

2010 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

承 诺 书

我们仔细阅读了中国大学生数学建模竞赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们参赛选择的题号是（从 A/B/C/D 中选择一项填写）： A

我们的参赛报名号为（如果赛区设置报名号的话）： J1430

所属学校（请填写完整的全名）： 西安交通大学

参赛队员（打印并签名）： 1. 刘帅

2. 王同磊

3. 王晓冰

指导教师或指导教师组负责人（打印并签名）： 王立周

日期： 2010 年 9 月 13 日

赛区评阅编号（由赛区组委会评阅前进行编号）：

2010 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

编 号 专 用 页

赛区评阅编号（由赛区组委会评阅前进行编号）：

赛区评阅记录（可供赛区评阅时使用）：

评 阅 人										
评 分										
备 注										

全国统一编号（由赛区组委会送交全国前编号）：

全国评阅编号（由全国组委会评阅前进行编号）：

储油罐的变位识别与罐容表标定的研究

摘 要

本文运用定积分的方法求解出了储油罐储油体积与显示的油位高度关系,对储油罐的变位识别与罐容表标定问题进行了较为深入的研究。

针对问题1,首先运用定积分的方法求出了无变位小椭圆型储油罐储油体积与显示的油位高度的关系式,发现无变位情况下的理论储油体积与实际的储油体积相符,但理论计算值总是略大于实际值。经分析知这些偏差是由罐体结构所引起的固有偏差,须添加到模型中。故利用多项式拟合中的三次拟合对其拟合,得到了偏差与显示的液面高度之间的关系式。添加到之前的模型,从而得到了修正后的储油罐罐容表标定模型。对修正后的模型进行检验,发现其结果与实际结果高度一致。然后,又利用坐标变换下的积分求出了纵向倾斜情况下储油罐储油体积与显示的液面高度之间的关系式。对偏差数据进行拟合,得到了偏差与显示的液面高度的关系。将偏差对储油体积的影响从模型中去除,从而得到了修正后的储油罐罐容表标定模型。最后,利用修正后的储油罐罐容表模型得到了无变位和纵向倾斜情况下油位高度间隔为1cm的罐容表标定值,并将两者进行了对比,发现了罐体变位对罐容表的影响。

对于问题2,首先也是求解无变位储油罐的储油容积与油位高度的关系。先求出其解得积分形式,然后利用MATLAB中int函数求得其解析解。并与附件二中所给显示容量和显示高度数据对比,二者完全相符,说明该模型为所给储油罐的罐容表制定的依据。然后,对于发生变位情况的储油罐罐容表标定模型,我们将其分为只有纵向倾斜变位的储油罐容积表标定模型和一般情况下的模型,而后者可以在前者的基础上求解。利用积分得到了只有纵向变位模型的完整的积分形式的解,但是得不到解析解,并且求解的时间复杂度很高。为此本文在此基础上,对模型进行简化,有效地降低了其时间复杂度。然后利用附件二出油量残差平方和最小原则确定了纵向倾斜和横向偏转的角度($\alpha = 2.1^\circ, \beta = 4.8^\circ$)即变位识别,并在此基础上求得了储油罐罐体发生变位后油位高度间隔为10cm的罐容表标定值。最后,我们又利用附件2中的一次性补充进油后的数据对模型的正确性与方法的可靠性进行了检验,检验结果表明我们建立的模型具有较高的准确性以及在 α 较小时有较高的可靠性。

以上求得的结果具有较高的精确度和可行性,对于加油站确定储油罐的变位识别情况和罐容表的标定具有一定的指导意义。

关键词: 储油罐 变位识别 罐容表标定 无偏位 纵向倾斜 横向偏转
变位参数 定积分 多项式拟合

一、 问题重述

1.1. 背景资料与条件

通常加油站都有若干个储存燃油的地下储油罐，并且一般都有与之配套的“油位计量管理系统”，采用流量计和油位计来测量进/出油量与罐内油位高度等数据，通过预先标定的罐容表（即罐内油位高度与储油量的对应关系）进行实时计算，以得到罐内油位高度和储油量的变化情况。

许多储油罐在使用一段时间后，由于地基变形等原因，使罐体的位置会发生纵向倾斜和横向偏转等变化（以下称为变位），从而导致罐容表发生改变。按照有关规定，需要定期对罐容表进行重新标定。

1.2. 需要解决的问题

用数学建模方法研究解决储油罐的变位识别与罐容表标定的问题。

（1）为了掌握罐体变位后对罐容表的影响，利用如图4的小椭圆型储油罐（两端平头的椭圆柱体），分别对罐体无变位和倾斜角为 $\alpha=4.1^\circ$ 的纵向变位两种情况做了实验，实验数据如附件1所示。请建立数学模型研究罐体变位后对罐容表的影响，并给出罐体变位后油位高度间隔为1cm的罐容表标定值；

（2）对于图 1 所示的实际储油罐，试建立罐体变位后标定罐容表的数学模型，即罐内储油量与油位高度及变位参数（纵向倾斜角度 α 和横向偏转角度 β ）之间的一般关系。请利用罐体变位后在进/出油过程中的实际检测数据（附件 2），根据你们所建立的数学模型确定变位参数，并给出罐体变位后油位高度间隔为 10cm 的罐容表标定值。进一步利用附件 2 中的实际检测数据来分析检验你们模型的正确性与方法的可靠性。

二、 问题分析

2.1. 问题的重要性分析

通常在加油站中储油罐一般都埋于地下，而由于油罐的不可视性，人们无法直观地探测到油罐的实时容积，从而无法确定何时向油罐中充油，进而导致及时地向油罐补充油料。现在加油站可以利用地下储油罐采用流量计和油位计来测量进/出油量与罐内油位高度等数据，如果可以事先标定好罐容表（即罐内油位高度与储油量的对应关系），那么就可以通过实时计算得到罐内油位高度和储油量的变化情况，从而及时的向油罐补充油料。

许多储油罐在使用一段时间后，由于地基变形等原因，使罐体的位置会发生纵向倾斜和横向偏转等变化（以下称为变位），从而导致罐容表发生改变，如果此时仍然按照原先标定的罐容表判断加油时间及加油量，会对人们及时的补充油料产生不利的影响。为了能够正确的表示出油罐储油量与油位高度的关系，需要根据其纵向倾斜和横向偏转情况对罐容表进行重新标定。

2.2. 问题的思路分析

对于问题1，在未变位的情况下，小椭圆型储油罐为一个规则的几何体，故可以建立相应的直角坐标系，运用定积分的方法求出无变位小椭圆型储油

罐储油体积与油位高度的关系式。而对于发生了纵向倾斜的小椭圆型储油罐，我们利用坐标变换法对其盛油体积进行积分计算，从而求出纵向倾斜情况下储油罐储油体积与液面高度之间的关系式。最后，利用之前分别求得的无变位储油罐罐容表模型和纵向倾斜储油罐罐容表模型，代入计算求得无变位和纵向倾斜情况下油位高度间隔为1cm的罐容表标定值，并将两者进行了对比，从而找出储油罐罐体发生变位后对罐容表的影响。

对于问题2，首先也是通过引入相对容积和相对高度的概念求解无变位储油罐的储油容积与油位高度的关系。但是由于此时的积分运算十分复杂，很难求出其精确的解析解，因此我们可以采用数值近似计算的方法建立相应的模型，并对该模型进行求解。然后，我们可以将变位问题简化为只有纵向倾斜变位的储油罐容积表标定模型又发生了横向偏转的问题，从而大大简化运算。在此基础上，利用残差最小原则确定纵向倾斜和横向偏转角度，并在此基础上求得储油罐罐体发生变位后油位高度间隔为10cm的罐容表标定值。最后，利用附件2中的实际检测数据对建立模型的正确性与方法的可靠性进行检验，检验建立的模型的正确性和使用的方法的准确性。

三、 基本假设

- 1) 假设油位探针是固定的，即其始终垂直于储油罐底部；
- 2) 模型四中假设近似计算部分倾斜角 α 较小（实际的储油罐纵向倾斜角 α 不可能很大）；

四、 符号说明

符号	符号说明
h	油位高度
V	小椭圆型储油罐储油体积
α	储油罐纵向倾斜角
β	储油罐横向偏转角
a	储油罐椭圆截面长半轴长
b	储油罐椭圆截面短半轴长
l	储油罐圆柱部分长度

