathbb{R} \text{ tal que } \mathbf{G} \text{ é linear}\} =$

$$\{\text{funcionais lineares de } \mathbb{V}^* \text{ em } \mathbb{R}\}.$$

Teorema. Se $\mathbb{V}$ tem **dimensão finita**, então $\mathbb{V}^{**}$ e $\mathbb{V}$ são isomorfos.

Obs. O isomorfismo $\mathbf{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}^{**}$, também chamado a aplicação natural de $\mathbb{V}$ em $\mathbb{V}^{**}$, é assim definido:
para $v \in \mathbb{V}$ arbitrário definimos $\mathbf{T}(v) = \mathbf{G}$, em que $\mathbf{G}$ é o funcional linear de $\mathbb{V}^*$ em $\mathbb{R}$ dado por $\mathbf{G}(\mathbf{F}) = \mathbf{F}(v)$, para qualquer $\mathbf{F} \in \mathbb{V}^*$ (assim $\mathbf{G}$ é identificado com v e vice-versa).

Anuladores

Sejam $\mathbb{V}$ um espaço vetorial e **X** um **subconjunto** de $\mathbb{V}$.

Um funcional linear $\mathbf{F} : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ **anula** **X** se $\mathbf{F}(x) = 0, \forall x \in \mathbf{X}$.
Sejam $\mathbb{V}$ um espaço vetorial e **X** um **subconjunto** de $\mathbb{V}$.

Definição. O conjunto $\mathbf{X}^0 \subset \mathbb{V}^*$ de todos os funcionais lineares de $\mathbb{V}^*$ que anulam **X** é dito o **anulador** de **X**.

Obs. O **anulador** de um conjunto **X** de $\mathbb{V}$ é um subespaço de $\mathbb{V}^*$ (mesmo que **X** não seja subespaço de $\mathbb{V}$.

Teorema. Seja $\mathbb{V}$ espaço vetorial de **dimensão finita**. **Se** $\mathbb{W}$ é um subespaço de $\mathbb{V}$, **então**

(i) $dim(\mathbb{W}) + dim(\mathbb{W}^0) = dim(\mathbb{V})$, (ii) $\mathbb{W}^{00} \equiv \mathbb{W}$.

Anulador $\times$ Complemento Ortogonal

Sejam $\mathbb{V}$ espaço vetorial munido de um PI $\langle , \rangle$ e $\mathbf{X}$ um subconjunto de $\mathbb{V}$.

Definição. O **complemento ortogonal** de $\mathbf{X}$ em relação ao PI dado, denotado por $\mathbf{X}^{\perp}$, é o conjunto de todos os vetores de $\mathbb{V}$ ortogonais a todos os vetores de $\mathbf{X}$, isto é,

$$\mathbf{X}^{\perp} = \{v \in \mathbb{V} \text{ tais que } \langle v, x\rangle = 0, \forall x \in \mathbf{X}\}.$$

Teorema. Seja $\mathbb{V}$ espaço vetorial de **dimensão finita**. **Se** $\mathbb{W}$ é um subespaço de $\mathbb{V}$, **então**

$$\text{(i) } dim(\mathbb{W}) + dim(\mathbb{W}^{\perp}) = dim(\mathbb{V}), \quad \text{(ii) } \mathbb{W}^{\perp\perp} \equiv \mathbb{W}.$$

Usando o **isomorfismo** $\Psi : \mathbb{V} \to \mathbb{V}^*$ que a cada vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ associa o funcional $\mathbf{L_v} : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ dado por $\mathbf{L_v}(x) = \langle \mathbf{v}, x\rangle$, $\forall x \in \mathbb{V}$, **o anulador de um subespaço $\mathbb{W}$ de $\mathbb{V}$ é identificado com o complemento ortogonal de $\mathbb{W}$.**

Anulador $\times$ Complemento Ortogonal

Exemplo 6. Sejam $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{X} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 2y = 0\}$.

Então $\mathbf{X}$ é o subespaço de $\mathbb{R}^2$ gerado pelo vetor $v = (2, 1)$.

O **anulador** de $\mathbf{X}$ é o subespaço de $(\mathbb{R}^2)^*$ formado por todos os funcionais lineares $\mathbf{F}$ tais que $\mathbf{F}(2, 1) = 0$.

O **complemento ortogonal** de $\mathbf{X}$ é o subespaço de $\mathbb{R}^2$ formado por todos os vetores $v = (a, b)$ tais que

$$\langle (a, b), (2, 1) \rangle = 0 \iff 2a + b = 0 \iff b = -2a.$$

Logo, o complemento ortogonal de $\mathbf{X}$

$$\mathbf{X}^{\perp} = \{\text{subespaço do } \mathbb{R}^2 \text{ gerado pelo vetor } (1, -2)\}$$

é identificado com o anulador de $\mathbf{X}$

$\mathbf{X}^0 = \{$subespaço do $(\mathbb{R}^2)^*$ gerado pelo func. $\mathbf{F}(x, y) = x - 2y\}$.

Apêndice. A Base Dual

Seja $\mathbf{B}_{\mathbb{V}} = \{v_1, v_2, \cdots v_{\mathbf{n}}\}$ uma base (primal) do esp. vetorial $\mathbb{V}$.

Sejam $p_i : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$, para $i = 1, 2, \cdots \mathbf{n}$, os **funcionais coordenadas** dados por

$$p_i(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Então $\mathbf{B}_{\mathbb{V}^*} = \{p_1, p_2, \cdots, p_{\mathbf{n}}\}$ forma a **base dual** da base $\mathbf{B}_{\mathbb{V}}$.

De Fato. Se $c_1 p_1 + c_2 p_2 + \cdots + c_{\mathbf{n}} p_{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$ (funcional nulo), então para qualquer vetor v_j da base $\mathbf{B}_{\mathbb{V}}$ tem-se que $\sum_{i=1}^{\mathbf{n}} c_i p_i(v_j) = c_j = 0$. **Logo**, $p_1, p_2, \ldots, p_{\mathbf{n}}$ são LI.

Seja $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_{\mathbf{n}} v_{\mathbf{n}}$ um vetor arbitrário de $\mathbb{V}$. Então $v = p_1(v)v_1 + p_2(v)v_2 + \cdots + p_{\mathbf{n}}(v)v_{\mathbf{n}}$.

Daí, $p(v) = p_1(v)p(v_1) + p_2(v)p(v_2) + \cdots + p_{\mathbf{n}}(v)p(v_{\mathbf{n}}) =$
$$\alpha_1 p_1(v) + \alpha_2 p_2(v) + \cdots + \alpha_{\mathbf{n}} p_{\mathbf{n}}(v).$$