

2011 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

承 诺 书

我们仔细阅读了中国大学生数学建模竞赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们参赛选择的题号是（从 A/B/C/D 中选择一项填写）：_____ B _____

我们的参赛报名号为（如果赛区设置报名号的话）：_____

所属学校（请填写完整的全名）：_____

参赛队员（打印并签名）：1. _____

2. _____

3. _____

指导教师或指导教师组负责人（打印并签名）：_____

日期：_____ 2011 _____ 年 _____ 9 _____ 月 _____ 12 _____ 日

赛区评阅编号（由赛区组委会评阅前进行编号）：

2011 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

编 号 专 用 页

赛区评阅编号（由赛区组委会评阅前进行编号）：

赛区评阅记录（可供赛区评阅时使用）：

评 阅 人										
评 分										
备 注										

全国统一编号（由赛区组委会送交全国前编号）：

全国评阅编号（由全国组委会评阅前进行编号）：

交巡警服务平台的设置与调度

摘要

本文就某市交巡警服务平台的设置与调度建立了最短路覆盖模型、基于 0-1 动态规划的快速调配封锁模型、基于 GMCLP (generalized maximal covering location problem) 的平台选址优化与评价模型以及基于拓扑-贪婪算法的子网扩张等模型, 利用 Matlab 与 Lingo 等数学工具确定了模型的最优解, 同时给出了交巡警服务平台的设置与调度的最佳方案。

对于问题一, 本文首先利用 A 区交通网络图中各点和边的信息得到图的邻接矩阵, 并利用 Floyd 算法计算出每两点之间的最短路径。然后遍历图中每个节点, 分别将节点划分为离它最近的交巡警服务平台所管辖, 这样就得到了各个交巡警服务平台的管辖范围。

在对 A 区 13 个交通节点进行快速全封锁时, 本文利用 0-1 动态规划建立了快速分配模型, 通过约束条件和目标函数, 利用 Lingo 求出了警力最优调度方案。此时, 形成的全封锁花费的最短时间约为 8.5 分钟。

在新增服务平台完善现有方案时, 本文先利用传统最大覆盖模型 (MCLP) 将所有服务平台能在 3 分钟到达的节点划为其管辖范围。然后, 将未划分的节点能够在 3 分钟内到达的划分为一个区域, 这样能得到 4 个区域。分别在各个区域中增加一个服务平台, 使新增的平台尽可能为其他服务平台分担部分工作量。

对于问题二, 本文首先建立了基于 GMCLP 模型和 0-1 动态规划的评价与优化函数, 通过约束条件和目标函数, 利用 Lingo 求出该市所有交巡警服务平台最优设置方案, 通过将现有平台设置方案与由评价函数得到的最优分配方案进行比较发现二者吻合率接近 100%, 表明现有平台设置方案非常合理。

在对罪犯进行快速围堵时, 本文先求出了罪犯从某个路口逃脱所对应的临界速度, 然后以案发地 P 点为初始点, P 的邻接点中临界速度最小的点为父节点依次将“包围圈”夸张, 直至最大临界速度小于罪犯逃跑速度或封锁节点数多于交巡警平台数时停止扩张。同时, 也求出了实施包围的警力最优调配方案。

关键字: Floyd 算法 最短路覆盖 0-1 动态规划 GMCLP 模型 拓扑-贪婪算法

目录

摘要.....	1
1. 问题重述.....	3
2. 问题分析.....	3
3. 模型假设.....	4
4. 符号说明.....	4
5. 模型的建立与求解.....	4
5.1 基于 Floyd 算法的最短路覆盖.....	4
5.1.1 交通网络图的连接矩阵表示.....	4
5.1.2 Floyd 算法计算最短路径.....	5
5.1.3 最短路覆盖模型的建立.....	5
5.1.4 3 分钟约束条件的衡量.....	6
5.1.5 总结.....	6
5.2 基于动态分配的快速封锁调配模型.....	6
5.2.1 约束条件和目标函数的确立.....	6
5.2.2 Lingo 工具确定最优分配方案.....	7
5.2.3 总结.....	8
5.3 传统最大覆盖模型（MCLP）的建立.....	8
5.3.1 服务平台在定距离范围内的覆盖.....	9
5.3.2 均衡工作量的服务平台增设方案.....	10
5.3.3 平台增设方案的评价.....	12
5.3.4 总结.....	12
5.4 基于 GMCLP 的服务平台选址优化与评价模型.....	12
5.4.1 目标函数和约束条件的确立.....	12
5.4.2 最有分配方案的 lingo 实现.....	13
5.4.3 现有分配方案与最优解之间的比较.....	14
5.5 基于贪婪算法的子网扩张模型.....	14
5.5.1 罪犯逃跑临界速度的分析.....	14
5.5.2 以案发地点为中心的最小子网的扩张.....	15
5.5.3 最优围堵方案的生成.....	16
5.5.4 围堵方案的评价.....	16
5.5.5 总结.....	16
6. 模型评价与推广.....	16
6.1 模型的优点.....	16
6.2 模型的缺点.....	17
6.3 模型的推广.....	17
7. 参考文献.....	17
8. 附录.....	17
8.1 问题一代码.....	17

1. 问题重述

“有困难找警察”，是家喻户晓的一句流行语。警察肩负着刑事执法、治安管理、交通管理、服务群众四大职能。为了更有效地贯彻实施这些职能，需要在市区的一些交通要道和重要部位设置交巡警服务平台。每个交巡警服务平台的职能和警力配备基本相同。由于警务资源是有限的，如何根据城市的实际情况与需求合理地设置交巡警服务平台、分配各平台的管辖范围、调度警务资源是警务部门面临的一个实际课题。

试就某市设置交巡警服务平台的相关情况，建立数学模型分析研究下面的问题：

(1) 附件 1 中的附图 1 给出了该市中心城区 A 的交通网络和现有的 20 个交巡警服务平台的设置情况示意图，相关的数据信息见附件 2。请为各交巡警服务平台分配管辖范围，使其在所管辖的范围内出现突发事件时，尽量能在 3 分钟内有交巡警（警车的时速为 60km/h）到达事发地。

对于重大突发事件，需要调度全区 20 个交巡警服务平台的警力资源，对进出该区的 13 条交通要道实现快速全封锁。实际中一个平台的警力最多封锁一个路口，请给出该区交巡警服务平台警力合理的调度方案。

根据现有交巡警服务平台的工作量不均衡和有些地方出警时间过长的实际情况，拟在该区内再增加 2 至 5 个平台，请确定需要增加平台的具体个数和位置。

(2) 针对全市（主城六区 A, B, C, D, E, F）的具体情况，按照设置交巡警服务平台的原则和任务，分析研究该市现有交巡警服务平台设置方案（详见附件）的合理性。如果有明显不合理，请给出解决方案。

如果该市地点 P（第 32 个节点）处发生了重大刑事案件，在案发 3 分钟后接到报警，犯罪嫌疑人已驾车逃跑。为了快速搜捕嫌疑犯，请给出调度全市交巡警服务平台警力资源的最佳围堵方案。

