

关于高等教育学费标准的评价及建议

摘要

本文通过对近几年来学费变化的研究，综合分析影响学费变化的五个要素，引入了三个变因：学校属性、专业类型、地域差异对学费的影响，对其合理性进行了定量的分析和评价。

首先，我们基于层次分析法建立了模型一。模型一以五个要素，即教育市场供求关系、全国家庭支付承受力、国家财政及相关社会捐助、个人收益率、教育成本为方案层。对于教育市场的供求关系我们用灰色预测 GM(1, 1) 模型预测出未来几年的招生人数，用蛛网模型求解稳定的价格点为 3225.51 元；对于国家财政及相关社会捐助，我们用回归分析得出其效应关系。模型一以效率和公平两个标准作为准则层，应用极差归一化思想，构造指标函数，综合建立成对比较矩阵。我们定义学费合理化指数为目标层，经准则层，得出五个要素对学费合理化指数的组合权重向量。考虑到成对比较矩阵仍有一定主观因素，我们用熵值取权法修正组合权重向量。最后，拟合出最佳学费曲线及其波动区间，其中 2007 年的结论值为 3370.75 元。模型一的突出优点是客观可信，美中不足的是结论为一个平均最优值，没有考虑其他变因的影响，使用的局限性较大。

然后，我们基于学校属性、专业类型、地域差异三个变因对结论的影响建立了模型二。评价了这三个变因对五个要素的综合影响，修正了五个要素对学费合理化指数的影响，使得结论更趋于合理，应用范围更加广泛。修正后通过若干数据的检验，得出平均最佳学费约为 3000 元。

基于这两个模型，以及对高校学费现状的了解，我们提出三点主要建议：1. 鼓励高校开拓资金来源渠道，学习国外筹款方式，如发行教育彩票等；2. 建议国家增加助学贷款发放力度，并能够分类别基于不同金额的贷款，并出台一些补贴政策弥补不同地区的差异；3. 大力扶持民办高等院校发展，实现高等教育大众化，这样不仅缓解高等院校招生压力，并且能够促进高校教育健康发展。

本文的特色在于基于翔实丰富的资料，根据五个要素及三个变因的分析，建立了一种合理的高校学费评价体系，其拥有适用性广，稳定性好，灵敏度高特点，对三个变因，即学校属性、专业类型、地域差异进行了深入定量的分析，并根据模型结论给提出了我们的一些可行性建议。

关键字：层次分析法 熵值取权法 学费合理化指数 蛛网模型 回归分析

目录

1. 问题重述与分析.....	3
2. 模型假设.....	3
3. 符号说明.....	3
4.模型的建立.....	4
4.1 模型一的建立.....	4
4.1.1 五大因素与学费关系的求解.....	4
4.1.2 层次分析法求出各个影响因素的权重.....	9
4.1.3 熵值取权法对权重的修正.....	10
4.2 模型二的建立.....	11
4.2.1 针对不同学校的修正.....	11
4.2.2 针对不同专业的修正.....	11
4.2.3 针对不同地区的修正.....	12
5.模型的求解.....	14
5.1 模型的求解.....	14
5.1.1 模型一的求解.....	14
5.1.2 模型二的求解.....	15
5.2 结果分析.....	16
6.模型的检验.....	17
6.1 灵敏度检验.....	17
6.2 稳定性检验.....	18
7.模型的优缺点分析.....	19
7.1 综述.....	19
7.2 模型一优缺点分析.....	20
7.3 模型二优缺点分析.....	20
8.模型的扩展.....	20
8.1 关于助学贷款设定及发放.....	20
8.2 辅助助学制度.....	23
9. 我们的建议.....	23
10.参考文献.....	24
11.附录	25

1. 问题重述与分析

制定一个全面且有说服力的高等教育学费标准,首先要精确且广泛的收集各方面的数据,对数据进行筛选以及分析。基于 1991 至 2006 年的各类统计数据及经验资料进行分析,发现我国高等教育学费从 1998 年开始快速增长,增长的速度远超过了人民收入增长的速度,造成了现今社会上对于“高学费”的种种抱怨。

高等教育不同于义务教育,学费是学校运营资金的一个主要组成部分,同时,对于高等教育,又不能将其完全等同于市场条件下的运营,完全用供求平衡来分析学费标准,这是因为国家拨款占据高校运营费用的很大一部分比例,政策导向性作用很大,国家政策对于学费标准影像很大,供求平衡也将是影像其的一个方面。此外,居民、学校对于学费的承受能力需要收到很大关注,过高的学费会使居民无法承受造成严重的后果,过低的学费会使学校没有足够的资金维持正常运营。

在模型中不仅要有政策,承受力,供求等因子,还要考虑到专业,学校类型,区域的差异的影响,才能对不同类别、专业、地区的学校分别给出合理的学费标准,此外,模型中还可以考虑根据学生家庭情况定价。

最后,将根据模型得出的结论,分析现今收费标准的不合理之处,并对如何进行改进现今高校收费标准提出自己的意见。

2. 模型假设

1. 排除学生家庭收入、所处地域等因素对进入高等学校机会的影响
2. 假设在最近及今后的一段时间内,教育业平稳发展,没有重大的外来影响。
3. 假设各等级中同一个等级的每个学校受国家的财政支持是一样的。

3. 符号说明

P : 每学年的学费

w_1 : 层次分析法得出的 5 个因素对合理化指数的权重向量

w_2 : 用熵值取权法得出的 5 个因素对合理化指数的权重向量

w : 综合层次分析法、熵值取权法得出的 5 个因素对合理化指数的权重向量

$Z_i(p)$: 第 i 个影响因素在学费 p 条件下得出的函数值, $i=1,2,3,4,5$

$H(p)$: 合理化指数对学费 p 的函数

$Zb_i(p)$: $Z_i(p)$ 经过极差归一化方法处理后得到的指标函数, $i=1,2,3,4,5$

$Zx_i(p)$: $Zb_i(p)$ 经过三个因素修正后的指标函数, $i=1,2,3,4,5$

A : 不同学校等级标准矩阵

B : 国家财政对不同类型学校的财政分配矩阵

K : 学校对国家财政的影响因子矩阵

R_i : 第 i 年为止逐年总体扩招比率
 St_k : 第 k 年总体招生数
 Q_k : 第 k 专业热度为
 Z : 不同地区的国家财政支持率矩阵:
 E : 不同地区的修正矩阵
 F : 不同地区不同学校的国家财政支持补充因子矩阵
 G : 每个地区与平均水平的差距矩阵

4.模型的建立

4.1 模型一的建立

我们经过参考大量的前人研究及相关论文，归纳出决定高等教育学费的 5 个关键因素，分别是教育市场供求关系、全国家庭支付承受力、国家财政及相关社会捐助、个人收益率、教育成本。根据目前教育界工人的学费收取标准——“效率优先，兼顾公平”，我们自定义了一个描述该指标的目标函数——学费合理化指数，然后利用层次分析法分析出上述 5 个因素对合理化指数的影响权重矩阵 w_1

接着我们利用改进的 cobweb 模型^[1]、回归分析、简化的明瑟收益率等方法求出学费与各个因素之间的相互关系的函数

考虑到层次分析法构造时的主观色彩比较强，我们又利用熵值取权法给出了客观条件下的一组权值 w_2 ，对 w_1 进行修正，得出比较客观的组合权值矩阵 w ，进而给出一个学费价格的合理化指数。

4.1.1 五大因素与学费关系的求解

4.1.1.1 学费与教育市场的供求关系

4.1.1.1.1 用 GM (1, 1) 模型预测招生人数

招生人数有多种因素共同影响，其内部因素难以全部划定，因素间关系复杂隐蔽，而且随着1998年高校大范围扩招，可以利用的数据少而又少。我们根据具体灰色系统的行为特征数据，充分利用数量不多的数据和信息寻求相关因素自身与各因素之间的数学关系，针对招生人数建立相应的GM (1, 1) 模型^[11]。

根据灰色预测得到：2006年的预测招生数据为568.988万

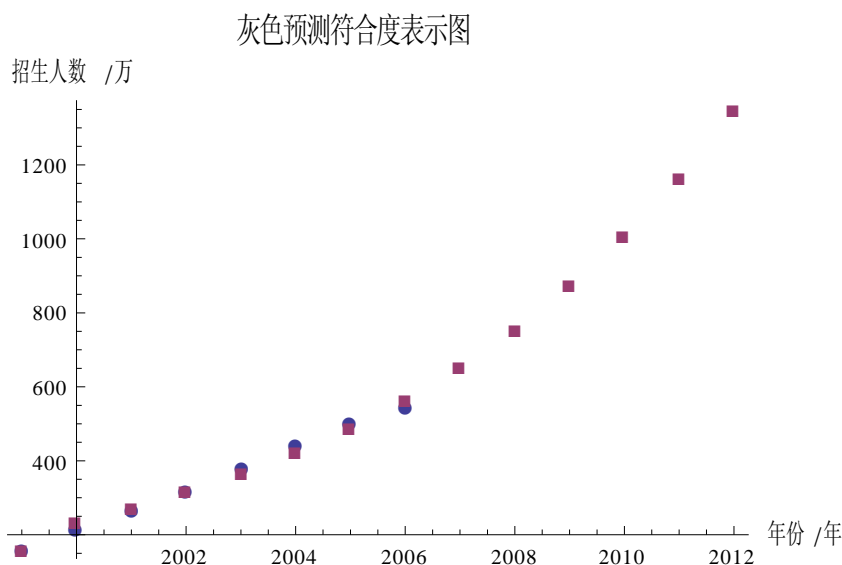


图1 灰色预测符合度表示图

4.1.1.1.2用蛛网模型求解在市场调节下最合适的学费

在考虑学费与上学人数两者关系时，我们把上学交学费看成一种交易行为，教育是这种交易的商品，学费为学生为这种商品所支付的金额。有此这种交易满足供求关系的约束，所以我们用蛛网模型对这两交易双方（学校，个人）进行分析，得出一个在市场调节下的最适价格，为学费定价从市场的角度提供一个参考因素。根据城乡居民06年可支配收入的余额计算居民当年对学费的支付能力，当支付能力低于学费时，我们认为其没有能力供养大学生。由此得需求曲线 $D(p)$ 根据历年的本科生学生人数增长情况和平均学费价格^[12]，拟合出实际的本科学校供应曲线 $S(p)$ 。

