Métodos Matemáticos I

Prof. Aparecido J. de Souza
aparecidosouza@ci.ufpb.br

Operadores Auto-Adjuntos
Matrizes Hermitianas e Matrizes Simétricas
O Teorema Espectral

Recapitulando

Teorema. Sejam $\mathbb{V}$ um espaço vetorial de dimensão **n** e $\mathbf{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ um operador linear com matriz $\mathbf{A}_{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}$ em relação a uma base $\mathbf{B}_1$ de $\mathbb{V}$. **Se T** (ou **A**) possuir **n** autovetores LI entre si, **então** existe uma base $\mathbf{B}_2$ de $\mathbb{V}$ tal que a matriz de **T** nesta "nova" base é uma matriz diagonal Λ. Os autovalores de **T** (ou de **A**) formam a diagonal de Λ. Além disto, a matriz **S** mudança da base de autovetores $\mathbf{B}_2$ para a base original $\mathbf{B}_1$, **ou matriz de diagonalização,** tem como colunas os **n** autovetores de **T** e valem as identidades $\boxed{\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \Lambda}$, ou $\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{S}\Lambda\mathbf{S}^{-1}}$, ou $\boxed{\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{S}\Lambda}$, ou $\boxed{\Lambda\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}}$.

Obs. Se $[v]_{\mathbf{B}_1}$ é a representação de v na base $\mathbf{B}_1$ e $[v]_{\mathbf{B}_2}$ é a representação de v na base de autovetores, **então**

$$\boxed{[v]_{\mathbf{B}_2} = \mathbf{S}^{-1}[v]_{\mathbf{B}_1} \text{ ou } [v]_{\mathbf{B}_1} = \mathbf{S}[v]_{\mathbf{B}_2}}.$$

Operações com números complexos

Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos. **Então**,

- um **número complexo** é representado por $z = a + \mathbf{i}b$ com $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{i}^2 = -1$;
- $a = Re(z)$ é a parte real e $b = Im(z)$ é a parte imaginária de z.
- o número **complexo conjugado** de z é $\bar{z} = a - \mathbf{i}b$;
- um número complexo é real se, e somente se, $\bar{z} = z$;
- **Se** $z_1 = a_1 + \mathbf{i}b_1$ e $z_2 = a_2 + \mathbf{i}b_2$, **então** $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + \mathbf{i}(b_1 + b_2)$;
- **Se** $z_1 = a_1 + \mathbf{i}b_1$ e $z_2 = a_2 + \mathbf{i}b_2$, **então** $z_1\, z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + \mathbf{i}(a_1 b_2 + b_1 a_2)$;
- O **módulo** de um número complexo $z = a + \mathbf{i}b$ é um **número real** definido por $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$;
- $|z|^2 = z\,\bar{z}$;
- $z + \bar{z} = 2Re(z)$, $z - \bar{z} = 2\mathbf{i}Im(z)$;
- **Forma Polar:** $z = r[cos(\theta) + \mathbf{i}sen(\theta)]$, com $r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$, $\quad cos(\theta) = \frac{a}{r}$ e $sen(\theta) = \frac{b}{r}$.

Espaços vetoriais sobre o corpo complexo

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre os complexos $\mathbb{C}$. **Então**,

- Um PI $\langle v_1, v_2\rangle$ em $\mathbb{V}$ deve satisfazer:
  - $\langle v_1, v_2\rangle = \overline{\langle v_2, v_1\rangle}$, $\forall v_1, v_2 \in \mathbb{V}$ (**propriedade hermitiana)**;
  - $\langle \alpha v_1, v_2\rangle = \alpha\langle v_1, v_2\rangle$, $\forall v_1, v_2 \in \mathbb{V}$ e $\forall \alpha \in \mathbb{C}$;
  - $\langle v_1 + v_2, v_3\rangle = \langle v_1, v_3\rangle + \langle v_2, v_3\rangle$, $\forall v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{V}$;
  - $\langle v, v\rangle \geq 0$, $\forall v \in \mathbb{V}$ e $\langle v, v\rangle = 0 \iff v = \mathbf{0}$.

