2009 年数模 C 题

摘要

本题的目的是在确定一定得测控角度的情况下，利用空间想象和相关文献资料设计最少测控站个数和具体飞船的覆盖范围。

问题一利用以有限观测站点实现关键弧段连续测控的方法进行求解。求解所需建立观测站点的最少数目，首先优先考虑每个观测站所能观测到的最大范围，因此仅考虑测控范围边界线与地平面成 3 度角这一临界条件。地面上任意一个测控站在卫星轨道上所能观测到的范围为一段弧长 L，然后根据卫星绕地球飞行轨道的总长度与每个测控站点测控范围长度的关系求出至少应该建立 12 个测控站。

关于问题二我们推想卫星实际运行轨迹为离地 H 高度的球 s 除去上下各一个球冠的区域，然后寻求此区域面积与测控站所能测控最大范围面积的关系，查询相关数据，借助 MATLAB 求解出测控站数 n 与轨道高度 H 的关系式为 $n=\dfrac{4\sin\beta}{\cos^2(\alpha+\arcsin\dfrac{R\cos\alpha}{R+H})}$。

在问题三中，将模型二结果与实际作比较，发现有一定的差距，于是我们联系实际，通过书籍和网络查找相关数据，将模型实际化，结合墨卡托投影原理，设想一个与地轴方向一致的圆柱割于球 s，按等角条件将经纬网投影到圆柱上，将圆柱面展为平面后，得平面经纬网。此经纬网将每个观测站观测覆盖范围分成若干小方格，利用油膜法计算出观测范围的覆盖率 η 为 59.37%。

论文的末尾给出了模型优缺点的分析和评价，并提出了模型的改进的方向：当考虑到发射阶段这一复杂过程时，若把发射过程轨迹考虑成抛物线，并放入直角坐标系中求出轨迹方程，再去完善模型，结果会更加的精确。

关键字：测控站数　　轨迹　　图论　　墨卡托投影原理　　油膜法

一、 问题的重述

卫星和飞船在国民经济和国防建设中有着重要的作用，对它们的发射和运行过程进行测控是航天系统的一个重要组成部分，理想的状况是对卫星和飞船（特别是载人飞船）进行全程跟踪测控。

测控设备只能观测到所在点切平面以上的空域，且在与地平面夹角 3 度的范围内测控效果不好，实际上每个测控站的测控范围只考虑与地平面夹角 3 度以上的空域。在一个卫星或飞船的发射与运行过程中，往往有多个测控站联合完成测控任务，如神州七号飞船发射和运行过程中测控站的分布如下图所示：

图片来源 http://www.gov.cn/jrzg/2008-09/24/content_1104882.htm

请利用模型分析卫星或飞船的测控情况，具体问题如下：

1. 在所有测控站都与卫星或飞船的运行轨道共面的情况下至少应该建立多少个测控站才能对其进行全程跟踪测控？

2. 如果一个卫星或飞船的运行轨道与地球赤道平面有固定的夹角，且在离地面高度为 H 的球面 S 上运行。考虑到地球自转时该卫星或飞船在运行过程中相继两圈的经度有一些差异，问至少应该建立多少个测控站才能对该卫星或飞船可能飞行的区域全部覆盖以达到全程跟踪测控的目的？

3. 收集我国一个卫星或飞船的运行资料和发射时测控站点的分布信息，分析这些测控站点对该卫星所能测控的范围。

二、问题的分析

第一问中在所有测控站都与卫星运行轨道共面的情况下，我们考虑地面上任一个测控站在卫星轨道上所能观测到的范围为一段弧长 L，因为只考虑观测范围与地平面的夹角在 3 度以上的空域，角度越大所观测到卫星轨道上得范围最大，因此只有在测控范围地平面得夹角等于 3 度的时候每个测控站有最大的测控范围。然后根据卫星绕地球飞行轨迹的总长度和每个测控站点测控范围总长度就能求出至少应该建立多少个测控站。