五、模型的建立与求解

5.1. 罐体纵向变位对小椭圆型储油罐罐容表的影响模型（问题一）

5.1.1 模型一——无变位小椭圆型储油罐罐容表标定模型

（一）模型一的建立

储油罐内油品体积是油品液面高度的函数。在某一液面高度 h 下，椭圆柱储油罐内储油体积 V 与液面高度 h 满足关系式： $V = f(h)$ 。

根据积分的概念，油品体积微元

$$dV = S(y)dy。 \quad (1)$$

$$\text{而其中 } S(y) = 2xl, \quad x > 0 \quad (2)$$

又该小椭圆型储油罐截面为一个椭圆。
其数学方程为：

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (3)$$

其中 a, b 分别为椭圆的长短半轴长。

对上式进行变换求解，得：

$$x = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}。 \quad (4)$$

即有：

$$\begin{aligned} v = f(h) &= \int dV = \int S(y)dy = \int 2xldy \\ &= 2l \frac{a}{b} \int_{-b}^d \sqrt{b^2 - y^2} dy = \frac{al}{b} \left(b^2 \arcsin \frac{d}{b} + \frac{\pi}{2} b^2 + d \sqrt{b^2 - d^2} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $d = h - b$ 。

将 $d = h - b$ 代入上式中求体积 V ，得：

$$V = f(h) = \frac{al}{b} \left[b^2 \arcsin \left(\frac{h}{b} - 1 \right) + \frac{\pi}{2} b^2 + (h - b) \sqrt{h(2b - h)} \right]。 \quad (6)$$

即：

$$V = f(h) = \frac{al}{b} \left[b^2 \arccos \left(1 - \frac{h}{b} \right) + (h - b) \sqrt{h(2b - h)} \right]。 \quad (7)$$

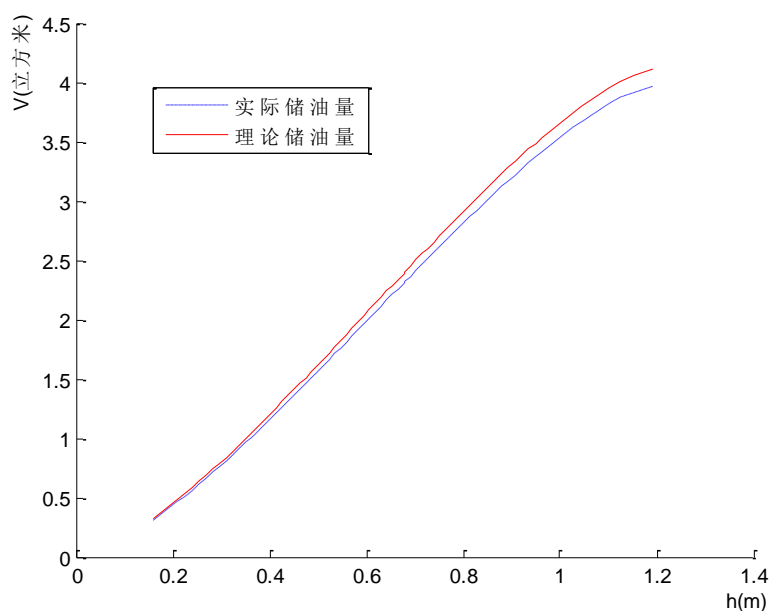
由以上关系 $V = f(h)$ 可以确定，罐内油品体积 V 是随着油品液面高度 h 的增高而增多，降低而减少的。

（二）模型一的运用与求解

小椭圆油罐的各参数值分别为： $a = \frac{1.78}{2} = 0.89 m$ ， $b = \frac{1.2}{2} = 0.6 m$ ， $L = 0.4 + 2.05 = 2.45 m$ 。根据式（6），代入以上参数，可得

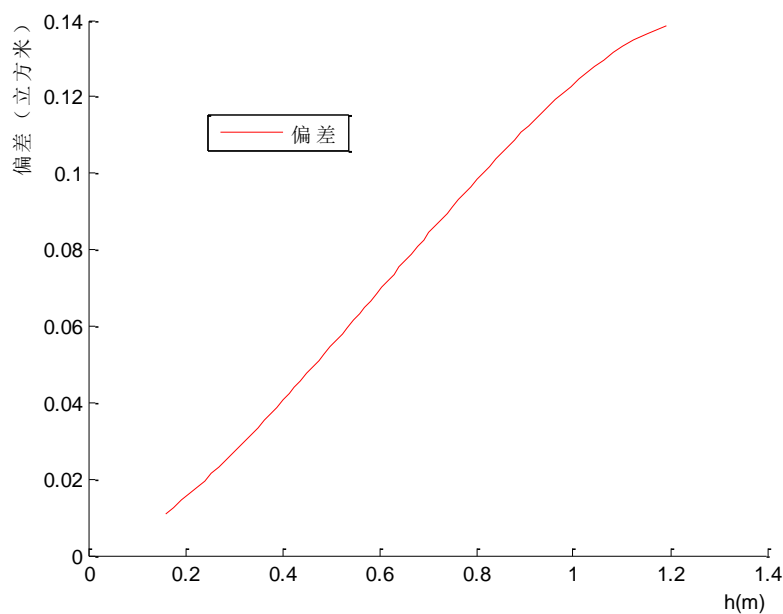
$$V = 3.634 \left[0.36 \frac{h}{0.6} \arcsin\left(\frac{\pi}{2} \times 1\right) h - \theta \sqrt{h} \right] \quad (8)$$

利用 MATLAB 画出储油量与油位高度的关系曲线和附录一中所给的小椭圆型储油罐无变位进油所得到的储油量与油位高度关系曲线之间进行对比作图，如图一所示。



图一 理论计算储油量与实际储油量曲线

对照图一中的两条曲线，由（7）式所计算的储油量与实际情况基本相符，但理论计算储油量总是略大于实际值，其偏差图像如图二所示：



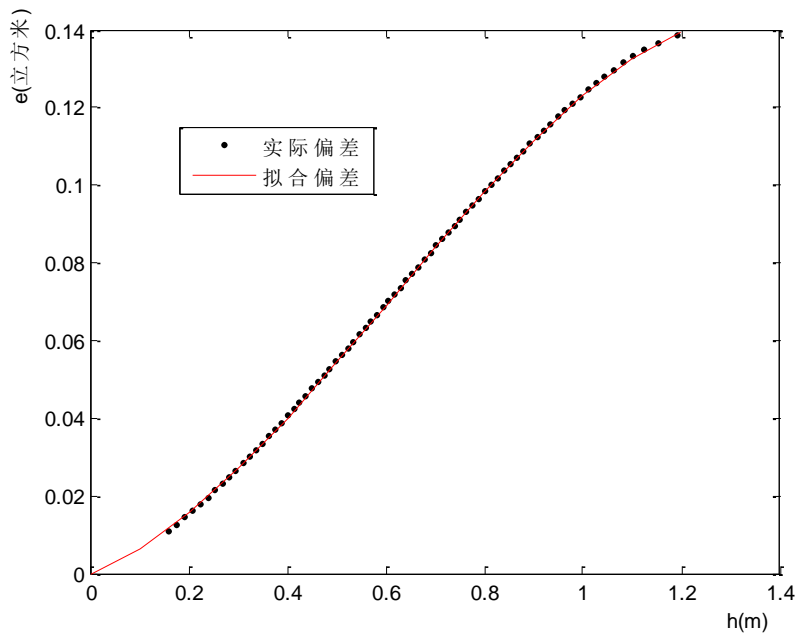
图二 理论计算储油量与实际储油量偏差图

由图三可知，偏差随油位高度的增大而增大。经分析和查阅相关文献^[1]发现，该偏差主要由罐内附件（如油位探针、注油管、出油管等）的浸入油内部分以及罐体由于压力而形变等因素引起。由于影响因素较多且难以用原理推导出具体偏差与其影响因素的关系式，故本文采用多项式拟合的方法来获得偏差与油位高度的关系式。

设偏差为 e ，通过不同次幂多项式拟合比较发现，三次拟合效果较好，同时考虑到当油位高度 $h=0$ 时，有 $e=0$ 。故在三次拟合函数中去除常数项，用 spss 18.0 重新拟合得如下结果：

$$e = -0.090h^3 + 0.164h^2 + 0.049h \quad (9)$$

实际偏差与拟合偏差如图三所示。



图三 实际偏差与拟合偏差曲线图

将偏差的影响从模型一中去掉，即可得到修正后无变位小椭圆型储油罐罐容表标定模型。

修正后的无变位小椭圆型储油罐罐容表标定模型其罐内油品体积 v 与油品液面高度 h 之间关系如下：

$$\begin{aligned} V &= 3.634 \left[0.36 \arcsin\left(\frac{h}{0.6}\right) - 1 + \frac{\pi}{2} \times 0.36 + (h - 0.6) \sqrt{h(1.2 - h)} \right] - e \\ &= 3.634 \left[0.36 \arcsin\left(\frac{h}{0.6}\right) - 1 + \frac{\pi}{2} \times 0.36 + (h - 0.6) \sqrt{h(1.2 - h)} \right] \\ &\quad - (-0.090h^3 + 0.164h^2 + 0.049h) \end{aligned} \quad (10)$$

