

# 飞船的跟踪测控模型

## 摘 要

随着时代的发展,我国在航天领域取得骄人的成绩。神五、神六、神七相继发射成功,使我国的航天事业取得了巨大的成就。本文运用数学和物理的相关知识对飞船的跟踪测控问题进行充分的分析后,建立了数学模型,并且验证了实际问题。

针对问题(1):在合理的假设条件下,运用 Visio 画出飞船绕地球运行的轨道模型图,运用数学模型求解出需设的测控站至少为  $n_1$  个才能对飞船进行全程监控。并且就神舟七号的一些数据,求解得出测控站至少为 12 个才能对飞船进行全程监控。

针对问题(2):由于该问应考虑地球自转,则在一定时间内飞船相对与地球运行的轨迹接近于一条正弦曲线,随着飞船的运行和地球的自转,该曲线不断的自西向东推移形成一条带状曲线;该曲线的带宽随着纬度的增加连续减小。不同的飞船有不同的运行半径,所以有不同的带宽,可将测控站的分布划分为不同情况,讨论带宽与测控站的测控范围以及该段带宽的长度与测控范围的直径的关系。此问讨论了两种情况:第一种情况为正弦曲线带宽的最大宽度  $l_0$  小于测控站的测控直径  $2r_3$ ;第二种情况为正弦曲线的最大宽度  $l_3$  大于测控站的测控直径  $2r_3$  且小于  $4r_3$ 。两种情况下均计算出了所需设置的测控站个数  $n_2, n_3$ 。

针对问题(3):搜集整理相关资料,列出多个测控站的经纬度(详见附表一),注意到相邻的两个测控站之间的纬度差很少,观测站之间的弧长所对应的圆心角可以近似认为是两个站点的经度之差,并运用 MATLAB 软件计算出相邻测控站之间重合的覆盖范围和有效的覆盖范围,然后用有效面积范围与轨迹带的面积之比可以得到测控站的测控范围为 72.59%。

文章最后对本文的模型进行改进,使得结果更精确。

关键字:星迹线,高纬度带宽,轨道模型图, MATLAB, Visio。

## 一、问题的重述

飞船在国民经济和国防建设中有着重要的作用,对它们的发射和运行过程进行测控是航天系统的一个重要组成部分,理想的状况是对飞船(特别是载人飞船)进行全程跟踪测控。

测控设备只能观测到所在点切平面以上的空域,且在与地平面夹角 3 度的范围内测控效果不好,实际上每个测控站的测控范围只考虑与地平面夹角 3 度以上的空域。在一个飞船的发射与运行过程中,往往有多个测控站联合完成测控任务,如神州七号飞船发射和运行过程中测控站的分布见网站:

[http://www.gov.cn/jrzq/2008-09/24/content\\_1104882.htm](http://www.gov.cn/jrzq/2008-09/24/content_1104882.htm)

请利用模型分析飞船的测控情况,具体问题如下:

1. 在所有测控站都与飞船的运行轨道共面的情况下至少应该建立多少个测控站才能对其进行全程跟踪测控?
2. 如果一个飞船的运行轨道与地球赤道平面有固定的夹角,且在离地面高度为  $H$  的球面  $S$  上运行。考虑到地球自转时该飞船在运行过程中相继两圈的经度有一些差异,问至少应该建立多少个测控站才能对该飞船可能飞行的区域全部覆盖以达到全程跟踪测控的目的?
3. 收集我国一个飞船的运行资料和发射时测控站点的分布信息,分析这些测控站点对该飞船所能测控的范围。

## 二、模型的假设

1. 地球是一个圆球;
2. 飞船绕地球运行的轨迹为一个圆;
3. 地球自转的速度大小不变;
4. 飞船相对地球运动近似为匀速圆周运动;
5. 飞船运行稳定。
6. 所有的弧长用对应直线长度代替。

## 三、符号说明

- $n_1$ : (1) 问中忽略地球自转所得的最少测控站个数;
- $n_2$ : (2) 问中第一种情况下的最少测控站个数;
- $n_3$ : (2) 问中第二种情况下的最少测控站个数;
- $n_4$ : 一个周期内飞船或卫星绕地球的圈数;
- $n_5$ : 测控站的总个数;
- $n_6$ : 在长为  $l'$ 、带宽为  $l_0$  的带上所需要测控站的组数;
- $n_7$ : 在长为  $l'$ 、带宽为  $l_0$  的带上每组所需要的测控站个数;