2. 问题分析

对于问题一，在为各交巡警服务平台分配管辖范围时，需使得交巡警尽量能在 3 分钟到达事发地。也就是说，需要找出各个交叉路口的节点到其被管辖的交巡警服务区距离应该最短。据此，我们先根据附件 2 中交通网络的数据信息，构造出交通网络的邻接矩阵 A，然后我们以各个交叉路口的节点为出发点，利用弗洛伊德算法求出该点到各个交巡警服务平台之间的最短路径，则该交叉路口属于其对应的最近交巡警服务平台所管辖。最后，将交巡警所管辖的各个节点连接在一起就构成了该交巡警管辖范围。

当重大事件发生时，20 个服务平台的交警在对进出该区的 13 条交通的出入节点实现快速全封锁时，我们从动态分配入手。首先，我们找出满足实现封锁的约束条件和目标函数，然后我们利用 Lingo 工具来计算当对 13 条交通出入节点成功实施封锁时服务平台的最佳分配方案。

在增设服务平台时，必须考虑两方面因素：一是尽量使各个服务平台的工作量达到均衡；二是出警时间尽量少于 3 分钟。不妨以 3 分钟为分界点，找出各个平台能够在 3 分钟之内到达的节点，这时，剩余的节点即为不满足“3 分钟可达条件”的。然后，将剩余节点中能够在 3 分钟之内相互到达的点划为一块，分别

在各区域之间合理地添加一个服务平台,同时使得各个服务平台之间的工作量相对平衡。

对于问题二,通过建立评价与优化函数实现对方案合理性的实现,评价与优化函数包括目标函数和约束条件两个部分,利用 Lingo 软件解得对平台的最优设置方案,然后将现有平台设置方案与通过评价模型解得的最优分配方案进行比较,得到评价结果。

在调用全市警力快速搜捕犯罪嫌疑人时,所采用的方案必须使抓到犯罪嫌疑人的可能性最大,且尽可能满足抓捕时间较少,警力资源分配较合理等综合因素。对于罪犯,若逃跑速度大于一定值后,是有可能逃出去的,若逃跑速度小于一定值,则不可能逃走,也就是说,罪犯从各个路口逃走有一个对应的临界速度。基于该临界速度,我们先构造以案发地 P 点及其相邻点为封锁点的“包围圈”,然后以 P 点所有邻接点中临界速度最小的点作为父节点进行扩张,按该原则将“包围圈”进行递归扩张,直至出现封锁点的数目多于交巡警服务平台或某点的临界速度小于罪犯逃跑速度时终止扩张,此时就得到了最佳“包围圈”。同时,也得到了交巡警服务平台的最佳调度方案。

3. 模型假设

- (1) 假设警车速度不变
- (2) 假设罪犯逃跑速度为一定值
- (3) 不考虑交巡警的办案时间
- (4) 假设增设服务平台时,已设服务平台不做改变
- (5) 假设全市各区都是独立管理,不进行跨区管理
- (6) 假设每一个路口节点只能归属于一个服务平台管理
- (7) 假设平台出警时自动智能选择最短路径到答案地点
- (8) 假设交通网络图中的路口节点与服务平台都是点,道路都是直线段
- (9) 假设每个区的人口密度均匀,即为人口总人数与区域面积之比
- (10) 进行区域封锁时,服务平台警力只用来封锁路口,不用到达案发现场

4. 符号说明

i, j : 对应附件中给出的节点编号

A : 交通网络图所对应的邻接矩阵

R : 最短路矩阵

X : 服务平台与需要封锁节点之间的对应分配矩阵

v_i : 交通网络图中的各个节点

$flag$: 交巡警 3 分钟之内能否到达节点的标识符 (1 表示能, 0 表示不能)

v : 警车的行驶速度 (60km/h)

$v_{\text{逃跑}}$: 罪犯逃跑的速度

5. 模型的建立与求解

问题一

5.1 基于 Floyd 算法的最短路覆盖

5.1.1 交通网络图的连接矩阵表示

根据交通网络图 G 中各个点 v_i ($i = 1, 2, 3$) 的坐标, 求出相邻点之间的距离。若两点之间存在边, 则将该两点之间距离作为该无向带权图对应边的权值, 而将不相邻的两点之间的距离用 ∞ 表示, 据此, 我们有如下无向图的邻接矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

其中,

$$a_{ij} = \begin{cases} d_{ij}, & v_i \text{ 与 } v_j \text{ 之间相邻} \\ \infty, & v_i \text{ 与 } v_j \text{ 之间不相邻} \end{cases} \quad (i, j \leq n)$$

在 A 区交通网络中, 我们得到的是一个 92 阶邻接矩阵。

5.1.2 Floyd 算法计算最短路径

在得到了 92 阶矩阵的前提下, 我们利用 Floyd 算法求出每两个点之间的最短路径, 算法具体步骤如下:

Step1 遍历邻接矩阵中各个元素 (即遍历交通网络图中各对顶点)

Step2 对于每一对顶点 i 和 j , 看看是否存在一个顶点 k 使得

1 $d_{ik} + d_{kj} < d_{ij}$, 如果存在, 则更新邻接矩阵

Step3 不断的更新邻接矩阵到不能再更新为止, 此时得到的矩阵中的元素

1 即表示 i 到 j 之间的最短路径

5.1.3 最短路覆盖模型的建立

在判断各个交叉路口节点该划为哪个交巡警服务平台管辖范围时, 我们采用的是 KCP(kids choose parent), 即节点 “选择” 服务平台的方式。

以某一个节点为出发点，利用 5.1.2 中得到的矩阵，我们可以找到距离该节点最近的服务平台。如果所找到的最近服务平台为一个，直接将该节点划分为该服务平台所管辖。如果所找到的最近服务平台为多个，则将其划为管理节点相对较少的服务平台所管辖，这样不仅考虑到了突发事件时，尽量能在 3 分钟内交巡警到达事发地的约束条件，也考虑到了使服务平台工作量相对均衡。