第二问考虑到卫星运行轨道与地球赤道平面有固定的角度，地球自转时该卫星在运行过程中相继两圈的经度有些差异。下面我们给出了一个神舟七号轨迹图，图中红线表示神舟七号飞船飞行的轨迹，卫星绕地球飞行的总轨迹可以大体上看成是一个包围了地球的笼状球结构。我们需要讨论的是地面上的观测站所观测的范围能把飞船经过的路径包括进去（即在测控站的测控范围之内）。只有将这些一个个的测控范围拼到一起才能完成对卫星的全程跟踪测控。其次，我们需要考虑观测站观测范围的形状，可想而知当形状为圆形的时候测控站的测控面积是最大的。因为卫星在球面 s 上运行时不经过球冠区域，所以应该只考虑去掉球冠后球面 s 的区域。

第三问我们分析二问的模型得出的结果并应用其模型，考虑测控站测控覆盖范围与实际的偏差，以神七为例从实际出发进一步分析，收集其运行资料和测控站点分布信息，建立模型计算覆盖率。

三、 模型的假设

1. 假设地球是一个规则的球体
2. 假设卫星轨道是圆形的
3. 假设卫星运行方向与地球自西向东旋转方向相同，且卫星速度大于地球自转
4. 假设卫星发射过程阶段在测控范围以内
5. 假设卫星在太空飞行时不受阻力、电磁波等一切外界干扰条件的影响。

四、 符号说明

n ： 所需测控站点的个数

υ_0： 卫星绕地球飞行的速度

υ_1： 地球赤道面上的线速度

$\upsilon_1^{'}$： 地球上测控点在卫星轨道面上的线速度

h ： 卫星轨道距离地面的高度

H： 轨道面与赤道面有固定角度时卫星运行轨道距离地面的高度

L： 卫星测控范围在卫星轨道上的弧长

r ： 测控站测控范围的半径

R： 地球半径

α： 观测点的切平面与测控范围边界的夹角

α_0： 测控范围在卫星轨道上的边界点与地心和观测站连线的夹角

θ： 测控范围在卫星轨道上的边界点与地心连线的夹角

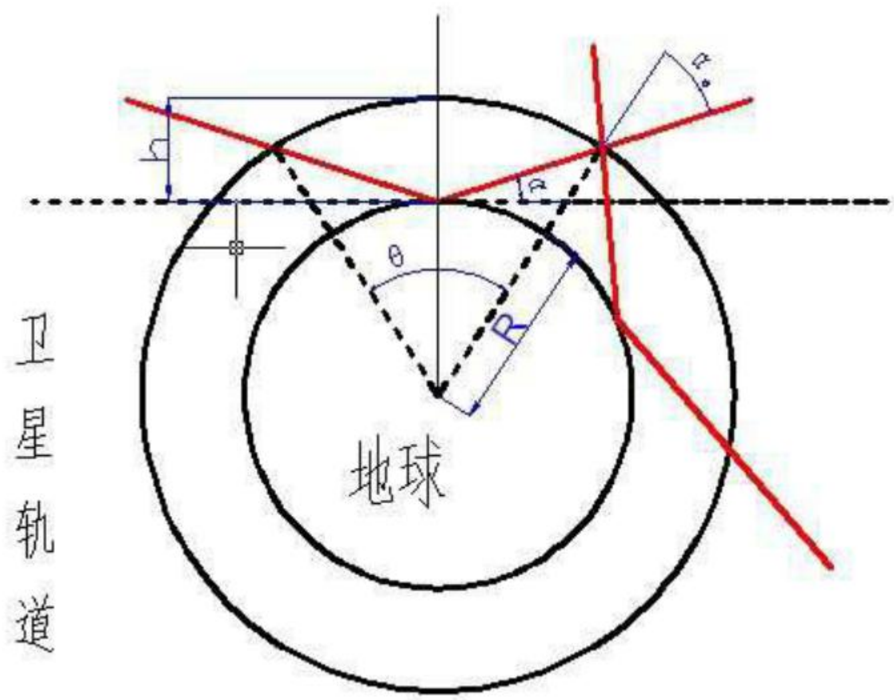
β： 卫星轨道与赤道平面夹角

五、模型的建立与求解

5.1 关于问题 1 的模型建立与求解

根据所有测控站都与卫星的运行轨道共面的情况下，卫星轨道和所有测控站看成是两个同心圆。不考虑地球自转等其它的因素的影响，利用观测范围角度最大（即每个测控站的测控范围的边界与地平面的夹角成3°)时，建立测控站个数n与卫星轨道高度h之间的关系。