油位高度 h 从0到1.2m，每隔0.01m取值，分别根据式（10）求储油量 v ，即可得到无变位情况下的小椭圆型储油罐罐容表。

无变位储油罐罐容表见附录一。

5.1.2 模型二——倾斜小椭圆平顶卧式油罐罐容表模型

(一) 模型二的建立

在 $O-X'Y'Z$ 坐标平面内，满足方程：

$$\frac{z'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \quad (11)$$

由 (11) 式，得：

$$z = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y'^2} \quad (12)$$

油罐倾斜可以认为是油罐位置不变而所在坐标系发生了变换，即由 $O-X'Y'Z$ 坐标系变换到 $O-XYZ$ 坐标系，则两个坐标系之间坐标转换如下：

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{cases} \quad (13)$$

即又有：

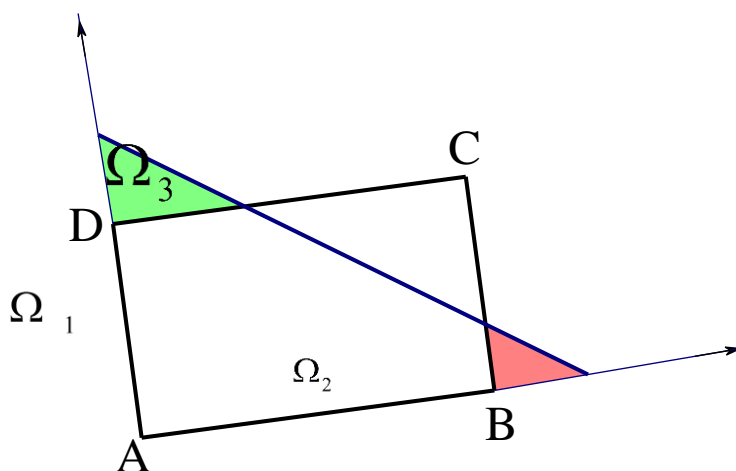
$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y' = y \cos \alpha - x \sin \alpha \end{cases} \quad (14)$$

故将式 (14) 代入到 (12) 式中，即有：

$$z = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2} \quad (15)$$

下面求椭圆正截面柱体 ABCD 体积的积分公式。

首先求 Ω_1 ， Ω_2 ， Ω_3 积分区域的积分公式。其中 Ω_1 为射线 AB 和射线 AD 之间所夹区域； Ω_2 为射线 AB 和射线 BC 之间所夹区域； Ω_3 为射线 DC 和射线 AD 之间所夹区域，如图四所示。



图四 三个积分区域示意图

由于正截面椭圆在 z 轴方向以 $z=0$ 平面为对称，因此只用将 z 取正值，积分时乘2即可。又油罐体积微元：

$$dV = z dx dy \quad (16)$$

即油罐体积为：

$$V = f(h) = \int dV = 2 \iint z dx dy = \frac{2a}{b} \iint \sqrt{b^2 - (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2} dx dy \quad (17)$$

将(17)式先对 x 进行积分(即将 y 视为常量)， z 取正值(以 $z=0$ 平面为对称)，只要在积分时乘以2即可。即：

$$V = \frac{a}{b} \iint \left[\frac{b^2}{\sin \alpha} \arcsin \frac{x \sin \alpha - y \cos \alpha}{b} + \left(x - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} y \right) \sqrt{b^2 - (x \sin \alpha - y \cos \alpha)^2} \right] dy \quad (18)$$

将椭圆平顶卧式油罐正截面的四个顶点依次记为 A，B，C，D，计量零点(油位探针底部)所在位置记为点 E，计量最高点(油位探针最高点位置)所在位置记为点 F。则在新坐标系 O-XYZ 下，

设： y_1 为 A 点在 Y 轴上的坐标；

y_2 为计量零点 E 在 Y 轴上的坐标；

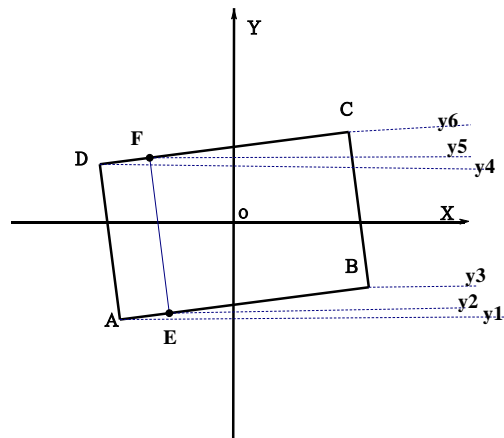
y_3 为 B 点在 Y 轴上的坐标；

y_4 为 D 点在 Y 轴上的坐标；

y_5 为 F 点在 Y 轴上的坐标；

y_6 为 C 点在 Y 轴上的坐标。

如图五所示。



图五 倾斜小椭圆型储油罐正截面图

在坐标系下的 $z=0$ 平面内，A，B，C，D，E，F 六点坐标依次为 $(-\frac{l}{2}, -b)$ ，

$(\frac{l}{2}, -b)$, $(\frac{l}{2}, b)$, $(-\frac{l}{2}, b)$, $(-\frac{l}{2} + l_1, -b)$, $(-\frac{l}{2} + l_1, b)$ 。分别求出其在变换后的坐标系 0-XYZ 中的坐标系中 $z=0$ 平面内对应的纵坐标为：

$$\begin{cases} y_1 = -\frac{l}{2} \sin \alpha - b \cos \alpha \\ y_2 = (-\frac{l}{2} + l_1) \sin \alpha - b \cos \alpha \\ y_3 = \frac{l}{2} \sin \alpha - b \cos \alpha \\ y_4 = -\frac{l}{2} \sin \alpha + b \cos \alpha \\ y_5 = \frac{l}{2} \sin \alpha + b \cos \alpha \\ y_6 = (-\frac{l}{2} + l_1) \sin \alpha + b \cos \alpha \end{cases} \quad (19)$$

下面分别求解 Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 积分区域的体积积分公式。

对于由射线 AB 和射线 AD 所围成的区域 Ω_1 ，由其限制条件，

$$\text{得: } \begin{cases} x' \geq -\frac{l}{2} \\ y' \geq -b \end{cases} \quad (20)$$

将 (14) 式代入 (20) 式，得：

$$\begin{cases} x \geq \frac{-\frac{l}{2} - y \sin \alpha}{\cos \alpha} \\ x \leq \frac{b + y \cos \alpha}{\sin \alpha} \end{cases} \quad (21)$$

即区域 Ω_1 中 x 的下限为 $x_{11} = \frac{-\frac{l}{2} - y \sin \alpha}{\cos \alpha}$ ，上限为 $x_{12} = \frac{b + y \cos \alpha}{\sin \alpha}$ 。

同理，区域 Ω_2 满足：

$$\begin{cases} x' \geq \frac{l}{2} \\ y' \geq -b \end{cases} \quad (22)$$

将 (14) 式代入 (22) 式，得：

$$\begin{cases} x \geq \frac{\frac{l}{2} - y \sin \alpha}{\cos \alpha} \\ x \leq \frac{b + y \cos \alpha}{\sin \alpha} \end{cases} \quad (23)$$

即区域 Ω_2 中 x 的下限为 $x_{21} = \frac{\frac{l}{2} - y \sin \alpha}{\cos \alpha}$ ，上限为 $x_{22} = \frac{b + y \cos \alpha}{\sin \alpha}$ 。

区域 Ω_3 满足：

$$\begin{cases} x' \geq -\frac{l}{2} \\ y' \geq b \end{cases} \quad (24)$$

将 (14) 式代入 (24) 式，得：

$$\begin{cases} x \geq \frac{-\frac{l}{2} - y \sin \alpha}{\cos \alpha} \\ x \leq \frac{-b + y \cos \alpha}{\sin \alpha} \end{cases} \quad (25)$$

即区域 Ω_3 中 x 的下限为 $x_{31} = \frac{-\frac{l}{2} - y \sin \alpha}{\cos \alpha}$ ，上限为 $x_{32} = \frac{-b + y \cos \alpha}{\sin \alpha}$ 。

