Métodos Matemáticos I

Prof. Aparecido J. de Souza
aparecidosouza@ci.ufpb.br

Transformações Lineares
Decomposição em Valores Singulares

Recapitulando

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial munido de um PI.

O **operador adjunto** de um operador $\mathbf{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ é o operador $\mathbf{T}^* : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ tal que $\langle \mathbf{T}(v), w \rangle = \langle v, \mathbf{T}^*(w) \rangle$, $\forall v, w \in \mathbb{V}$.

O operador $\mathbf{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ é **auto-adjunto** se $\mathbf{T}^* = \mathbf{T}$.

Teorema Espectral. Se $\mathbf{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ é um operador **auto-adjunto** num espaço vetorial $\mathbb{V}$ de dimensão finita munido de um PI, então existe uma base ortonormal de $\mathbb{V}$ formada por autovetores de $\mathbf{T}$.

Versão Matricial do Teorema Espectral. Toda matriz real simétrica é diagonalizável, isto é, $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \Lambda$, em que Λ é uma matriz diagonal, cuja diagonal é formada pelos autovalores (reais) de $\mathbf{A}$ e a matriz $\mathbf{Q}$ é uma matriz ortogonal, cujas colunas são formadas pelos autovetores (ortonormais) de $\mathbf{A}$.

Teorema da Decomposição em Valores Singulares

Sejam

- $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ espaços vetoriais com $dim(\mathbb{V}) = \mathbf{n}$ e $dim(\mathbb{W}) = \mathbf{m}$.
- $\mathbf{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ uma transformação linear c/ matriz $\mathbf{A}_{\mathbf{m}\times\mathbf{n}}$.
- $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\mathbf{r}}$ os **r** autovalores **positivos** do operador não negativo $\mathbf{T}^* \circ \mathbf{T}$ (da matriz $\mathbf{A}^* \mathbf{A}$).

Então existem bases ortonormais $\mathbf{B}_{\mathbb{V}} = \{v_1, \ldots, v_{\mathbf{r}}, \ldots, v_{\mathbf{n}}\}$ de $\mathbb{V}$ e $\mathbf{B}_{\mathbb{W}} = \{w_1, \ldots, w_{\mathbf{r}}, \ldots, w_{\mathbf{m}}\}$ de $\mathbb{W}$, tais que

- $\mathbf{T}(v_i) = \sqrt{\sigma_i} w_i, \quad \mathbf{T}^*(w_i) = \sqrt{\sigma_i} v_i$, para $i = 1, \ldots \mathbf{r}$ e
- $\mathbf{T}^*(w_i) = 0$ para $i = \mathbf{r} + 1, \ldots, \mathbf{m}$.

Definição. O números positivos $\sqrt{\sigma_1}, \cdots, \sqrt{\sigma_{\mathbf{r}}}$ são os **valores singulares** de **T** (ou de **A**).

Teorema da Decomposição em Valores Singulares

Algoritmo. Por um **teorema anterior** o operador

$\mathbf{T}^* \circ \mathbf{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ é não negativo.

Passo 1. Determine os **r** autovalores (reais) positivos e os $(\mathbf{n} - \mathbf{r})$ autovalores nulos de $\mathbf{T}^* \circ \mathbf{T}$ (ou de $\mathbf{A}^* \mathbf{A}$).

Passo 2. Determine a base ortonormal $\mathbf{B}_{\mathbb{V}} = \{v_1, \ldots, v_{\mathbf{r}}, \ldots, v_{\mathbf{n}}\}$ de $\mathbb{V}$ formada por autovetores de $\mathbf{T}^* \circ \mathbf{T}$ (ou de $\mathbf{A}^* \mathbf{A}$), tal que

- $\mathbf{T}^* \circ \mathbf{T}(v_i) = \sigma_i v_i$, $i = 1, 2, \cdots \mathbf{r}$,
- $\mathbf{T}^* \circ \mathbf{T}(v_i) = 0 v_i = \mathbf{0}_{\mathbb{V}}$, $i = \mathbf{r} + \mathbf{1}, \cdots \mathbf{n}$.

Então, $\langle \mathbf{T}(v_i), \mathbf{T}(v_j) \rangle = \langle v_i, \mathbf{T}^* \circ \mathbf{T}(v_j) = \langle v_i, \sigma_j v_j \rangle = \sigma_j \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{\mathbf{ij}}$.

Assim, os vetores $\mathbf{T}(v_1), \ldots, \mathbf{T}(v_{\mathbf{r}})$ são dois a dois ortogonais, e não nulos, pois $\|\mathbf{T}(v_i)\|^2 = \sigma_i \|v_i\|^2 = \sigma_i$, $i = 1, 2, \ldots, \mathbf{r}$.