1) 模型建立：

首先，把城镇人口和乡村人口分开考虑，城镇人口根据收入情况分为为 n 类，分别记为 Ct_k ，($k = 1, 2, \dots, n$)，支付能力为 P_{ck} ，($k = 1, 2, \dots, n$)农村人口根据收入情况分为 m 类，分别记为 Fm_k ，($k = 1, 2, \dots, m$)，支付能力为 P_{fk} ，($k = 1, 2, \dots, n$)

具体支付能力计算方法如下：

可支付费用=每年家庭支付能力-平均每人每年支出*(家庭平均人数-1)

由此，可以根据不同家庭的收入分类的家庭情况对各类别家庭的可支付能力进行计算。

以 P 为自变量，根据家庭可支付费用的居民占总数的百分比拟合需求曲线 $D(p)$ 。

其次，根据历年的本科生学生数量和平均每年的学费，拟合供给曲线 $S(p)$ 。

在需求供给图中给出两条曲线，用蛛网模型分析交点的稳定性。

2) 模型求解

根据国家统计局^{[5][6]}关于城镇家庭收入8等分，计算支付能力，得出城镇家庭的需求曲线：

$$D_1(p) = -6.57289 + 131.254e^{-0.0487142 p}$$

根据国家统计局^{[5][6]}关于农村家庭收入五等分，计算支付能力，得出农村家庭的需求曲线：

$$D_2(p) = -20.4103 + 127.814e^{-0.10356 p}$$

农村人口：城镇人口=0.5610：04390

得出总体需求曲线：

$$D_0(p) = 0.4390 \times D1(p) + 0.5610 \times D2(p)$$

根据4.1.1.1.1求出的2006年招生人数预测值记为 S_{2006} 得出实际需求曲线为：

$$D(p) = D_0(p) \times S_{2006}$$

跟据国家统计局1999至2005年的招生人数和学费^[6]拟合供给曲线为：

$$S(p) = 2.03714e^{3.439+0.634 p}$$

供给需求曲线图如下：

供给需求曲线图

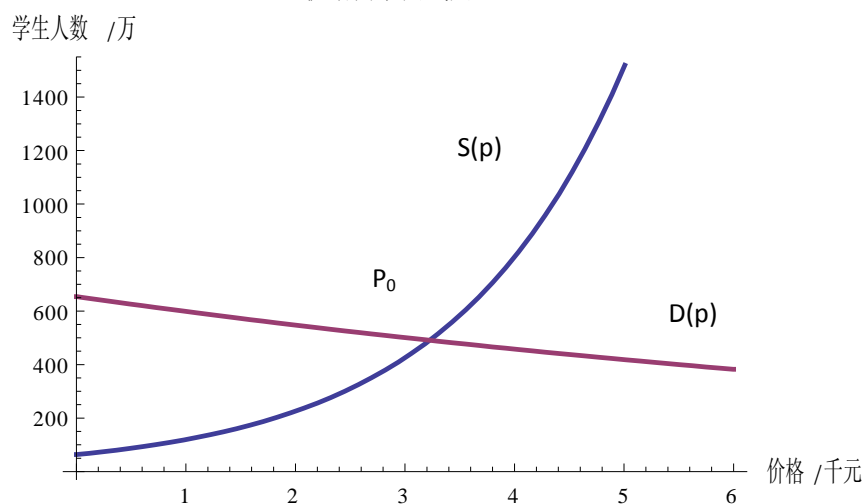


图2 供求需求曲线图

图2中，交点为（3.22551，490.741），学费价格最适为3225.51元。

3) 稳定性分析

根据蛛网模型特定的检验方法在，上图中求解 P_0 处两条曲线的斜率，设定 $S(p)$ 的斜率为 K_s ， $D(p)$ 的斜率为 K_D ，经过计算 K_s 在 P_0 处绝对值为 311.216， K_D 在 P_0 处的绝对值为 43.9023，此时 $K_s > K_D$ ，所以 P_0 点为稳定点。

4.1.1.2 学费与全国家庭支付承受力的关系

通过国家统计年鉴^[6]，我们得到了，06年全国各个收入阶层的人数分布，借此，我们计算出当学费少于某一个值时能有多少比例的人能负担得起的学费分布函数表，接着取各个分布比例的中点为离散点，利用 matlab 拟合出分布函数 $Z_1(P)$ 如下：

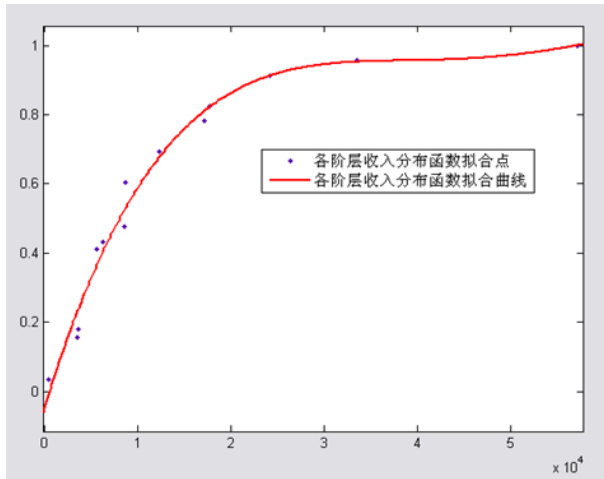


图 3 各阶层收入分布函数拟合曲线

图 3 中横坐标为各阶层的收入，单位为元/学年，纵坐标为该阶层的人占全国人口的比例
由图 3 可见，拟合曲线和原来的点拟合的相当不错，同时，从 matlab 拟合参数中可知，拟合的相关程度 R-square:为 0.9819，说明两者的相关程度相当大。

由此可以得到利用多项式拟合的结果家庭支付承受能力和学费的相关函数

$$Z_2(P) = -1.996 \times 10^{-19} \times p^4 + 4.017 \times 10^{-14} \times p^3 - 2.868 \times 10^{-9} \times p^2 + 8.819 \times 10^{-5} \times p - 0.04252$$

4.1.1.3 学费与国家财政的关系

由于这两者之间的关系不是那么直观，于是我们选用回归分析方法，对每一年不同的学费与不同的国家教育财政支出做回归分析，并拟合出一条曲线如下图二所示：

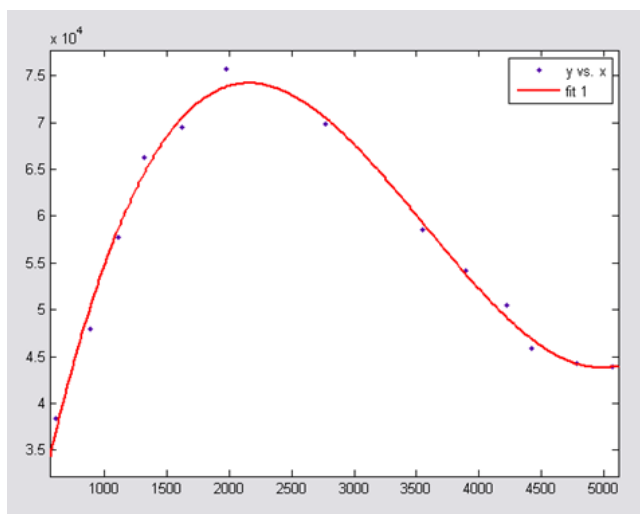


图 4 历年学费与国家教育财政支出的拟合曲线

图 4 中，横坐标为历年的学费，单位为元/学期，纵坐标为国家教育财政的支出，单位为万元/年。

观察所得的回归分析，发现两者的相关系数 R-square 达到了 0.9879，且从图中观察拟合效果很好，由此可知高等教育和国家的财政支出是有很强的相关性，由此得到的函数比较可靠。由此得到学费与国家财政支出的相关函数为：

$$Z_3(P) = 2.706 \times 10^{-6} \times p^3 - 0.02896 \times p^2 + 87.15 \times p - 6206$$

4.1.1.4 学费与收益率的关系

根据简化的明瑟收益率^[2]方程： $Z_4(p) = Wau - Wah + t \times p$

其中Wau为本科毕业生平均起薪，Wah为高中毕业生平均起薪，t为参数通过Excel进行线性回归得到函数关系式

$$Z_4(p) = 0.082625061p + 668.7232123$$

4.1.1.5 学费与教育成本的关系

据统计数据^[6]，2000-2006年生均年教育成本与学费关系如下表

年份	教育成本	学费
2000	15974	3550
2001	15445	3895
2002	15120	4224
2003	14963	4419
2004	14627	4785
2005	14295	5070
2006	14008	5185