对于区域 Ω_1 中 x 的下限为 $x_{11} = \frac{-\frac{l}{2} - y \sin \alpha}{\cos \alpha}$ ，上限为 $x_{12} = \frac{b + y \cos \alpha}{\sin \alpha}$ 代入式 (18)，得

$$V_{\Omega_1}(y) = \frac{b^2}{\sin \alpha} \cdot \frac{a}{b} \int_{\Omega_1} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{\frac{l}{2} \sin \alpha + y}{b \cos \alpha} + \frac{\frac{l}{2} \sin \alpha + y}{b \cos \alpha} \sqrt{1 - \left(\frac{\frac{l}{2} \sin \alpha + y}{b \cos \alpha} \right)^2} \right] dy \quad (26)$$

设 $t_1(y) = \frac{\frac{l}{2} \sin \alpha + y}{b \cos \alpha}$ ，则有：

$$dt_1(y) = \frac{dy}{b \cos \alpha}$$

$$\text{即：} \quad dy = b \cos \alpha dt_1(y) \quad (27)$$

将 (27) 式代入 (26) 式，得

$$V_{\Omega_1}(y) = \frac{ab}{\sin \alpha} \int_{\Omega_1} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin t_1(y) + t_1(y) \sqrt{1 - (t_1(y))^2} \right] \cdot (b \cos \alpha) dt_1(y) \quad (28)$$

对 (28) 式积分，得：

$$V_{\Omega_1}(y) = \frac{ab^2 \cos \alpha}{\sin \alpha} \left\{ -\frac{[1 - t_1(y)^2]^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{\pi}{2} t_1(y) + t_1(y) \arcsin t_1(y) + \sqrt{1 - (t_1(y))^2} \right\} \Bigg|_{y_1}^y \quad (29)$$

其中， $y \geq y_1$ 。

同理可得：

将区域 Ω_2 中 x 的下限为 $x_{21} = \frac{\frac{l}{2} - y \sin \alpha}{\cos \alpha}$ ，上限为 $x_{22} = \frac{b + y \cos \alpha}{\sin \alpha}$ 代入式(14)，

得：

$$V_{\Omega_2}(y) = \frac{ab^2 \cos \alpha}{\sin \alpha} \left\{ -\frac{[1 - t_2(y)^2]^{\frac{2}{3}}}{3} + \frac{\pi}{2} t_2(y) + t_2(y) \arcsin t_2(y) + \sqrt{1 - (t_2(y))^2} \right\} \Big|_{y_3}^y \quad (30)$$

其中， $y \geq y_3$ ， $t_2(y) = \frac{-\frac{l}{2} \sin \alpha + y}{b \cos \alpha}$ 。

将区域 Ω_3 中 x 的下限为 $x_{31} = \frac{-\frac{l}{2} - y \sin \alpha}{\cos \alpha}$ ，上限为 $x_{32} = \frac{-b + y \cos \alpha}{\sin \alpha}$ 代入式(14)，

得：

$$V_{\Omega_3}(y) = \frac{ab^2 \cos \alpha}{\sin \alpha} \left\{ -\frac{[1 - t_1(y)^2]^{\frac{2}{3}}}{3} - \frac{\pi}{2} t_1(y) + t_1(y) \arcsin t_1(y) + \sqrt{1 - (t_1(y))^2} \right\} \Big|_{y_4}^y \quad (31)$$

其中， $y \geq y_4$ 。

下面求椭圆正截面柱体ABCD体积的积分公式。

当 $y_3 \geq y \geq y_1$ 时，

$$V_1(y) = V_{\Omega_1}(y) \Big|_{y_1}^y \quad (32)$$

当 $y_4 \geq y \geq y_3$ 时，

$$V_2(y) = V_{\Omega_1}(y) \Big|_{y_1}^y - V_{\Omega_2}(y) \Big|_{y_3}^y \quad (33)$$

当 $y_6 \geq y \geq y_4$ 时，

$$V_3(y) = V_{\Omega_1}(y) \Big|_{y_1}^y - V_{\Omega_2}(y) \Big|_{y_3}^y - V_{\Omega_3}(y) \Big|_{y_4}^y \quad (34)$$

综上所述，是椭圆正截面柱体ABCD体积的积分公式为：

$$V(y) = \begin{cases} V_{\Omega_1}(y) \Big|_{y_1}^y, & y_1 \leq y \leq y_3 \\ V_{\Omega_1}(y) \Big|_{y_1}^y - V_{\Omega_2}(y) \Big|_{y_3}^y, & y_3 \leq y \leq y_4 \\ V_{\Omega_1}(y) \Big|_{y_1}^y - V_{\Omega_2}(y) \Big|_{y_3}^y - V_{\Omega_3}(y) \Big|_{y_4}^y, & y_4 \leq y \leq y_6 \end{cases} \quad (35)$$

又由问题的几何意义可以看到，

$$V_{\Omega_1}(y_1)=0, V_{\Omega_2}(y_3)=0, V_{\Omega_3}(y_4)=0。 \quad (36)$$

将 (36) 式代入 (35) 式, 得:

$$V(y)=\begin{cases} V_{\Omega_1}(y), y_1 \leq y \leq y_3 \\ V_{\Omega_1}(y)-V_{\Omega_2}(y), y_3 \leq y \leq y_4 \\ V_{\Omega_1}(y)-V_{\Omega_2}(y)-V_{\Omega_3}(y), y_4 \leq y \leq y_6 \end{cases} \quad (37)$$

将 (29) 式、(31) 式代入 (37) 式, 得:

$$V_3(y)=\frac{ab^2 \cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \pi \cdot t_1(y)-V_{\Omega_3}(y) \quad (38)$$

易知, $V(y)$ 也可用一个整式表示出来:

$$V(y)=V_1(y)+V_2(y)+V_3(y) \quad (39)$$

其中, $y_1 \leq y \leq y_6$ 。

下面探究 y 与油体液面高度 h 的关系, 进而得到储油罐储油体积 $V(y)$ 与液面高度 h 的关系, 从而得到倾斜储油罐的罐容表的标定值。

$$\text{当 } y_1 \leq y \leq y_2 \text{ 时, } h=0; \quad (40)$$

当 $y_2 \leq y \leq y_5$ 时, 由图可知 y 与 h 满足关系:

$$h=(y-y_2)/\cos \alpha$$

即:

$$y=h \cos \alpha+y_2 \quad (41)$$

$$\text{当 } y_5 \leq y \leq y_6 \text{ 时, } h=2b。 \quad (42)$$

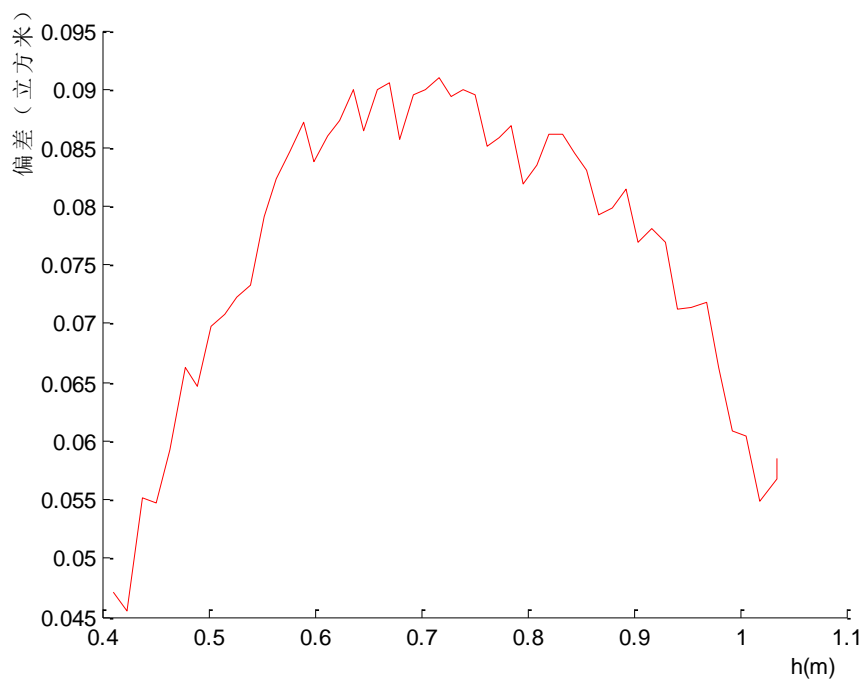
将 (40) 式、(41) 式和 (42) 式代入 (38) 式或 (39) 式, 即可得到小椭圆储油罐储油体积 $V(y)$ 与液面高度 h 的关系, 从而标定出此时的罐容表。