Consequências:

- $\langle v_1, \alpha v_2\rangle = \overline{\alpha}\langle v_1, v_2\rangle$, $\forall v_1, v_2 \in \mathbb{V}$ e $\forall \alpha \in \mathbb{C}$;
- $\langle v_1, v_2 + v_3\rangle = \langle v_1, v_2\rangle + \langle v_1, v_3\rangle$, $\forall v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{V}$.
- Dada uma matriz $\mathbf{A_{n\times n}}$, com entradas a_{ij}, a matriz **transposta conjugada** de $\mathbf{A}$ tem entradas $\bar{a}_{ji}$ e é denotada por $\mathbf{A}^*$ (se $\mathbf{A}$ é real, então $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^t$).
- Uma matriz $\mathbf{A_{n\times n}}$ é **hermitiana** quando $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$, isto é, quando $\bar{a}_{ji} = a_{ij}$ (se $\mathbf{A}$ é real, então $\mathbf{A}$ é simétrica). Neste caso, os elementos da diagonal de $\mathbf{A}$, os a_{ii}, devem ser números reais.

Operadores Auto-Adjuntos

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) munido de um PI $\langle , \rangle$.

Definição. Um operador $\mathbf{T}^* : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ é dito **adjunto** de um operador $\mathbf{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ quando $\langle \mathbf{T}(v), w\rangle = \langle v, \mathbf{T}^*(w)\rangle$, $\forall v, w \in \mathbb{V}$.

Definição. Um operador $\mathbf{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ é **auto-adjunto** quando $\mathbf{T}^* = \mathbf{T}$, isto é, quando $\langle \mathbf{T}(v), w\rangle = \langle v, \mathbf{T}(w)\rangle$, $\forall v, w \in \mathbb{V}$.

Exemplo 1. Sejam $\mathbf{T}_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\mathbf{T}_1(x_1, x_2) = (x_1, 2x_2)$.
$\mathbf{T}_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\mathbf{T}_2(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$.

Note que, para quaisquer $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ e $(w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$ tem-se:
$\langle \mathbf{T}_1(x_1, x_2), (w_1, w_2)\rangle = \langle (x_1, 2x_2), (w_1, w_2)\rangle = x_1 w_1 + 2x_2 w_2,$

e que,
$\langle (x_1, x_2), \mathbf{T}_1(w_1, w_2)\rangle = \langle (x_1, x_2), (w_1, 2w_2)\rangle = x_1 w_1 + 2x_2 w_2.$

Analogamente,
$\langle \mathbf{T}_2(x_1, x_2), (w_1, w_2)\rangle = \langle (x_1, x_2), \mathbf{T}_2(w_1, w_2)\rangle$ (**verifique**).

Operadores Auto-Adjuntos

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) munido de um PI $\langle , \rangle$.

Teorema. **Se** $\mathbb{V}$ é um espaço vetorial de dimensão finita **n**, **então** um **T** : $\mathbb{V} \to \mathbb{V}$ é auto-adjunto, se e somente se, a matriz **A** de **T** é hermitiana (simétrica no caso **real**).

No **Exemplo 1** temos

$$[\mathbf{T}_1] = \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1^t = \mathbf{A}_1^*. \quad [\mathbf{T}_2] = \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_2^t = \mathbf{A}_2^*.$$

Portanto $\mathbf{A}_1$ e $\mathbf{A}_2$ são hermitianas.

Versão matricial de operador auto-adjunto. Uma matriz quadrada **A** é hermitiana, se e somente se, $\langle \mathbf{A}v, w \rangle = \langle v, \mathbf{A}w \rangle$, $\forall v, w \in \mathbb{V}$.