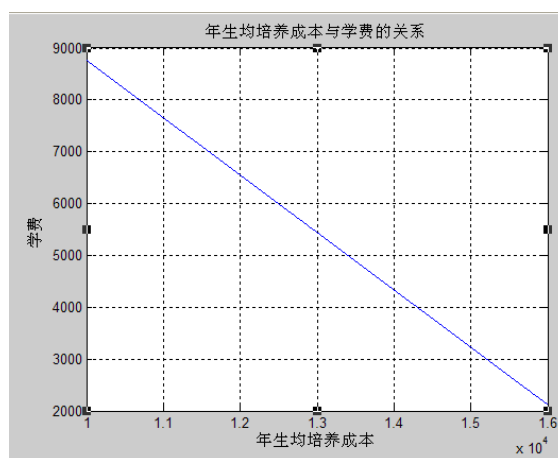


图5 年生均培养成本与学费的关系

经拟合得到图5，得出两者函数关系如下表达式

$$Z_5(p) = -1.107p + 19840$$

4.1.1.6 各指标函数的极差归一化

由于以上求出的 5 个因素与学费的关系函数的数值相差很大，于是我们借用极差归一化的方法，将上述函数进行一番数量级统一化，我们将 1993 年到 2005 年的学费带入各指标函数，求出各个函数的最大与最小值，记为 Mat_i 和 Mit_i ，

($i=1,2,3,4,5$),于是我们利用极差归一化的公式将各个因素的相关函数的数值统一化,得到一组指标函数如下:

$$Zb_i(p)=\frac{Z_i(p)-Mit_i}{Mat_i-Mit_i},(i=1,2,3,4,5)$$

4.1.2 层次分析法求出各个影响因素的权重

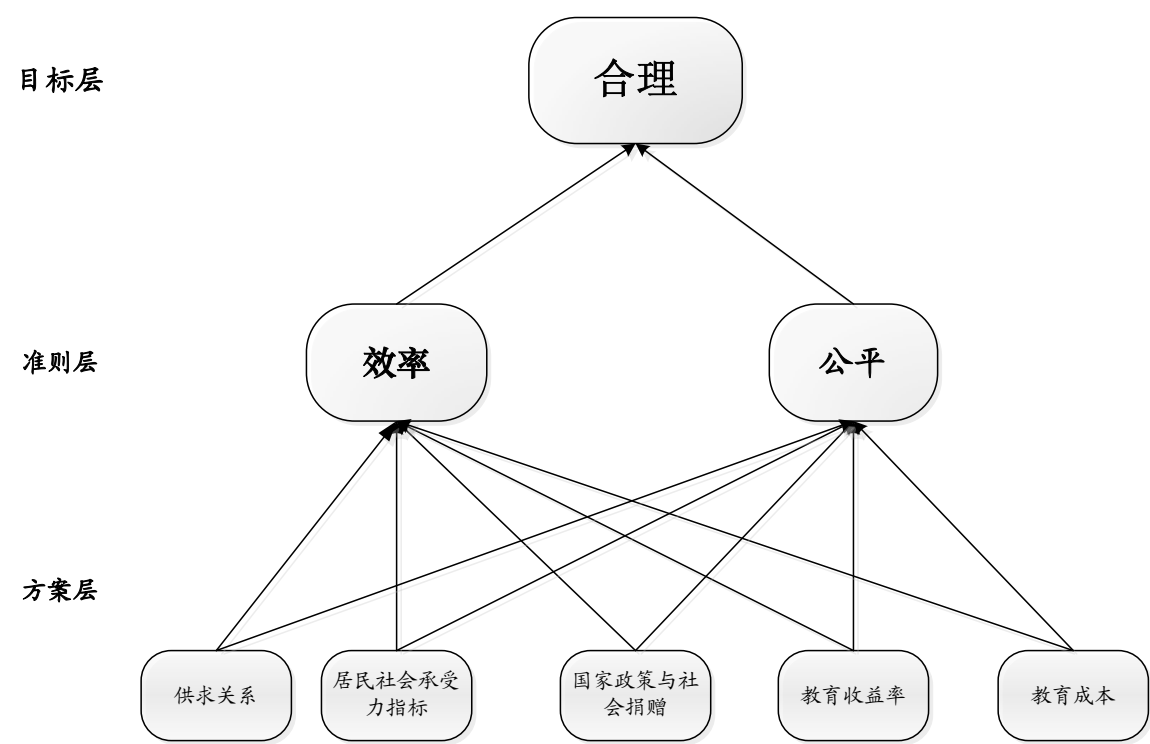


图6 层次分析法示意图

层次分析法是一种定性分析和定量计算相结合的方法，首先构造因素间的成对比较矩阵

效率与公平比较矩阵 $m_0=$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

权重向量 $\omega_0=[0.75 \quad 0.25]$

方案层对效率的比较矩阵 $m_1=$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & 2 & 3 \\ 3 & 1 & \frac{1}{3} & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 1 & 5 & 7 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{7} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

权重向量: $\omega_1 = [0.1241 \quad 0.2292 \quad 0.5100 \quad 0.0732 \quad 0.0635]$

$\lambda_1=5.1357 \quad CI_1=\frac{\lambda_1-n}{n-1}=0.0339 \quad CR_1=\frac{CI_1}{RI}=0.0343<0.1$ 满足一致性要求

方案层对公平比较矩阵 m_2

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 7 \\ 4 & \frac{1}{2} & 1 & 3 & 5 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{7} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

权重向量: $\omega_2 = [0.1179 \quad 0.4517 \quad 0.2919 \quad 0.0887 \quad 0.0497]$

$\lambda_2=5.1543 \quad CI_2=\frac{\lambda_2-n}{n-1}=0.038575 \quad CR_2=\frac{CI_2}{RI}=0.0344<0.1$ 满足一致性要求

$$\omega_3 = [\omega_1 \quad \omega_2] = \begin{bmatrix} 0.1241 & 0.1179 \\ 0.2292 & 0.4517 \\ 0.5100 & 0.2919 \\ 0.0732 & 0.0887 \\ 0.0635 & 0.0497 \end{bmatrix}$$

由 $w_1 = \omega_0 \omega_3$ w_1 为用层次分析法得出的最终权重向量

$w_1 = [0.1225 \quad 0.2849 \quad 0.4555 \quad 0.0771 \quad 0.060]$

4.1.3 熵值取权法对权重的修正

由于层次分析法成对比较矩阵的给出存在着一定的主观因素，于是我们想到了利用熵值取权法。

熵值取权法的优势在于，它是通过判断各个因素的变化剧烈程度来决定该因素在最终目标中所占的权重。比如国家的财政支持对高等院校的学费的制定影响很重要，但是如果财政支持费用 10 年都不变，而家庭支付承受能力虽然对学费的制定没有国家财政支持的影响那么重要，但是它每年都在快速的增加，从熵值取权法的角度来看这时家庭的支付承受能力的影响就比国家财政的支持大，这与客观的人们的

想法也是一样，同时它和层次分析法得出的结论是互补的且是客观的。据此，我们利用熵值取权法客观地给出一个 5 个因素的 1×5 的权重矩阵 w_2 ，对由层次分析法给出的 1×5 的权重矩阵 w_1 ，以 0.2: 0.8 的比例进行修正，从而给出最终的 5 个因素对合理化指数的组合权重值阵

$$W = 0.8 \times w_1 + 0.2 \times w_2$$

于是给出我们的模型一：

$$\begin{cases} \text{Max } H(p) = W \times [Zb_1(p), Zb_2(p), Zb_3(p), Zb_4(p), Zb_5(p)]^T \\ W = 0.8 \times w_1 + 0.2 \times w_2 \\ Z_1(p) = -|p - 3225.51| \\ Z_2(p) = -1.996 \times 10^{-19}p^4 + 4.017 \times 10^{-14}p^3 - 2.868 \times 10^{-9}p^2 + 8.819 \times 10^{-5}p - 0.04252 \\ Z_3(p) = 0.000002706p^3 - 0.02896p^2 + 87.15p - 6206 \\ Z_4(p) = 0.082625061p + 668.7232123 \\ Z_5(p) = -1.107p + 19840 \\ Zb_i(p) = \frac{Z_i(p) - \text{Mit}_i}{\text{Mat}_i - \text{Mit}_i}, (i = 1, 2, 3, 4, 5) \end{cases}$$

4.2 模型二的建立

4.2.1 针对不同学校的修正

对于不同的学校，我们经过分析认为它主要影响影响的是国家的财政支持，所以我们主要以学校的办学实力为标准， m 个等级，给每个级别一个权重 a_i , ($i = 1, 2, \dots, m$), 给他们一个等级标准矩阵

$$A = [a_j]_{1 \times m}。$$

它代表这国家财政对该类院校的支持程度。同时我们根据不同等级的院校占全国院校总数的比例，给出一个分配矩阵

$$B = [b_j]_{1 \times m}$$

就此，我们将 A、B 矩阵的对应元素相除得到 $k_j = \frac{a_j}{b_j}$ ，表示国家财政支持均分到同等级的每一所具体学校的支持，于是得到学校对国家财政的影响因子矩阵：

$$K = [k_j]_{1 \times m}$$

4.2.2 针对不同专业的修正

对专业冷热程度的客观评价，是该修正的难点，我们从每种专业的扩招比率出发，综合考虑 11 个大类的专业近两年的比率用 06 年数据^[6]和 05 年数据^[5]0.6: 0.4 的比率评价一个专业的扩招率，再考虑到这两年本科生总体扩招比率，从而评价出