根据以上模型，利用 Matlab 可以画出各个服务平台所管辖的范围，如图 1 所示：

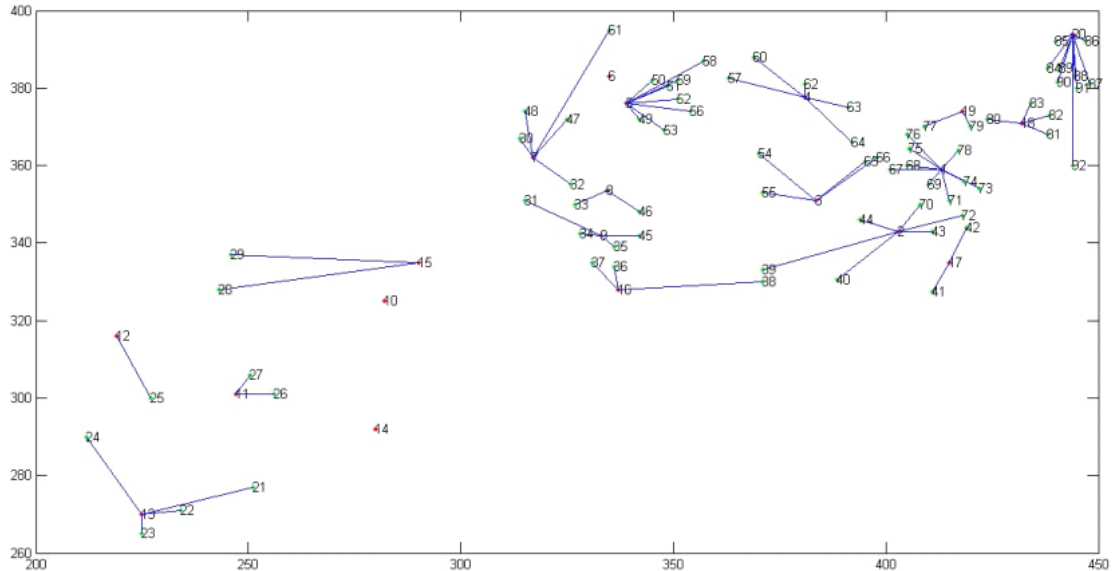


图 1 各个服务平台所管辖范围的划分图

5.1.4 3 分钟约束条件的衡量

将各个服务平台的管辖范围确定后再考察服务平台是否能够在三分钟内到达辖区内每个路口节点。如果服务平台能够在 3 分钟之内到达节点，我们将该节点标记为 1，如果不能在 3 分钟之内到达的，我们标记为 0。据此，我们得到以下约束条件：

$$\text{flag} = \begin{cases} 1, & d \leq 3\text{km} \\ 0, & d > 3\text{km} \end{cases}$$

其中 d 表示节点到其被管辖的服务平台之间的距离。

利用 Matlab 编程，我们计算出，编号为 28、29、92 等 6 个交叉路口节点已超出其对应服务平台所管辖的 3 分钟距离，而且编号为 10 和 14 的服务平台辖区内只有自身一个节点。

从分配方案中，我们能够很容易看出，这样的区域分配会产生有些地方的出警时间过长以及各个服务平台之间的工作量不均衡的问题。但这种方案在只考虑交巡警尽量能够在 3 分钟内到达事发地的情况下还是比较合理的。

5.1.5 结论

综上所述，利用 Floyd 求任意两点之间最短路径的算法，并按照各个交叉路口节点归距它最近的服务平台所管辖的原则，我们求出了各个服务平台所管辖的交叉路口节点，所有管辖的节点构成了该服务平台的管辖范围。

5.2 基于 0-1 动态分配的快速封锁调配模型

将 20 个服务平台分配给 13 个封锁口，且要求满足所用时间最少，这是一个典型的动态分配问题。

5.2.1 约束条件和目标函数的确立

在 5.1 中我们已经利用 Floyd 算法求出了最短路矩阵 R ，其中 r_{ij} 表示编号为 j 的服务平台到编号为 i 的路口之间的最短路径。

首先，我们建立每两个顶点之间最短用时的矩阵 T ，矩阵中 t_{ij} 表示编号为 j 的服务平台到编号为 i 的交叉路口节点的最短用时（单位：分钟）。

然后，我们建立服务平台的分配矩阵 X ，矩阵中的元素 x_{ij} 表示安排编号为 j 的服务平台去封锁编号为 i 的路口。其中 x_{ij} 的取值只能为 0 或 1，即：

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{安排编号为 } j \text{ 的服务平台封锁编号为 } i \text{ 的路口} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

根据题目中一个平台的警力最多封锁一个路口的要求，我们有以下约束条件：

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{20} x_{ij} = 1 \\ \sum_{i=1}^{13} x_{ij} \leq 1 \end{cases}$$

另外，据运动学公式，我们可以找到时间 t 与距离 r 之间的关系，即

$$t_{ij} = \frac{r_{ij}}{v}$$

即

$$t_{ij} = \frac{r_{ij} \times 0.1\text{km}}{60\text{km/h}} \times 60\text{min/h} \times x_{ij}$$

要实现对该区 13 个交通出入节点实现全封锁，且花费时间最短，我们得到以下目标函数：

$$z = \max \{t_{ij}\}$$

因此只需要求得 13 个出入节点实现全封锁时警力到达出入节点的最短路径中的最大值即可确定 z ，也就可以确定调配方案。

5.2.2 Lingo 工具确定最优分配方案

为了成功将 20 个服务平台分配给 13 个交通出入节点，且得到费的时间最小的最有分配方案。根据以上约束条件和目标函数，我们采用 Lingo 工具实现动态分配。

根据 Lingo 运行结果，可以得到分配矩阵

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由该矩阵元素中值为 1 的元素就能看出各个出入节点与调配警力的服务平台之间的对应关系，即得到如下最优方案：

表 1 对 A 区 13 个交通出入节点实施封锁的最佳调度方案表

编号	交巡警服务平台编号	服务平台应封锁的节点编号
1	12	12
2	9	14
3	4	16
4	13	21
5	14	22
6	11	23
7	10	24
8	6	28
9	15	29
10	8	30
11	3	38
12	6	48
13	2	62

另外，基于该分配方案，我们同时也能够求出该种方案下将 13 条交通出入节点成功进行封锁所花费的时间为 8.5 分钟。

5.2.3 总结

综上所述，我们通过建立基于动态分配的快速封锁调配模型，利用 Lingo 工具求出了动态分配 20 个服务平台去封锁 13 个交通出入节点的最优分配方案，在该种方案下所花费的时间为 8.5 分钟。

5.3 传统最大覆盖模型（MCLP）的建立

为了动态的增设 2-5 个平台来缓解当前服务平台工作量不均衡和部分地方出警时间过长的现状，我们先建立广义最大覆盖模型计算出各个服务平台能够在允许时间内到达的点，然后再将剩余的不能及时到达的点做相应处理，为其分配一定数量的服务平台。

5.3.1 服务平台在定距离范围内的覆盖

根据交通网络的图表信息，我们先给出定距离下，交巡警服务平台在允许时间内所能覆盖的最大范围。

当交巡警服务平台要求在 3 分钟以内赶到所管辖的各点时，所有距离该平台的距离 $d \leq 3\text{km}$ 的交叉路口节点都应属于它的管辖范围。据此，利用 5.1 中的 Floyd 算法，我们用 Matlab 画出各个平台和它所管辖的区域，如图 2：