Operadores Auto-Adjuntos

Teorema. O produto de dois operadores auto-adjuntos $\mathbf{T}_1$ e $\mathbf{T}_2$ é um operador auto-adjunto, se e somente se, comutam, isto é, $\mathbf{T}_1 \circ \mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_2 \circ \mathbf{T}_1$.

Versão matricial. O produto de duas matrizes $\mathbf{A}_1$ e $\mathbf{A}_2$ hermitianas é uma matriz hermitiana, se e somente se, comutam, isto é, $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1$.

Exemplo 2. $\mathbf{T}_1(x_1, x_2) = (x_1, 2x_2)$ e $\mathbf{T}_2(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$ do **Exemplo 1** são auto-adjuntos, no entanto $\mathbf{T}_1 \circ \mathbf{T}_2$ **não o é**.

De fato

$\mathbf{T}_1 \circ \mathbf{T}_2(x_1, x_2) = \mathbf{T}_1(x_2, x_1) = (x_2, 2x_1)$, ou $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

$\mathbf{T}_2 \circ \mathbf{T}_1(x_1, x_2) = \mathbf{T}_2(x_1, 2x_2) = (2x_2, x_1)$, ou $\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

confirmando que $\mathbf{T}_1 \circ \mathbf{T}_2 \neq \mathbf{T}_2 \circ \mathbf{T}_1$, **ou que** $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \neq \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1$.

Exercício. Verifique que nem $\mathbf{T}_1 \circ \mathbf{T}_2$, e que nem $\mathbf{T}_2 \circ \mathbf{T}_1$ satisfazem a definição de operador auto-adjunto.

Operadores Auto-Adjuntos

Teorema. Se $\mathbf{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ é um operador **auto-adjunto** num espaço vetorial $\mathbb{V}$ (sobre o corpo $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$) munido de um PI, então **todo autovalor** de **T** é **um número real**.

De fato. Sejam $\lambda \in \mathbb{K}$ e $\bar{\lambda}$ o seu conjugado complexo.

Suponha que exista $v \in \mathbb{V}$, $v \neq \mathbf{0}$ tal que $\mathbf{T}(v) = \lambda v$.

Então $\lambda \|v\|^2 = \lambda \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \langle \mathbf{T}(v), v \rangle = \langle v, \mathbf{T}(v) \rangle =$

$$\langle v, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle = \bar{\lambda} \|v\|^2.$$

Portanto, $\lambda \|v\|^2 = \bar{\lambda} \|v\|^2$.

Como $v \neq 0$, então $\lambda = \bar{\lambda}$, isto é, λ é um número real.

Operadores Auto-Adjuntos

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ munido de um PI $\langle , \rangle$.

Teorema. Se T $: \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ é um operador **auto-adjunto**, **então autovetores** de **T associados à autovalores distintos** de **T**, além de serem **LI** entre si, também **são ortogonais entre si**.

De fato. Sejam λ_1 e λ_2 com $\lambda_1 \neq \lambda_2$ autovalores de **T** com os respectivos autovetores $v^{(1)}$ e $v^{(2)}$.

Então $(\lambda_2 - \lambda_1)\langle v^{(1)}, v^{(2)}\rangle \overset{\text{distributiva}}{=} \lambda_2\langle v^{(1)}, v^{(2)}\rangle - \lambda_1\langle v^{(1)}, v^{(2)}\rangle$

$\overset{\text{linearidade do PI}}{=} \langle v^{(1)}, \lambda_2 v^{(2)}\rangle - \langle \lambda_1 v^{(1)}, v^{(2)}\rangle$

$\overset{\text{def de autovetor}}{=} \langle v^{(1)}, \mathbf{T}(v^{(2)})\rangle - \langle \mathbf{T}(v^{(1)}), v^{(2)}\rangle$