$l'$ : 某段带宽所对应的长度;  
 $l_0$ : 正弦曲线的最大宽度;  
 $l_1$ : 地球上两条正弦曲线之间的距离;  
 $l_2$ : 球面 S 上两条正弦曲线之间的距离;  
 $l_3$ : 正弦曲线的带宽;  
 $l_4$ : 飞船在 S 球面上运行的正弦曲线轨迹的近似长度;  
 $l_5$ : 一个测控站能观测到的正弦曲线的带长;  
 $l_6$ : (3) 问中的两相邻最近测控站所对应的轨道上的弧长;  
 $l_7$ : (3) 问中的两相邻最近测控站所能覆盖的最大带宽;  
 $l_8$ : (3) 问中的轨迹带的长;  
 $l_9$ : (3) 问中的轨迹带的宽;  
 $r_0$ : 纬度上截圆的半径;  
 $r$ : 地球的半径;  
 $r_3$ : 地球上空 H 高处测控站覆盖的面积半径;  
 $v_0$ : 赤道上某一点的自转速度;  
 $v_1$ : 飞船的运行速度;  
 $v_{31}$ : 当带宽等于  $r_3$  是对应地球上的该点的速度;  
 $v_3$ : 地球上垂直于飞船运行轨道面的速度;  
 $s_1$ : 喀什站与和田站测控的范围所重叠的面积;  
 $s_2$ : 相邻两测控站所重叠的总面积;  
 $s_3$ : 所有测控站所能测控的总面积;  
 $s_4$ : 所有测控站所能测控的有效面积;

$s_5$ : 轨迹带的面积;

$T$ : 地球自转周期;

$T_1$ : 飞船的运行周期。

$H$ : 飞船离地面的高度;

$S$ : 飞船的运行轨道球面;

## 四、问题分析

(1) 据题意所要建立的测控站要与飞船的运行轨道共面; 忽略地球的自转速度, 要求测控站对飞船进行全程跟踪。那么可以画出飞船绕地球运行的切面图, 以轨道面为切面, 根据模型图运用相关的数学知识求解出所需设置的测控站个数。

(2) 由于考虑地球自转的情况, 飞船在地球上的星迹线呈现为带状曲线。对该星迹线进行分析并结合飞船运行时间与地球自转周期之间的关系推导得出轨迹曲线变化的实际情况: 是一条呈带状分布的向东不断推移的正弦曲线且纬度不同时带宽也不相同。最后通过数据计算和证明可求解出所需测控站的最少个数。

(3) 可计算出测控站所能测控的总的测控面积, 减去测控站之间重叠的面积为有效面积, 有效面积比上星迹线所组成的带状的面积则是所能够测控的范围。

## 五、模型的建立与求解

第一问: 由于忽略地球自转的情况, 可画出飞船在绕地球运行时的断面图如下列图 1, 投影面平行于飞船运行的轨道面:

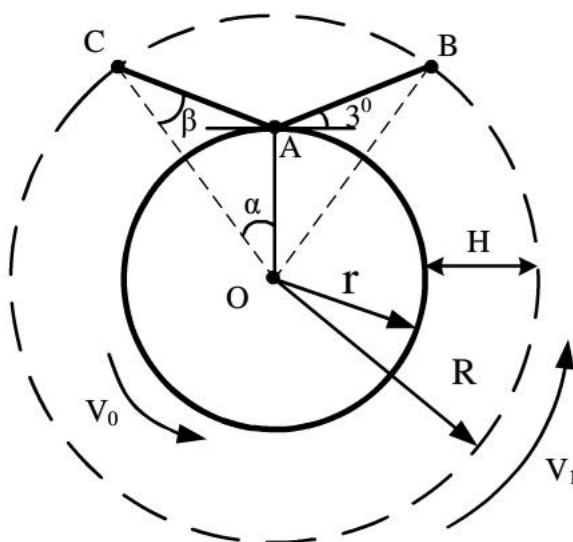


图 1

$$\text{由 } n_1 = \frac{2\pi}{2\alpha} = \frac{\pi}{\alpha}$$

$$\beta = \arcsin \frac{r \sin 93^\circ}{H + r} \quad (1.1)$$

$$\alpha = \pi - \frac{93\pi}{180} - \beta \quad (1.2)$$

运用正弦定理推导出：

$$n_1 = \frac{\pi}{\alpha} \quad (1.3)$$

以神舟七号的相关数据可计算出  $n_1=11.4727$ ；

所以至少应设置十二个测控站。

第二问：考虑地球自转的情况，在地球自转的同时飞船也在不断的运行，则飞船的运行轨迹在地球上的正投影为一条带状区域。

地球的自转速度  $v_0$  不变，且在不同的纬度地球自转速度不相同，则可将不同纬度上的自转速度分解在垂直于飞船运行面的轨道上得到速度  $v_3$ 。飞船在地球上的投影曲线即正弦曲线族的带宽在赤道点处最宽为  $l_0$ 。