Além disto, $\|\mathbf{T}(v_i)\|^2 = 0$, para $i = \mathbf{r} + 1, \cdots, \mathbf{n}$.

Portanto $dim(Im(\mathbf{T})) = \mathbf{r}$, pois $\|\mathbf{T}(v_i)\| = \sqrt{\sigma_i}$, $i = 1, \ldots \mathbf{r}$ e

$\mathbf{T}(v_i) = 0$, $i = \mathbf{r} + 1, \cdots, \mathbf{n}$.

Teorema da Decomposição em Valores Singulares

Passo 3. Defina $w_i = \frac{1}{\sqrt{\sigma_i}}\mathbf{T}(v_i)$, $i = 1, \ldots \mathbf{r}$.

Então $\{w_1, \ldots w_\mathbf{r}\}$ é uma base ortonormal de $\mathbf{Im}(\mathbf{T})$.

Como $\mathbf{dim}(\mathbf{Im}(\mathbf{T}^*)) = \mathbf{dim}(\mathbf{Im}(\mathbf{T})) = \mathbf{r}$, **como** $\mathbf{T}^* : \mathbb{W} \to \mathbb{V}$ e **como** $\mathbf{dim}(\mathbb{W}) = \mathbf{m}$, **então** pelo teorema do núcleo e da imagem aplicado à transformação $\mathbf{T}^*$ tem-se que $\mathbf{dim}(\mathbf{N}(\mathbf{T}^*)) = \mathbf{m} - \mathbf{r}$.

Passo 4. Determine uma base ortonormal de $\mathbf{N}(\mathbf{T}^*) \subset \mathbb{W}$, digamos $\{w_{\mathbf{r}+1}, \ldots w_\mathbf{m}\}$.

Passo 5 (Fim). Complete a base de $\{w_1, , \cdots, w_\mathbf{r}\}$ de $\mathbf{Im}(\mathbf{T})$ para a base ortonormal $\mathbf{B}_\mathbb{W} = \{w_1, \ldots, w_\mathbf{r}, w_{\mathbf{r}+1} \ldots w_\mathbf{m}\}$ de $\mathbb{W}$.

Obs. Os vetores unitários $w_1, \ldots, w_\mathbf{r}$ e $w_{\mathbf{r+1}}, \ldots w_\mathbf{m}$ são ortogonais entre si, pois se $1 \leq i \leq \mathbf{r}$ e $\mathbf{r} + \mathbf{1} \leq j \leq \mathbf{m}$, então $\langle w_i, w_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{\sigma_i}}\langle \mathbf{T}(v_i), w_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{\sigma_i}}\langle v_i, \mathbf{T}^*(w_j)\rangle = \frac{1}{\sqrt{\sigma_i}}\langle v_i, \mathbf{0}_\mathbb{W}\rangle = 0$.

Teorema da Decomposição em Valores Singulares

Temos uma base ortonormal $\mathbf{B}_{\mathbb{V}} = \{v_1, \ldots, v_{\mathbf{r}}, \ldots, v_{\mathbf{n}}\}$ de $\mathbb{V}$ formada por autovetores ortonormais de $\mathbf{T}^* \circ \mathbf{T}$ (ou de $\mathbf{A}^* \mathbf{A}$).

Temos uma base ortonormal $\mathbf{B}_{\mathbb{W}}$ de $\mathbb{W}$ formada pela união da base ortonormal $\{w_1, \ldots, w_{\mathbf{r}}\}$ de $\mathbf{Im}(\mathbf{T})$ com a base ortonormal $\{w_{\mathbf{r}+1} \ldots w_{\mathbf{m}}\}$ de $\mathbf{N}(\mathbf{T}^*)$.

Note que:

- **se $i = 1, \ldots, \mathbf{r}$, então**
  - por construção temos, $\mathbf{T}^*(\mathbf{T}(v_i)) = \sigma v_i$ e $w_i = \frac{1}{\sqrt{\sigma_i}} \mathbf{T}(v_i)$;
  - $\mathbf{T}^*(w_i) = \mathbf{T}^* \left(\frac{1}{\sqrt{\sigma_i}} \mathbf{T}(v_i) \right) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_i}} \mathbf{T}^* \left(\mathbf{T}(v_i) \right) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_i}} \sigma_i v_i = \sqrt{\sigma_i} v_i$;
  - $\mathbf{T} \circ \mathbf{T}^*(w_i) = \mathbf{T}(\sqrt{\sigma_i}\, v_i) = \sqrt{\sigma_i}\, \mathbf{T}(v_i) = \sqrt{\sigma_i} \sqrt{\sigma_i}\, w_i = \sigma_i w_i$.
- **se $i = \mathbf{r} + 1, \ldots . \mathbf{n}$, então $\mathbf{T}(v_i) = \mathbf{0}_{\mathbb{W}}$,**
- **se $i = \mathbf{r} + 1, \ldots . \mathbf{m}$, então $\mathbf{T}^*(w_i) = \mathbf{0}_{\mathbb{V}}$**

  e assim $\mathbf{T} \circ \mathbf{T}^*(w_i) = \mathbf{T}(\mathbf{0}_{\mathbb{V}}) = \mathbf{0} = 0 w_i$.