$\overset{\text{def de Adjunto}}{=} \langle v^{(1)}, \mathbf{T}(v^{(2)})\rangle - \langle v^{(1)}, \mathbf{T}^*(v^{(2)})\rangle$

$\overset{\mathbf{T}^*=\mathbf{T}}{=} \langle v^{(1)}, \mathbf{T}(v^{(2)})\rangle - \langle v^{(1)}, \mathbf{T}(v^{(2)})\rangle = 0.$

Como $(\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0$, então $\langle v^{(1)}, v^{(2)}\rangle = 0.$

Operadores Auto-Adjuntos

Teorema Espectral. Sejam $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre um coro $\mathbb{K}$ de dimensão finita **n** munido de um PI e $\mathbf{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ e um operador linear **auto-adjunto** com matriz hermitiana $\mathbf{A_{n\times n}}$ em relação a uma base $\mathbf{B}_1$ de $\mathbb{V}$. **Então** existe uma base ortonormal $\mathbf{B}_2$ de $\mathbb{V}$ tal que a matriz de **T** nesta base ortonormal é uma matriz diagonal Λ. Os autovalores (reais) de **T** (ou de **A**) formam a diagonal de Λ. Além disto, as colunas da matriz **Q** mudança da base ortonormal $\mathbf{B}_2$ para a base $\mathbf{B}_1$ são exatamente os **n** autovetores de **T** ortonormais entre si. Isto é, $\boxed{\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \Lambda}$, ou $\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^{-1}}$, ou $\boxed{\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\Lambda}$, ou $\boxed{\Lambda\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}}$.

Obs. Se $[v]_{\mathbf{B}_1}$ é a representação de v na base $\mathbf{B}_1$ e $[v]_{\mathbf{B}_2}$ é a representação de v na base de autovetores $\mathbf{B}_2$, **então**

$$\boxed{[v]_{\mathbf{B}_1} = \mathbf{Q}[v]_{\mathbf{B}_2} \quad \text{e} \quad [v]_{\mathbf{B}_2} = \mathbf{Q}^{-1}[v]_{\mathbf{B}_1}}.$$

Operadores Auto-Adjuntos

Versão Matricial do Teorema Espectral. Toda matriz quadrada hermitiana (simétrica, no caso real) é diagonalizável.

Obs. A matriz mudança de base $\mathbf{Q}$ é uma **matriz ortogonal**, isto é, $\mathbf{Q}$ é uma matriz quadrada com colunas ortogonais entre si.

Operadores Auto-Adjuntos

Exemplo 3. Seja $\mathbf{P_v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador projeção sobre o vetor $v = (1,1,1)$, isto é,

$$\mathbf{P_v}(x,y,z) = \frac{\langle (x,y,z),(1,1,1)\rangle}{\|(1,1,1)\|^2}(1,1,1) = \frac{1}{3}(x+y+z, x+y+z, x+y+z).$$

Logo, $\mathbf{A} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ é simétrica e o operador auto-adjunto.

Autovalores de A: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Autovetores de A associados à $\lambda_1 = 1$: $v^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$.

Os **Autovetores de A associados à** $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ devem estar no plano $x+y+z=0$ (duas variáveis livres).

Usando o **processo de ortogonalização de Gram-Schmidt** escolhemos os **autovetores ortonormais**

$$v^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1) \quad \text{e} \quad v^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1).$$

Operadores Auto-Adjuntos

Exemplo 3(cont.). Seja $\mathbf{P_v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador projeção sobre o vetor $v = (1,1,1)$, isto é,

$$\mathbf{P_v}(x,y,z) = \frac{\langle (x,y,z),(1,1,1)\rangle}{\|(1,1,1)\|^2}(1,1,1) = \frac{1}{3}(x+y+z, x+y+z, x+y+z),$$

cuja matriz na base canônica é $\mathbf{A} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Autovalores de A: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Assim,

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, em relação a base **ortonormal** de autovetores **Q**, **se** $[v]_{\mathbf{Q}} = (a,b,c)$, **então** $\mathbf{P_v}(a,b,c) = (a,0,0)$.