1. 求出  $l_0$ ：

在考虑飞船自转的情况下，飞船绕地球运行的模型图如图 2 所示：

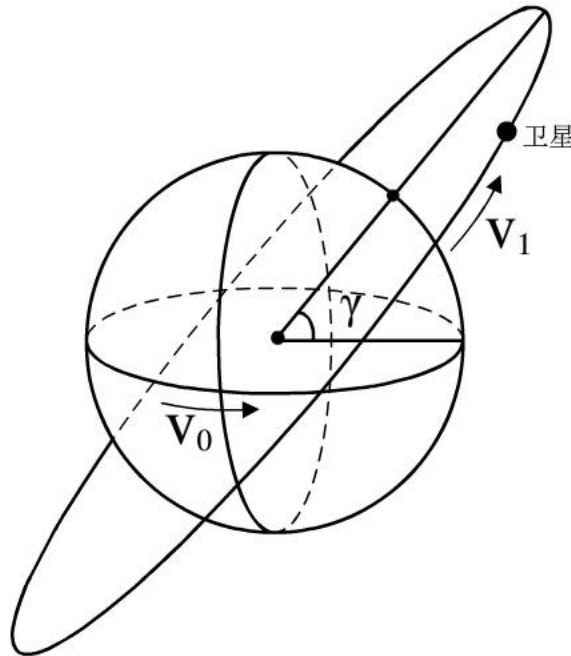


图 2

搜集相关资料得飞船运行轨迹在地球上的投影曲线如图 3 所示：

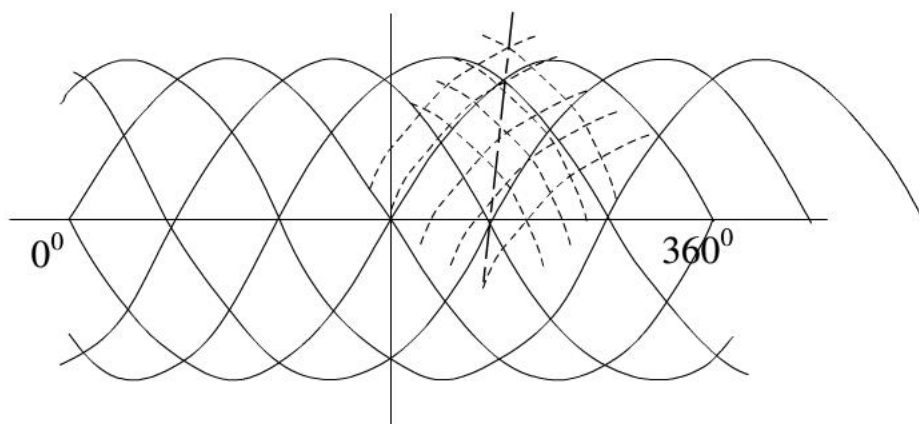


图 3

由于地球自转一周的时间  $T$  为 24 小时 (1440 分钟)，飞船运行一周所用的时间为  $T_1$ ，在  $T$  时间内飞船运行的圈数恰是一个整数 (符合实际情况，因为每一天的正弦曲线重合，即算出一天内的测控站个数就是总共的测控站个数。)

一天之内飞船运行的圈数为  $n_5$ 。欲求出正弦曲线的最大宽度  $l_0$ ，应选飞船运行轨道和赤道相交的一点  $a$  来计算 (选取赤道上的一点  $a$  来计算出最大带宽  $l_0$ )。设飞船运行的轨道面静止，那么  $a$  点在垂直于飞船运行轨道面方向上的路程为  $l_1$ ，为求  $l_0$ ，可先计算出赤道上两条正弦曲线之间的距离  $l_1$ 。如下图