(二) 模型二的运用与求解

根据建立的模型, 代入题中条件求得纵向变位罐容表各参数值分别为:

$$\alpha=4.1^{\circ}, a=0.89 m, b=0.6 m, l=2.45 m, l_1=0.4 m。$$

首先利用附件一中倾斜变位进油数据确定偏差部分。将以上各参数值代入 (37) 式中, 求得在有变位进油时的的不同油位高度对应的储油量, 并与实际储油量对比, 即可得偏差如图六所示。

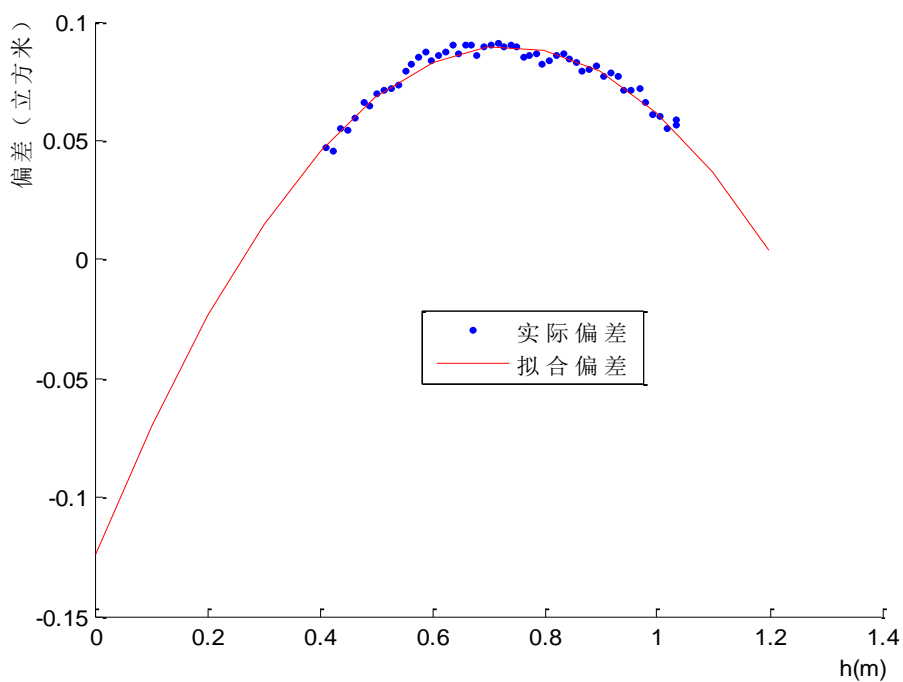


图六 纵向变位储油罐偏差

查阅相关文献发现，储油罐倾斜时在静态条件下由于储油罐的翘离反应^[2]会使罐体发生微小形变，导致了偏差变成近似抛物线。通过比较，用二次多项式拟合偏差较好，拟合结果为：

$$e = -0.3974h^2 + 0.5834h - 0.1242 \quad (43)$$

拟合曲线如图七所示。



图七 偏差高度拟合图

考虑到油位高度 $h=0$ 时，有 $e=0$ ，且当油位高度 h 略大于 0 时，翘离反应不明显，此处和模型一中的偏差应相差不远。同时结合图七，由于此拟合函数在 $h < 0.4m$ 的区域外推效果太差，故我们采用模型的偏差来近似作为这一段的偏差。

因为两偏差函数交点处的油位高度 $h=0.37$ ，故可令该模型中的偏差函数为：

$$e = \begin{cases} -0.090h^3 + 0.164h^2 + 0.049h & h < 0.37 \\ -0.3974h^2 + 0.5834h - 0.1242 & h > 0.37 \end{cases} \quad (44)$$

同时考虑到偏差的影响，将偏差去掉后得到修正的模型。利用修正后的模型求得纵向倾斜度为 4.1° 情况下该小椭圆储油罐罐容表标定值。

(三) 模型二结果

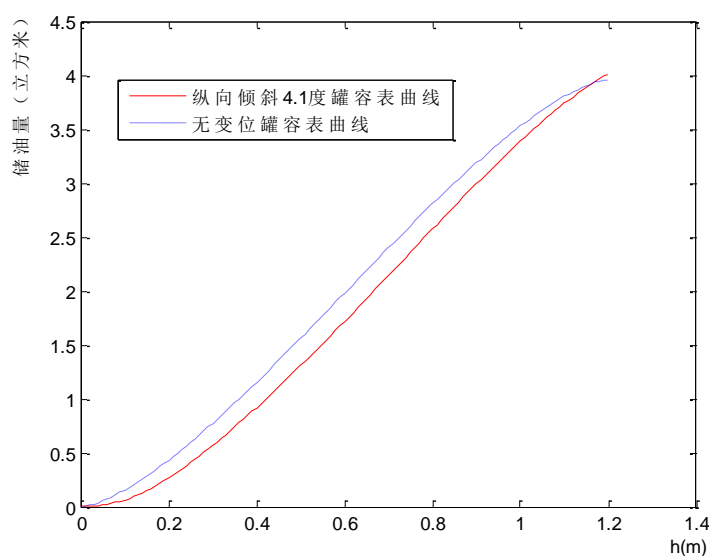
求得纵向倾斜倾斜角度为 4.1° 情况下该小椭圆储油罐罐容表如表一所示：

表一 倾斜储油罐罐容表标定值

h(m)	V(立方米)	h(m)	V(立方米)	h(m)	V(立方米)	h(m)	V(立方米)
0	0.0017	0.31	0.6019	0.61	1.758	0.91	3.0344
0.01	0.003	0.32	0.6361	0.62	1.8004	0.92	3.0751
0.02	0.0052	0.33	0.6707	0.63	1.8429	0.93	3.1155
0.03	0.0084	0.34	0.7059	0.64	1.8855	0.94	3.1556
0.04	0.0125	0.35	0.7415	0.65	1.9283	0.95	3.1953
0.05	0.0178	0.36	0.7775	0.66	1.9711	0.96	3.2348
0.06	0.0243	0.37	0.8139	0.67	2.014	0.97	3.2739
0.07	0.0321	0.38	0.848	0.68	2.057	0.98	3.3126
0.08	0.0412	0.39	0.8838	0.69	2.1	0.99	3.351
0.09	0.0517	0.4	0.9201	0.7	2.143	1	3.3889
0.1	0.0637	0.41	0.9568	0.71	2.1861	1.01	3.4264
0.11	0.0771	0.42	0.9939	0.72	2.2292	1.02	3.4635
0.12	0.0922	0.43	1.0313	0.73	2.2724	1.03	3.5
0.13	0.1088	0.44	1.0692	0.74	2.3155	1.04	3.5361
0.14	0.1271	0.45	1.1075	0.75	2.3586	1.05	3.5716
0.15	0.1471	0.46	1.1461	0.76	2.4016	1.06	3.6065
0.16	0.1686	0.47	1.185	0.77	2.4446	1.07	3.6409
0.17	0.1914	0.48	1.2243	0.78	2.4876	1.08	3.6746
0.18	0.2153	0.49	1.2639	0.79	2.5304	1.09	3.7076
0.19	0.2403	0.5	1.3037	0.8	2.5732	1.1	3.7399
0.2	0.2662	0.51	1.3439	0.81	2.6159	1.11	3.7715
0.21	0.2931	0.52	1.3843	0.82	2.6585	1.12	3.8023
0.22	0.3208	0.53	1.425	0.83	2.701	1.13	3.8322
0.23	0.3493	0.54	1.4659	0.84	2.7433	1.14	3.8612
0.24	0.3786	0.55	1.507	0.85	2.7854	1.15	3.8892
0.25	0.4086	0.56	1.5484	0.86	2.8274	1.16	3.9161

0.26	0.4392	0.57	1.59	0.87	2.8693	1.17	3.9417
0.27	0.4706	0.58	1.6317	0.88	2.9109	1.18	3.9658
0.28	0.5025	0.59	1.6736	0.89	2.9523	1.19	3.9882
0.29	0.5351	0.6	1.7157	0.9	2.9935	1.2	4.0091
0.3	0.5682						

通过无变位情况下的小椭圆型储油罐罐容表与纵向倾斜罐容表对比以及由图八发现，变位后罐容表与无变位相比有明显的影响：变位后相同的显示油位高度下储油量标定值总体上较无变位时要小，接近 0 处略大于无变位标定值。



