

文章编号: 1671 - 6590(2006)06 - 0039 - 04

数学建模的几种基本预测方法的探讨

张贻民, 梁 明*

(茂名学院师范学院, 广东 茂名 525000)

摘 要: 针对学生在建立预测模型时不能准确判别使用合适的预测模型, 归纳了几种使用较多的预测方法: 微分方程模型、时间序列方法、灰色预测和 BP 神经网络。对每种预测模型做了简单的介绍分析和适当地对某些模型进行了改进, 总结了相应的优缺点以及各自适用的预测范围。

关键词: 微分方程模型; 时间序列法; 灰色预测; BP 神经网络

中图分类号: O29

文献标识码: A

预测学是一门研究预测理论、方法、评价及应用的新兴科学, 是软件学中的重要分支。综观预测的思维方式, 其基本理论主要有惯性原理、类推原理和相关原理。预测的核心问题是预测的技术方法, 或者说预测的数学模型。随着经济预测、电力预测、资源预测等各种预测的兴起, 预测对各种领域的重要性开始显现, 预测模型也随着迅速发展。预测的方法种类繁多, 从经典的单耗法、弹性系数法、统计分析法, 到目前的灰色预测法、专家系统法和模糊数学法, 甚至刚刚兴起的神经网络法、优选组合法和小波分析法, 据有关资料统计, 预测方法多达 200 余种。因此学生在使用这些方法建立预测模型时, 往往不能正确地判断该用哪种方法, 从而不能准确地建立模型, 达到要求的效果。不过预测的方法虽然很多, 但各种方法多有各自的研究特点、优缺点和适用范围。本文将综合介绍数学建模使用的几种基本的预测模型, 并总结各模型的优缺点和适用范围。

1 微分方程模型

当我们描述实际对象的某些特性随时间(或空间)而演变的过程、分析它的变化规律、预测它的未来性态、研究它的控制手段时, 通常要建立对象的动态微分方程模型。微分方程大多是物理或几何方面的典型问题, 假设条件已经给出, 只需用数学符号将已知规律表示出来, 即可列出方程, 求解的结果就是问题的答案, 答案是唯一的, 但是有些问题是非物理领域的实际问题, 要分析具体情况或进行类比才能给出假设条件。作出不同的假设, 就得到不同的方程。比较典型的有^[1]: 传染病的预测模型、经济增长预测模型、正规战与游击战的预测模型、药物在体内的分布与排除预测模型、人口的预测模型、烟雾的扩散与消失预测模型以及相应的同类型的预测模型。其基本规律随着时间的增长趋势是指数的形式, 根据变量的个数建立初等微分模型

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (\text{如传染病预测, 经济增长预测, 人口预测等})$$

* 收稿日期: 2006 - 08 - 22; 修回日期: 2006 - 10 - 13
作者简介: 张贻民(1980 -), 男, 湖南涟源人, 学士, 助教。

或者微分方程组

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(x(t)) \\ \dot{x}(0) = B \end{cases} \quad (\text{如正规战与游击战、药物的分布与排除预测等})$$

其中 $\dot{x}(t)$, $x(t)$ 均是列向量, A 、 B 是矩阵。

而后由于实际问题的改变,会出现外在的干预等,例如传染病模型,只有健康人才可能被传染为病人,病人治愈后仍有可能成为病人或者治愈后有免疫力,政府卫生部门的干预等,都会使得所建立的初等模型失败。为此根据情况可以适当地一步步改进所建立的初等模型,从而达到我们所需要的微分方程预测模型。改进包括:

$$\begin{aligned} (1) \text{ 常系数的改进 } & \begin{cases} \frac{dx}{dt} = r(t)x \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) \\ \dot{x}(0) = B \end{cases} \\ (2) \text{ 增加一个控制函数 } & \begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx + f(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A(x(t)) + f(t) \\ \dot{x}(0) = B \end{cases} \\ (3) \text{ 综合 } & \begin{cases} \frac{dx}{dt} = r(t)x + f(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t) \\ \dot{x}(0) = B \end{cases} \end{aligned}$$

以及一些相应的根据情况而进行的改进模型。得到模型后可以用 Matlab 软件来求解画出散点图,并比较拟合度。

微分方程模型的建立基于相关原理的因果预测法。该法的优点:短、中、长期的预测都适合,而且既能反映内部规律,反映事物的内在关系,也能分析两个因素的相关关系,精度相应的比较高,另外对初等模型的改进也比较容易理解和实现。该法的缺点:虽然反映的是内部规律,但是由于方程的建立是以局部规律的独立性假定为基础,故做中长期预测时,偏差有点大,而且微分方程的解比较难以得到。