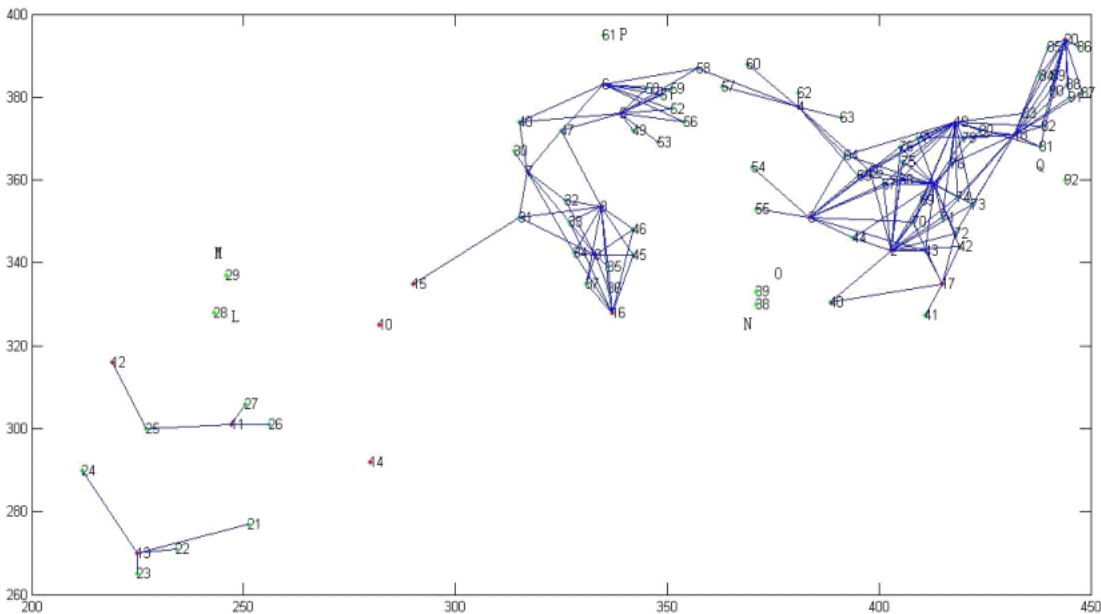


图 2 服务平台在 3 分钟以内所能到达的点的分布图

从图中，我们可以直观地看出点 L（编号为 28）、M（编号为 29）、N（编号为 38）、O（编号为 39）、P（编号为 61）、Q（编号为 92）不能被任何一个服务平台所管辖，也就是说，没有一个服务平台的交警能够在 3 分钟之内到达 L、M、N、O、P、Q 等六个交通节点。

现在，我们放宽时间对服务平台的管理，将允许的出警时间增大至 3.5 分钟，服务平台能够在 3.5 分钟以内到达交通节点的分布图如图 3

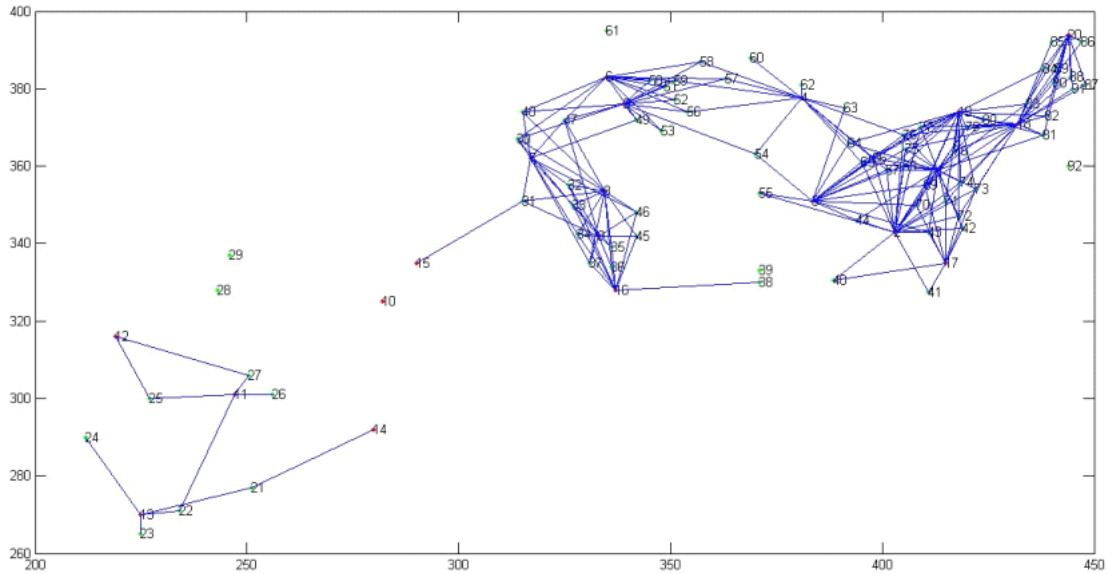


图 3 服务平台在 3.5 分钟以内所能到达的点的分布图

此时，从图中可以看出 L（编号为 28）、M（编号为 29）、O（编号为 39）、P（编号为 61）、Q（编号为 92）仍不能在被管辖。

比较图 2 和图 3，我们可以看出即使允许的出警时间由 3 分钟增大到了 3.5 分钟，但是能够被管辖的节点却只增加了一个（N 点）。同时，能够被两个服务区同时管辖的节点数增多。于是，我们得出以下结论：

尽管增大允许的出警时间能够让所有节点都能在至少一个服务区管辖范围内，但是这种增大出警时间去让更多的节点被管辖时不值得的（例如，允许出警时间增大了 0.5 分钟，而能够被管辖的节点却只增加了一个）。

所以，我们应该将平台出警时间定在 3 分钟以内，从增加服务平台来解决几个不能被管辖的节点。

5.3.2 均衡工作量的服务平台增设方案

在 5.3.1 中六个未被管辖的节点附近，利用 Floyd 算法分别找出距离该点的距离 $d \leq$ 的节点，将所有满足该条件的点划分为一块，得到图 4 所示分布图：

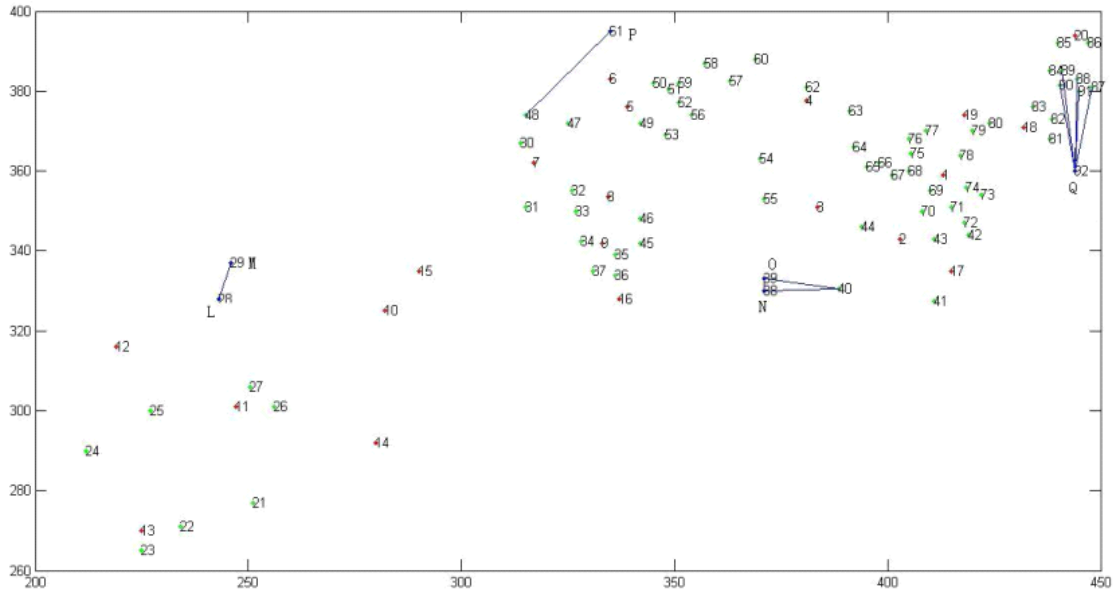


图 4 警察 3 分钟内不可达的点的划分情况

从图中我们可以很明显看出，剩余的未被管辖的点主要分布在四个不同的区域，我们考虑新增 4 个服务平台来管辖它们。下面对各个区域进行分别讨论：

(1) 对于 L、M 两点构成的区域，由于只存在两个相关联的节点，而不涉及到其他已被管辖的节点，因此将新增节点设在 L、M 都一样。

(2) 对于 N、O 及编号为 40 的节点构成的区域，当新增服务平台设在 N 点或 O 点时，由图 2 知该平台最多只能管辖 N、O 和编号为 40 的节点。当新增服务平台设在编号为 40 的节点时，此时新增服务平台所能管辖的范围如图 5：