Portanto, w_i, com $i = 1, \cdots \mathbf{n}$, são autovetores ortonormais de $\mathbf{T} \circ \mathbf{T}^*$ (ou de $\mathbf{A}\,\mathbf{A}^*$).

Teorema da Decomposição em Valores Singulares

A matriz de $\mathbf{T} : \mathbb{V}^{\mathbf{n}} \to \mathbb{W}^{\mathbf{m}}$ em relação às bases ortonormais $\mathbf{B}_{\mathbb{V}}$ e $\mathbf{B}_{\mathbb{W}}$ é uma matriz $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ dada por

$$\sqrt{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sqrt{\sigma_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{0} & \sqrt{\sigma_2} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \sqrt{\sigma_3} & \cdots & \mathbf{0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \sqrt{\sigma_r} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{m} \times \mathbf{n}} .$$

Note que $posto(\sqrt{\Sigma}) = posto(\mathbf{A}) = dim(Im(\mathbf{T})) = \mathbf{r}$.

Teorema da Decomposição em Valores Singulares

A matriz de $\mathbf{T}^* : \mathbb{W}^{\mathbf{m}} \to \mathbb{V}^{\mathbf{n}}$ em relação às bases ortonormais $\mathbf{B}_{\mathbb{W}}$ e $\mathbf{B}_{\mathbb{V}}$ é uma matriz $\mathbf{n} \times \mathbf{m}$ dada por

$$\sqrt{\Sigma^t} = \begin{bmatrix} \sqrt{\sigma_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{0} & \sqrt{\sigma_2} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \sqrt{\sigma_3} & \cdots & \mathbf{0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \sqrt{\sigma_r} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{n} \times \mathbf{m}} .$$

Note que $posto(\sqrt{\Sigma^t}) = posto(\mathbf{A}^*) = dim(Im(\mathbf{T}^*)) = \mathbf{r} = posto(\sqrt{\Sigma}) = posto(\mathbf{A}) = dim(Im(\mathbf{T}))$.

Versão para Matrizes: Decomposição em Valores Singulares

Seja $\mathbf{A}_{\mathbf{m}\times\mathbf{n}}$ a matriz de uma transformação linear $\mathbf{T}: \mathbb{V}^n \to \mathbb{W}^m$.

Suponha que $\mathbf{A}$ tenha posto $\mathbf{r}$.

Então $\mathbf{A}$ pode ser fatorada na forma $\mathbf{A} = \mathbf{U}\sqrt{\Sigma}\,\mathbf{V}^*$ em que

- $\mathbf{U}$ é uma matriz quadrada $\mathbf{m}\times\mathbf{m}$, cujas colunas são $\mathbf{m}$ autovetores ortonormais de $\mathbf{AA}^*$;
- $\sqrt{\Sigma}$ é uma matriz $\mathbf{m}\times\mathbf{n}$, com $\sqrt{\Sigma}_{jj} = \sqrt{\sigma_j}$, para $j = 1, 2, \cdots, \mathbf{r}$, em que σ_j são os **autovalores não nulos** de $\mathbf{AA}^*$ (ou de $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$) e os demais elementos são nulos;
- $\mathbf{V}$ (resp. $\mathbf{V}^*$) é uma matriz $\mathbf{n}\times\mathbf{n}$ ortogonal, cujas colunas (resp. linhas) são $\mathbf{n}$ autovetores ortonormais de $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$.

Como decorar a ordem na decomposição:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{m}\times\mathbf{n}} = \mathbf{U}_{\mathbf{m}\times\mathbf{m}}\sqrt{\Sigma}_{\mathbf{m}\times\mathbf{n}}\mathbf{V}^*{}_{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}.$$

Obs. Lembre que para uma matriz $\mathbf{M}$ real, tem-se que $\mathbf{M}^* = \mathbf{M}^t$.

Exemplo do Teorema dos Valores Singulares

Seja $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\mathbf{T}(x,y,z) = (x+2y+3z, 4x+5y+6z)$.

Matriz de **T**: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$. $\quad$ $posto(\mathbf{A}) = dim(Im(\mathbf{T})) = 2$.