图八 纵向倾斜和无变位罐容表曲线

5.2 储油罐的变位识别与罐容表标定(问题 2)

5.2.1 模型三——无变位储油罐罐容表标定模型

(一) 模型三的建立

首先引入以下几个概念：

罐身相对容积 v ： $v = \frac{V_{\text{油}}}{V_{\text{身}}}$ ，即罐身相对容积 v 等于罐身部分盛油容积 $V_{\text{油}}$ 与

罐身部分全容积 $V_{\text{身}}$ 之比；

凸头相对容积 v' ： $v' = \frac{V'_{\text{油}}}{V_{\text{头}}}$ ，即凸头相对容积 v' 等于凸头部分盛油容积 $V'_{\text{油}}$ 与

凸头部分全容积 $V_{\text{头}}$ 之比；

相对高度 h' ： $h' = \frac{h}{2b}$ ，即相对高度 h' 等于盛油高度 h 与全高度 $2b$ 之比；

拱凸度 m ： $m = \frac{F}{2b}$ ，即拱凸度 m 等于凸头的长 F 与全高度 $2b$ 之比。

椭圆柱型卧式油罐的罐身相对容积 v 与相对高度 h 之间的函数关系 $v = v(h)$ ，并由此说明，罐身相对容积 v 仅与相对高度 h 有关^[3]；椭圆柱型卧式油罐凸头相对容积 v' 与拱凸度 m 、相对高度 h' 之间的函数关系 $v' = v'(m, h')$ ，并由此说明， v' 仅与拱凸度 m 、相对高度 h' 有关^[3]。

秃头部分相对容积为：

$$\begin{aligned}
 v' &= \frac{3}{\pi m(3+4m^2)} \int_{1-2h'}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \left[\sqrt{\left(\frac{1+4m^2}{4m}\right)^2 - x^2 - y^2} - \frac{1-4m^2}{4m} \right] dx \\
 &= \frac{3}{\pi m(3+4m^2)} \left\{ \int_{1-2h'}^1 \left[\left(\frac{1+4m^2}{4m}\right)^2 - y^2 \right] \arcsin \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{\left(\frac{1+4m^2}{4m}\right)^2 - y^2}} dy - \frac{1-4m^2}{4m} \int_{1-2h'}^1 \sqrt{1-y^2} dy \right\} \\
 &= \frac{3}{\pi m(3+4m^2)} \left\{ \int_{1-2h'}^1 \left[\left(\frac{1+4m^2}{4m}\right)^2 - y^2 \right] \arcsin \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{\left(\frac{1+4m^2}{4m}\right)^2 - y^2}} dy - \frac{1-4m^2}{4m} \left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arccos(1-2h') - (1-2h')\sqrt{h'-h'^2} \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{45}$$

其中，（45）式中的积分部分可用 MATLAB 中的 int 函数求出其解析解。则凸头部分的盛油容积为：

$$V_{\text{油}}' = \frac{\pi m}{3} (3+4m^2) v' \tag{46}$$

综上所述，无变位储油罐盛油容积为：

$$\begin{aligned}
 V_{\text{总}} &= V_{\text{油}} + V_{\text{油}}' \\
 &= ab \left[\arccos(1-h'2) - 2(1-h')\sqrt{2h'} \right] h + \frac{\pi m}{3} h^2 + \frac{\pi m}{3} (3+4m^2) v'
 \end{aligned} \tag{47}$$

又将式 $h' = \frac{h}{2b}$ 和 $m = \frac{F}{2b}$ 代入上式，得：

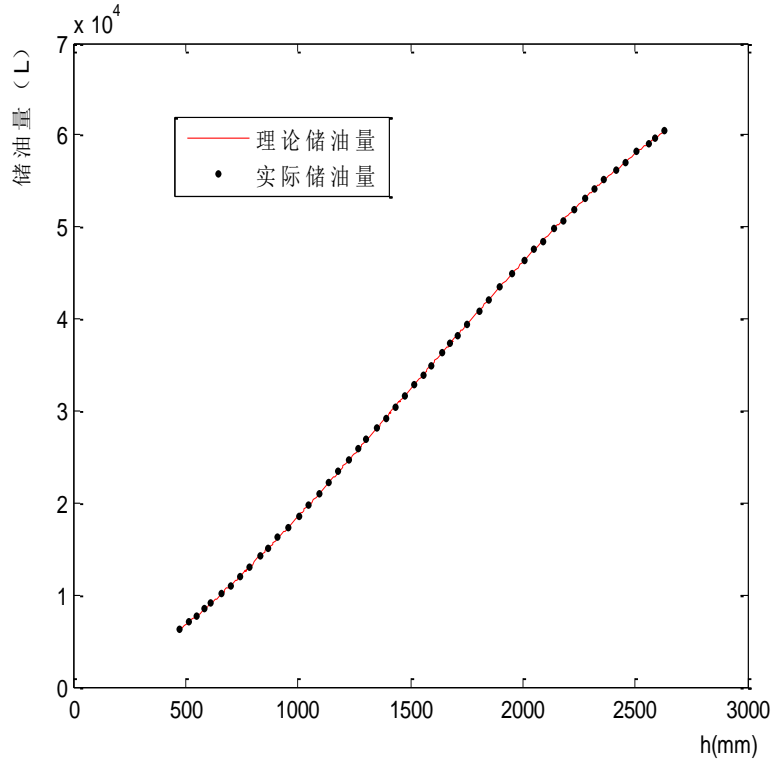
$$V_{\text{总}} = abl \left[\arccos(1-\frac{h}{b}) - 2(1-\frac{h}{b})\sqrt{\frac{h}{2b} - (\frac{h}{2b})^2} \right] + \frac{\pi F}{6b} (3 + \frac{F^2}{b^2}) v' \tag{48}$$

（注：模型三的详细推导过程见附录 2）

（二） 模型三的求解

附件二中显示油量容积是无变位情况下由对应的显示油高查表得到，利用模

型三求无变位时显示油高对应的油量容积，并与实际值对比，如图九所示。



图九 实际储油量与计算储油量比较曲线

由图并结合具体数据可知，实际值与模型计算值相同，故此模型中不存在偏差项。这说明对于此实际储油罐，不考虑油罐附件浸入油内的体积，所以在有变位的情况下我们仍不考虑油罐附件浸入油内的体积，即模型中不存在拟合偏差项。

5.2.2 模型四——发生变位的储油罐变位识别及罐容表标定模型

(一) 模型四的建立

考虑到纵向倾斜和横向偏转的储油罐模型由两个位置参量决定：纵向倾斜角 α 和横向偏转角 β ，将纵向与横向都有变位的模型看作由只有纵向倾斜 α 的模型发生了横向偏转 β 得到，即将问题二简化为在纵向倾斜模型的基础上发生了横向偏转的问题。

下面建立储油罐在发生了纵向倾斜 α 后的模型。

该储油罐由两部分组成：圆柱体，两个球冠体。圆柱体的储油量与 H 、 α 的关系模型是第一问模型的特殊情形（ $a=b=r$ ）。

由（31）式可得

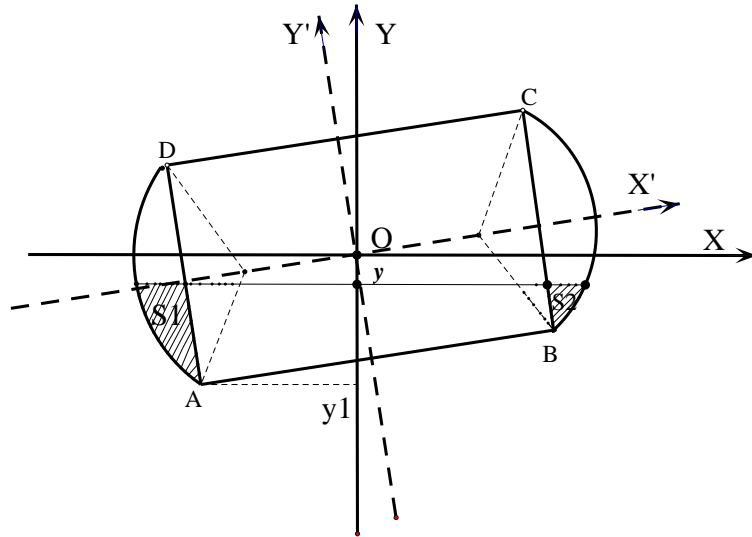
$$V_{\text{圆柱}}(y) = \begin{cases} V_{\Omega_1}(y) \Big|_{y_1}^y, & y_1 \leq y \leq y_3 \\ V_{\Omega_1}(y) \Big|_{y_1}^y - V_{\Omega_2}(y) \Big|_{y_3}^y, & y_3 \leq y \leq y_4 \\ V_{\Omega_1}(y) \Big|_{y_1}^y - V_{\Omega_2}(y) \Big|_{y_3}^y - V_{\Omega_3}(y) \Big|_{y_4}^y, & y_4 \leq y \leq y_6 \end{cases}$$