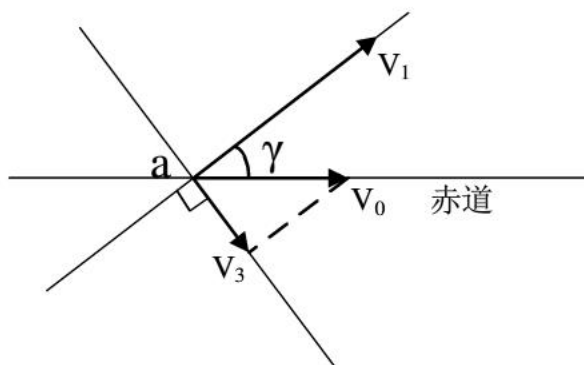


图 4

由相关几何知识和三角函数知识解出：

$$v_3 = v_0 \times \sin \gamma \quad (2.1)$$

则:

$$l_1 = v_3 \times T_1 \quad (2.2)$$

$$l_0 = n_4 \times l_1 \quad (2.3)$$

2. 计算观测站的覆盖面半径  $r_3$ ; 运用 visio 画出模型图如图 5 所示:

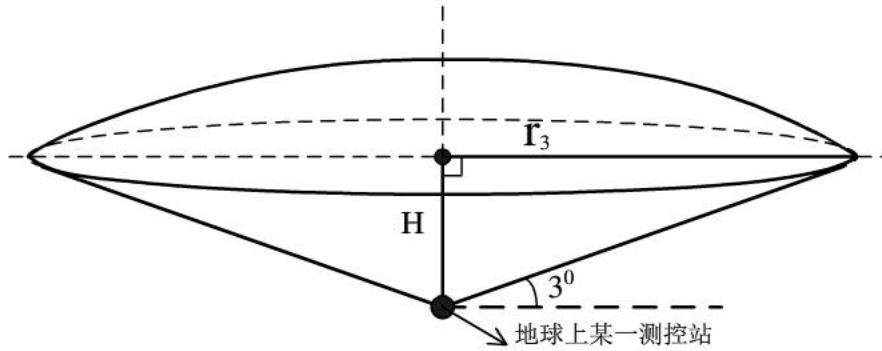


图 5

由三角函数得:

$$r_3 = H \tan 87^\circ \quad (2.4)$$

3. 计算出第一种情况下所需设置的测控站个数  $n_2$ :

题中要求测控站测控的范围能全部覆盖飞船的运行面积, 根据飞船在地球上投影的运行轨迹正弦曲线族之间的距离  $l_1$ ; 可计算出飞船在 S 球面上的两条正弦曲线之间的距离  $l_0$ 。如图 6 所示: (切面图)

