Métodos Matemáticos I

Prof. Aparecido J. de Souza
aparecidosouza@ci.ufpb.br

Formas Bilineares e Formas Quadráticas
Lei da inércia de Sylvester

Formas Bilineares

Sejam $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ espaços vetoriais reais.

Forma Bilinear B : $\mathbb{V} \times \mathbb{W} \to \mathbb{R}$ é uma função que a cada par $(v, w) \in \mathbb{V} \times \mathbb{W}$ associa um númeo real $\mathbf{B}(v, w)$ satisfazendo as duas propriedades a seguir:

- $\mathbf{B}(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w) = \alpha_1 \mathbf{B}(v_1, w) + \alpha_2 \mathbf{B}(v_2, w)$,
- $\mathbf{B}(v, \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2) = \beta_1 \mathbf{B}(v, w_1) + \beta_2 \mathbf{B}(v, w_2)$,

para quaisquer $v, v_1, v_2 \in \mathbb{V}$, $w, w_1, w_2 \in \mathbb{W}$ e $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1. (produto interno) $\mathbf{B}(v_1, v_2) = \langle v_1, v_2 \rangle$, $\forall v_1, v_2 \in \mathbb{V}$.

Exemplo 2. (produto tensorial) Se $\mathbf{F}_1 : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{F}_2 : \mathbb{W} \to \mathbb{R}$ são dois funcionais lineares, então $\mathbf{B}(v, w) = \mathbf{F}_1(v)\mathbf{F}_2(w)$.

Exemplo do Exemplo 2. $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{W} = \mathbb{R}^3$ com
$\mathbf{F}_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{F}_2(y_1, y_2, y_3) = y_2 + y_3$, $\forall (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$.

Então, $\mathbf{B}((x_1, x_2), (y_1, y_2, y_3)) = x_1 y_2 + x_1 y_3 + x_2 y_2 + x_2 y_3$.

Formas Bilineares

Matriz A de uma Forma Bilinear. Se $B_{\mathbb{V}} = \{v_1, \dots, v_m\}$ é base de $\mathbb{V}$ e $B_{\mathbb{W}} = \{w_1, \dots, w_n\}$ é base de $\mathbb{W}$, então

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}(v_1, w_1) & \mathbf{B}(v_1, w_2) & \cdots & \mathbf{B}(v_1, w_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B}(v_m, w_1) & \mathbf{B}(v_m, w_2) & \cdots & \mathbf{B}(v_m, w_n) \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Exemplo 3. A matriz da forma bilinear $\mathbf{B} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $\mathbf{B}((x_1, x_2), (y_1, y_2, y_3)) = x_1 y_2 + x_1 y_3 + x_2 y_2 + x_2 y_3$.

Por definição temos que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}((1,0),(1,0,0)) & \mathbf{B}((1,0),(0,1,0)) & \mathbf{B}((1,0),(0,0,1)) \\ \mathbf{B}((0,1),(1,0,0)) & \mathbf{B}((0,1),(0,1,0)) & \mathbf{B}((1,0),(0,0,1)) \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

Logo, $\quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$

Note que a expressão da forma bilinear é um **polinômio homogêneo quadrático** nas variáveis x_1, x_2, y_1, y_2, y_3.

Formas Bilineares

Exemplo 4. Seja $\mathbf{A}$ uma matriz $m \times n$. Então a função $\mathbf{B} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $\mathbf{B}(x,y) = x^t\mathbf{A}y = \langle x, \mathbf{A}y\rangle$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ é uma forma bilinear, cuja matriz é $\mathbf{A}$. Mais especificamente, se $x = (x_1, \ldots x_m)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$, então

$$\mathbf{B}(x,y) = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_m \end{bmatrix}_{1\times m} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}_{n\times 1}.$$

Exemplo do Exemplo 4. $m = 2$, $n = 3$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.

$$\mathbf{B}((x_1,x_2),(y_1,y_2,y_3)) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}_{1\times 2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}_{3\times 1} =$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}_{1\times 2} \begin{bmatrix} y_1 + 2y_2 + 3y_3 \\ 4y_1 + 5y_2 + 6y_3 \end{bmatrix}_{2\times 1} = \begin{array}{c} x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_1y_3 + \\ 4x_2y_1 + 5x_2y_2 + 6x_2y_3 . \end{array}$$

(**polinômio homogêneo quadrático**).