根据题意及假设，画出测控站测控卫星运行简易图：



图（一）

由正弦定理得：

$$\frac{R+h}{\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)}=\frac{R}{\sin\alpha_0}$$

则

$$\alpha_0=\arcsin(\frac{R\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)}{R+h}) \qquad \text{（式 1）}$$

由三角形内角和得：

$$\frac{\theta}{2}=\pi-(\frac{\pi}{2}+\alpha)-\alpha_0 \qquad \text{（式 2）}$$

由扇形的弧长公式得：

$$L=\theta(R+h) \qquad \text{（式 3）}$$

所需卫星测控站数：

$$n=\frac{2\pi(R+h)}{L} \qquad \text{（式 4）}$$

利用 Matlab 将式（1）（2）（3）（4）联立求得 n 与 h 的关系式：

$$n=\frac{2\pi}{\pi-2\alpha-2\arcsin(\dfrac{R\cos\alpha}{R+h})}$$

代入神舟七号飞船的数据：$R=6371$（千米），$h=343$（千米），$\alpha=3^{\circ}$ 进行验证：

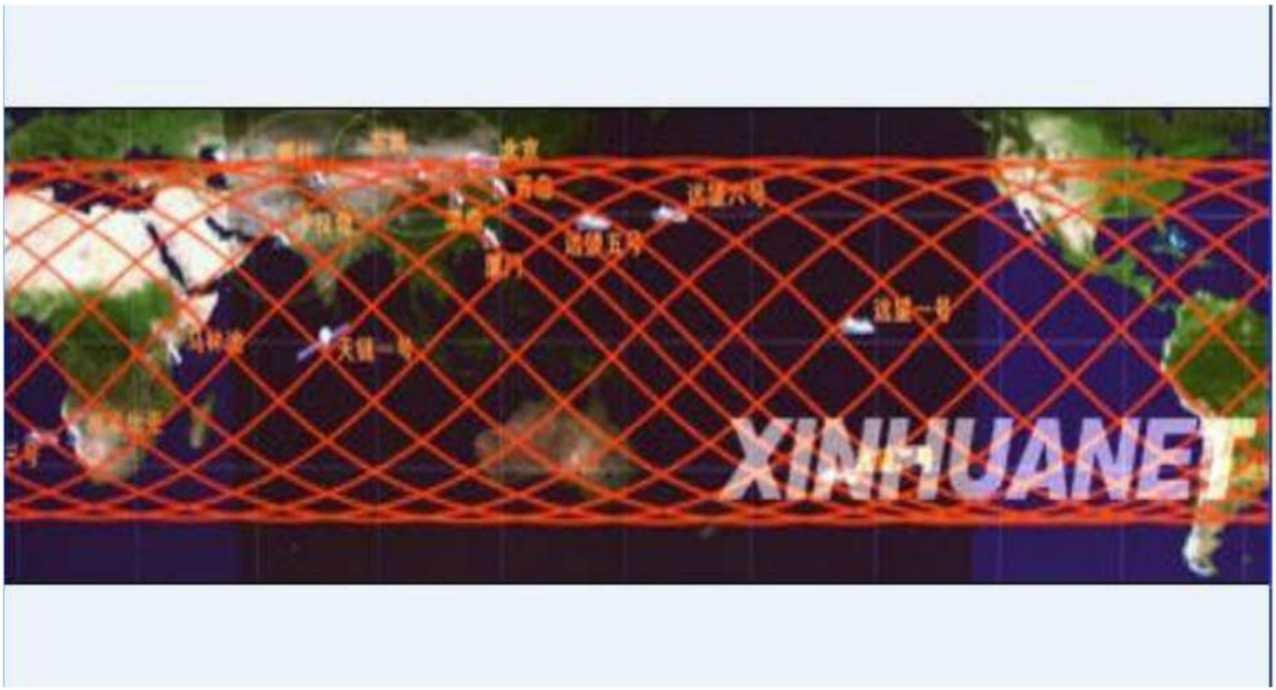
$$n=11.5178$$

根据实际情况 n 等于 12.