且 $a=b=r$ （具体推导过程见问题一的模型二）。

两个球冠体的储油量与 H, α 的关系模型如下：

在图十所示的 $O-X'Y'Z$ 坐标系中，左侧球冠所在球的方程为：

$$(x' + x_0')^2 + y'^2 + z'^2 = R^2 \quad (49)$$



图十 倾斜放置的储油罐两端球冠体积分

其中 x_0' 为球心到原点的距离， R 为球冠体（凸头部分）半径。 $O-X'Y'Z$ 坐标系与 $O-XYZ$ 坐标系之间转换关系为：

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases} \quad (50)$$

由（49）式表示 Z 可得：

$$Z = \pm \sqrt{R^2 - (x' + x_0')^2 - y'^2} \quad (51)$$

由于该图像关于 $Z=0$ 平面对称，因此只需求 $Z>0$ 的积分，然后乘 2 即可。

$$\begin{aligned}
V_{\text{左}} &= 2 \iint_{S_1} |Z| dx dy \\
&= 2 \iint_{S_1} \sqrt{R^2 - (x \cos \alpha + y \sin \alpha + x_0')^2 - (-x \sin \alpha + y \cos \alpha)^2} dx dy \\
&= \int_{y_1}^y [R^2 - (y + x_0' \sin \alpha)^2] \left[\arcsin \frac{-\frac{l}{2 \cos \alpha} - y \tan \alpha + x_0' \cos \alpha}{\sqrt{R^2 - (y + x_0' \sin \alpha)^2}} + \frac{\pi}{2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(-\frac{l}{2 \cos \alpha} - y \tan \alpha + x_0' \cos \alpha)}{R^2 - (y + x_0' \sin \alpha)^2} \sqrt{R^2 - x_0'^2 + x_0' l - \frac{l^2 + 4ly \sin \alpha + 4y^2}{4 \cos^2 \alpha}} \right] dy
\end{aligned} \tag{52}$$

由对称性可知右侧的球冠体积可以用左侧的公式表示：

$$\begin{aligned}
V_{\text{右}}(y) &= V_{\text{右总}} - V_{\text{右上}}(y) \\
&= V_{\text{右总}} - V_{\text{左}}(y_5 - y + y_1) \\
&= V_{\text{左}}(y_4) - V_{\text{左}}(y_5 - y + y_1)
\end{aligned} \tag{53}$$

其中 $V_{\text{左}}(y)$ 如 (52) 式所示， y_1 为 A 点在 Y 轴上的坐标， y_3 为 B 点在 Y 轴上的坐标， y_4 为 D 点在 Y 轴上的坐标， y_5 为 C 点在 Y 轴上的坐标。

$$\text{所以，} \quad V_{\text{球冠体}}(y) = V_{\text{左}}(y) + V_{\text{右}}(y) \tag{54}$$

综上所述，在发生了纵向偏转 α 之后的油罐容量函数 $V_{\text{总}}(y, \alpha)$ 为：

$$\left\{ \begin{aligned} &V_{\text{总}}(y, \alpha) = V_{\text{圆柱}} + V_{\text{球冠体}} \\ &y = h \cos \alpha + y_2 \\ &V_{\text{圆柱}}(y) = \begin{cases} V_{\Omega_1}(y) \Big|_{y_1}^y, & y_1 \leq y \leq y_3 \\ V_{\Omega_1}(y) \Big|_{y_1}^y - V_{\Omega_2}(y) \Big|_{y_3}^y, & y_3 \leq y \leq y_4 \\ V_{\Omega_1}(y) \Big|_{y_1}^y - V_{\Omega_2}(y) \Big|_{y_3}^y - V_{\Omega_3}(y) \Big|_{y_4}^y, & y_4 \leq y \leq y_6 \end{cases} \\ &V_{\text{球冠体}}(y) = V_{\text{左}}(y) + V_{\text{右}}(y) \end{aligned} \right. \tag{55}$$

上式为完整的纵向倾斜 α 角后油罐储油量模型。

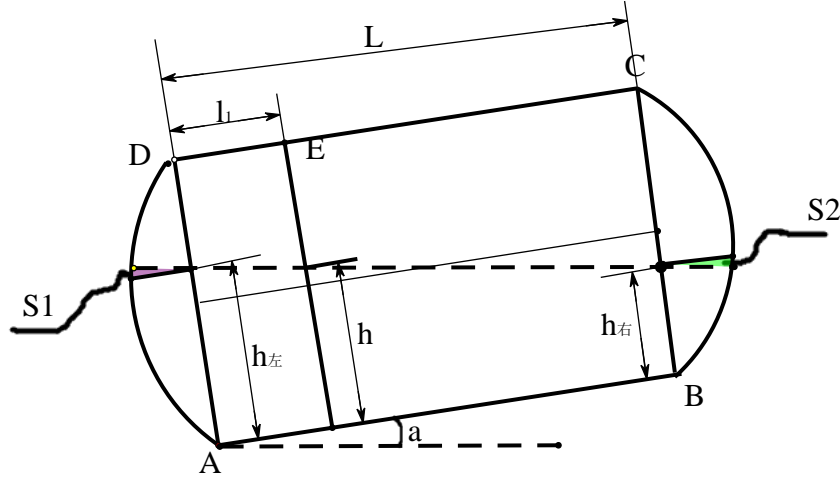
但是对 (55) 式分析我们发现，其中含有椭圆面积分式：

$$\int_a^b \arcsin\left(\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right) dx \quad (b > a, R > a, a > 0)$$

而椭圆面积分式是不能被转化为解析形式的，所以最后的结果 $V_{\text{总}}(y, \alpha)$ 是没

有解析解的。对该问题我们采用数值近似计算的方法来求解。

数值法近似计算纵向倾斜的储油罐罐容表标定模型



图十一 纵向倾斜时油罐的近似模型图

如上图所示，一般当 α 很小时 ($\alpha < 5^\circ$)，储油罐的左右两侧球冠体中的液面几乎与罐体轴线平行， $|z|$ 在 S_1, S_2 处的面积分近似相等。即，

$$\begin{cases} V_{\text{左侧球冠}} = \iint_{S_{\text{左}}} |Z| dxdy = \iint_{S_1} |Z| dxdy + V'_{\text{油}}(h_{\text{左}}) \\ V_{\text{右侧球冠}} = \iint_{S_{\text{右}}} |Z| dxdy = V'_{\text{油}}(h_{\text{右}}) - \iint_{S_2} |Z| dxdy \\ \iint_{S_1} |Z| dxdy \approx \iint_{S_2} |Z| dxdy \end{cases} \quad (56)$$

从而，

$$\begin{aligned} V_{\text{球冠}}(h) &= V_{\text{左侧球冠}} + V_{\text{右侧球冠}} \\ &= \iint_{S_1} |Z| dxdy + V'_{\text{油}}(h_{\text{左}}) + V'_{\text{油}}(h_{\text{右}}) - \iint_{S_2} |Z| dxdy \\ &\approx V'_{\text{油}}(h_{\text{左}}) + V'_{\text{油}}(h_{\text{右}}) \end{aligned} \quad (57)$$