该专业的冷热程度。

根据国家统计局 2005-2007 年的年鉴^{[5][6]}，得出逐年总体扩招比率，记为 R_i ，其中 i 表示本年。记第 k 年总体招生数为 St_k ，则 R_{ij} 可表示为：

$$R_k = \frac{St_k}{St_{k-1}} \quad (k = 2005, 2006)$$

由此两年来综合评价扩招比率记为 R ：

$$R = 0.6 \times R_{2006} + 0.4 \times R_{2005}$$

同理可以求出针对每个专业的两年扩招率：定义第 i 专业第 j 年的招生数为 St_{ij} ，

该专业第 j 年的扩招比率为 R_{ij} ，由此可得：

$$R_{ij} = \frac{St_{ij}}{St_{ij-1}} \quad (j = 2005, 2006)$$

注：专业号所对应专业见附录

同总体扩招比率的求法，可以求出第 i 专业的扩招比率，记为 $R_{\Sigma i}$ ：

$$R_{\Sigma i} = 0.6 \times R_{i,2006} + 0.4 \times R_{i,2005}$$

定义专业热度为该专业扩招比率同总体扩招比率的比值，记第 k 专业热度为 Q_k ：

$$Q_k = \frac{R_{\Sigma k}}{R_k}$$

由此，我们得到了对于专业冷热程度的一个客观评价，该因素在模型一层次分析法中五个要素的中，对供求关系和收益率都有明显影响。对于热门专业，社会上供不应求，导致学校学费价格相对较高，此时热门专业的就业计划较好，收益语气较高；相反对于冷门专业，社会上需求较小，学费价格相对其他专业较低，同时就业前景一般不佳，收益预期较低。综合以上评价，我们对模型一种关于供求关系和收益率两个函数进行相应修改，表达式如下：

供求关系函数：

$$Z_1(p) = (-Q_k) \times \text{Abs}[p - 3225.51]$$

收益率函数：

$$Z_4(p) = (688.72 + 0.082625 \times p) \times Q_k$$

4.2.3 针对不同地区的修正

经分析，我们认为不同地区主要影响两方面，一个是国家的财政支持，另一个是学生的家庭的支付承受力。

4.2.3.1 对国家财政支持的影响

我们查到全国 n 个不同地区国家所给的财政支持金额是不同的，根据所给的支

持占每年国家总给支持比例，我们将不同地区所获的财政支持数据归一化处理得到不同地区的支持率矩阵：

$$Z = [z_i]_{1 \times n},$$

由于模型一求出的是全国的平均情况，我们求出该支持率的平均值 z_g ，然后求各个地区的差距，作为国家财政的补充修正因子

$$e_i = z_i - z_g, (i = 1, 2, \dots, n),$$

得到一个地区修正矩阵

$$E = [e_i]_{1 \times n}$$

由于国家的财政支持也受不同学校的影响，所以我们将两者统一起来考虑，得到一个对不同地区不同学校的国家财政支持补充因子矩阵

$$F = E^T \times K = \begin{bmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n,1} & \cdots & f_{n,m} \end{bmatrix}_{n \times m}$$

修正后得到 i 地区 j 学校对国家财政支持的影响为 f_{ij} ，从而其学费的国家财政影响指标函数变为

$$Zx_3(p) = (1 + f_{ij}) \times Zb_3(p)$$

4.2.3.2 对家庭支付承受能力的影响

不同地区对支付能力的影响主要来自于该地区的消费水平，我们根据 n 个地区的消费水平的不同，先对数据进行归一化处理，并求出平均的消费水平 x_g ，由于模型一得到的是全国的平均情况，所以我们利用自定义公式，

$$g_i = x_i - x_g, (i = 1, 2, \dots, n)$$

求出每个地区与平均水平的差距矩阵

$$G = [g_i]_{1 \times n}$$

根据修正的结果，对于 i 地区对学生家庭的支付承受能力的影响的因子为 g_i ，相应的其学费的家庭支付承受能力的指标函数变为

$$Zx_2(p) = (1 + g_i) \times Zb_2(p)$$

5.模型的求解

5.1 模型的求解

5.1.1 模型一的求解

我们从 1993 到 2005 年^[6]中随即选取 m 年(我们剔除 1993、2005、1998 等三年, 得到 10 年的数据) 的学费并带入 n ($n=5$) 个指标函数 $Zb_j(p)$, ($j = 1, 2, \dots, n$) 求出费用 i 情况下 j 指标的值 P_{ij} , 由此得到一个 $m \times n$ 的指标矩阵:

$$P_{m \times n} = \begin{bmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{m,1} & \cdots & P_{m,n} \end{bmatrix}$$

现在对每一个指标所对的列向量做归一化处理 $d_{ij} = \frac{P_{ij}}{\sum_{i=1}^m P_{ij}}$, 其中 $0 < d_{ij} < 1$, 于是得到归一化后的指标矩阵:

$$D_{m \times n} = \begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m,1} & \cdots & d_{m,n} \end{bmatrix}$$

计算出 D 中每一个元素的熵值, 利用公式 $S_j = -u \times \sum_{i=1}^m (d_{ij} \times \ln(d_{ij}))$, ($j = 1, 2, \dots, n$) 算得一个未经加工的权重矩阵 $S = [S_j]_{1 \times n}$, 现在在利用公式 $w_j = \frac{(1-S_j)}{\sum_{j=1}^n S_j}$, ($j = 1, 2, \dots, n$), 由此求出熵值法取出的权值矩阵 $w_2 = [w_j]_{1 \times n}$ 。我们剔除 1993、2005、1997 等三年, 得到 10 年的数据, 利用该数据进行求解, 得到 $w_2 = [0.156 \ 0.234 \ 0.111 \ 0.253 \ 0.246]$ 。

由模型建立中的五个方案层元素关于学费的函数

$$Z_1(p) = -|p - 3225.51|$$

$$Z_2(p) = -1.996 \times 10^{-19} p^4 + 4.017 \times 10^{-14} p^3 - 2.868 \times 10^{-9} p^2 + 8.819 \times 10^{-5} p - 0.04252$$

$$Z_3(p) = (0.000002706 p^3 - 0.02896 p^2 + 87.15 p - 6206$$

$$Z_4(p) = 0.082625061 p + 668.7232123$$

$$Z_5(p) = -1.107 p + 19840$$

在层次分析法的基础上考虑熵值, 最大程度上的去除了主观因素对结果的影响, 由熵值取权析法, 最佳学费应该为1998年的学费值为1974元;

实际学费曲线: 由1994至2005年高校生均实际学费, 拟合出实际学费曲线:

$$rea(p) = -1.05794 \times 10^7 + 10164.4 p - 2.43656 p^2$$

最佳学费曲线：在98年的基础上，综合城镇以及农村居民收入增长的速率与当年通货膨胀指数，得出每年最佳学费增长率，并依次计算出了每年的最佳学费，由此拟合最佳学费曲线： $\text{bes}(p) = 1.71444 \times 10^7 - 17292.8 p + 4.36085 p^2$

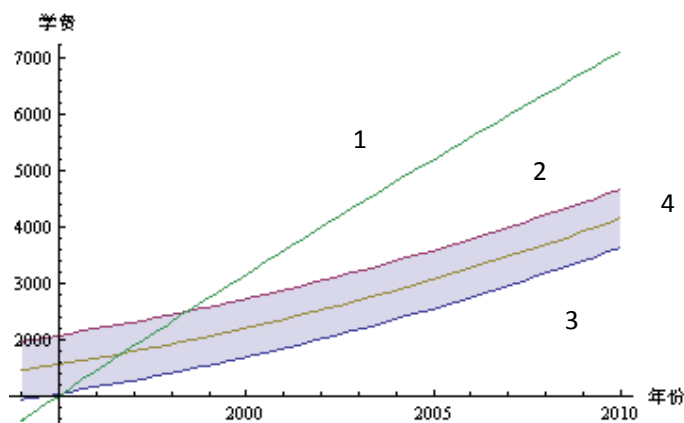


图7 最佳学费曲线图

关于图7的说明：黄色曲线4为最佳学费曲线，可以看出，最佳学费曲线增长缓慢，在2007年最佳学费 $\text{bes}(2007)$ 约为3370.75元，随着年份增加，居民可支配收入增加，则最佳学费的也将逐年增长；

图中绿色曲线1为实际高校生均学费曲线，可以看出实际曲线的增长率大于理想学费；在2007年实际学费为 $\text{rea}(2007)=5876.63$ 元

最佳学费曲线和实际学费曲线的交点在1998年，表明在1998年时当年的学费是合理的，1998年高校开始扩招，之后实际学费曲线就出现了飞涨，而在这之前，学费一直是比较合理的，即在98年前学费价格是在合理范围内波动，由此取98年前实际学费与最佳曲线的差的最大值 $h=516$ 元作为基准，则定义在最佳学费曲线上上下浮动 h 为居民对学费的可承受范围。

