Métodos Matemáticos I

Prof. Aparecido J. de Souza
aparecidosouza@ci.ufpb.br

Operadores Positivos
Operador Raiz Quadrada

Recapitulando

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial munido de um PI.

O **operador adjunto** de um operador $\mathbf{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ é o operador $\mathbf{T}^* : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ tal que $\langle \mathbf{T}(v), w \rangle = \langle v, \mathbf{T}^*(w) \rangle$, $\forall v, w \in \mathbb{V}$.

O operador $\mathbf{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ é **auto-adjunto** se $\mathbf{T}^* = \mathbf{T}$.

Teorema Espectral. Se $\mathbf{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ é um operador **auto-adjunto** num espaço vetorial $\mathbb{V}$ de dimensão finita munido de um PI, então existe uma base ortonormal de $\mathbb{V}$ formada por autovetores de $\mathbf{T}$.

Versão Matricial do Teorema Espectral. Toda matriz real simétrica é diagonalizável, isto é, $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \Lambda$, em que Λ é uma matriz diagonal, cuja diagonal é formada pelos autovalores (reais) de $\mathbf{A}$ e a matriz $\mathbf{Q}$ é uma matriz ortogonal, cujas colunas são formadas pelos autovetores (ortonormais) de $\mathbf{A}$.

Operadores Positivos (Matrizes Positivas)

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial real de dimensão finita com um PI.

Definição. Um operador $\mathbf{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ é **não negativo** quando $\mathbf{T}$ é **Auto-Adjunto** e $\langle \mathbf{T}(v), v \rangle \geq 0$, $\forall v \in \mathbb{V}$.

Definição. Um operador $\mathbf{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ é **positivo** quando $\mathbf{T}$ é **Auto-Adjunto** e $\langle \mathbf{T}(v), v \rangle > 0$, $\forall v \in \mathbb{V}$ tal que $v \neq \mathbf{0}$.

Versões Matriciais.

Definição. Uma matriz real quadrada $\mathbf{A}$ é **não negativa** quando $\mathbf{A}$ é **simétrica** e $\langle \mathbf{A}v, v \rangle \geq 0$, $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \mathbf{0}$.

Definição. Uma matriz real quadrada $\mathbf{A}$ é **positiva definida** quando $\mathbf{A}$ é **simétrica** e $\langle \mathbf{A}v, v \rangle > 0$, $\forall v \in \mathbb{R}^n$ tal que $v \neq \mathbf{0}$.

Operadores Positivos (Matrizes Positivas)

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial real de dimensão finita com um PI.

Teorema (versão 1). Um operador auto-adjunto $\mathbf{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ é não-negativo se, e somente se, seus autovalores são todos números reais não negativos, se e somente se, todos os determinantes menores principais da matriz $\mathbf{A}$ de $\mathbf{T}$ são não negativos.

Teorema (versão 2). Um operador auto-adjunto $\mathbf{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ é positivo se, e somente se, seus autovalores são todos números reais positivos, se e somente se, todos os determinantes menores principais da matriz $\mathbf{A}$ de $\mathbf{T}$ são positivos, se e somente se, ao fazer a decomposição **LU** de $\mathbf{A}$ por eliminação de Gauss, sem permutação de linhas, todos os pivôs são positivos.

Operadores Positivos (Matrizes Positivas)

Prova para a versão 1 no caso dos autovalores.

($\Longrightarrow$) Seja $\mathbf{T}:\mathbb{V}\to\mathbb{V}$ um operador não-negativo.

Como $\mathbf{T}$ é auto-adjunto, todos os seus autovalores são reais.

Seja v um autovetor **unitário** de $\mathbf{T}$ associado à um autovalor λ.

Então $\lambda=\lambda\|v\|^2=\lambda\langle v,v\rangle=\langle\lambda v,v\rangle=\langle\mathbf{T}(v),v\rangle\geq \mathbf{0}$.

