5) a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

A série pode ser identificada como geométrica pois ela tem a forma:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} r^n \text{, onde } r = \frac{2}{3}$$

Como $|r| = \frac{2}{3} \simeq 0,667$, temos que

$$0 < 0,667 < 1,$$

logo por definição a série é convergente para $\frac{a_0}{1-r}$

e $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$

O valor da soma será:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \overset{PG}{=} \frac{2/3}{1-2/3} = 2$$

4) d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\cos(n)}$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{\cos(n)} \overset{LH}{=} \lim_{n \to \infty} -\frac{1}{\operatorname{sen}(n)} = \infty$$

Como o termo geral da sequência tende ao infinito (diverge), logo temos que a série é divergente.

3) a) Se $\lim a_n = 0$, então $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge.

Falso, nem sempre o proposto irá acontecer

Contra-exemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

temos que $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Agora a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ tende ao infinito, logo a afirmação é falsa.