2 时间序列法

将预测对象按照时间顺序排列起来,构成一个所谓的时间序列^[2,3],从所构成的这一组时间序列过去的变化规律,推断今后变化的可能性及变化趋势、变化规律,就是时间序列预测法。时间序列预测一般反映三种实际变化规律:趋势变化、周期性变化、随机性变化。

考虑一组给定的随时间变化的观察值 $\{z_t, t=1, 2, 3, \dots, n\}$, 如何选取合适模型预报 $\{z_t, t=n+1, n+2, \dots, n+k\}$ 的值。

2.1 平稳序列的预测模型

考虑和过去 p 个值有关

$$z_t = \alpha_1 z_{t-1} + \dots + \alpha_p z_{t-p} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \varepsilon_{t-1} + \dots + \varepsilon_{t-q}$$

以 $t+l$ 代换下标 t 得

$$z_{t+l} = \alpha_1 z_{t+l-1} + \dots + \alpha_p z_{t+l-p} + \varepsilon_{t+l}, \quad \varepsilon_{t+l} = \varepsilon_{t+l-1} + \dots + \varepsilon_{t+l-q}$$

对上式的两边求条件期望,则有

$$E_t[z_{t+l}] = \alpha_1 E_t[z_{t+l-1}] + \dots + \alpha_p E_t[z_{t+l-p}] + E_t[\varepsilon_{t+l}] = \alpha_1 E_t[z_{t+l-1}] + \dots + \alpha_q E_t[\varepsilon_{t+l-q}]$$

又由条件均值的性质知

$$E_t(z_{t-j}) = z_{t-j}, \quad j=0, 1, 2, \dots; \quad E_t(z_{t+j}) = \hat{z}_t(j), \quad j=1, 2, \dots;$$

$$E_t(\varepsilon_{t-j}) = (\varepsilon_{t-j}), \quad j=0, 1, 2, \dots; \quad E_t(\varepsilon_{t+j}) = 0, \quad j=1, 2, \dots$$

令 $\hat{z}_t = E_t[z_{t+j}], j=1, 2, \dots$, 则可得到 $\hat{z}_t(l)$ 用 $z_{t-j}, \varepsilon_{t-j}$ 和 $\hat{z}_t(l)$ 表示的表达式。这些公式可用来计算未来时刻序列的预报值,即随着未来时刻的到来,序列的值就能观测到,因而预报误差即可算出。对于有坏动

平均项的模型来说,一步预测误差还将在以后时刻的预报中用到。

2.2 自回归模型

如果 z_t 和 p 个过去值有关则是 p 阶自回归过程,记为 $AR(p)$,则有

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \dots + \phi_p z_{t-p} + u_t$$

式中: p 为自回归模型的阶数; $\phi_i (i=1,2,\dots,p)$ 为模型的待定系数; u_t 为随机剩余项;要求 $\{u_t\}$ 为一个白噪声序列, $\{z_t\}$ 为一个时间序列。 $AR(p)$ 模型把观测值 z_t 描述成其自身过去 p 个值 z_{t-1}, \dots, z_{t-p} 的线性回归与一个随机剩余项 u_t 的和,因此称为自回归模型。计算 $AR(p)$ 模型就是要利用给定的观测值 $\{z_t, t=1,2,3,\dots,n\}$ 确定 z_t 和几个过去值有关,相关关系如何,解得各阶 ϕ_i 的值。当 $p=1$ 时,即为 $AR(1)$ 线性模型,表明序列中的当前观测值和它的上一个观测值有关,但与前面的其他观测值均无关。

2.3 滑动平均模型

如果观测值 z_t 与过去 q 个误差有关,则将 z_t 描述为过去误差的线性回归,称为滑动平均模型,记作 $MA(q)$ 。其表达式为

$$z_t = u_t - \theta_1 u_{t-1} - \dots - \theta_q u_{t-q}$$

式中: q 为模型的阶数; $\theta_j (j=1,2,\dots,q)$ 为模型的待定系数; u_t 为误差; z_t 为观测值。 MA 模型的目的就是求各个 θ_j 的估计值。