($\Longleftarrow$) Seja $\mathbf{T}:\mathbb{V}\to\mathbb{V}$ um operador auto-adjunto e $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ uma base de $\mathbb{V}$ formada por autovetores ortonormais de $\mathbf{T}$, com $\mathbf{T}(v_j)=\lambda_j v_j$ e $\lambda_j\geq 0$, $j=1,2,\ldots,n$.

Seja $v=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\cdots+\alpha_n v_n$. Então

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{T}(v),v\rangle &= \langle\mathbf{T}(\textstyle\sum_{j=1}^n\alpha_j v_j),\ \sum_{k=1}^n\alpha_k v_k\rangle\\ &= \langle\textstyle\sum_{j=1}^n\alpha_j\mathbf{T}(v_j),\ \sum_{k=1}^n\alpha_k v_k\rangle=\langle\sum_{j=1}^n\alpha_j\lambda_j v_j,\ \sum_{k=1}^n\alpha_k v_k\rangle\\ &= \textstyle\sum_{j=1}^n\lambda_j\alpha_j^2\geq\mathbf{0}.\end{aligned}$$

Logo, $\mathbf{T}$ é não negativo.

Operadores Positivos (Matrizes Positivas)

Corolário 1. Seja $\mathbf{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ operador linear não negativo. **Se** para um certo vetor $v \in \mathbb{V}$ tivermos a igualdade $\langle \mathbf{T}(v), v \rangle = 0$ **então** obrigatoriamente $\mathbf{T}(v) = \mathbf{0}$, isto é, $v \in N(\mathbf{T})$.

Corolário 2. Um operador linear auto-adjunto $\mathbf{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ com matriz $\mathbf{A}$ é positivo se, e somente se, é não-negativo e inversível ($N(\mathbf{T}) = \{\mathbf{0}\}$, ou, $det(\mathbf{A}) \neq 0$).

De fato. ($\Longrightarrow$) Se $\mathbf{T}$ é positivo então todos os seus autovalores são positivos e sua matriz tem determinante não nulo, pois é o produto dos autovalores.

($\Longleftarrow$) Como $det(\mathbf{A}) \neq 0$, então o único vetor v de $\mathbb{V}$ tal que $\mathbf{A}v = \mathbf{0}$ é o vetor nulo.

Como $\mathbf{T}$ é não negativo, então $\langle \mathbf{T}(v), v \rangle \geq 0$, $\forall v \in \mathbb{V}$.

Logo pelo **Corolário 1** segue $\langle \mathbf{T}(v), v \rangle > 0$, $\forall v \in \mathbb{V}$, $v \neq \mathbf{0}$, isto é, $\mathbf{T}$ é positivo.

“Fábrica” de Operadores Não-Negativos

Teorema. Se $\mathbf{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ é uma Transformação Linear entre entre um um espaço vetorial $\mathbb{V}$ com $dim(\mathbb{V}) = \mathbf{n}$ e $\mathbb{W}$ um espaço vetorial com $dim(\mathbb{W}) = \mathbf{m}$, ambos munidos de PIs, **então** os operadores compostos $\mathbf{T}^* \circ \mathbf{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ e $\mathbf{T} \circ \mathbf{T}^* : \mathbb{W} \to \mathbb{W}$ são não negativos.

Obs. Se $\mathbf{A}_{\mathbf{m}\times\mathbf{n}}$ é a matriz de $\mathbf{T}$, então a matriz de $\mathbf{T}^* \circ \mathbf{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ é a matriz produto $(\mathbf{A}^t\mathbf{A})_{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}$ e a matriz de $\mathbf{T} \circ \mathbf{T}^* : \mathbb{W} \to \mathbb{W}$ é $(\mathbf{A}\,\mathbf{A}^t)_{\mathbf{m}\times\mathbf{m}}$.

Versão Matricial. Se $\mathbf{A}$ é uma matriz $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$, **então** as matrizes produto $(\mathbf{A}^t\mathbf{A})_{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}$ e $(\mathbf{A}\mathbf{A}^t)_{\mathbf{m}\times\mathbf{m}}$ são não negativas.

Note que:

(i) $(\mathbf{A}^t\mathbf{A})^t = \mathbf{A}^t(\mathbf{A}^t)^t = \mathbf{A}^t\mathbf{A}$.

