1)a) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$, $T(x, y, z, w) = (3x + 4y + 2z,\ y + 2z,\ z,\ x + w)$;

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3(\lambda - 3) = 0$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \Rightarrow m = 3$

$\lambda_4 = 3 \Rightarrow m = 1$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Autovetores associados à $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$;

$$\begin{cases} 2x + 4y + 2z + 0w = 0 \Rightarrow y = 0 \\ 0x + 0y + 2z + 0w = 0 \Rightarrow z = 0 \\ 0x + 0y + 0z + 0w = 0 \\ x + 0y + 0z + 0w = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} w \text{ livre} \\ x = y = z = 0 \end{cases}$$

$$v^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ w \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Autovetores associados à $\lambda_4 = 3$:

$$\begin{cases} 0x + 4y + 2z + 0w = 0 \\ 0x - 2y + 2z + 0w = 0 \Rightarrow y = 0 \\ 0x + 0y - 2z + 0w = 0 \Rightarrow z = 0 \\ x + 0y + 0z - 2w = 0 \Rightarrow x = 2w \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2w \\ y = z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2w \\ 0 \\ 0 \\ w \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Digitalizado com CamScanner

1) a) Cont...

Como $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, temos uma multiplicidade algébrica igual a 3.

Agora, quando calculamos os autovetores associados encontramos apenas um único vetor $\begin{bmatrix} 2w \\ 0 \\ 0 \\ w \end{bmatrix} = w \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, de multiplicidade geométrica igual a 1.

Portanto, como as multiplicidades algébricas e geométricas são diferentes, então a matriz A não é diagonalizável.

Como não podemos determinar S, então não será possível escrever a matriz A^5 usando a identidade $A = S \Lambda S^{-1}$.

4) Ex. 11, pg. 264

a)

$$\begin{bmatrix} \text{América} \\ \text{Ásia} \\ \text{Europa} \end{bmatrix}_{\text{ano } K+1} = A \cdot \begin{bmatrix} \text{América} \\ \text{Ásia} \\ \text{Europa} \end{bmatrix}_{\text{ano } K}$$

Sol.:

Sejam am_K, as_K, eu_K os valores dos bens da América, Ásia e Europa, respectivamente, no ano K.

Temos o sistema de equações

$$\begin{cases} am_{K+1} = \frac{1}{2} am_K + \frac{1}{2} as_K + \frac{1}{2} eu_K \\ as_{K+1} = \frac{1}{2} as_K + \frac{1}{4} am_K \\ eu_{K+1} = \frac{1}{2} eu_K + \frac{1}{4} am_K \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} am_{K+1} \\ as_{K+1} \\ eu_{K+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.25 & 0.5 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} am_K \\ as_K \\ eu_K \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} //$$

b) $$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1/2 - \lambda & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 - \lambda & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \overset{MC}{\Rightarrow} \boxed{\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1/2,\ \lambda_3 = 1}$$

4) b) cont...

Autovetor associado a $\lambda_1 = 0$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3 = 0 \\ \frac{1}{4}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 + 0\alpha_3 = 0 \\ \frac{1}{4}\alpha_1 + 0\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3 = 0 \end{cases} \overset{MC}{\Longrightarrow} \begin{cases} \alpha_1 = -2\alpha_3 \\ \alpha_2 = \alpha_3 \\ \alpha_3 = \alpha_3 \end{cases} \Rightarrow v^{(1)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Autovetor associado a $\lambda_2 = 1/2$

$$\begin{cases} 0\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_2 = 0 \\ \frac{1}{4}\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 = 0 \\ \frac{1}{4}\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 = 0 \end{cases} \overset{MC}{\Longrightarrow} \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = -\alpha_3 \\ \alpha_3 = \alpha_3 \end{cases} \Rightarrow v^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Autovetor associado a $\lambda_3 = 1$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3 = 0 \\ \frac{1}{4}\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_2 + 0\alpha_3 = 0 \\ \frac{1}{4}\alpha_1 + 0\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_3 = 0 \end{cases} \overset{MC}{\Longrightarrow} \begin{cases} \alpha_1 = 2\alpha_3 \\ \alpha_2 = \alpha_3 \\ \alpha_3 = \alpha_3 \end{cases} \Rightarrow v^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4) c) Como temos 3 autovetores LI, então podemos determinar $\underline{S}$ e Λ tais que

$$A = S \Lambda S^{-1}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} \overset{pc}{=} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \; A = S \Lambda S^{-1}$$

Temos por definição que

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix} = A^2 \begin{bmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \\ z_{k-1} \end{bmatrix} = \dots = A^{k+1} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

Como $A^{k+1} = S \Lambda^{k+1} S^{-1}$, então $\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{bmatrix} = S \Lambda^{k+1} S^{-1} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$,

ou seja,

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{bmatrix} = S \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1^{k+1} \end{bmatrix} \cdot S^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

Tomando o limite com $k \to \infty$, obtemos a tendência das populações (bens dos multinacionais):

$$\begin{bmatrix} x_\infty \\ y_\infty \\ z_\infty \end{bmatrix} = S \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot S^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}.$$

4) c) cont...

$$\begin{bmatrix} x_\infty \\ y_\infty \\ z_\infty \end{bmatrix} = S \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot S^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

Substituindo S e S^{-1} obtemos

$$\begin{bmatrix} x_\infty \\ y_\infty \\ z_\infty \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

Tomando como bens iniciais para América, Ásia e Europa, respectivamente, ou seja x_0 como valor de bens iniciais na América, y_0 como valor de bens iniciais na Ásia e z_0 como valor de bens iniciais na Europa, temos:

$$x_0 = 2 \quad | \quad y_0 = 0 \quad | \quad z_0 = 2$$

Então, a distribuição limite dos US$ 4 trilhões será:

$$\begin{bmatrix} x_\infty \\ y_\infty \\ z_\infty \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Temos que na distribuição limite a América sempre terá o dobro do valor de bens da Ásia e da Europa. Isso acontecerá independentemente do valor de bens inicial.

4) d) Podemos encontrar a distribuição dos US\$ 4 trilhões no ano K utilizando a definição:

$$\overset{X_{K+1}}{\begin{bmatrix} x_{K+1} \\ y_{K+1} \\ z_{K+1} \end{bmatrix}} = A \overset{X_K}{\begin{bmatrix} x_K \\ y_K \\ z_K \end{bmatrix}} = \ldots = A^{K+1} \overbrace{\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}}^{X_0} \Longleftrightarrow X_{K+1} = A X_K$$

Sabendo que sua solução é $\underline{X_K = A^K X_0}$ e que A pode ser diagonalizada por S, isto é, $\underline{A = S \Lambda S^{-1}}$

Então $A^K = S\Lambda^K S^{-1}$ e $X_K = S \Lambda^K S^{-1} X_0$.

Dado o valor $X_0 = (2, 0, 2)^T$, S, S^{-1} e Λ da questão anterior, temos:

$$X_K = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^K & 0 \\ 0 & 0 & 1^K \end{bmatrix} \cdot \overbrace{\frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}}^{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$\overset{MC}{=} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^K & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \cdot 0 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^K \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \cdot 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^K \cdot (0, -1, 1)^T + (2, 1, 1)^T = \left(2, \left(-\frac{1}{2}\right)^K + 1, \left(\frac{1}{2}\right)^K + 1\right)$$