5.2 关于问题 2 的模型建立与求解

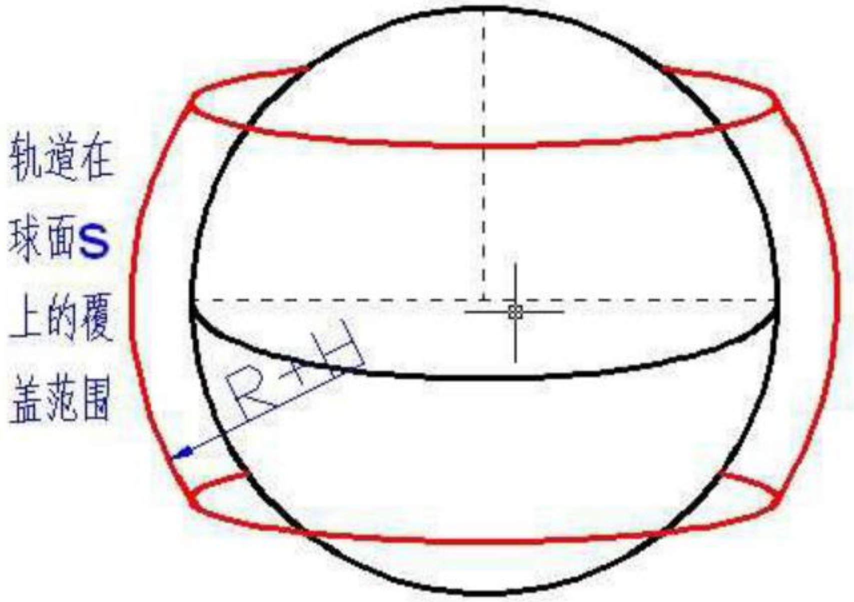
与问题 1 不同的是卫星运行轨道与赤道平面有固定的夹角，而且考虑到地球自转时该卫星在运行过程中相继两圈的经度存在差异。根据卫星运行轨迹所在离地高度为 h 的球面 s 上的覆盖面积和一个测控站测控范围的面积可以求出应建立测控站个数 n。