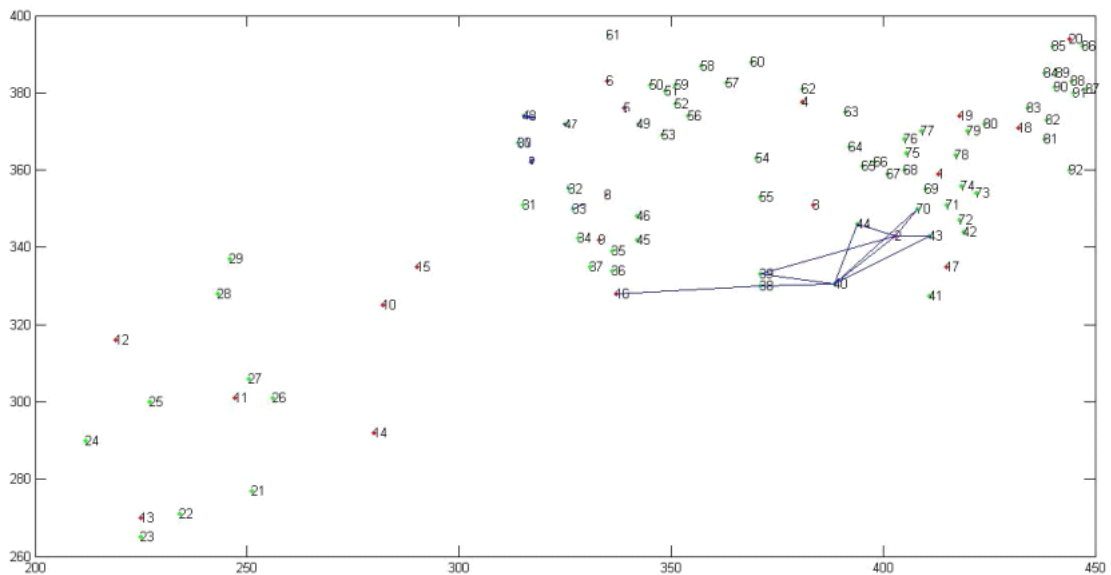


图 5 新增服务平台设在编号为 40 的节点处所能管辖的范围

从图中可以看出，当新增服务平台设在编号为 40 的节点处时，除了能够管理 N、O 两个节点以外，该服务平台还能够和其他服务平台共同管理一些节点。也就是说，该服务平台同时能够为其他服务平台分担一些工作量。所以在编号为 40 的节点处新增一个服务平台更能满足题目的要求。

(3) 对于 P 点和编号为 48 的节点，当新增服务平台设在 P 点时，由图 2 知该平台最多只能管辖 P 和编号为 48 的节点。当新增服务平台设在编号为 48 的节点处时，此时新增服务平台所能管辖的范围如图 6:

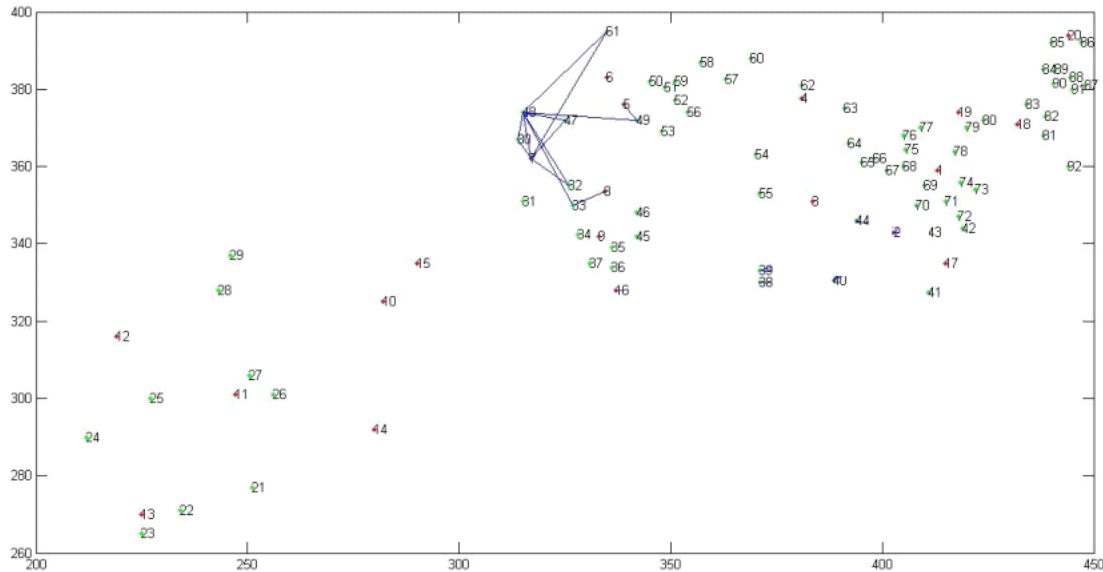


图 6 新增服务平台设在编号为 40 的节点处所能管辖的范围

从图中可以看出，当新增服务平台设在编号为 48 的节点处时，除了能够管理 P 节点以外，该服务平台还能够和其他服务平台共同管理一些节点。也就是说，该服务平台同时能够为其他服务平台分担一些工作量。所以在编号为 48 的节点处新增一个服务平台更能满足题目的要求。

(4) 对于 Q 点和编号为 87、88、89、90、91 的节点，由图可以清晰的看出，出 Q 点外的其他各点相距很近，只有编号为 92 的节点被孤立出来，为了能尽量缩短服务平台的出警时间，显然这处所要增加的服务平台应该建立在整个区域的重心位置上，即在 87 节点处增设一个节点可以达到局部最优。

5.3.3 平台增设方案的评价

优点：服务平台作为应急设施，最优先考虑的应该是应急时间的满足，其次才是对工作量的均衡。该模型就是建立在优先考虑出警时间的原则上，因此对现实现象具有一定的意义；根据该区节点的实际分布特征，采用分区域求局域最优解，很大程度上简化了问题，提高了解决问题的效率，并且能够得到较优解

局限：由于将工作量的均衡作为第二参考量，只作用在对辖区的重新划分上，因此，在对工作量均衡的优化作用上，该模型的效果不是很明显，方差由原先的 8.4 仅仅减少到 6.5，没有达到最优，或接近最优的状态；另外，根据原有节点的分布特征，采用 分区求解的方法，虽然求得局部最优解，但是无法保证是全局最优解。