2.4 自回归滑动平均混合模型

为了在实际时间序列的拟合中能有较大的灵活性,有时将自回归和滑动平均项一同纳入模型,此种做法是非常有效的,这就引出了自回归滑动平均混合模型,记为 $ARMA(p,q)$,其表达式为

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \dots + \phi_p z_{t-p} + u_t - \theta_1 u_{t-1} - \dots - \theta_q u_{t-q}$$

上面的模型统称 $ARMA$ 模型,是时间序列建模中最重要和最常用的预测手段。事实上,对实际中发生的平稳时间序列做恰当的描述,往往能够得到自回归、滑动平均或混合的模型,其阶数通常不超过 2。时间序列模型其实也是一种回归模型,属于定量预测,其基于的原理是,一方面承认事物发展的延续性,运用过去时间序列的数据进行统计分析就能推测事物的发展趋势;另一方面又充分考虑到偶然因素影响而产生的随机性,为了消除随机波动的影响,利用历史数据,进行统计分析,并对数据进行适当的处理,进行趋势预测。优点是简单易行,便于掌握,能够充分运用原时间序列的各项数据,计算速度快,对模型参数有动态确定的能力,精度较好,采用组合的时间序列或者把时间序列和其他模型组合效果更好。缺点是不能反映事物的内在联系,不能分析两个因素的相关关系,常数的选择对数据修匀程度影响较大,不宜取得太小,只适用于短期预测。

3 灰色预测理论模型

灰色预测^[3,4]是一种不严格的系统方法。以灰色系统理论为基础的灰色预测技术,可在数据不多的情况下找出某个时期内起作用的规律,建立负荷预测模型。建立灰色模型首先将原始燃气负荷数据累加生成成为近似有指数规律增长的数列,构造近似的不完全确定的微分方程, $GM(1,1)$ 模型是最常用的一种灰色模型

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = u$$

$GM(1,1)$ 模型预测的具体公式为

$$x^{(1)}(k+1) = [x^{(0)}(1) - \frac{u}{a}]e^{-ak} + \frac{u}{a}$$

$$x^{(0)}(k+1) = x^{(1)}(k+1) - x^{(1)}(k) = (e^{-a} - 1)[x^{(0)}(1) - \frac{u}{a}]e^{-ak}$$

式中: a, u 为模型参数,分别代表发展系数和灰作用度; $x^{(0)}(1)$ 为第一时刻的燃气负荷值; $x^{(1)}(k)$ 为一次累加生成的燃气负荷值; $x^{(1)}(k) = \sum_{i=0}^k x^{(0)}(i)$; $x^{(0)}(k+1)$ 为第 $k+1$ 时刻的燃气负荷值; $\{x^{(0)}\}$ 为原始燃气负荷序列; $\{x^{(1)}\}$ 为 $\{x^{(0)}\}$ 的一次累加生成数列。

灰色预测的基本思路是将已知的数据序列按照某种规则构成动态或非动态的白色模块,再按照某种变化、解法来求解未来的灰色模型。它的主要特点是模型使用的不是原始数据序列,而是生成的数据序列。其核心体系是灰色模型(GM),即对原始数据作累加生成(或其他方法生成)得到近似的指数规律再进行建模的模型方法。优点是不需要很多的数据,一般只需要4个数据就够,能解决历史数据少、序列的完整性及可靠性低的问题;能利用微分方程来充分挖掘系统的本质,精度高;能将无规律的原始数据进行生成得到规律性较强的生成数列,运算简便,易于检验,具有不考虑分布规律,不考虑变化趋势。缺点是只适用于中长期的预测,只适合指数增长的预测,对波动性不好的时间序列预测结果较差。

4 BP神经网络模型

BP神经网络模型^[2,5],是目前神经网络学习模型中最具代表性、应用最普遍的模式。BP神经网络架构是由数层互相联结的神经元组成,通常包含了输入层、输出层及若干隐藏层,各层包含了若干神经元。神经网络便于依照学习法则,透过训练以调整连结链加权值的方式来完成目标的收敛。所得的神经网络构架结构基本形式如图1。