Formas Bilineares com $\mathbb{W} = \mathbb{V}$

Teorema. Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial de dimensão finita munido de um PI. Para cada forma bilinear $\mathbf{B} : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ existe um único operador linear $\mathbf{T_B} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ tal que

$$\mathbf{B}(v_1, v_2) = \langle v_1, \mathbf{T_B}(v_2) \rangle, \ \forall v_1, v_2 \in \mathbb{V}.$$

Neste caso a matriz **A** da forma bilinear **B** coincide com a matriz do operador $\mathbf{T_B}$ e assim, $\mathbf{B}(v_1, v_2) = \langle v_1, \mathbf{A} v_2 \rangle$.

Exemplo 5. $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\mathbf{T}(a, b) = (a + 2b, 3a - b)$.

Então $\mathbf{B}(v_1, v_2) = \mathbf{B}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \langle (x_1, x_2), \mathbf{T}(y_1, y_2) \rangle =$
$\langle (x_1, x_2), (y_1 + 2y_2, 3y_1 - y_2) \rangle = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 3x_2 y_1 - x_2 y_2.$

Matriz de B: A $= \begin{bmatrix} \langle (1,0), \mathbf{T_B}(1,0) \rangle & \langle (1,0), \mathbf{T_B}(0,1) \rangle \\ \langle (0,1), \mathbf{T_B}(1,0) \rangle & \langle (0,1), \mathbf{T_B}(0,1) \rangle \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \langle (1,0), (1,3) \rangle & \langle (1,0), (2,-1) \rangle \\ \langle (0,1), (1,3) \rangle & \langle (0,1), (2,-1) \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = [\mathbf{T_B}].$$

Formas Bilineares Simétricas

Sejam $\mathbb{V}$ espaço vetorial real de **dimensão finita**.

Definição: Uma forma bilinear $\mathbf{B} : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ é **simétrica** quando $\mathbf{B}(v_1, v_2) = \mathbf{B}(v_2, v_1)$, $\forall v_1, v_2 \in \mathbb{V}$, isto é, quando sua matriz (quadrada!) $\mathbf{A}$ for simétrica.

Exemplo 6. $\mathbf{B} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por
$\mathbf{B}(v_1, v_2) = \mathbf{B}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = -x_1 y_1 + 3x_1 y_2 + 3x_2 y_1 + 2x_2 y_2$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}((1,0),(1,0)) & \mathbf{B}((1,0),(0,1)) \\ \mathbf{B}((0,1),(1,0)) & \mathbf{B}((0,1),(0,1)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Definição: Uma forma bilinear $\mathbf{B} : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ é **anti-simétrica** quando $\mathbf{B}(v_1, v_2) = -\mathbf{B}(v_2, v_1)$, $\forall v_1, v_2 \in \mathbb{V}$, isto é, quando sua matriz (quadrada!) $\mathbf{A}$ for anti-simétrica.

Teorema. Toda matriz real quadrada pode ser decomposta na soma de uma matriz simétrica com uma matriz anti-simétrica. No caso, $\mathbf{A} = \frac{1}{2}[\mathbf{A} + \mathbf{A}^t] + \frac{1}{2}[\mathbf{A} - \mathbf{A}^t]$.

Formas Quadráticas

Sejam $\mathbb{V}$ espaço vetorial real de **dimensão finita**.

Definição. Uma função $\mathbf{q} : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ é uma **Forma Quadrática** se existir uma forma bilinear $\mathbf{B} : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\boxed{\mathbf{q}(v) = \mathbf{B}(v, v), \quad \text{para todo } v \in \mathbb{V}}.$$

Obs. A forma bilinear pode ser considerada simétrica. Para isto basta tomar a forma bilinear simétrica $\mathbf{B}' : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ dada por $\mathbf{B}'(v_1, v_2) = \frac{1}{2}[\mathbf{B}(v_1, v_2) + \mathbf{B}(v_2, v_1)]$ que ainda teremos

$$\mathbf{B}(v, v) = \tfrac{1}{2}[\mathbf{B}(v, v) + \mathbf{B}(v, v)] = \mathbf{B}'(v, v).$$

Portanto, na definição acima podemos considerar $\mathbf{B}$ simétrica.

