$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & -9 \\ 3 & -9 & 4 \end{bmatrix}$$

TAREFA 21

01. d) $q(v) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_2^2 - 18x_2x_3 + 4x_3^2$

$q(v) = B(v, v, v)$

$B(v_1, v_2, v_3) = q(v_1+v_2) + q(v_1+v_3) + q(v_2+v_3) - q(v_1) - q(v_2) - q(v_3)$

(i) Forma bilinear simétrica associada;

$B: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$B((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = \langle (x_1,x_2,x_3), T_B(y_1,y_2,y_3) \rangle$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & -9 \\ 3 & -9 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 - 2y_2 + 3y_3 \\ -2y_1 + 6y_2 - 9y_3 \\ 3y_1 - 9y_2 + 4y_3 \end{bmatrix}$$

$$= x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_1y_3 - 2x_2y_1 + 6x_2y_2 - 9x_2y_3 + 3x_3y_1 - 9x_3y_2 + 4x_3y_3.$$

(ii) matriz A da forma quadrática q;

$q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_1 + 3x_1x_3 + 3x_3x_1 + 6x_2^2 - 9x_2x_3 - 9x_3x_2 + 4x_3^2$

Dessa forma, $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & -9 \\ 3 & -9 & 4 \end{bmatrix}$

(iii) autovalores de A

$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 3 \\ -2 & 6-\lambda & -9 \\ 3 & -9 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 11\lambda^2 + 60\lambda - 19 = 0$

$\lambda_1 \approx -4{,}233$, $\lambda_2 \approx 0{,}301$, $\lambda_3 \approx 14{,}933$

$\begin{matrix} -2 & 6 & -9 \\ 3 & -9 & 4 \end{matrix}$

(iii) autovalores de A

$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 3 \\ -2 & 6-\lambda & -9 \\ 3 & -9 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 11\lambda^2 + 60\lambda - 19 = 0$

$\lambda_1 \approx -4{,}233$, $\lambda_2 \approx 0{,}301$, $\lambda_3 \approx 14{,}933$

(iv) índice e posto de q, diga se q ou A é positiva definida, negativa definida, não negativa, não positiva ou indefinida

índice: 1 posto: 3

Para verificar se uma matriz é positiva definida ou negativa definida, um dos métodos é observar a determinante dos menores principais, se todos forem positivos, é positiva definada, se for negativa para menores principais ímpares e positiva para menores principais pares.

$|1| = 1$, $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 2$, $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & -9 \\ 3 & -9 & 4 \end{vmatrix} = -19$ Nesse caso, ela é indefinida

(v) base ortonormal do $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de A;

Como a matriz possui 3 autovalores diferentes, seus autovetores são ortogonais.

$v_1 \approx \begin{pmatrix} -0{,}256 \\ 0{,}829 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_2 \approx \begin{pmatrix} -66{,}449 \\ -21{,}739 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_3 \approx \begin{pmatrix} 0{,}372 \\ -1{,}091 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\|v_1\| = \sqrt{1{,}752} \approx 1{,}32$

$\|v_2\| = \sqrt{4889{,}05} \approx 69{,}9$

$\|v_3\| = \sqrt{2{,}32} \approx 1{,}52$

$B_2 = \{(-0{,}194,\ 0{,}628,\ 0{,}757);\ (-0{,}95,\ -0{,}311,\ 0{,}014);$
$(0{,}244,\ -0{,}717,\ 0{,}657)\}$

(vi) expressão de $q(v)$ na base B_2 como $q(v) = \lambda_1(x'_1)^2 + \lambda_2(x'_2)^2 + \lambda_3(x'_3)^2$;

$q(v) = -4{,}233(x'_1)^2 + 0{,}301(x'_2)^2 + 14{,}933(x'_3)^2$

(vii) $v = (1,1,1)$ e escreva v na base B_2; calcule $q(v)$ usando a base canônica e também usando na base B_2 de autovetores e verifique se o valor de $q(v)$ é o mesmo ao usar as duas representações de v;

$(1,0,0) = \alpha(-0{,}194,\ 0{,}628,\ 0{,}757) + \beta(-0{,}95,\ -0{,}311,\ 0{,}014) + \gamma(0{,}244,\ -0{,}717,\ 0{,}657)$

$$\begin{cases} -\alpha\cdot 0{,}194 + \beta\cdot 0{,}95 + \gamma\cdot 0{,}244 = 1 \\ \alpha\cdot 0{,}628 - \beta\cdot 0{,}311 - \gamma\cdot 0{,}717 = 0 \\ \alpha\cdot 0{,}757 + \beta\cdot 0{,}014 + \gamma\cdot 0{,}657 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha \approx -0{,}193 \\ \beta \approx -0{,}95 \\ \gamma \approx 0{,}243 \end{cases}$$

$e_1 = -0{,}193v_1 - 0{,}95v_2 + 0{,}243v_3$

$$\begin{cases} \alpha \approx 0{,}624 \\ \beta \approx -0{,}310 \\ \gamma \approx -0{,}713 \end{cases}$$

$\alpha\cdot 0{,}757 + \beta\cdot 0{,}014 + \gamma\cdot 0{,}657 = 0 \qquad \gamma \approx 0{,}243$

$e_1 = -0{,}193v_1 - 0{,}95v_2 + 0{,}243v_3$

$\alpha \approx 0{,}624$, $\beta \approx -0{,}310$, $\gamma \approx -0{,}713$

$e_2 = 0{,}624v_1 - 0{,}310v_2 - 0{,}713v_3$

$$\begin{cases} \alpha \approx 0{,}753 \\ \beta \approx 0{,}014 \\ \gamma \approx 0{,}653 \end{cases}$$

$e_3 = 0{,}753v_1 + 0{,}014v_2 + 0{,}653v_3$

$v_{B_2} = 1e_1 + 1e_2 + 1e_3$

$= 1{,}184v_1 - 1{,}246v_2 + 0{,}183v_3 = v_{B_2}$

$v_{B_2} = (1{,}184,\ -1{,}246,\ 0{,}183)$

$(1,1,1)$

$q(v) = -4{,}233(1)^2 + 0{,}301(1)^2 + 14{,}933(1)^2$

$\approx 11{,}001$

$q(v_{B_2}) = -4{,}233(1{,}184)^2 + 0{,}301(-1{,}246)^2 + 14{,}933(0{,}183)^2$

$\approx -4{,}96$

Os valores são diferentes.

(viii) $q(v) = -(x''_1)^2 + (x''_2)^2 + (x''_3)^2$