卫星实际运行轨迹图像如下：



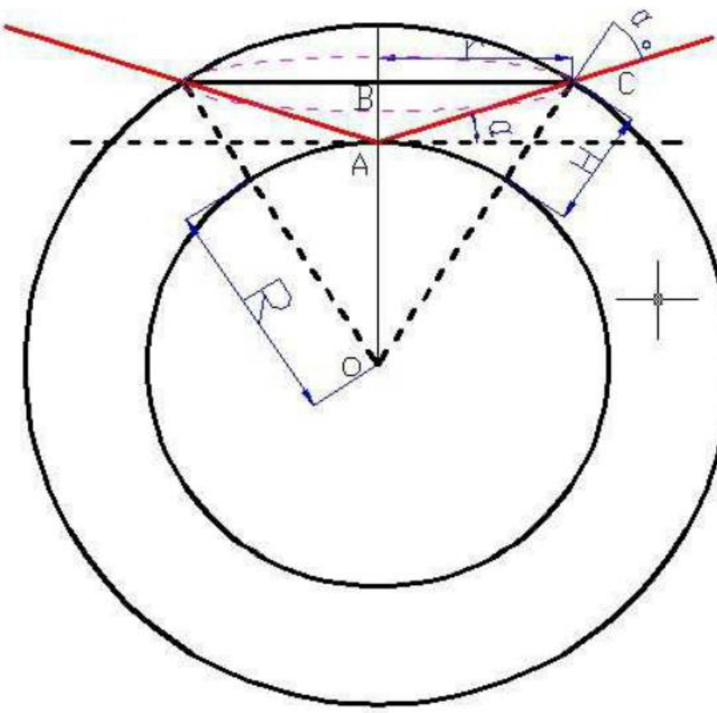
图（二）

下图为球 s 去掉上下球冠后的球面图：



图（三）

测控站所观测范围图：



图（四）

卫星运行轨迹球面 S 的总表面积：

$$S_1 = 4\pi(R+H)^2 \qquad \text{（式 5）}$$

根据球冠公式得球面 s 的球冠为：

$$S_2 = 2\pi(R+H)^2(1-\sin\beta) \qquad \text{（式 6）}$$

则卫星实际经过球面 s 上的面积：

$$S_3 = S_1 - 2S_2 \qquad \text{（式 7）}$$

根据正弦定理有：

$$\frac{R+H}{\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)} = \frac{R}{\sin\alpha_0} \qquad \text{（式 8）}$$

测控站的观测范围面积：

$$S_4 = \pi r^2 = \pi[(R+H)\cos(\alpha+\alpha_0)]^2 \qquad \text{（式 9）}$$

出于计算和实际考虑，我们将圆假设为一个等面积的正方形进行计算
所需卫星测控站数：

$$n = \frac{S_3}{S_4} \qquad \text{（式 10）}$$

利用 Matlab 解（5）（6）（7）（8）（9）（10）式得：

$$n = \frac{4\sin\beta}{\cos^2(\alpha + \arcsin\frac{R\cos\alpha}{R+H})}$$

代入神舟七号飞船的数据：$R = 6371$（千米），$H = 343$（千米），$\alpha = 3^{\circ}$，$\beta = 42.4^{\circ}$
进行验证：

$$n = 37.1662$$

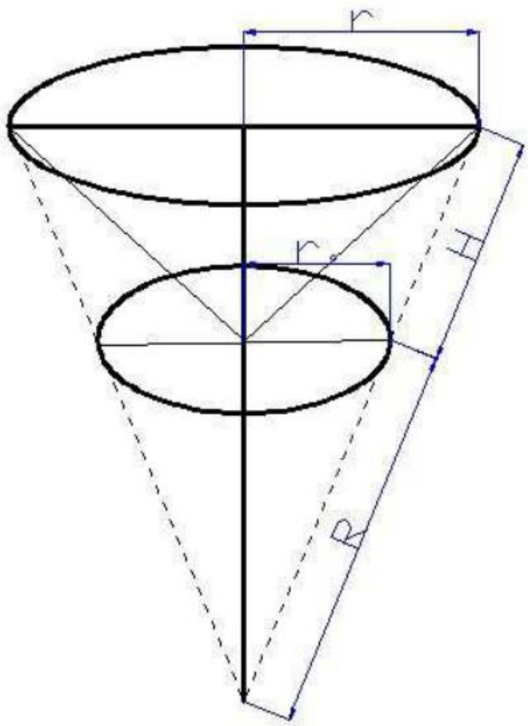
根据实际情况取 n 等于 38.

5.3 关于问题 3 的模型建立与求解

我们将神州七号飞船相关数据带入模型二中，发现有一定的差距，可见模型二是建立在在理想情况下，于是我们将问题实际化，以神舟七号在人飞船为例进一步建立模型，通过上网查阅资料，搜集了我国神州 7 号飞船运行资料和相关测控站点的分部信息，飞船运行在轨道倾角 42.4 度、近地点高度 200 公里、远地点高度 350 公里的椭圆轨道上，实施变轨后，进入 343 公里的圆轨道。根据测控站在卫星轨道上的测控范围的边界点与地心连线得出在地球表面上与该范围对应区域并建立相应模型，利用墨卡托投影原理和油膜法，得出测控站点对神州 7 号所能测控的范围。

查得国内固定 6 站和国外 4 站经纬列表如下：

站名	纬度	经度
东风站	北纬 39° 41′	东经 98° 30′
喀什站	北纬 39° 24′	东经 76° 06′
和田站	北纬 37° 06′	东经 79° 55′
青岛站	北纬 36° 11′	东经 120° 18′
渭南站	北纬 34° 29′	东经 109° 30′
厦门站	北纬 24° 35′	东经 117° 58′
纳米比亚站	北纬 22° 40′	东经 14° 31′
卡拉奇站	北纬 24° 51′	东经 67° 00′
马林迪站	南纬 3° 13′	东经 40° 06′
圣地亚哥站	南纬 33° 26′	东经 70° 38′