红色和紫色曲线之间的阴影部分表示居民对学费的可承受范围，若学费在阴影之内则认为学费在居民以及学校可承受范围之内，且越靠近最佳曲线说明学费越合理，而如果学费在阴影之外，则表明学费值已经超出了居民或学校的可承受范围之内，表明学费不合理；

图中实际学费在2000年之后已经超过了阴影范围，表明从2000年开始，我国高校学费已经偏高了，且随着年份的增加越来越超出承受范围；在2007年超出承受范围（2855-3886元）近2000元。

5.1.2 模型二的求解

5.1.2.1 不同地区不同学校的国家财政支持补充因子矩阵 F 的求解

根据上海市对非上海生源入沪评分办法规定中对 985、211 及其他院校的等级评分——15，10，5，我们得到等级标准矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

采用教育部印发的“全国博士质量调查问卷”中附列的最新 985、211 高校名单及

全国共有 720 所本科院校，得到分配矩阵

$$B = [0.06 \ 0.094 \ 0.846]$$

进而得到学校对国家财政的影响因子矩阵

$$K = [0.692 \ 0.292 \ 0.016]$$

接着我们从 06 年国家统计年鉴里查到各地区国家财政支持费用从而得出地区修正矩阵 E（见附录地区修正矩阵 E），这样我们就求出了全国 31 个省市的各个本科学校院校的国家财政支持补充因子矩阵

$$P_{31 \times 3} \text{（见附录国家财政支持补充因子矩阵 } P_{31 \times 3} \text{）}$$

5.1.2.2 每个地区与平均水平的差距矩阵 G 的求解

我们从 06 年的国家统计年鉴里查到各个地区的城镇和农村人均消费支出统计表，及农村和城镇人口的数量，由此算出各个地区的与全国平均水平的差距矩阵 $G_{31 \times 1}$ （见附录各个地区的与全国平均水平的差距矩阵 $G_{31 \times 1}$ ），

5.2 结果分析

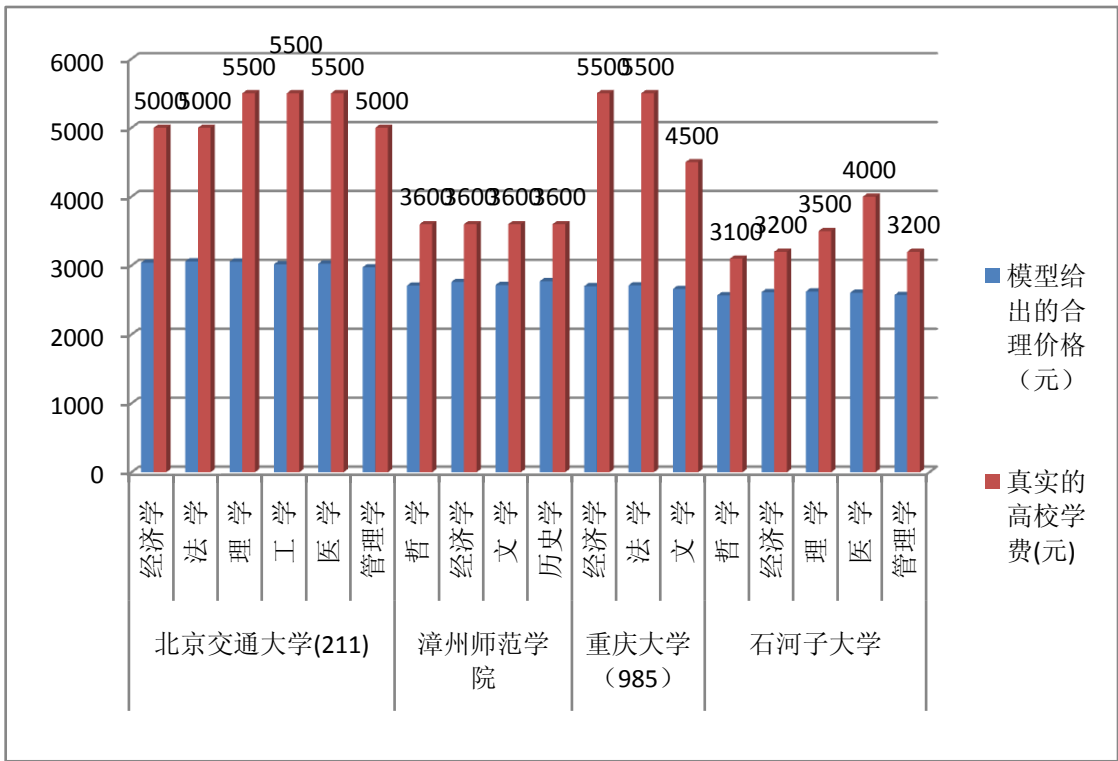


图 8 利用模型对不同地区不同学校不同专业的学费测试图

由图中可以直观地看到最优的学费价格比较稳定，大概在3000块钱左右。我国教育经济学家认为：确定学费标准的依据有：高校收益率；居民的承受能力；生均成本等。按照教育部统计，全国年生均教育成本在12000到15000元，其计算如下： 年日常运行费用+固定资产折旧-离退休人员经费（属于社会保障制度解决的范畴，不

应该作为培养学生的成本)；或者这样计算：国拨经费+学费-固定资产折旧费)确定学费标准是将高等教育生均经常性成本的20%到30%由受教育者分担”，据此计算出的学费应是3000元左右。在我国，国家价格主管部门也参照此标准核定高校的收费标准。由此可见我们的模型得到的结果比较符合我国的情况。但是对比我们现实中的学费标准（图中红色的柱子），可以发现我们高校的学费普遍偏高。由模型一得出的一个可以人们可以接受的波动区间为在最优的学费价格上下波动500块钱。

取北京交通大学的工学专业学费分析，其实际收费为 5500 元/学期，而我们的模型给出的最优化的价格为 3018.38 元/学期，其可以接受的学费区间为（2518.38，3518.38），显然 5500 元/学期已经超出了该合理区间，所以我认为改价格偏高，不合理。具体到 5 个影响学费的因素上来分析，可以发现 5500 偏离我们由供求关系与学费的相关函数求出的合理的价位 3225.51 元/学期大约 70%，这将该校直接导致教育资源的极大浪费。利用学费与家庭支付承受力相关函数 $Z_2(p)$, 5500 这个价格能承受的家庭比例大概是 64%, 大约 36%的人无法承受，这也将造成教育效率的下降，同时也大大地降低了教育的公平性。虽然根据个人收益率指标函数 $Z_4(p)$ 可以得知，该学校该专业的收益率为 1.09641，这只能为部分较富裕的人所接受，但无疑将加大不公平性，所以依据业内主流的“效率优先，兼顾公平”的优化制度准则，可以认为北京交通大学的工学专业的学费的设定是不合理的。

取石河子大学的哲学专业学费分析，其实际的收费为 3100 元/学期，我们模型给出的最优化价格为 2567.59 元/学期，其合理区间为（2067.59，3067.59），由此观之

该价格我们认为还是比较合理的。利用模型中供求关系的相关函数可知该价位与偏离最优价位大概为 20%，比较合理；利用学费与家庭支付承受力相关函数 $Z_2(p)$, 3100 这个价格能承受的家庭所占的比例大概为 80%，保证了大部分人都能承受，有助于教育资源的利用的效率的提高，同时也使教育公平性得以加强。利用个人收益率指标函数 $Z_4(p)$ 可以得知，该专业的收益率为 0.558296，这是由该学校地处新疆且哲学专业的前景不被人们所看好，但我们根据“效率优先，兼顾公平”的原则，从总体上来看该专业对大部分人及社会是有利的，所以我们认为石河子大学的哲学专业的学费的设置是比较合理的。

