iv) (erro)

$$|R_2(\bar{x})| \leq \frac{M}{3!} (\bar{x} - 0)^3$$

$M = \max |f^{(3)}(x)|$, x entre 0 e $\bar{x}$

$$= \max_{-0.1 \leq x \leq 0} \left| \frac{2}{(1+x)^3} \right| \approx 2.743$$

Assim,

$$|R_2(-0.1)| < \frac{2.743}{6} (-0.1)^3 \approx -0.00046$$

O erro da aproximação quadrática é menor que aproximadamente -0.00046.

Digitalizado com CamScanner

iii) Aproximação quadrática

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2$$

$$= 0 + x - \frac{1}{2} \cdot x^2 = x - \frac{1}{2}x^2$$

Como temos um termo a mais na expressão, logo a aproximação quadrática é diferente da aproximação linear de (i).

iv) Aprox. quad. para $f(\bar{x})$ e erro da aprox.

Temos que o termo geral para aproximação quadrática de $f(x)$ em termos de $a=0$ para um x qualquer é:

$$\ln(1+\bar{x}) \approx \bar{x} - \frac{1}{2}\bar{x}^2$$

Então para $\bar{x} = -0.1$, temos:

$$\ln(1-0.1) \approx -0.1 - \left(-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2\right)$$

$$\approx -0.1 + 0.005$$

$$\approx -0.095$$

i. Aproximação linear

$$P_1(x) = f(0) + f'(0)x = 0 + x = x$$

A aproximação linear de $f(x)$ em torno de $a = 0$ para um x qualquer é

$$\ln(1+\bar{x}) \approx \bar{x}$$

ii. Aproximação linear para $\bar{x} = -0.1$

$$\ln(1-0.1) \approx -0.1$$

Para estimar o erro vamos utilizar a fórmula

$$M = \max|f''(x)|, \quad x \text{ entre } 0 \text{ e } \bar{x}$$

$$M = \max_{-0.1 \le x \le 0} \left| -\frac{1}{(1+x)^2} \right| = \max_{-0.1 \le x \le 0} \frac{1}{(1+x)^2} \approx 1{,}235$$

$$|R_1(-0.1)| \leq \frac{1{,}235}{2!}(0.1-0)^2$$

Assim,

$$|R_1(-0.1)| \leq 0{,}06175 < 0{,}062$$

1) d) $f(x) = \ln(1+x)$, $\bar{x} = -0.1$

$\boxed{c_0 = 0}$

i) $f'(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow f'(0) = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{f'(0)}{n!} = 1$

$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow f''(0) = -\frac{1}{1^2} = -1 \Rightarrow c_2 = \frac{f''(0)}{n!} = -\frac{1}{2}$

$f'''(x) = +2 \cdot \frac{1}{(1+x)^3} \Rightarrow f'''(0) = 2 \cdot \frac{1}{1^3} \Rightarrow c_3 = \frac{2}{3!} = \frac{1}{3}$

Daí, temos como c_n:

$$c_n = -\frac{1}{(-1)^n} \cdot (n \cdot 1)$$

Raio de convergência

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| -\frac{n}{n-1} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{|n|}{|n-1|} = 1$$

$$\boxed{R = \frac{1}{1} = 1}$$

Logo, temos que:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1},$$

se $|x| < 1$