UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA - UFPB
CENTRO DE INFORMÁTICA - CI
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - DCC
DISCIPLINA: Métodos Matemáticos I 2023.2

Aluno(a): .... Matrícula: ....

Segunda Prova

Obs. O valor máximo da prova é 7 pontos. Os outros 3 pontos da unidade são obtidos a partir das listas de exercícios entregues.

01. Considere o espaço vetorial $\mathbb{V} = \mathbb{M}_{2\times 2}$ das matrizes reais 2×2 munido das operações usuais de adição e de multiplicação por escalar e também munido do produto interno $\langle A, B\rangle = tr(B^t A)$, em que B^t é a transposta da matriz B e $tr(B^t A)$ é o traço da matriz produto $B^t A$.

    Defina o conjunto $\mathbb{W}$ de matrizes 2×2 da seguinte forma:

    $A \in \mathbb{W} \iff A = \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{W}$ com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$.

    (a) Verifique que o subconjunto $\mathbb{W}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{V}$.

    (b) Determine duas matrizes que formam uma base do subespaço $\mathbb{W}$.

    (c) Verifique se as duas matrizes que formam a base determinada no item (b) são ortogonais entre si.

02. Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 2(x_2 + x_3), x_3)$.

    (a) Determine os autovalores do operador **T**.

    (b) Determine uma base de cada autoespaço (autovetores) associado a cada um dos autovalores de **T**.

    (c) Determine uma base do $\mathbb{R}^3$ que contenha como seus primeiros elementos os autovetores que formam as bases dos autoespaccos do item (b).

03. Seja a transformação linear $\mathbf{T} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(r) = (r, -r, 2r)$.

   (a) Determine se o vetor $v = (2, 0, 1)$ pertence ao subespaço imagem de $\mathbf{T}$.

   (b) Determine a expressão da transformação linear $\mathbf{T}^* : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ adjunta de $\mathbf{T}$.

   (c) Determine se o vetor $v = (2, 0, 1)$ pertence ao núcleo de $\mathbf{T}^*$.

04. Considere o espaço vetorial dos polinômios de grau no máximo $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ munido das operações usuais de adição e de multiplicação por escalar. Defina a transformação linear $\mathbf{T} : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ por $T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = (a_0 + a_1 + a_2, a_0 + a_1)$.

   (a) Determine o núcleo da transformação $\mathbf{T}$.

   (b) Baseando-se no item (a) determine a dimensão do subespaço $Im(\mathbf{T})$. Justifique a sua resposta.

   (c) Diga se a transformação dada é injetiva e também se é sobrejetiva. Justifique as suas duas respostas.