6.模型的检验

6.1 灵敏度检验

我们选取全国东西南北各一所学校，对其中的 2 到 3 个专业进行学费的最优化求解，通过这些最优学费之间的差距来衡量本模型的灵敏度。将最优解做成如下图三所示，

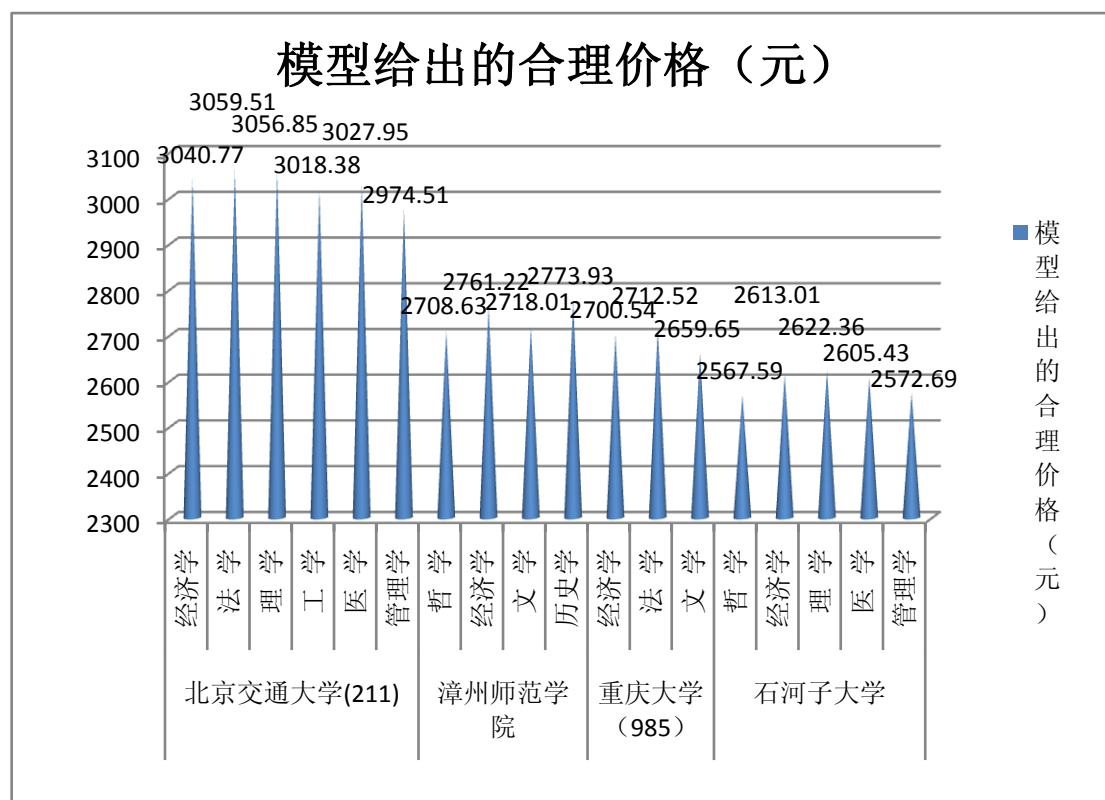


图 9 不同地区不同专业的最优化学费柱状图

从图 9 中可以很直观的看到针对不同地区不同学校的不同专业，我们的模型给出的最优学费变化是很明显的，同时我们看到最高的学费为每年 3059.51 元，最低的学费为每年 2567.59 元，两者相差 491.92 元，在一个可以接受的范围内，这说明我们的模型针对不同的地区不同的学校不同的专业给出不同的最优学费，而且学费的变化是在一个比较合理的范围内，不致造成差距太大，让人不能接受，故我们的模型的灵敏度在一个比较合适的水平上的。

6.2 稳定性检验

为了检验我们模型的稳定性，我们随机选取了一所本科院校，然后选取它的官方学费相同的不同专业进行了最优学费的给出。它的官方的学费制定是参照国家的标准来制定的，是有一定的权威型的，因而这些学费相同的不同专业应该也是有比较接近的最优价格。根据这条原则我们观察这些学费值的波动大小来决定我们的模型的稳定性。如图四所示：

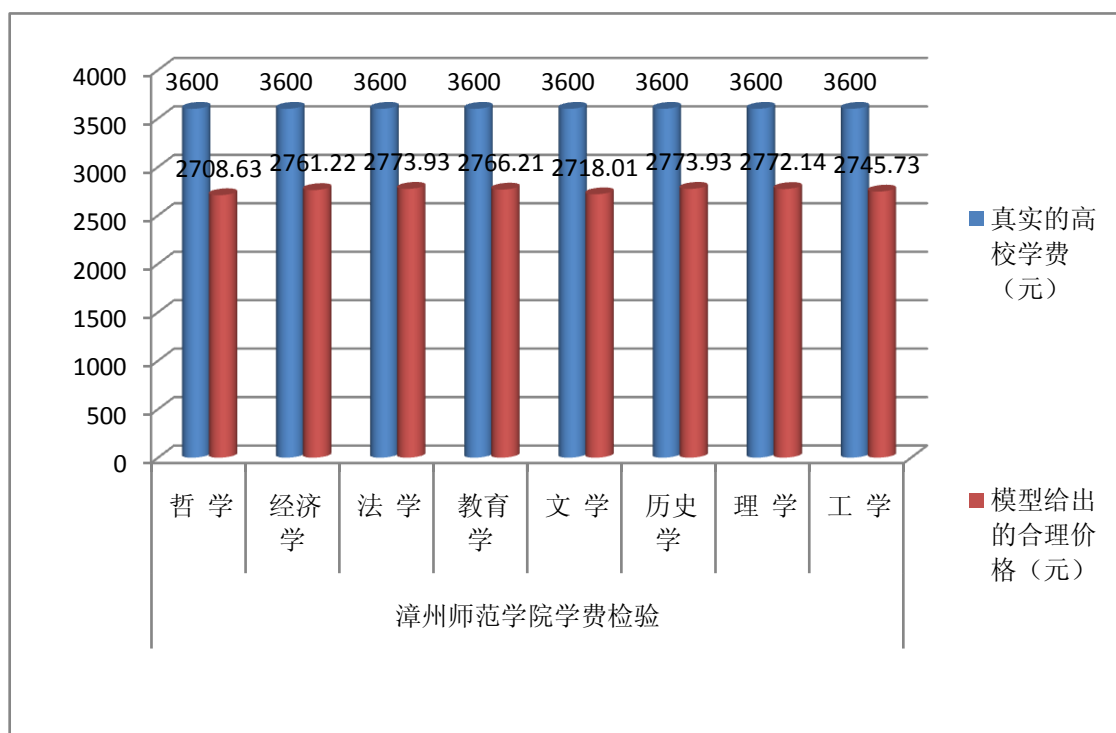


图 10 同一大学的学费相同的不同专业的最优价格柱状图

由图 10 中可以很直观地观察到红色的数据柱子（代表我们模型根据不同的专业给出的不同的最优学费价格）基本上是一样高的，经计算可知，最高的最优价格是每学期 2773.93 元，最低的最优价格为每学期 2708.63 元，两者相差 65.3 元，可见两者相差很小，也就说明了我们的模型给出的最优价格基本上是一致的，波动很小，稳定性在一个比较适合的程度。

7.模型的优缺点分析

7.1 综述

模型一采用了层次分析法和熵值取权法来进行最优函数的各个影响因素的权重选取，运用层次分析法将复杂的多因素的决策问题比较理性的解决了，但还是失之偏颇，主观的色彩比较浓，于是我们采用和层次分析法具有明显的互补性质的熵值取权法进行了修正，这样就让模型一得到的结果比较客观而可信。

我们的模型一主要以全国的平均水平为主要依据来进行模型的建立，适用范围广，但精度比较差，而模型二在模型一的基础上加入了各个地区各个学校各个专业的影响因素，增加了模型的精度，而不失其应用广度。

7.2 模型一优缺点分析

优点：

1. 采用层次分析法合实际情况的成对比较矩阵大大提高模型参数的准确性，改善模型的应用能力，使最终目标得以很好的量化。
2. 熵值取权法不具有任何主观色彩，权重向量的决定是客观的，具有评价过程的透明性，减少了单独采用层次法因为主观因素对结果造成的影响，使结果更加精确，有说服力。
3. 讨论供求与学费的关系采用了蛛网模型，能够用图形直观的表现出市场供求的变化和学费的关系，精确给出纯市场条件下学费的最优值。

缺点：只给出了某一年份最优的学费值和区间，而没有得出具体到某类专业某类学校的学费标准是怎样的，只能做为整体评判，具有较大局限性。

7.3 模型二优缺点分析

优点：考虑到了专业、地域、学校类型对学费的影响，能够根据指定学校类型、地区、所学专业给出适宜的学费，比模型一全面，适用性广，并且由模型结果分析还可以得出比模型一更加精确的全国年平均学费最佳值。

缺点：不能针对学生个人情况（如成绩好坏，家庭状况）给出的最佳学费值，实际情况是对于成绩好，家庭情况差的学生有助学贷款和奖学金的制度。

8.模型的扩展

8.1 关于助学贷款设定及发放

根据模型一的求解，2006 年最优学费均价 3350 元，而实际上全国范围内学费均价为 5070 元。这就造成了全国一部分人群无法支付相对高昂的学费，如下图所示：