Identidade de Polarização. Se $\mathbf{q} : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ é uma forma quadrática, então a forma bilinear simétrica associada satisfaz:

$$\boxed{\mathbf{B}(v_1, v_2) = \frac{1}{2}[\mathbf{q}(v_1 + v_2) - \mathbf{q}(v_1) - \mathbf{q}(v_2)]}$$

Formas Quadráticas

Se **A** é a matriz da forma bilinear simétrica **B**, então **A** também é a matriz da forma quadrática **q** e $\boxed{\mathbf{q}(v) = v^t \mathbf{A} v = \langle v, \mathbf{A} v \rangle.}$

Note que como **A** é simétrica, então $a_{ij} = a_{ji}$ e assim,

$$\begin{aligned}\mathbf{q}(v) = {} & x_1\left[a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1\mathbf{n}}x_\mathbf{n}\right] \\ & + x_2[a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2\mathbf{n}}x_\mathbf{n}] + \cdots \\ & + x_\mathbf{n}[a_{1\mathbf{n}}x_1 + a_{2\mathbf{n}}x_2 + \cdots + a_{\mathbf{n}-1,\mathbf{n}}x_{\mathbf{n}-1} + a_{\mathbf{nn}}x_\mathbf{n}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}= {} & a_{11}x_1^2 + \mathbf{2}a_{12}x_1x_2 + \cdots + \mathbf{2}a_{1\mathbf{n}}x_1x_\mathbf{n} \\ & + a_{22}x_2^2 + \mathbf{2}a_{23}x_2x_3 + \cdots + \mathbf{2}a_{2\mathbf{n}}x_2x_\mathbf{n} + \cdots + \\ & a_{\mathbf{n}-1,\mathbf{n}-1}x_{\mathbf{n}-1}^2 + \mathbf{2}a_{\mathbf{n}-1,\mathbf{n}}x_{\mathbf{n}-1}x_\mathbf{n} + a_{\mathbf{nn}}x_\mathbf{n}^2.\end{aligned}$$

Logo, ao iniciar pela fórmula da forma quadrática **q** deve-se tomar o cuidado para escrever a sua matriz **A**, pois já estão considerados os termos mistos $x_i x_j$ contados **duas vezes.**

Forma Quadrática

Exemplo 7. Seja $\mathbf{q} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\mathbf{q}(x_1, x_2) = x_1^2 + 6x_1x_2 - 2x_2^2.$$

Então, $\mathbf{q}(x_1, x_2) = x_1^2 + \mathbf{3x_1x_2} + \mathbf{3x_2x_1} - 2x_2^2$, e assim

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Logo, a forma bilinear $\mathbf{B} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ associada à $\mathbf{q}$ é

$$\mathbf{B}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \langle (x_1, x_2), \mathbf{T_B}(y_1, y_2) \rangle$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 + 3y_2 \\ \\ 3y_1 - 2y_2 \end{bmatrix}$$

$$= x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 - 2x_2y_2.$$

Diagonalização de Formas Quadráticas

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um PI $\langle , \rangle$.

Como a matriz **A** de uma forma quadrática é simétrica, o **Teorema Espectral** garante que existe um base ortonormal de $\mathbb{V}$ tal que $\mathbf{A} = \mathbf{Q}^{-1}\Lambda\mathbf{Q}$, em que **Q** tem as colunas formadas pelos autovetores ortonormais de **A** e Λ é uma matriz diagonal, cuja diagonal é formada pelso autovalores de **A**.

Se $\mathbf{B}_2 = \{v^{(1)}, \ldots, v^{(m)}\} \subset \mathbb{V}$ é a **base ortonormal** de autovetores de **A** com respectivos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ e **se** $[v]_{\mathbf{B}_2} = \sum_{i=1}^{m} x_i' v^{(i)}$, **então** a **forma quadrática** tem a seguinte expressão (em relação a esta base de autovetores)

$$\boxed{\mathbf{q}(v) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (x_i')^2 = \lambda_1 (x_1')^2 + \cdots + \lambda_m (x_m')^2 .}$$

Diagonalização de Formas Quadráticas

Exemplo 8. Seja a forma quadrática $\mathbf{q} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\mathbf{q}(x_1, x_2) = x_1^2 + 6x_1x_2 - 2x_2^2, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Matriz Associada: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$.

Autovalores:

$\lambda_1 = \frac{1}{2}(-1 - 3\sqrt{5}) \approx -3.8541, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(-1 + 3\sqrt{5}) \approx 2.8541.$

Base ortogonal de autovetores: $\{a^{(1)}, a^{(2)}\}$ tal que

$a^{(1)} \approx (-0.618034, \quad 1) \quad \text{com } \|a^{(1)}\| \approx 1.17557$

$a^{(2)} \approx (1.61803, \quad 1) \quad \text{com } \|a^{(2)}\| \approx 1.90211.$