(ii) $\mathbf{T}^* \circ \mathbf{T}$ é **não negativo**, pois

$$\langle \mathbf{A}^t\mathbf{A}v, v\rangle = \langle \mathbf{A}v, \mathbf{A}v\rangle = \|\mathbf{A}v\|^2 \geq 0.$$

“Fábrica” de Operadores Não-Negativos

Exemplo 1. Seja $\mathbf{T}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ tal que
$\mathbf{T}(x,y,z)=(x+2y+3z,\ 4x+5y+6z)$.

Matriz de $\mathbf{T}$: $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}$. Matriz de $\mathbf{T}^*$: $\mathbf{A}^t=\begin{bmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{bmatrix}$.

Matriz $\mathbf{AA}^t=\begin{bmatrix}14&32\\32&77\end{bmatrix}$. Matriz $\mathbf{A}^t\mathbf{A}=\begin{bmatrix}17&22&27\\22&29&36\\27&36&45\end{bmatrix}$.

Operador Não Negativo $\mathbf{T}^*\circ\mathbf{T}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$: $\mathbf{T}^*\circ\mathbf{T}(x,y,z)=$
$$(17x+22y+27z,\quad 22x+29y+36z,\quad 27x+36y+45z).$$
Operador Não Negativo $\mathbf{T}\circ\mathbf{T}^*:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$:
$$\mathbf{T}\circ\mathbf{T}^*(x,y)=(14x+32y,\quad 32x+77y).$$

Como $det(\mathbf{AA}^t)=54>0$ então $\mathbf{T}\circ\mathbf{T}^*$ é positivo, pois todos os determinantes menores principais de $\mathbf{AA}^t$ são positivos.
Como $det(\mathbf{A}^t\mathbf{A})=0$, então $\mathbf{T}^*\circ\mathbf{T}$ é apenas não negativo, já que o “maior” menor principal da matriz $\mathbf{A}^t\mathbf{A}$ é nulo.

O Operador (Matriz) Raiz Quadrada

Definição. Sejam $\mathbf{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ e $\mathbf{S} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ operadores lineares. O operador $\mathbf{S}$ é dito uma **raiz quadrada** de $\mathbf{T}$ se $\mathbf{S}^2 = \mathbf{T}$.

Teorema. Todo operador linear não-negativo $\mathbf{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ num espaço vetorial de dimensão finita $\mathbf{n}$ possui uma única raiz quadrada $\mathbf{S} = \sqrt{\mathbf{T}}$. Além disto, $\sqrt{\mathbf{T}}$ é positivo se, e somente se, $\mathbf{T}$ é positivo.

O Operador (Matriz) Raiz Quadrada

Como definir o operador raiz quadrada.

Sejam $\lambda_j \geq 0$, $1 \leq j \leq \mathbf{k} \leq \mathbf{n}$ os $\mathbf{k}-$autovalores distintos de $\mathbf{T}$.

Sejam $\left\{ v_j^{(1)}, v_j^{(2)}, \cdots, v_j^{(\mathbf{q}_j)} \right\}$ bases dos autoespaços (com dimensões $\mathbf{q}_j$) associados à λ_j, para $j = 1, 2, \cdots, \mathbf{k}$.

Seja $v \in \mathbb{V}$ um vetor qualquer. Então $v = \sum_{j=1}^{\mathbf{k}} \left(\sum_{i=1}^{\mathbf{q}_j} \alpha_{ij} v_j^{(i)} \right)$.

$$\text{Daí, } \mathbf{T}(v) = \sum_{j=1}^{\mathbf{k}} \left(\sum_{i=1}^{\mathbf{q}_j} \alpha_{ij} \mathbf{T}(v_j^{(i)}) \right) = \sum_{j=1}^{\mathbf{k}} \left(\sum_{i=1}^{\mathbf{q}_j} \alpha_{ij} \lambda_j \, v_j^{(i)} \right) = \sum_{j=1}^{\mathbf{k}} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{\mathbf{q}_j} \alpha_{ij} \, v_j^{(i)} \right).$$

Definimos o operador raiz quadrada $\sqrt{\mathbf{T}} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ como:

$$\sqrt{\mathbf{T}}(v) = \sum_{j=1}^{\mathbf{k}} \sqrt{\lambda_j} \left(\sum_{i=1}^{\mathbf{q}_j} \alpha_{ij} \, v_j^{(i)} \right).$$

O Operador (Matriz) Raiz Quadrada

Exemplo 2. $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com $\mathbf{T}(x,y) = (x+y, x+3y)$.