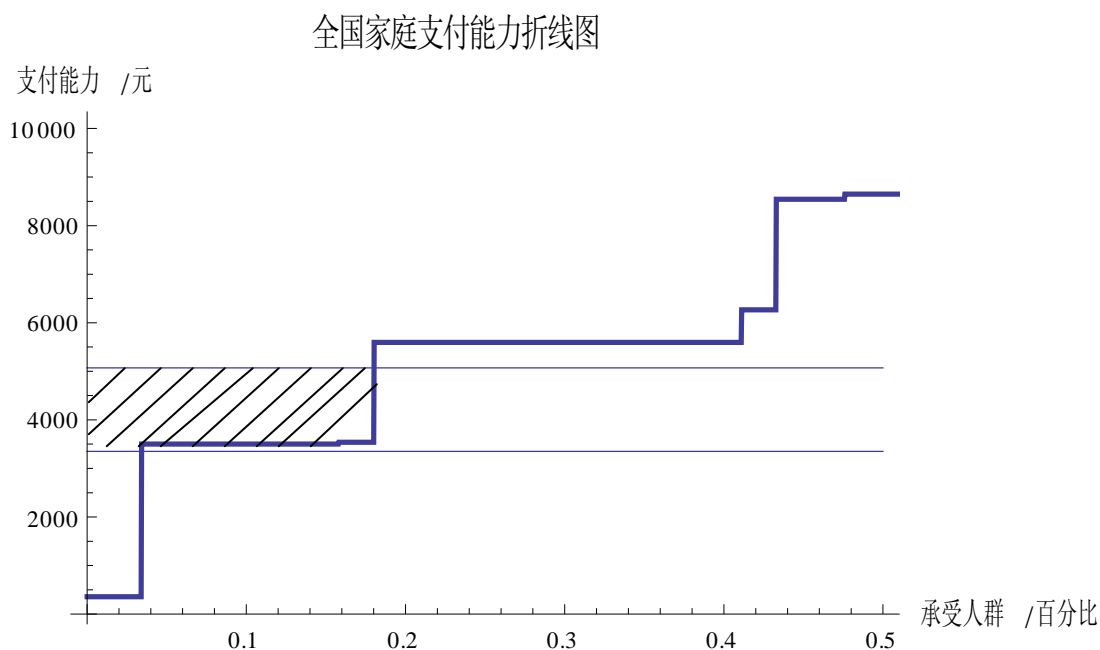


图 11 全国家庭支付能力折线图

如上图所示，全国约有 18% 的学生没有能力支付学费，其中占全国 3.4% 的学生为特困，另有占 14.6% 的学生为贫困。在图中的两条横线分别代表最优学费 3350 元和实际学费 5070 元。我们认为国家的责任是给困难学生一定的补贴，弥补最优学费和实际学费间的价格差值，即在图中用斜线画出的部分，而 3.4% 的特困生的支付能力和 3350 最优学费之间的差异应归为社会捐赠来弥补。

引用国家统计局 2007 年年鉴中 2006 年在校本科生人数为 1738.8 万，经计算，国家实际应为贫困生负担的费用为 49.889 亿元，而社会捐助应为特困生负担的费用为 17.69 亿元，其比率如下图所示：

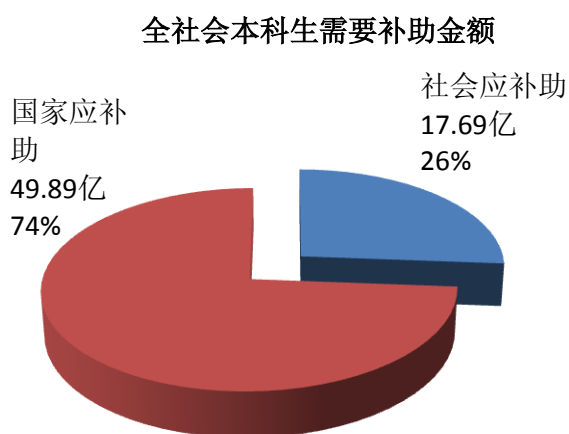


图 12 本科生需要补助金额组成图

与此同时，根据附录^{[3], [4], [8], [9], [10]}得国家在不同年份累计的审批助学贷款数额，经过 Mathematica 拟合得如下曲线：

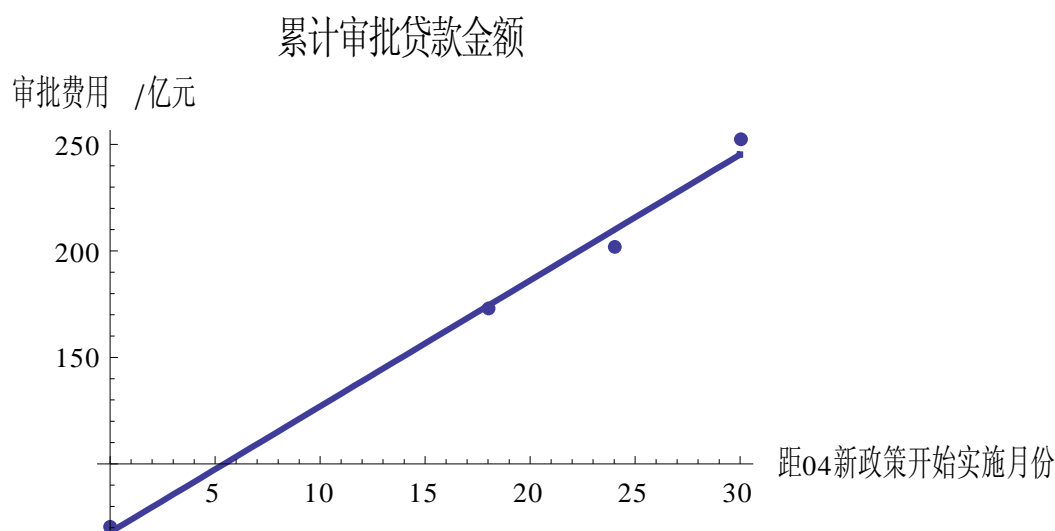


图 13 累计审批贷款金额图

上图中，原点表示的是 04 年 6 月的贷款金额，自当月起国家助学贷款开始使用新政策，x 轴为 04 年新政策实施月份数，上图拟合的一次直线为：

$$L(x) = 67.8679 + 5.91429 * x$$

即平均每月新增贷款金额为 5.91429 亿元，整年的新增贷款为 70.97 亿元。根据现行的还贷政策，大学四年间贷款学生不用承担贷款利率，大学毕业后，学生按当时贷款利率还贷^[7]，因此，实际国家助学贷款是变相的给学生一定得补助。由中国人民银行发布的贷款利率数据，1 到 3 年贷款年利率为一至三年为 5.76%，三至五年为 5.85%，这样可以根据实际四年后应还贷金额减去贷款金额得到国家实际补助金额为 3686.45 元，补助金占贷款金额比率为 15.36%。接下来，可以根据每年的新增贷款数额计算实际上国家补助金额为：

$$70.97 * 15.36\% = 10.9 \text{ (亿)}$$

该数据占国家应当负担费用的 21.85%，如下图所示：

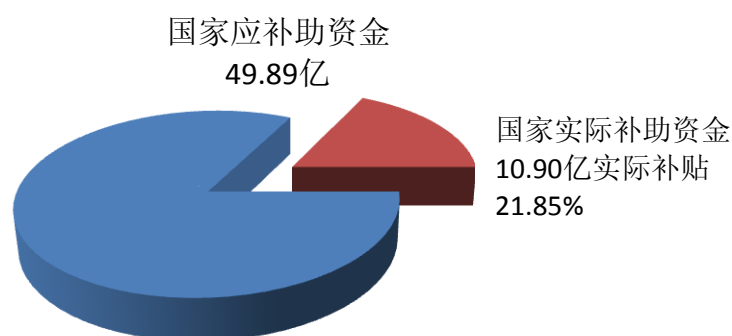


图 14 国家应补助与实际补助比较图

由此我们得出：国家助学贷款发放不足以满足广大贫困学生需求。

对于有限的贷款如何分配的问题，我们也进行了一系列的研究讨论。

首先，国家贷款的“一刀切”标准比较单一，不能很好的满足实际情况中，困难学生需求不同的现状，比如在贫困学生中，仅仅是少一部分资金供应学费（约 1569 元），一次性贷款 6000 元，显然造成了部分资金的使用不完全。为了使资金使用充

分，我们针对对全国范围内家庭的支付能力的考察，认为国家的助学贷款应分类发放，针对不同需求发放不同助学金，使得资金利用更加充分，更广大的贫困学生收益。

根据当今我国高等教育发展现状，国家资金占主导地位，而社会捐赠尚未发挥应有作用，所以在考虑助学金实际需求比例时，迫于现状，国家不得不承担原应有社会捐赠负担的部分。此时实际学费与特困生的支付能力间的差值为 4711.78 元，实际学费与贫困生的支付能力间差值为 1569.11 元，根据实际补助金额占贷款金额 15.36% 的比率，实际应贷款给特困生和贫困生的金额分别为：30675.7 元/年和 10215.5/年，但是考虑到国家助学贷款金额不足，按照实际发放金额为需求 21.85% 的比率，实际应贷款给特困生和贫困生的金额为 6702.54 元/年和 2232.07 元/年，在国家发放贷款时应对特困生发放 7000 元/年的贷款，对贫困生发放 2500 元/年的贷款。考虑到特困生和贫困生的人数比例（4.6%:14.6%），本着公平对待的原则，我们建议国家在分配给特困生和贫困生的贷款比例为 2: 3。

8.2 辅助助学制度

在助学贷款发放的同时，针对不同地区消费生活水平的差异，我们建议根据当地的消费水平适当给学生发放生活补助金。根据《国家统计局 2007 年年鉴》中统计数据，我们对每个地区的平均生活费进行了计算，并把它们同国家平均生活费进行了比较，把全国 31 个省级单位进行分类，共分为 4 类，其中一类地区有：北京，上海，浙江，广东；二类地区有：天津，江苏，福建，山东，重庆；三类地区有：河北，内蒙古，辽宁，吉林，安徽，湖北，湖南，四川；四类地区有：山西，黑龙江，江西，河南，广西，海南，贵州，云南，西藏，陕西，甘肃，青海，宁夏，新疆。我们建议四类地区每位本科生发放生活补助金的比例为 2.2 : 1.4: 1.15: 1。