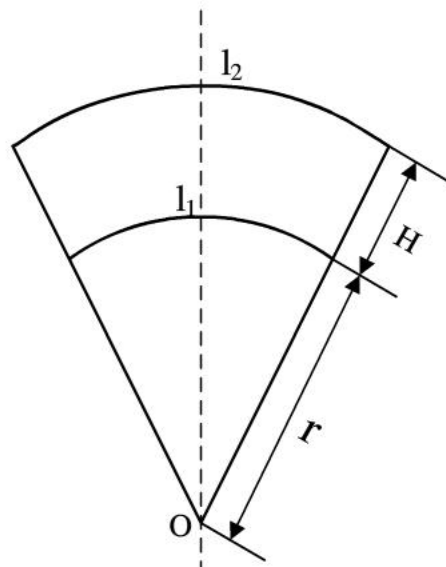


图 6

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{H+r}{r} \quad (2.5)$$

那么飞船在 S 球面上的最大总带宽为  $l_3$ ：

$$l_3 = n_4 l_2 \quad (2.6)$$

飞船在 S 球面上的正弦曲线轨迹总长为  $l_4$ ：

$$l_4 = 2\pi(H+r) \quad (2.7)$$

在计算测控站个数时，需考虑  $l_3$  与  $2r_3$  之间的大小关系。

第一种情况：此时假设  $l_3$  小于  $2r_3$ ，即此种情况下可用图 7 表示：

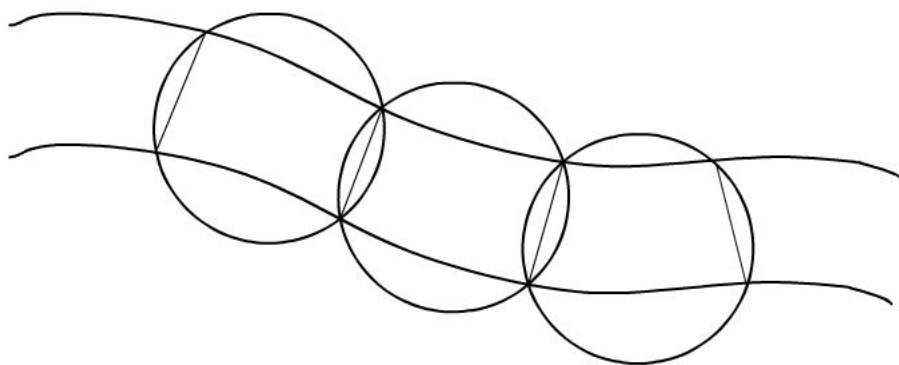


图 7

由于飞船的速度远大于地球自转的速度，所以可把图 7 的模型简化为图 8：

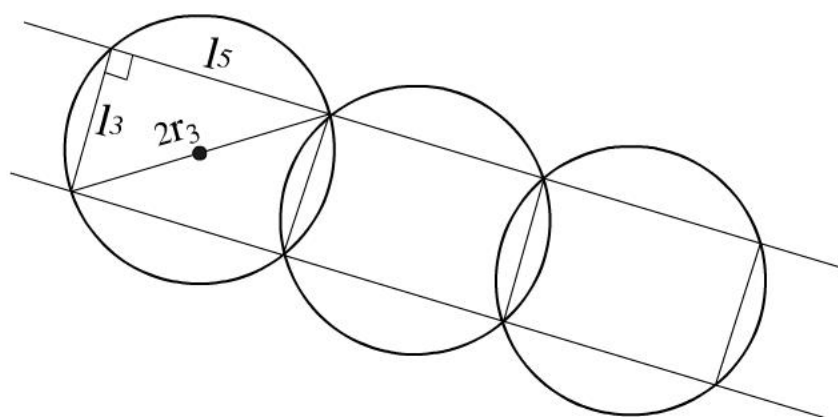


图 8

$$l_5^2 = (2r_3)^2 - l_3^2 \quad (2.8)$$



那么所需测控站的个数  $n_2 = \frac{l_4}{l_5}$  (如果  $n_2$  为小数, 应取  $n_2$  的整数部分加 1)

第二种情况: 当  $l_3$  大于  $2r_3$  且小于  $4r_3$ , 那么正弦曲线的带宽可分为两部分来计算, 可得个数  $n_3$ , 其简化模型的示意图如图 9

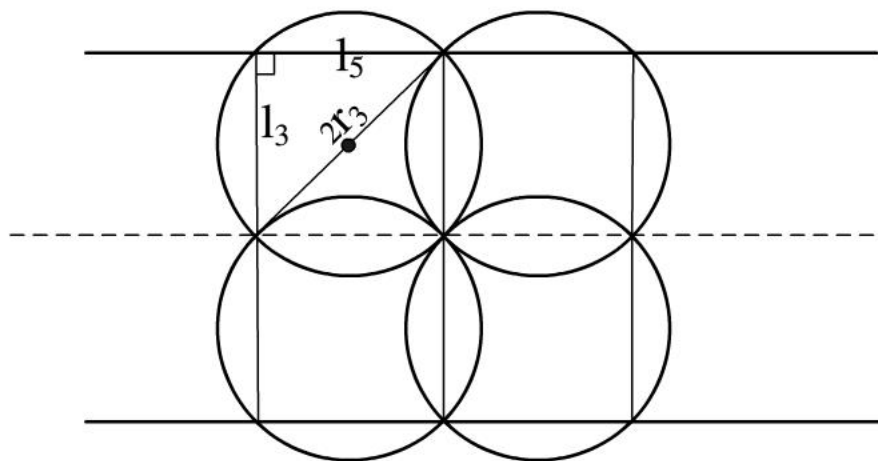


图 9

计算方法同第一种情况一样, 但要考虑是否在高纬度时的带宽  $l_3$  小于  $2r_3$ 。那么在地球上的简化模型如图 10 所示 (一部分):