Base ortonormal de autovetores: $\{v^{(1)}, v^{(2)}\}$, com

$v^{(1)} \approx (-0.356823, \quad 0.934172),$

$v^{(2)} \approx (0.934172, \quad 0.356823).$

Diagonalização de Formas Quadráticas

Exemplo 8. (cont.). Matriz Ortogonal (colunas de autovetores ortonormais de A):

$$\mathbf{Q} \approx \begin{bmatrix} -0.356823 & 0.934172 \\ 0.934172 & 0.356823 \end{bmatrix}.$$

Forma quadrática na base ortonormal:

$$\mathbf{q}(x_1', x_2') = \lambda_1 (x_1')^2 + \lambda_2 (x_2')^2 \approx -3.8541 (x_1')^2 + 2.8541 (x_2')^2.$$

Diagonalização de Formas Quadráticas

Sejam $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_{\mathbf{m}}$ os autovalores (com repetições) de uma matriz simétrica real $\mathbf{A}_{\mathbf{m}\times\mathbf{m}}$ associada à forma quadrática $\mathbf{q}(v) = v^t\mathbf{A}v$, $\forall v \in \mathbb{V}$.

Teorema. Seja $\mathbf{B}_2 = \{v^{(1)}, \ldots, v^{(\mathbf{m})}\}$ a **base ortonormal** de $\mathbb{V}$ formada por autovetores de $\mathbf{A}$. Seja v um vetor unitário de $\mathbb{V}$. **Então** $\mathbf{q}(v^{(i)}) = \lambda_i$, $i = 1, \ldots, \mathbf{m}$ e $\boldsymbol{\lambda_1 \leq \mathbf{q}(\mathbf{v}) \leq \lambda_{\mathbf{m}}}$.

De fato. Fixado i, temos:

$$\mathbf{q}(v^{(i)}) = \langle v^{(i)}, \mathbf{A}v^{(i)}\rangle = \langle v^{(i)}, \lambda_i v^{(i)}\rangle = \lambda_i \| v^{(i)}\|^2 = \lambda_i.$$

Além disto, se $v = \sum_{i=1}^{\mathbf{m}} x_i' v^{(i)}$ com $\sum_{i=1}^{\mathbf{m}} (x_i')^2 = 1$, **então**

$$\lambda_{\mathbf{1}} = \sum_{i=1}^{\mathbf{m}} \lambda_{\mathbf{1}}(x_i')^2 \leq \sum_{i=1}^{\mathbf{m}} \lambda_i (x_i')^2 = \mathbf{q}(v) \leq \sum_{i=1}^{\mathbf{m}} \lambda_{\mathbf{m}}(x_i')^2 = \lambda_{\mathbf{m}}.$$

Resumindo, os valores mínimo e máximo da forma quadrática $\mathbf{q}$ quando restrita à **esfera unitária** de $\mathbb{V}$ correspondem ao menor e ao maior autovalor de $\mathbf{q}$, respectivamente.

Dois Invariantes de uma Forma Quadrática

Definição. O **índice** de uma forma quadrática $\mathbf{q} : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$, com matriz **A**, é a dimensão do subespaço de $\mathbb{V}$ gerado por todos os autovetores de **A** associados aos **autovalores negativos**.

Obs. Quando **q**, ou **A**, é não negativa tem-se $ind(\mathbf{q}) = 0$.
Quando **q**, ou **A**, é negativa definida tem-se $ind(\mathbf{q}) = dim(\mathbb{V})$.

Definição. O **posto** de uma forma quadrática **q** é o posto da matriz **A** associada, o qual coincide com a quantidade de colunas LI de **A**.

Exemplo 9. Do **Teorema Espectral** o posto de uma forma quadrática **q** com matriz **A** coincide com a quantidade de autovalores não nulos de **A**, contando as repetições .

Dois Invariantes de uma Forma Quadrática

Teorema (Lei da inércia de Sylvester). Seja $\mathbf{q} : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ uma forma quadrática de **índice l** e **posto r**. Então existe uma base $\{v^{(1)}, \ldots, v^{(\mathbf{m})}\}$ de $\mathbb{V}$ tal que para todo $v \in \mathbb{V}$ com $v = \sum_{j=1}^{\mathbf{m}} x_j'' v^{(j)}$ se tem que

$$\mathbf{q}(v) = -(x_1'')^2 - \cdots - (x_{\mathbf{l}}'')^2 + (x_{\mathbf{l}+1}'')^2 + \cdots + (x_{\mathbf{r}}'')^2.$$

Obs. Esta representação com coeficientes -1 e $+1$ pode ser obtida a partir da diagonalização da matriz **A** da forma quadrática e do completamento de quadrados.