问题二

5. 4 基于 GMCLP 的服务平台选址优化与评价模型

评价是决策过程中重要的环节，通过评价函数得出对现有方案的评价结果可以帮住决策者更快寻找到最优解。依靠 lingo 软件优势，本文直接将优化函数与评价模型合一化。根据假设，本文将从各个区的服务平台设置入手，进行优化与评价。

5.4.1 目标函数和约束条件的确立

在 5.1 中我们已经利用 Floyd 算法求出了最短路径矩阵 I ，其中 I_{ij} 表示编号为 j 的服务平台到编号为 i 的路口之间的最短路径， N 代表对应各区所包含的所有节点数目。为了便于讨论，假设在进行优化过程中，各个区内包含的服务平台个数不变，设为 n 。

首先，我们建立服务平台设置行向量 P ， P_i 表示对应区号，取值为 A,B,C,D,E,F，向量中的元素 P_i 表示在 P 区的第 i 个（由于节点是统一编号的，为了便于分区讨论，需要重新按照自 1 开始的编号进行讨论，本小节中所指的编号为 i 的节点均表示 P 区的第 i 个节点，下文中不在进行说明）路口节点设置服务平台。其中 P_i 的取值只能为 0 或 1，即：

$$P_i = \begin{cases} 1, & \text{在该区的第 } i \text{ 个节点处设置服务平台} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

然后，根据上文中的假设，我们有以下约束条件：

$$\sum_{i=1}^N P_i = n$$

其次，由于每个节点的案发次数与人口密度都是不同的，而且，根据事实现象，我们得到“案发次数与人口密度乘积越大的节点，被服务平台覆盖的欲望越大”，据此，我们定义了一个欲望参数 $a_j = (\text{第 } j \text{ 个节点案发次数} * \text{人口密}$

作为节点对自身希望被服务平台最大程度覆盖的欲望的刻画。显然，欲望参数越大对覆盖程度的要求越大，即要使得欲望参数越大的节点距离服务平台的距离越小才能使得覆盖程度趋向于更大，即可以总结为欲望参数与节点距离平台距离成负相关关系，为了简便，我们取二者的乘积的倒数作为平台对节点覆盖程度的刻画，很容易得出，二者乘积倒数越小说明服务平台对该节点的覆盖程度越大，因此，我们可以得到以下优化模型目标函数：

$$z = \max \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{|P_j - P_i|}{r_{ij} * a_j}$$

其中，设置 $|P_j - P_i|$ 是为了消除第 j 个节点与第 i 个节点同为服务平台或者同为普通路口节点这两种情况对目标函数的影响。

5.4.2 最有分配方案的 lingo 实现

为了得到每个区服务平台的最优解，根据前文给出约束条件和目标函数，利用 lingo 软件进行求解，运行结果如下：

A 区:

Local optimal solution found.

Objective value: 15.83473

Extended solver steps: 0

Total solver iterations: 4

Variable	Value	Reduced Cost
P(1)	1.000000	-1.457867
P(2)	1.000000	-1.005753
P(3)	1.000000	-0.9012698
P(4)	1.000000	-1.041468
P(5)	1.000000	-0.9239128
P(6)	1.000000	-0.6795418
P(7)	1.000000	-0.7635442
P(8)	1.000000	-0.8359406
P(9)	1.000000	-1.077754
P(10)	1.000000	-0.4352246
P(11)	1.000000	-0.3688796
P(12)	1.000000	-0.2704790
P(13)	1.000000	-0.3708084
P(14)	1.000000	-0.3192072
P(15)	1.000000	-0.4352532
P(16)	1.000000	-0.9190924
P(17)	1.000000	-0.7131291
P(18)	1.000000	-1.136430
P(19)	1.000000	-1.184241
P(20)	1.000000	-0.9949340
P(21)	0.000000	0.1664634
P(22)	0.000000	0.1905089

即说明

$$P_{92}^A = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \dots 0 \dots 0);$$

同理可得:

$$P_{73}^B = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \dots 0 \dots 0)$$

$$P_{154}^C = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \dots 0 \dots 0)$$

$$P_{52}^D = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \dots 0 \dots 0)$$

$$P_{103}^E = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \dots 0 \dots 0)$$

$$P_{108}^F = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \dots 0 \dots 0)$$

5.4.3 现有分配方案与最优解之间的比较

将 5.4.3 中的得到的最优解与题目中已给的现行方案进行比较，很容易得出结论：现行方案与最优解完全吻合，即按照给定的优化模型，现行方案的合理性为 100%，说明现行方案非常合理。

5.4.4 对优化与评价模型的评价

优点：该模型是建立在 GMCLP 的基础上的优化模型，经过了很多现实的检验，因此基本方向是正确的；依靠 Lingo 软件的强大功能，将优化模型与评价模型整合为一，在建立评价模型的同时，也得出了最优解，不仅便于模型测试，而且便于检验与对方案合理性的评价。

局限：该模型是建立在“假设各区人口密度均匀”的基础上的，但是显然该假设与现实状态不符，因此，该模型存在某种程度上的不完善。

5.5 基于拓扑-贪婪算法的子网扩张模型

5.5.1 罪犯逃跑临界速度的分析

假设罪犯逃跑速度为 $v_{逃跑}$ ，显然，当罪犯逃跑的速度远大于警车速度，即

$v_{逃跑}$ 时，警察是无法抓到罪犯的，只有当罪犯逃跑的速度小于一定的值，即

$v_{逃跑} < a$ （ a 为一常数）时，警察才有可能抓到罪犯。可以想象最后确定的方案

一定可以在某个临界速度下把所有低于这个临界速度的罪犯围堵住，所以在最后的方案中警察只要直接赶到他对应的地点。

定义 1：临界速度 首先由假设 2，我们知道 a 为一正常数，不妨将罪犯

逃跑速度 $v_{逃跑}$ 从 0 开始不断增加，当速度逐渐增大到一个值时， $v_{逃跑} > a$ ，

此时警察是不能抓到罪犯的。记录此时罪犯的速度 $v_{临界}$ ，则 $v_{临界}$ 就是罪犯从该节点逃脱

警察“包围圈”的所对应的临界速度。记为 $v_{临界}$ ，

同理，我们还可以求出罪犯到达图上任意一点的时间恰好与警察到达那一点的时间相同的。那么最后形成的包围圈上的点也都对应了罪犯与警察同时到达的临界速度。可以想象，如果罪犯的速度小于这个包围圈上的最新的临界速度，则无论这个罪犯的逃跑路线如何，他都不可能逃脱。

下面来确定任意节点处的临界速度。

在 P 点以外，整个交通图以内任取一点 E ，记距离 E 点最近的服务平台为 C ，如图 7 所示：

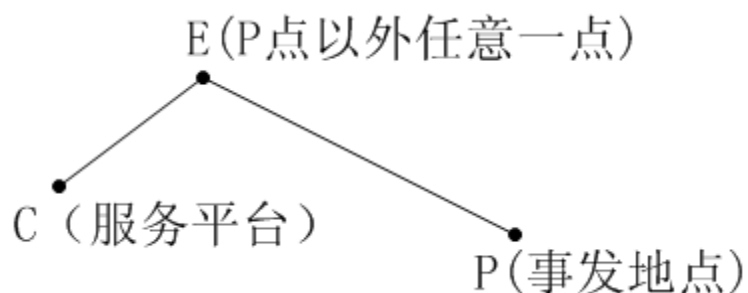


图 7 罪犯从任意一点逃脱示意图

首先，要想使罪犯不能逃脱，易得

$$t_{\text{罪犯}} \geq t_{\text{警察}} + 3/60$$

那么，罪犯要从任意的一点 E 逃脱，其逃脱的临界速度是可以确定的：

$$v_{\text{临界 E}} = \frac{S_{\text{PE}}}{t_{\text{罪犯}}} \leq \frac{S_{\text{PE}}}{t_{\text{警察}} + 3/60h}$$

