UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA - UFPB
CENTRO DE INFORMÁTICA - CI
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - DCC
DISCIPLINA: Métodos Matemáticos I 2023.2

Aluno(a): .... Matrícula: ....

Reposição da Segunda Prova

Marque com um X a sua opção:

( ) o professor deve corrigir a prova de reposição valendo 10 pontos e desconsiderar as listas de exercícios entregues entre a realização da primeira e da segunda provas;

( ) o professor deve corrigir a prova de reposição valendo 7 pontos e considerar as notas das listas de exercícios entregues entre a realização da primeira e da segunda provas.

01. Considere o espaço vetorial $\mathbb{V} = \mathbb{M}_{2\times 2}$ das matrizes reais 2×2 munido das operações usuais de adição e de multiplicação por escalar e também munido do produto interno $\langle M_1, M_2 \rangle = tr(M_2^t M_1)$, em que M_2^t é a transposta da matriz M_2 e $tr(M_2^t M_1)$ é o traço da matriz produto $M_2^t M_1$.

    Defina o conjunto $\mathbb{W}$ de matrizes $M_{2\times 2}$ da seguinte forma:

    $M \in \mathbb{W} \iff M = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{bmatrix} \in \mathbb{W}$ com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$.

    (a) Verifique que o subconjunto $\mathbb{W}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{V}$.

    (b) Determine duas matrizes que formam uma base do subespaço $\mathbb{W}$.

    (c) Verifique se as duas matrizes que formam a base determinada no item (b) são ortogonais entre si.

02. Seja a transformação linear $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $T(x, y, z) = x + y$.

    (a) Determine o núcleo da transformação $\mathbf{T}$.

    (b) Determine a expressão da transformação linear $\mathbf{T}^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ adjunta de $\mathbf{T}$.

    (c) Determine se o vetor $v = (1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$ pertence à imagem de T^*.

03. Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_2 + 2x_3, x_2 + x_3, x_3)$.

(a) Determine os autovalores do operador $\mathbf{T}$.

(b) Determine uma base de cada autoespaço (autovetores) associado a cada um dos autovalores de $\mathbf{T}$.

(c) Determine uma base do $\mathbb{R}^3$ que contenha como seus primeiros elementos os autovetores que formam as bases dos autoespaccos do item (b).

04. Considere o espaço vetorial dos polinômios de grau no máximo $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ munido das operações usuais de adição e de multiplicação por escalar. Defina a transformação linear $\mathbf{T} : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ por $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + a_1 + a_2, a_0 + a_1)$.

(a) Determine a dimensão do subespaço $Im(\mathbf{T})$, imagem da transformação $\mathbf{T}$.

(b) Baseando-se no item (a) determine a dimensão do subespaço $N(\mathbf{T})$, núcleo da transformação $\mathbf{T}$. Justifique a sua resposta.

(c) Diga se a transformação dada é injetiva e também se é sobrejetiva. Justifique as suas duas respostas.