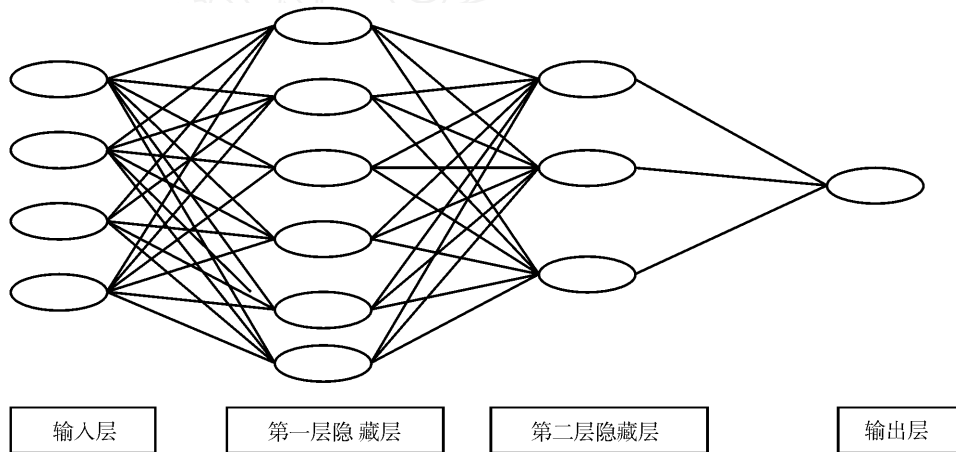


图1 神经网络图

BP神经网络的神经采用的传递函数一般都是 Sigmoid(S 状弯曲)型可微函数,是严格的递增函数,在线性和非线性之间显现出较好的平衡,所以可实现输入和输出间的任意非线性映射,适用于中长期的预测;优点是逼近效果好,计算速度快,不需要建立数学模型,精度高;理论依据坚实,推导过程严谨,所得公式对称优美,具有强非线性拟合能力。缺点是无法表达和分析被预测系统的输入和输出间的关系,预测人员无法参与预测过程;收敛速度慢,难以处理海量数据,得到的网络容错能力差,算法不完备(易陷入局部极小)。

5 结束语

本文综合介绍了几种基本预测方法的使用范围和相应的优缺点,学生可以根据以上的一些经验,在建立预测模型的时候可以依据不同的情况进行不同的选择,从而建立合理的数学模型。其实在一般情况下最合理的就是组合模型,也就是把上述的两种或两种以上的模型综合运用,所取得的精确度会更好,稳定性也会更好。

[参考文献]

- [1] 姜启源,谢金星,叶俊编. 数学模型[M]. 3版. 北京:高等教育出版社,2004.
- [2] 翟颖瑾,高晶. 长江未来水质污染的时间序列分析[J]. 沈阳师范大学学报(自然科学版), 2006,24(1):22-24.
- [3] 严铭卿,廉乐明. 燃气负荷及其预测模型[J]. 煤气与热力,2003,23(5):259-263.
- [4] 左书华,李九发. 长江河口年平均流量的灰色拓扑预测与趋势分析[J]. 水力发电,2005,31(12):19-21.
- [5] 周志华,曹存根. 神经网络及其应用[M]. 北京:清华大学出版社,2004.

(下转第45页)

$$Q = C_n^1 - C_n^3 k + \dots + (-1)^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_n^2 \left[\frac{n-1}{2}\right] + 1 k^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \quad \mathbf{Z}.$$

[参考文献]

- [1] 聂灵沼,丁石孙.代数基础[M].北京:高等教育出版社,2004.
 [2] 张忠志.离散数学[M].北京:高等教育出版社,2002.

An Expression of Commutative Semi - group Element

WU Si - min

(Maoming College ,Maoming ,525000 ,China)

Abstract : Based on the number set ,a new commutative semi - group is established in the integer number and extended in number fields of rational number , real number and the complex number. And an expression is given for the purpose of use.

Key words : binary relation ; commutative semi - group ; commutative group

(上接第 42 页)

Discussion on some Basic Prediction Methods about Mathematical Models

ZHANG Yi - min , LIANG Ming

(Maoming College ,Maoming ,525000 ,China)

Abstract : This article is intended to discuss about some models in prediction what the students can't distinguish and use them correctly. It has a summarization about some basic ways in prediction which are used frequently : the model of differential equation , the way of time sequence , gray model and BP neural networks. It has a simple introduction and analysis to every prediction model and has a lit improvement in some models. At the same time , the advantage and shortcoming of every model and how to use it are summarized here.

Key words : the model of differential equation ; the way of time sequence ; gray model ; BP neural networks