取

$$v_{\text{临界 E}} = \frac{S_{\text{PE}}}{t_{\text{警察}} + 3/60h}$$

也就是说，罪犯在整个交通网络图中任意一点处要逃脱所对应的临界速度是可以由该点到 P 点的距离和警察到该点所花费的时间所确定的。

所以，罪犯从任意一个节点处逃脱应满足的条件是：

$$v_{\text{逃跑}} > v_{\text{临界 E}}$$

其中， v 表示罪犯从任意点 E 逃跑时所对应的临界速度。

另外，罪犯的从某点逃跑的成功与否只与罪犯在该点所对应的临界速度有关。

5.5.2 以案发地点为中心的最小子网的生成

为了简化分析，假设罪犯从 P 点逃跑的方向有五种，各条逃跑路径的第一个交通节点分别标记为 B、D、H、I、J。P 点附近的交通网络图简化如图 8：

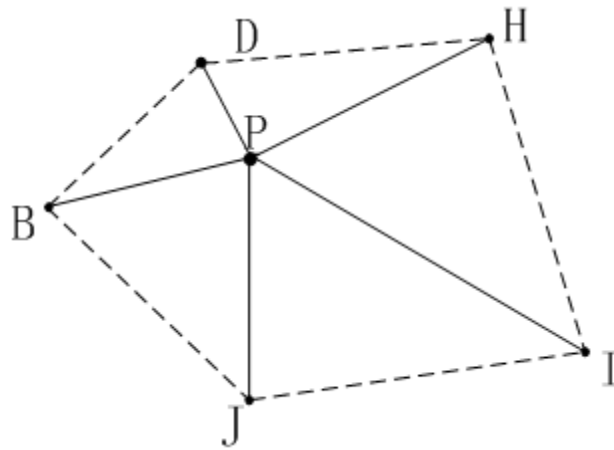


图 8 P 点附近的交通网络简化图

由 5.5.1 知，

$$v_{\text{临界 } D} = \frac{S_{PD}}{t_{\text{警察}} + 3/60h}$$

且罪犯若要从 D 点逃脱，必须满足 $v_{\text{逃跑}} > v_l$

同理，我们还可以求出罪犯从 B、H、I、J 各点逃跑所对应的临界速度 v_p

v_l 、 v 和 v_o 。

找出 v_l 、 v_l 、 v_l 、 v 和 v 等各个临界速度中的最小值

$v_{\text{临界 } n}$ 和最大值 $v_{\text{临界 } n}$ ，我们可以得到如下结论：

- (1) 当罪犯逃跑的速度 $v_{\text{逃跑}} < v_{\text{临界 } \min_1}$ 时，罪犯不可能逃跑
- (2) 当罪犯逃跑速度 $v_{\text{逃跑}} > v_{\text{临界 } \max_1}$ 时，罪犯从任意条路径都有可能逃跑
- (3) 当罪犯逃跑的速度 $v_{\text{临界 } \min_1} < v_{\text{逃跑}} < v_{\text{临界 } \max_1}$ 时，罪犯有可能逃

为了使警方最大可能地抓到犯罪嫌疑人，我们应该处理（2）（3）两种情况，使得即使 $v_{\text{逃跑}} > v_{\text{临界}n}$ ，罪犯也不能逃出“包围圈”。为了实现这种目的，我们需要对现有的第一层“包围圈”进行扩张。

5.5.3 以案发地点为中心的最小子网的扩张

引理 1: 在对以 P 点为中心形成的子网的扩张中，可扩张的节点（即下一个父节点）一定是同类节点中对应的临界速度最小的那个节点。

证明: 在图 8 中，我们假设 P 的所有邻接节点中，对应临界速度最小的是 D 点。此时罪犯只有从 D 点逃脱或者不从 D 点而从其他节点中逃脱两种可能。

假设罪犯从 D 点逃脱，那么“包围圈”应该以 D 点为父节点扩张。假设罪犯 B、H、I、J 中任意一点逃脱，由于 B、H、I、J 点处对应的临界速度都比 v_D

大，如果罪犯能够从 B、H、I、J 中任意点逃脱，那么他一定能从 D 点逃脱。所以，我们只需以下一个相邻节点中临界速度最小的点作为父节点不断地扩张“包围圈”即可。将 D 点推广到整个以 P 点为中心的交通网络图中，原命题得证。

为了保证算法的每一步形成的包围圈都是闭合的，可以从初始状态为闭合的最简单封闭圈出发，算法的每一步都把这个包围圈中临界速度最小的点向外扩展，如果与它相邻的结点的临界速度都比它本身的临界速度都小的话，就可以向外扩展；否则算法结束。

根据引理 1 及相应的假设条件，我们得到图 8 所示的第一层“包围圈”扩张后的可能图形如图 9 所示：

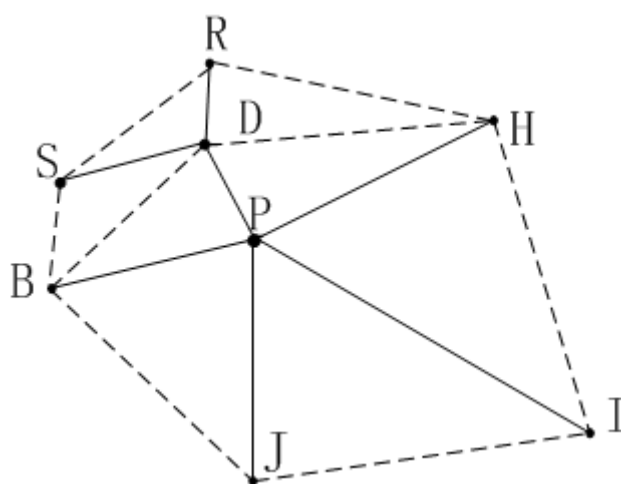


图 9 “包围圈”在 D 点处扩张后的图形

在“包围圈”不断的扩大中，由于警力资源的有限，我们有约束条件一：包围圈的节点数 $N_{\text{包围圈}}$ 不超过服务平台的个数 $N_{\text{服台}}$ ，即