图（五）

将地球沿经度方向切开平展，沿纬度方向平均分成 36 段，沿纬度方向分成 24 段则每段经度差异为 10 度。

因为地球赤道周长为 4 万千米，所以相邻两经度的距离 d 约为 1.1×10^{6} m，卫星运行轨道离地面高度为 343 千米，地球半径为 6371 千米。

根据三角形相似 $\dfrac{R}{R+H}=\dfrac{r_0}{r}$ 解出：

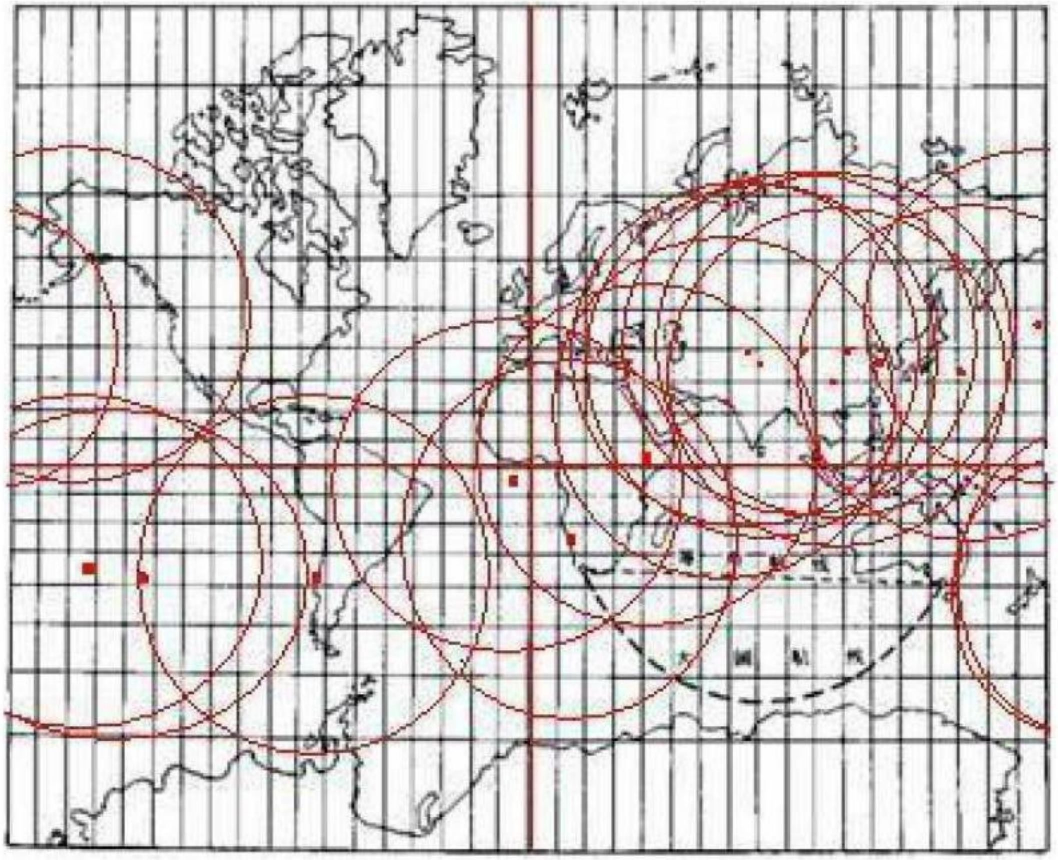
$r_0=\dfrac{R}{R+H}r=6.37\times10^{6}$ （米）

由 r_0 与 d 的关系知：

$$\frac{r_0}{d}\approx 6$$

可认为测控站测控到卫星轨道圆面在地球上的投影是一个以 6 个方格子为半径的圆面。联系各观测站点的经纬位置可在图中确定观测站的具体位置，进而确定它在地球上的对应区域。