Matriz $\mathbf{A}^t\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 17 & 22 & 27 \\ 22 & 29 & 36 \\ 27 & 36 & 45 \end{bmatrix}$, $\quad$ Matriz $\mathbf{A}\mathbf{A}^t = \begin{bmatrix} 14 & 32 \\ 32 & 77 \end{bmatrix}$.

Autovalores de $\mathbf{T}^* \circ \mathbf{T}$ (ou de $\mathbf{A}^t\mathbf{A}$):

$\sigma_1 = \frac{1}{2}(91 + \sqrt{8065}) \approx 90.4027$,
$\sigma_2 = \frac{1}{2}(91 - \sqrt{8065}) \approx 0.597327$,
$\sigma_3 = 0$.

Valores singulares de T:

$\sqrt{\sigma_1} \approx \sqrt{90.4027} \approx 9.5$, $\quad \sqrt{\sigma_2} \approx \sqrt{0.597327} \approx 0.77$.

Exemplo do Teorema dos Valores Singulares

Autovetores ortonormais de $\mathbf{T}^* \circ \mathbf{T}$ (ou de $\mathbf{A}^t\mathbf{A}$)/ **Base ortonormal de** $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$:

$$v^{(1)} \approx \frac{1}{1.41}\begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.8 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v^{(2)} = \frac{1}{1.73}\begin{bmatrix} -1.4 \\ -0.2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v^{(3)} = \frac{1}{2.45}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Como $dim(\mathbb{R}^2) = dim((N(\mathbf{T}^*)) + dim(Im(\mathbf{T}^*))$, **então** $\mathbf{N(T^*) = \{(0,0)\}}$.

Base ortonormal de Im(T):

$$w^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{\sigma_1}}\mathbf{T}(v^{(1)}) \approx \frac{1}{9.5}\begin{bmatrix} 3.69 \\ 8.79 \end{bmatrix},$$

$$w^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{\sigma_2}}\mathbf{T}(v^{(2)}) \approx \frac{1}{0.77}\begin{bmatrix} 0.69 \\ -0.34 \end{bmatrix},$$

os quais são **autovetores ortonormais de $\mathbf{T} \circ \mathbf{T}^*$ (ou de $\mathbf{AA}^t$)**.

Base ortonormal de $\mathbb{W} = \mathbb{R}^2$: $\mathbf{B}_{\mathbb{W}} = \{w^{(1)}, w^{(2)}\}$.

Exemplo do Teorema dos Valores Singulares

Matriz 2×3 dos Valores Singulares/Matriz de T em relação às bases $\mathbf{B}_{\mathbb{V}} = \{v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}\}$ e $\mathbf{B}_{\mathbb{W}} = \{w^{(1)}, w^{(2)}\}$:

$$\sqrt{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sqrt{\sigma_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\sigma_2} & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 9.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.77 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriz ortogonal 2×2 cujas colunas são os autovetores ortonormais de $\mathrm{T}^* \circ \mathrm{T}$ (ou de AA^t):

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} w^{(1)} & w^{(2)} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \frac{3.69}{9.5} & \frac{0.69}{0.77} \\ & \\ \frac{8.79}{9.5} & \frac{-0.34}{0.77} \end{bmatrix}.$$

Matriz ortogonal 3×3 cujas linhas são os autovetores ortonormais de $\mathrm{A}^t\mathrm{A}$:

$$\mathbf{V^t} = \begin{bmatrix} v^{(1)t} \\ \\ v^{(2)t} \\ \\ v^{(3)t} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \frac{0.6}{1.41} & \frac{0.8}{1.41} & \frac{1}{1.41} \\ & & \\ \frac{-1.4}{1.73} & \frac{-0.2}{1.73} & \frac{1}{1.73} \\ & & \\ \frac{1}{2.45} & \frac{-2}{2.45} & \frac{1}{2.45} \end{bmatrix}.$$

Aplicação do Teorema dos Valores Singulares

Livro do Strang, pg. 333. Foto de satélite a ser enviada para a terra com $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ pixels, cada um representando uma cor definida, digamos $\mathbf{N} = 1000$.

As informações **essenciais** podem estar apenas em poucos pixels.

Usando a decomposição em valor singular as cores essenciais estão associados, digamos aos **r** valores singulares de uma ordem de 10^{-3} para cima, e as demais cores correspondem aos valores singulares com ordem inferior à 10^{-3}.

Então basta enviar apenas as colunas de **U** e de $\mathbf{V^t}$ que correspondem à estes **r** valores singulares e são omitidas as demais $\mathbf{N} - \mathbf{r}$ colunas, uma vez que

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V^t} = w^{(1)}\sqrt{\sigma_1}v^{(1)} + \cdots + w^{(\mathbf{q})}\sqrt{\sigma_{\mathbf{q}}}v^{(\mathbf{q})}.$$