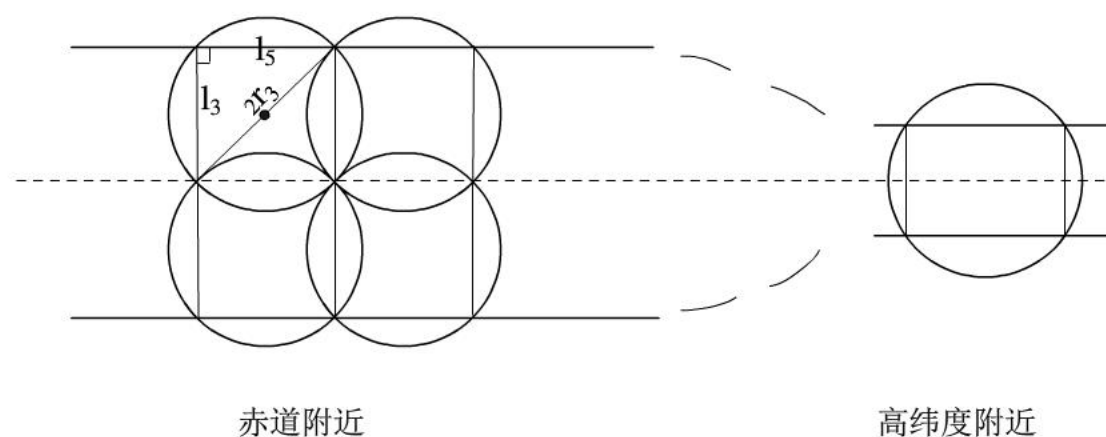


图 10

此时在  $l_3$  小于  $2r_3$  处运用反推法计算临界条件  $l_3 = 2r_3$  下运用的测控站个数在把所有需要的测控站个数相加则得到总的测控站个数。

运用数学软件 MATLAB 可计算出：当带宽和此段带状曲线的长度  $l'$  小于测控站所能覆盖圆的直径时在此段轨迹带上只需要建立一个测控站；

当  $l_3 = 2r_3$  时：欲求出弧长  $l'$  的长度，可做出飞船轨迹面的向视图图 11：

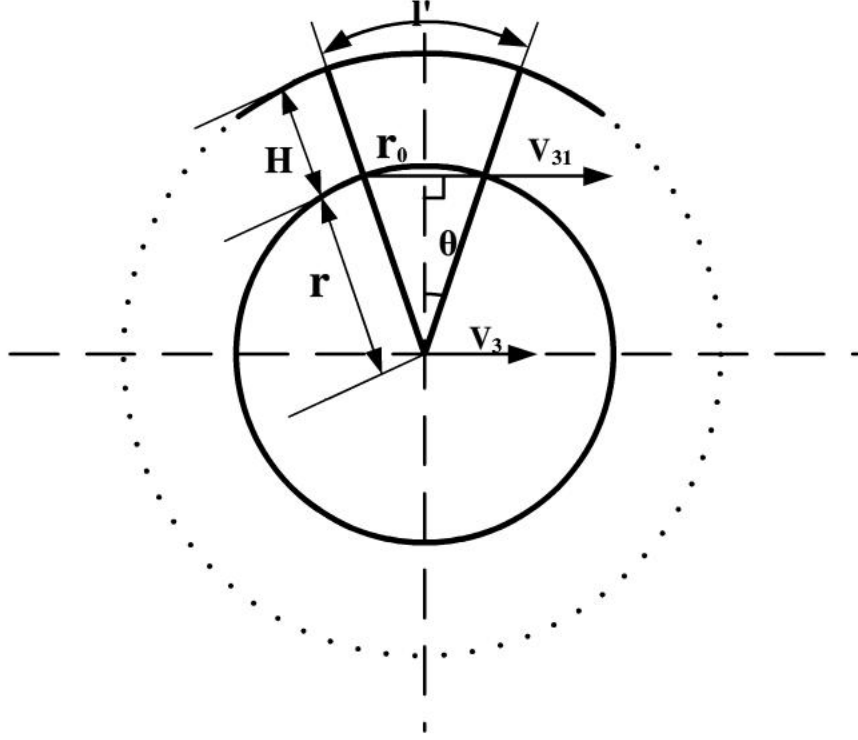


图 11

$$l_3 = n_5 v_3 T_1 \frac{H + r}{r} \quad (2.9)$$

$$v_{31} = \frac{2r_3 r}{n_5 T_1 (H + r)} \quad (2.10)$$

$$\frac{v_{31}}{v_3} = \frac{r_0}{r} = \sin \theta \quad (2.11)$$

$$\theta = \arcsin\left(\frac{v_{31}}{v_3}\right) \quad (2.12)$$

所以当带宽小于测控站所能覆盖圆的直径时所对应的长度

$$l' = 2\theta(H + r) \quad (2.13)$$

$l' < 2r_3$ ，所以在此段带宽上面只需要一组一个这样的测控站即可。又根据地球的对称性，应该需要两个这样的测控站。

当  $l' > 2r_3$  时, 需要  $n_6 = \frac{l'}{2r_3}$  (如果  $n_6$  为小数, 应取  $n_6$  的整数部分加 1); 同理

可得, 当带宽  $l_0$  为  $2r_3 \leq l_0 \leq 4r_3$  时, 可计算出每一段上需要的测控站个数  $n_7 = \frac{l_0}{2r_3}$