$$N_{\text{包围圈}} \leq N_{\text{服务平台}}$$

又由于罪犯在逃脱各个节点时，罪犯逃脱所到节点处的临界速度是不断变化的，罪犯要想逃脱该节点，则其逃跑速度必须大于该节点处逃跑的临界速度。

换个角度，对于警察而言，要想抓住罪犯，我们有约束条件二：罪犯在任意点处的速度 $v_{逃跑}$ 都小于该点处的临界速度 $v_{临界}$ ，即

$$v_{逃跑} \leq v_{临界}$$

综上，我们可以得到“包围圈”停止扩张的终止条件，即当 $N_{包围圈} \geq N_{临界}$

或 $v_{临界} \geq$ 时，停止扩张“包围圈”。此时，组成“包围圈”的各个顶点即为警方需要封锁的节点。

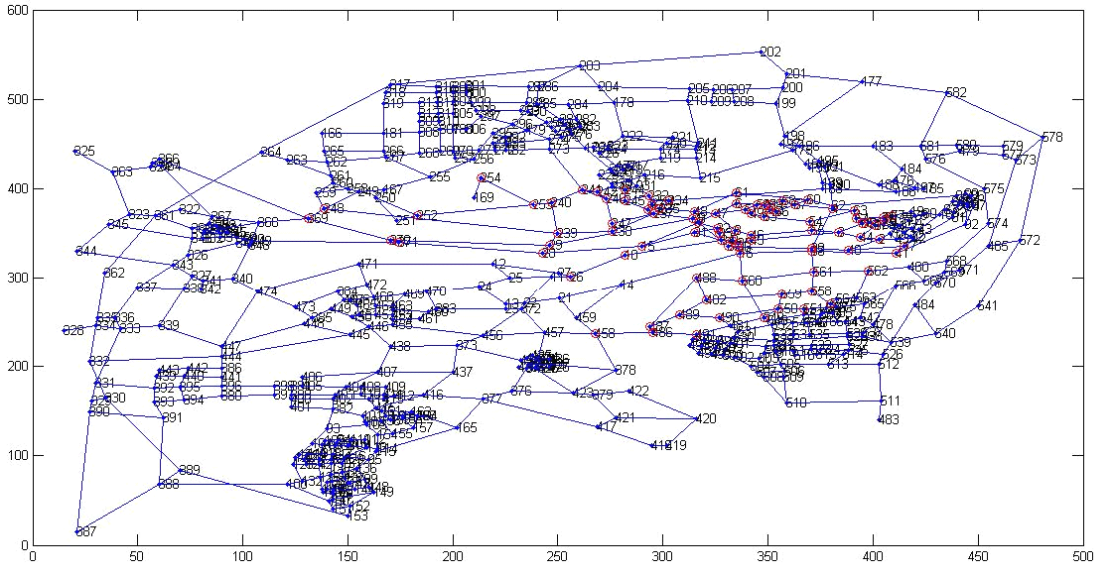


图 10 该图是用拓扑-贪心算法中计算过的点。

5.5.4 最优围堵方案的生成

因为距离逃犯比较近的节点处的临界速度很小，在开始的时候，当“包围圈”逐渐增大的时候，临界速度必然增大；而当“包围圈”增加到一定程度的时候，“临界速度”要么继续增大，要么开始减小。如果临界速度在包围圈的节点到达 80 个之前就开始减小，则临界速度的极大值对应的“包围圈”是最好的。如果在包围圈的节点数到达 80 的过程中，临界速度不断增大，则最好的包围圈只有可能是封闭出城路口。

所以可以用拓扑-贪婪算法的方式求出可能的最大临界速度，然后与直接封闭出城道路的时间相比较，取临界速度最大的即可。

5.5.5 围堵成功的特殊调配方案

假设不进行跨市围堵,那么该市所有交巡警平台能够围堵到罪犯而形成的最大“包围圈”就是该市 17 个出入节点,即若在这种情况下都无法围堵罪犯,那么就不可能在市内围堵成功。

该算法与 5.2 相同,根据前文假设,各个区之间进行独立管理,那么在对 17 个全市的出入节点进行全封锁时,各个区只需要考虑对位于该区内部的全市的出入节点进行封锁即可。那么,只需要根据 5.2 的算法求得每个区内对这些出入节点实现封锁的最大时间,然后在所有的最大时间内再选择出最大时间,该时间即为对全市形成全封锁的最优时间。利用 Lingo 软件,可以得到,对该市 17 个出入节点形成全封锁的最优时间为 19 分钟。

为了保证围堵罪犯成功,只需要使得在这 19 分钟内(根据题意有,罪犯已经逃跑 22 分钟),罪犯仍然没有逃出该市即可。那么,综上所述,围堵罪犯成功时的临界 为罪犯到达该市出入节点的最短距离与 21 分钟的比值。通过计

算可以得到,罪犯能够逃离该市的临界速度为 84km/h,即在这种情况下,只要罪犯的速度小于 84km/h,就会被围堵在该市内部,无法逃离该市。

为了保证围堵罪犯成功,只需要使得在这 19 分钟内(根据题意有,罪犯已经逃跑 22 分钟),罪犯仍然没有逃出该市即可。

围堵罪犯成功时的临界 为罪犯到达该市出入节点的最短距离与 22 分钟的比值。通过计算可以得到,罪犯能够逃离该市的临界速度为 84km/h,即在这种情况下,只要罪犯的速度小于 84km/h,就会被围堵在该市内部,无法逃离该市。

而在用拓扑的贪婪算法中得到的最终结果是 124,需要封堵的节点编号为
489 26 44 65 64 66 67 76 63 54 53 75 77 458 491 557 559
550 490 551

所以,采用拓扑-贪婪算法的方案。

6. 模型评价与推广

6.1 模型的优点

- (1) 模型中采用了 Floyd 算法求每两点之间最短路径,理论基础成熟,正确度较高;
- (2) 模型处理的问题是实际中较复杂的交通网络图,适应度高、可推广性强;
- (3) 模型利用 Matlab 计算求解,计算准确度较高。
- (4) 无论罪犯采取如何的逃跑策略,只要他的速度小于 124km/h,则该罪犯就会被抓获。

6.2 模型的缺点

- (1) 模型多次采用 Floyd 算法求每两点之间最短路径,由于算法复杂度较高,导致当处理的节点数过高时,可能会出现执行效率低,运行时间长等情况;
- (2) 该模型只是理论上的分析与模拟,假设条件较多,根据实际情况,在利用到实际情况中时,还应考虑很多实际因素。

(3) 但罪犯的速度大于临界的速度时,该算法并没有对其产生任何作用,即该罪犯是否被抓获即其可能性是不确定的。

6.3 模型的推广

该模型虽然解决的只是某市区交巡警服务平台的设置与推广的实际问题,但该模型利用的 Floyd 最短路径,以及建立广义最大覆盖模型可以应用到各种找最有路径或应急设施选址等问题中,例如,公交车的路线安排、消防队、救护站的选址等等。

该算法对于一些图论的优化问题有很大的参考价值。

7. 参考文献

- [1] 方磊,何建敏.应急系统优化选址的模型及其算法[J],系统工程学报,2003,18(1):49-53.
- [2] 殷代君.广义最大覆盖模型在应急设施选址中的应用研究[J],科技视窗,2010,(3):169-172.
- [3] 徐玖平,胡知能.中级运筹学[M].北京:科学出版社,2008:302-350.
- [4] Sheir D R,Dearing P M.Optimal locations for a class of nonlinear single-facility location problems on a network.Operations Research,1983,(31):293-303.
- [5] Wlodzimierz O.On the distribution approach to location problem.Computers & Industrial Engineering,1997,(37):595-612.

8. 附录

8.1 问题一代码