1) c) $T: P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 + a_2x + a_0x^2$

Sejam

$$v_1 = (a_0 + a_1x + a_2x^2) \stackrel{?}{=} (a_0, a_1, a_2) \qquad v = (a_0 + a_1x + a_2x^2)$$

$$v_2 = (b_0 + b_1x + b_2x^2)$$

T será linear se:

$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$, para quaisquer v_1, v_2 em V;

$T(\alpha v) = \alpha T(v)$, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e qualquer $v \in V$

...

$$T(v_1 + v_2) = T(a_0 + b_0 + a_1x + b_1x + a_2x^2 + b_2x^2)$$

$$= ([a_1 + b_1] + [a_2 + b_2]x + [a_0 + b_0]x^2)$$

$$T(v_1) = (a_1 + a_2x + a_0x^2)$$

$$T(v_2) = (b_1 + b_2x + b_0x^2)$$

$$T(v_1) + T(v_2) = ([a_1 + b_1] + [a_2 + b_2]x + [a_0 + b_0]x^2) = T(v_1 + v_2) \;//$$

...

$$T(\alpha v) = T(\alpha a_0 + \alpha a_1x + \alpha a_2x^2) = (\alpha a_1 + \alpha a_2x + \alpha a_0x^2)$$

$$= \alpha(a_1 + a_2x + a_0x^2) = \alpha T(v) \;//$$

Como as duas propriedades básicas da linearidade foram satisfeitas, então T é linear.

1) e) cont...

Determinar a matriz A de T, utilizando a base canônica de $\mathbb{P}_2$

$$T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_1 + a_2 x + a_0 x^2$$

$$\begin{aligned} T(1) &= 0 + 0 + x^2 = x^2 \\ T(x) &= 1 + 0x + 0x^2 = 1 \\ T(x^2) &= 0 + x + 0x^2 = x \end{aligned} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow T^*(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_2 + a_0 x + a_1 x^2$$

Determinar os subespaços nulos

$$AX = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

$$N(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} //$$

Como A^t "tem a mesma cara" de A, então

$$N(A^t) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} //$$

A relação entre os dois subespaços está na nulidade dos mesmos, visto que ambos são permutações da matriz canônica de algum espaço de dimensão 3.