(如果  $n_7$  为小数, 应取  $n_7$  的整数部分加 1), 根据地球的对称性, 可计算出总的测控站个数。

即在某段长度为  $l'$  带宽为  $l_0$  的带上的测控站个数为  $n_6 n_7$

第三问: 我们以神舟七号为例, 从网站上可以查的各个测控站的具体经度和纬度<sup>[1][2]</sup> (详见附件 1)。可观察到各个测控点的经纬度可看出两个相邻很近的测控站的经度与纬度都非常相近, 所以相邻两站之间的弧长所对应圆心角可认为是经度之差, 选择相邻的喀什站与和田站, 两站的经度和纬度分别为  $(75.94^\circ\text{E}, 39.52^\circ\text{N})$ 、 $(79.94^\circ\text{E}, 37.12^\circ\text{N})$ , 由于两站几乎在同一纬度上, 且两地经

度差为  $4^\circ$ , 相差很小, 所以可近似认为两站同在北纬  $38^\circ$ , 所以可近似计算两站

之间对应应在飞船运行轨道的弧长为  $l_6 = \frac{4\pi R}{180} = 4.7075 \times 10^5 m$  (如图 12):

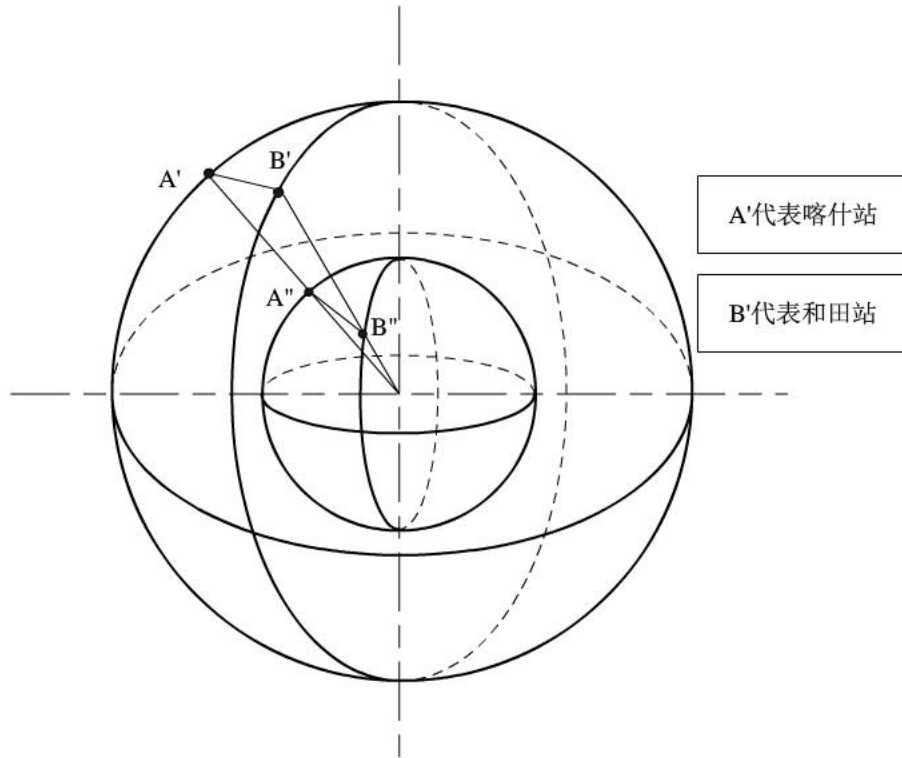


图 12

所以两站所能覆盖的最大宽度  $l_7 = 4r_3 - l_6 = 2.5709 \times 10^7 m$ , 所以可计算出两圆重

叠的可利用上述方法可求出每两个相离最近的测控站所能覆盖的带宽范围,运用 MATLAB 软件求解可得出测控站所能测控的总的面积范围。面选择相邻的喀什站与和田站,两站的经度和纬度分别为 $(75.94^{\circ}\text{E}, 39.52^{\circ}\text{N})$ 、 $(79.94^{\circ}\text{E}, 37.12^{\circ}\text{N})$ ,北