9. 我们的建议

关于高等教育收费标准的建议

我国高等教育收费自 1989 年启动以来，历经了 1989-1996 年的改革试行阶段，1997-2000 年的快速增长阶段，以及 2001 年至今的稳定增长阶段，取得显著的成绩，但是，与发达国家的完善的高等教育收费制度比较，仍存在一些明显的问题。比如，近年来的学费增长速度远高于我国城乡居民人均收入的增长速度，部分地区的优秀贫困学生因无法支付高额的学费而无法就读。当家长、学生在抱怨学费高的同时，各高校也在抱怨经费短缺无法维持学校正常运营。

根据我们的模型的求解及对建模模型结果的分析，结合现阶段我国的国情，给出如下建议：

1. 多渠道筹集高等教育资金。通过模型结果分析发现，学费高的部分原因是因为教育成本的增高，导致学校运营困难，而对比国外的高校很大一部分资金是由社会或校友捐赠而来的，所以，我们认为，要尽快落实企业在税前向社会公益团体捐款的捐资助教政策，通过设立企业或企业家基金等形式，调动民营资本直接向教育部门

提供资助；还可以效仿国外大学的发行教育彩票、教育债券及设立教育基金等。

2. 关注弱势群体，实现机会均等。根据建模中研究家庭支付承受力对学费产生的影像时发现，当学费高于最优标准时有部分学生因为无法支付学费而辍学，于是，我们提出，完善并加大“国家贫困生贷款”这一政策的执行力度，提高学校给与品学兼优的学生的奖学金。

3. 鼓励民办高等院校发展，实现高等教育大众化。从建模过程中发现，影像高等教育学费的5个因素中，供求关系影像力相对较低，这与教育这一准公共性产品的性质不符，不利于我国教育资源的有效分配。根据全球教育制度优化准则——“效率优先，兼顾公平”，我国应该适当提高教育的市场化程度。目前，在我国，虽然教育的投资占GDP的比例在逐年递增，但是要求接受高等教育的人群迅速扩大，仅仅依靠现有院校来解决这一问题是不现实的。从国外经验来看，私立高等院校的发展有利于减轻对公立高等教育的巨大压力，缓解有限的财政与无限的对高等教育需求之间的尖锐矛盾。所以国家应鼓励民办高校的发展，并在政策上给与一定的倾斜和支持。

希望有关部门能够考虑我们的意见，完善我国的教育制度。

10.参考文献

- [1]姜启源 谢金星 叶俊，《数学模型（第三版）》：高等教育出版社，2003年8月。
- [2]王明进 陈良焜，教育收益率估计方法的比较，数理统计与管理，27卷第3期：404页408页，2008年5月。
- [3]王蕾，我国高等教育学费与居民家庭支付能力的现状分析，北京理工大学学报，第7卷第4期：90页96页，2005年8月。
- [4]李佩颖，新政策下的国家助学贷款现状分析，科教论坛，2006.06(上半月刊)：4页，2006年6月。
- [5]中华人民共和国国家统计局，中国统计年鉴2007：中国统计出版社，2007。
- [6]中华人民共和国国家统计局，中国统计年鉴2006：中国统计出版社，2006。
- [7]howardzhen，高等学校学生资助政策简介，http://edu.qq.com/a/20080216/000034_3.htm，2008-9-20。
- [8]赖颖，国家助学贷款的现状及其对策浅析，科教信息，2008年第5期：239页，2008年
- [9]刘忠燕，我国国家助学贷款存在的问题及改革思考，中国高教研究，2008年第1期：77页80页，2008
- [10]张茂林 柳劲松，国家助学贷款存在的主要问题与基本对策，金融与经济，五月期：89页91页，2008年2月
- [11]傅立，《灰色系统理论及其应用》：科学技术文献出版社，1992年10月。
- [12]赵聚辉 宋述龙，我国高等学校学费标准与居民收入水平、GDP的增长分析，辽宁师范大学学报，第31卷第3期：59页61页，2008年5月。

11.附录

1.灰色预测过程:

1) 数据准备

设参考数据为 $x^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$, 计算数列的级比

$$a(k) = \frac{x^{(0)}(k-1)}{x^{(0)}(k)} \quad (k = 2, 3, \dots, n)$$

如果 $a(k)$ 的范围超出了 $(0.5, 1.5)$, 可以适当考虑改变原序列元素为:

$$y^{(0)}(k) = x^{(0)}(k) + c$$

使得 $a(k)$ 在容许范围内。

2) 模型建立

GM (1, 1) 表示模型为一元一阶方程的灰色模型, 根据灰色理论中累加生成

指数模型的理论基础, 对 $x^{(0)}(k)$ 进行累加, 生成序列:

$$x^{(1)} = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n))$$

其中 $x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$.

令 $z^{(1)}$ 为数列 $x^{(1)}$ 的紧邻均值数列, 令

$$z^{(1)}(k) = 0.5x^{(1)}(k-1) + 0.5x^{(1)}(k), \quad (k = 2, 3, \dots, n)$$

GM (1, 1) 模型灰微分方程为:

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b$$

3) 模型求解

将 $k = 2, 3, \dots, n$ 代入表达式, 可得

$$\begin{cases} x^{(0)}(2) + az^{(1)}(2) = b \\ x^{(0)}(3) + az^{(1)}(3) = b \\ \dots \dots \dots \\ x^{(0)}(n) + az^{(1)}(n) = b \end{cases}$$

$$\text{令 } Y = (x^{(0)}(2), x^{(0)}(3), \dots, x^{(0)}(n))^T, u = (a, b)^T \quad B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 \\ -z^{(1)}(3) & 1 \\ \dots & \dots \\ -z^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix}$$

其中 Y 为数据向量, B 为数据矩阵, u 为方程参数向量, 则 GM (1, 1) 可以表示为矩阵方程 $Y = B * u$

根据最小二乘原理有

$$u = (B^T B)^{-1} B^T Y$$

$x^{(1)}(t)$ 满足常微分方程: $\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b$, 可得 $x^{(1)}(t)$ 的递推关系如下:

$$\begin{aligned} x^{(1)}(t+1) &= \left(x^{(1)}(1) - \frac{b}{a}\right) * e^{-at} + \frac{b}{a} & (t = 0, 1, \dots, n-1) \\ x^{(0)}(t+1) &= x^{(1)}(t+1) - x^{(1)}(t) & (t = 0, 1, \dots, n-1) \end{aligned}$$

带入1999年到2005年的本科生招生人数数据，得灰色模型方程为

$$x^{(1)}(t) = 1388.64 + 1548.34e^{0.144x}$$

根据上式得2006年的预测招生数据为568.988万。

2. 专业号对应专业

专业号	专业名	专业热度
1	哲 学	1.047362
2	经济学	0.979489
3	法 学	0.943106
4	教育学	0.974368
5	文 学	1.033014
6	历史学	0.964693
7	理 学	0.968513
8	工 学	0.996632
9	农 学	0.945413
10	医 学	0.989023
11	管理学	1.038244

3. 地区修正矩阵

$E^T = [$

0.029830935
 -0.014680065
 0.006338935
 -0.009793065
 -0.016894065
 0.005329935
 -0.011562065
 -0.004438065
 0.017979935
 0.046769935
 0.035260935
 -0.002267065
 -0.002500065
 -0.009812065
 0.026992935
 0.010259935
 0.008035935
 0.006159935
 0.063554935
 -0.010488065
 -0.026694065

-0.011697065
 0.010885935
 -0.015690065
 -0.008679065
 -0.028674065
 -0.004564065
 -0.018063065
 -0.028846065
 -0.027941065
 -0.014117065

]

4.国家财政支持补充因子矩阵

$P_{31 \times 3} = [$

0.020643	0.008702	0.000486
-0.01016	-0.00428	-0.00024
0.004386	0.001849	0.000103
-0.00678	-0.00286	-0.00016
-0.01169	-0.00493	-0.00028
0.003688	0.001555	8.68×10^{-05}
-0.008	-0.00337	-0.00019
-0.00307	-0.00129	-7.2×10^{-05}
0.012442	0.005245	0.000293
0.032364	0.013644	0.000762
0.0244	0.010286	0.000574
-0.00157	-0.00066	-3.7×10^{-05}
-0.00173	-0.00073	-4.1×10^{-05}
-0.00679	-0.00286	-0.00016
0.018679	0.007874	0.00044
0.0071	0.002993	0.000167
0.005561	0.002344	0.000131
0.004263	0.001797	0.0001
0.043979	0.01854	0.001035
-0.00726	-0.00306	-0.00017
-0.01847	-0.00779	-0.00043
-0.00809	-0.00341	-0.00019
0.007533	0.003176	0.000177
-0.01086	-0.00458	-0.00026
-0.00601	-0.00253	-0.00014
-0.01984	-0.00836	-0.00047
-0.00316	-0.00133	-7.4×10^{-05}
-0.0125	-0.00527	-0.00029
-0.01996	-0.00842	-0.00047
-0.01933	-0.00815	-0.00046
-0.00977	-0.00412	-0.00023

]

5. 各个地区的与全国平均水平的差距矩阵

$G_{31 \times 1} = [$

0.812946
0.213513
-0.13749
-0.1769
-0.08213
-0.02505
-0.11531
-0.18109
1.04581
0.220997
0.726565
-0.14925
0.178935
-0.1758
0.022413
-0.21923
-0.10833
-0.01573
0.424864
-0.19121
-0.18272
0.000744
-0.13309
-0.26869
-0.16579
-0.28331
-0.15309
-0.23454
-0.2372
-0.17472
-0.23611

]