方案如图所示：



图(六)`

地球面积求解和测控范围的求解

将此图分成 36×24 的格子图，由油膜法计算，认为大于半格为一个格子，小于半格忽略不计，得出覆盖的格子为 513 个，求出覆盖率：

$$\eta = \frac{513}{36\times 24} = 59.37\%$$

六、模型的评价与应用

优点：我们的模型由简到繁，由易到难。在第一问中不考虑地球自转和角度等方面的影响。在第二问中考虑了地球自转以及赤道面与卫星轨道面的夹角，使得问题更实际精确。第三问运用第二问得出的模型，对实际例子（神七）进行分析建模，所用方法有所创新。

缺点与改进：建立的模型虽然在一步步实际化，但总体来说都有些理想，比如在问题三中测控站经纬度并不精确，在卫星发射和变轨阶段考虑欠佳，卫星发射轨迹可以看作抛物线，而测控站测控的高度就与理想化中的高度不符，若在计算时考虑这些方面，则所得的测控覆盖率会更精确。其他有些方面也有些理想化，不利于实际操作，需要进一步改进。

应用：模型不仅应用于各类卫星的跟踪和测控，而且可以应用于飞船等航天器的跟踪和测控。也可以应用于雷达对高速公路上汽车的速度测量和航海中对轮船的监控，还可以应用在移动信号的接收和航空航海的导航等领域。

参考文献

1. 蔡锁章 《数学建模原理与方法》 北京 海洋出版社 2000 年
2. 曹 戈 《MATLAB 教程及实训》 北京 机械工业出版社 2008 年 5 月
3. 小木虫 墨卡托投影的原理和性质 《测绘通报》 02 期 1957 年
4. 袁生潮 “油膜法测分子直径”的模拟实验 5http://kecheng.edu.people.com.cn/index/

附录：

问题 1 程序

```
>> syms a h R
>> a0=asin((R*sin(pi/2+a))/(R+h))

a0 =

asin(R*cos(a)/(R+h))

>> Q=2*(pi/2-a-a0)

Q =

pi-2*a-2*asin(R*cos(a)/(R+h))

>> l=Q*(R+h)

l =

(pi-2*a-2*asin(R*cos(a)/(R+h)))*(R+h)

>> n=(2*pi*(R+h))/l

n =

2*pi/(pi-2*a-2*asin(R*cos(a)/(R+h)))
```

```
>> R=6371000

R =

     6371000

>> h=343000

h =

       343000

>> a=pi/60

a =

    0.0524

>> n=2*pi/(pi-2*a-2*asin(R*cos(a)/(R+h)))

n =

   11.5178
```

问题 2 程序

```
>> syms R H a b
>> s1=4*pi*(R+H)^2

s1 =

4*pi*(R+H)^2
```

```
>> s2=2*pi*(R+H)^2*(1-sin(b))

s2 =

2*pi*(R+H)^2*(1-sin(b))

>> s3=s1-2*s2

s3 =

4*pi*(R+H)^2-4*pi*(R+H)^2*(1-sin(b))

>> a0=asin((R*sin(pi/2-a))/(R+H))

a0 =

asin(R*cos(a)/(R+H))

>> r=(R+H)*cos(a+a0)

r =

(R+H)*cos(a+asin(R*cos(a)/(R+H)))

>> s4=pi*r^2

s4 =

pi*(R+H)^2*cos(a+asin(R*cos(a)/(R+H)))^2
```

```
>>  n=s3/s4

n =

(4*pi*(R+H)^2-4*pi*(R+H)^2*(1-sin(b)))/pi/(R+H)^2/cos(a+asin(R*cos(a)/(R+H)))^2

>> a=pi/60

a =

    0.0524

>> b=(42.4*pi)/180

b =

    0.7400

>> R=6371000

R =

     6371000

>> H=343000

H =
```

343000

```
>>
n=(4*pi*(R+H)^2-4*pi*(R+H)^2*(1-sin(b)))/pi/(R+H)^2/cos(a+asin(R*cos(a)/(R+
H)))^2

n =

    37.1662
```