纬 $38^{\circ}$ ,所以可近似计算两站之间飞船的距离,所以可计算出两圆重叠的面积

$s_1 = 1.2841 \times 10^{14} m^2$ ,可观察到各个测控点的经纬度可看出两个相邻很近的测控站

的经度与纬度都非常相近,所以可利用上述方法可求出每两个相邻的测控站所能覆盖的带宽范围,运用 MATLAB 软件求解可得出测控站所能测控的总的面积范围。

同理可求出相邻两站所重叠的面积  $s_2 = 9.2042 \times 10^{14} m^2$ ,所有测控站所能覆盖的

总面积  $s_3 = 21.15 \times 10^{14} m^2$ ,所以所有测控站所能测控的有效面积

$s_4 = 12.3270 \times 10^{14} m^2$

我们可以把轨迹看作一个近似的矩形,矩形长为飞船转移周所走距离是

$l_8 = 7820.185 \quad 5400 \quad 422288$

宽为地球周长:

$$l_9 = 2\pi 6400 = 4.0212 \times 10^7 m \quad (3.1)$$

$$s_5 = l_8 l_9 \quad (3.2)$$

所以测控站所能测控的有效率:

$$\lambda = \frac{s_4}{s_5} 100\% = 72.59\% \quad (3.3)$$

所以测控站的测控范围是 64.82%

根据网上搜集神舟七号的相关数据得:

$$v_1 = 7820.185 m/s$$

$$T_1 = 90 \text{ min}$$

$$H = 347000 m$$

$$T = 1440 \text{ min}$$

## 六、模型的评价

(一) 优点: 1. 文章中的计算过程皆运用数学软件求解,且求解过程简洁,使得出的数据更具有说服力;

1. 本文通过对问题的充分分析,在合理的假设情况下,建立了具有科学性的方程模型;

2. 本文运用了大量的图形解释说明问题,使求解过程更直观形象,通读性强;

3. 运用本文模型求解相关问题时结果与实际情况非常吻合。

(二) 缺点：问题(2)中的第二种情况下，计算 $2r_3$ 时存在一定的误差，但误差在允许的范围内，可以接受。

## 七、模型的改进

在计算过程中我们将飞船运行的轨道看成圆形，而实际上飞船的运行轨道一般都是椭圆形的，此题可以考虑把圆形轨道换为椭圆轨道进行计算，从而使计算结果更精确，更符合实际情况。

## 八、参考文献

- 1、<http://v.8s8s.net/jingduweiduchaxun.php>, 2009年9月10日
- 2、[http://www.cmse.gov.cn/cha\\_sz7/show.php?itemid=408](http://www.cmse.gov.cn/cha_sz7/show.php?itemid=408), 2009年9月10日
- 3、<http://www.google.cn/search?hl=zh-CN&source=hp&q=%E5%9C%B0%E7%90%83%E5%8D%8A%E5%BE%84%E6%98%AF%E5%A4%9A%E5%B0%91&btnG=Google+%E6%90%9C%E7%B4%A2&aq=f&oq=>, 2009年9月10日
- 4、<http://www.google.cn/search?hl=zh-CN&source=hp&q=%E7%A5%9E%E8%88%9F%E4%B8%83%E5%8F%B7%E8%BF%90%E8%A1%8C%E5%8D%8A%E5%BE%84&aq=f&oq=>, 2009年9月10日
- 5、<http://wenwen.soso.com/z/q154815767.htm>, 2009年9月10日
- 6、阳明盛，熊西文，林建华，MATLAB 基础及数学软件，大连：大连理工大学出版社，2003年。
- 7、谭述森，卫星导航定位工程，北京：国防工业出版社，2007年。

# 附件一

序号	站名	经度	纬度
1	主场站	$116.46^{\circ} E$	$39.92^{\circ} N$
2	喀什站	$75.94^{\circ} E$	$39.52^{\circ} N$
3	和田站	$79.94^{\circ} E$	$37.12^{\circ} N$
4	东风站	$98.5^{\circ} E$	$39.71^{\circ} N$
5	青岛站	$120.33^{\circ} E$	$36.07^{\circ} N$
6	渭南站	$109.5^{\circ} E$	$34.52^{\circ} N$
7	厦门站	$118.1^{\circ} E$	$24.46^{\circ} N$
8	纳米比亚站	$17.1^{\circ} E$	$22.57^{\circ} S$
9	马林迪站	$40^{\circ} E$	$2^{\circ} S$
10	卡拉奇站	$67.03^{\circ} E$	$24.85^{\circ} N$
11	圣地亚哥站	$70.07^{\circ} W$	$33.43^{\circ} S$

## 附件二：



## 附件三：

第三问计算过程如下：

$$r=343000*\tan(87/180*\pi);$$

$$l1=18.56*\pi*6743000/180;$$

$$\cos(a)=l1/2/r;$$

$$\cos a=l1/2/r;$$

$$\sin a=(1-\cos a^2)^{(1/2)};$$

$$s1=r*l1*\sin a/2;$$

$$a=\arccos(\cos a);$$

$$s2=a*r^2;$$

$$s3=(s2-s1)*2$$