Matriz de T: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Como a matriz **A** é simétrica, **então** este operador é auto-adjunto.

Autovalores de T (ou de A):
$\lambda_1 = 2 - \sqrt{2} \approx 0.585786$, $\lambda_2 = 2 + \sqrt{2} \approx 3.41421$.

Como todos (os dois) autovalores são positivos e o operador é auto-adjunto, **então T** é positivo.

Note que os dois menores pricipais de **A** são positivos. **Note também que** se for feita a eliminação de Gauss em **A**, então o pivô $a_{11} = 1$ é positivo.

Logo, o operador **T** (ou a matriz **A**) possui uma raiz quadrada.

O Operador (Matriz) Raiz Quadrada

Exemplo 2(cont.). Determinemos o operador (matriz) raiz quadrada de $\mathbf{T}(x,y)=(x+y,x+3y)$.

Autovalores de T (ou de A):
$\lambda_1=2-\sqrt{2}\approx 0.585786$, $\lambda_2=2+\sqrt{2}\approx 3.41421$.

Base de Autovetores de T (ou de A):
$\mathbf{B_2}=\left\{v^{(1)}=(-1-\sqrt{2},\quad 1),\quad v^{(2)}=(-1+\sqrt{2},\quad 1)\right\}$.

Dado um vetor na base de autovetores: $v=a_1\,v^{(1)}+a_2\,v^{(2)}$.

Então o operador raiz quadrada de **T** é dado por

$$\sqrt{\mathbf{T}}(a_1,a_2)=\sqrt{\lambda_1}a_1\,v^{(1)}+\sqrt{\lambda_2}a_2\,v^{(2)}$$
$$=\sqrt{2-\sqrt{2}}a_1\,v^{(1)}+\sqrt{2+\sqrt{2}}a_2\,v^{(2)}$$

Portanto, $\sqrt{\mathbf{T}}(a_1,a_2)=(\sqrt{2-\sqrt{2}}a_1,\quad \sqrt{2+\sqrt{2}}a_2)$

$$\approx(0.765367\,a_1,1.84776\,a_2).$$

Exercício. Passe a expressão do operador $\sqrt{\mathbf{T}}$ para a base canônica e verifique que $(\sqrt{(\mathbf{T})})^2=\mathbf{T}$.

O Operador (Matriz) Raiz Quadrada

Obs. Se $B_{\mathbb{V}} = \{v_1, \ldots v_n\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{V}$ formada por autovetores (unitários) de **T**, então a matriz do operador raiz quadrada $\sqrt{\mathbf{T}}$ na base $B_{\mathbb{V}}$ é obtida apenas tomando as raízes quadradas dos elemento da diagonal na matriz de **T** na base $B_{\mathbb{V}}$.

Obs. O quadrado de um operador **não adjunto** pode ser negativo.

Exemplo 3. $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $\mathbf{T}(x, y) = (-y, x)$ (rotação de $\pi/2$ em torno da origem).

Note que $\mathbf{T}^2(x, y) = \mathbf{T}(\mathbf{T}(x, y)) = \mathbf{T}(-y, x) = (-x, -y)$ é auto-adjunto, pois $\langle \mathbf{T}^2(x, y), (x, y)\rangle = \langle(-y, -x), (x, y)\rangle = \langle(x, y), (-y, -x)\rangle = \langle(x, y), \mathbf{T}^2(x, y)\rangle$.

No entanto, o único autovalor (repetido) de $\mathbf{T}^2$ é $\lambda = -1 < 0$.

Logo, $\mathbf{T}^2$ **é negativo!**