Operadores Auto-Adjuntos

Exemplo 3(cont.). Seja $\mathbf{P_v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador projeção sobre o vetor $v = (1,1,1)$, isto é,

$$\mathbf{P_v}(x,y,z) = \frac{\langle (x,y,z),(1,1,1)\rangle}{\|(1,1,1)\|^2}(1,1,1) = \frac{1}{3}(x+y+z, x+y+z, x+y+z).$$

Matriz de Diagonalização: $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$

Matriz inversa da matriz de Diagonalização(WolframAlpha):

$$\mathbf{Q}^{-1} = \frac{1}{6(-2+\sqrt{2}+\sqrt{6})} \begin{bmatrix} -12\sqrt{3} & 6\sqrt{2}+6\sqrt{6} & 12\sqrt{2} \\ 18\sqrt{2} & -12-6\sqrt{2} & 2(6-6\sqrt{2}) \\ 6\sqrt{6} & 12-6\sqrt{6} & -12 \end{bmatrix}.$$

Fábrica de matrizes hermitianas(simétricas)

Se $\mathbf{M}_{m\times n}$ é uma matriz quadrada, ou não, **então** a matriz produto $\mathbf{A} = \mathbf{M}\mathbf{M}^*$ é uma matriz hermitiana $m \times m$ (simétrica, no caso real) e a matriz produto $\mathbf{B} = \mathbf{M}^*\mathbf{M}$ é uma matriz hermitiana $n \times n$ (simétrica, no caso real).

De fato. $\mathbf{A} = \mathbf{M}_{m\times n}\mathbf{M}^*_{n\times m}$ e $\mathbf{A}^* = [\mathbf{M}\mathbf{M}^*]^* = [\mathbf{M}^*]^*\mathbf{M}^* = \mathbf{M}\mathbf{M}^* = \mathbf{A}$.

$\mathbf{B} = \mathbf{M}^*_{n\times m}\mathbf{M}_{m\times n}$ e $\mathbf{B}^* = [\mathbf{M}^*\mathbf{M}]^* = \mathbf{M}^*[\mathbf{M}^*]^* = \mathbf{M}^*\mathbf{M} = \mathbf{B}$.

Exemplo 4. Seja a matriz linha $\mathbf{M} = [3\ \ 4]_{1\times 2}$.
Então $\mathbf{M}^* = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}_{2\times 1}$.

Daí, $\mathbf{A} = \mathbf{M}_{1\times 2}\mathbf{M}^*_{2\times 1} = [3\times 3 + 4\times 4] = [25]_{1\times 1}$ e

$$\mathbf{B} = \mathbf{M}^*_{2\times 1}\mathbf{M}_{1\times 2} = \begin{bmatrix} 3\times 3 & 3\times 4 \\ 4\times 3 & 4\times 4 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}_{2\times 2}.$$

Sistemas simétricos reais

Considere o sistema linear de **n** equações e **n** incógnitas $X = (x_1, x_2, \cdots, x_{\mathbf{n}})$ na forma $\mathbf{A}X = \mathbf{B}$, com $\mathbf{A}$, X e $\mathbf{B}$ reais.

Caso $\mathbf{A}$ não seja simétrica, mas $det(\mathbf{A}) \neq 0$ (ou $posto(\mathbf{A}) = \mathbf{n}$), **então** multiplicando o lado esquerdo e o lado direito do sistema pela matriz $\mathbf{A}^t$, transposta de $\mathbf{A}$, tem um “novo” sistema nas mesmas **n** variáveis X, cuja matriz dos coeficientes é simétrica. Sistema este da forma $\mathbf{A}^t\mathbf{A}X = \mathbf{A}^t\mathbf{B}$ com a mesma solução que o sistema originalmente colocado.