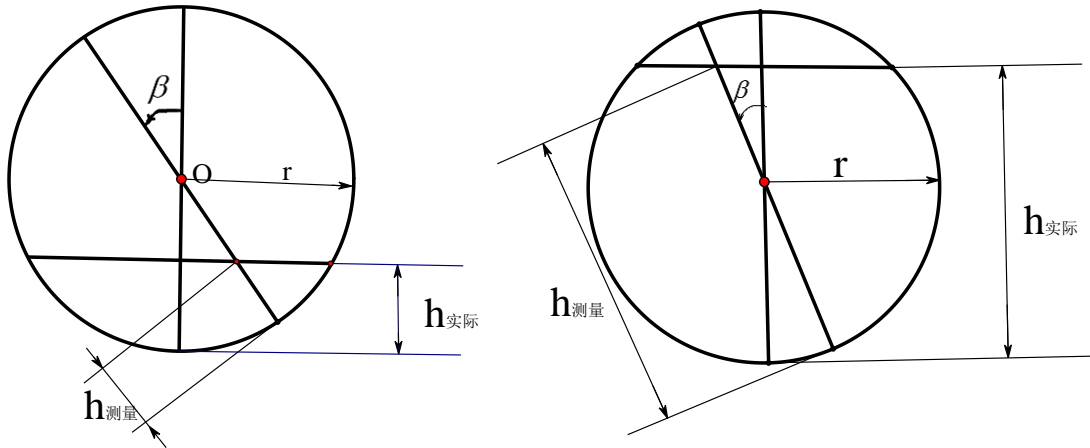
式中 $V'_{\text{油}}(h)$ 为油罐平放且油罐内液面高度为 h 时，单侧球冠内的油体积。

$$V'_{\text{油}}(y) = \frac{3}{\pi m(3+4m^2)} \left\{ \int_{1-2h}^1 \left[\left(\frac{1+4m^2}{4m} \right)^2 - y^2 \right] \arcsin \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{\left(\frac{1+4m^2}{4m} \right)^2 - y^2}} dy - \frac{1-4m^2}{4m} \int_{1-2h}^1 \sqrt{1-y^2} dy \right\} \quad (58)$$

综上可得，纵向倾斜时的液面高度与罐内容积关系的数值近似计算模型为：

$$\begin{cases}
 V_{\text{总}}(y, \alpha) = V_{\text{圆柱}} + V_{\text{球冠体}} \\
 y = h \cos \alpha + y_2 \\
 V_{\text{圆柱}}(y) = \begin{cases}
 V_{\Omega_1}(y) \Big|_{y_1}^y, & y_1 \leq y \leq y_3 \\
 V_{\Omega_1}(y) \Big|_{y_1}^y - V_{\Omega_2}(y) \Big|_{y_3}^y, & y_3 \leq y \leq y_4 \\
 V_{\Omega_1}(y) \Big|_{y_1}^y - V_{\Omega_2}(y) \Big|_{y_3}^y - V_{\Omega_3}(y) \Big|_{y_4}^y, & y_4 \leq y \leq y_6
 \end{cases} \\
 V_{\text{球冠体}}(h) = \iint_{S_1} |Z| dx dy + V_{\text{油}}'(h_{\text{左}}) + V_{\text{油}}'(h_{\text{右}}) - \iint_{S_2} |Z| dx dy \approx V_{\text{油}}'(h_{\text{左}}) + V_{\text{油}}'(h_{\text{右}}) \\
 h_{\text{左}} = h + l_1 \tan \alpha \\
 h_{\text{右}} = h - (L - l_1) \tan \alpha
 \end{cases} \quad (59)$$

同时考虑纵向倾斜和横向偏转的储油罐模型：



图十二 横向偏转的圆柱体探针处横截图

由问题所给出的油罐模型可知，油罐为一沿其中心轴对称的几何体，因此当发生纵向偏转角 β 之后，其实际液面仍为未发生偏转时所测得 h 值，如图十二所示。

对照图中几何关系可得，

左侧图：

$$h_{\text{测}} = r - \frac{r - h_{\text{实际}}}{\cos \beta}$$

右侧图：

$$h_{\text{测}} = r + \frac{h_{\text{实际}} - r}{\cos \beta}$$

即

$$h_{\text{测}} = r - \frac{r - h_{\text{实际}}}{\cos \beta} \quad (60)$$

在实际问题中偏转角 β 只能在 $0 \sim 90^\circ$ 之间取值，且 $0 \leq h_{\text{测}} \leq 2r$ 得

只有当 $r - r \cos \beta \leq h_{\text{实际}} \leq r + r \cos \beta$ 才会测得可变的液面高度。

也就是：

$$h_{\text{测}} = \begin{cases} 0 & h_{\text{实际}} \leq r - r \cos \beta \\ r - \frac{r - h_{\text{实际}}}{\cos \beta} & r - r \cos \beta \leq h_{\text{实际}} \leq r + r \cos \beta \\ 2r & h_{\text{实际}} \geq r + r \cos \beta \end{cases} \quad (61)$$

综上所述，同时考虑纵向倾斜和横向偏转的储油罐模型只要将 $h_{\text{实际}}$ 与 $h_{\text{测}}$ 的关系式（61）代入只考虑纵向倾斜的模型即可。

（二）模型四的运用与求解

附件二中并没有给出实际储油量的初始值，但我们可以根据储油量与油位高度及变位参数（纵向倾斜角度 α 和横向偏转角度 β ）之间的一般关系模型，计算出不同油位高度对应的储油量，相邻高度对应储油量相减即为出油量。附件二中已给出实际出油量值，故本文求解纵向倾斜角度 α 和横向偏转角度 β 思路是确定 α 和 β ，使得出油量偏差平方和最小，实现变位识别。

设理论出油量为 P_t ，实际出油量 P_f ，则

$$\begin{cases} \min \sum (P_t - P_f)^2 \\ P_t = V(h_1) - V(h_2) \\ V(h) = f(h, \alpha, \beta) \end{cases} \quad (62)$$

此问题属于求解最优值问题，可用遗传算法、模拟退火算法等搜索算法求解最优值使目标函数值最小。本文中 α 和 β 值都应该较小，且精度为 0.1° ，考虑现在计算机运行速度非常快，故可以采用类似穷举搜索的方法。首先试搜， $\alpha < 5^\circ$ 和 $\beta < 10^\circ$ ，间隔较大步 0.5° ，确定最优值大体哪个较小范围或者在这个区间外，然后在这个范围内每隔 0.1° 搜索。最终求得最优值为 $\alpha = 2.1^\circ$ ， $\beta = 4.8^\circ$ 。其最小偏差平方和为 247.89 mm^2 。

（三）模型四的结果

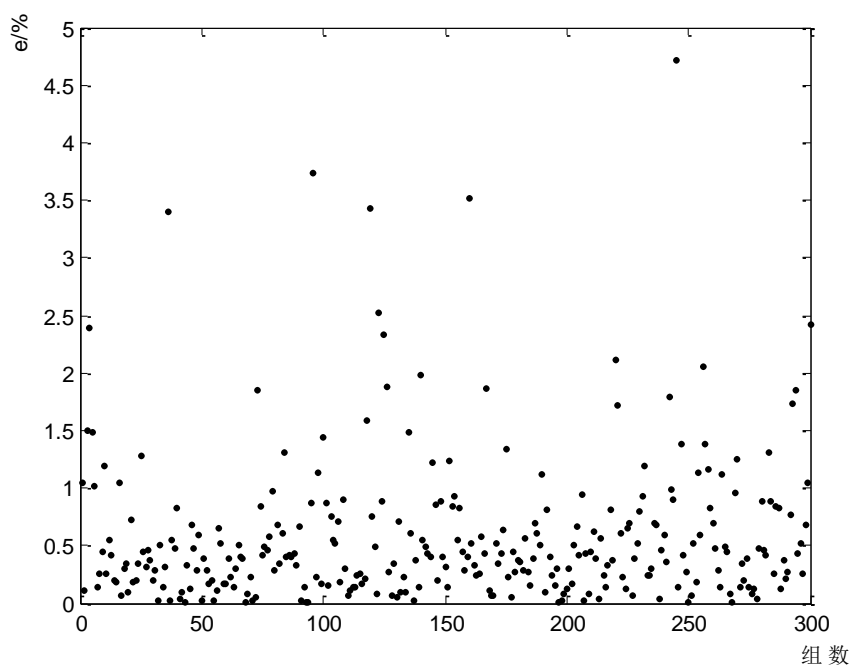
求得 $\alpha = 2.1^\circ$ ， $\beta = 4.8^\circ$ 。利用与之前求解罐容表标定值相同的方法，得到变位后的罐容表标定值如表二所示。

表二 变位后储油罐罐容表

油高/mm	油量容积/L	油高/mm	油量容积/L
0	46.85	1600	33075.19
100	357.72	1700	35884.87
200	1071.80	1800	38675.23
300	2230.88	1900	41430.82
400	3710.81	2000	44135.88
500	5440.83	2100	46774.20
600	7379.56	2200	49328.91
700	9496.02	2300	51782.19
800	11764.74	2400	54114.93
900	14163.62	2500	56306.18
1000	16672.75	2600	58332.23
1100	19273.77	2700	60165.08
1200	21949.39	2800	61769.23
1300	24683.12	2900	63092.81
1400	27459.01	3000	64025.87
1500	30261.49		

(四) 模型正确性与结果正确性

利用一次性充油后的数据作为模型正确性的检验,得到相对误差散点图如图所示。

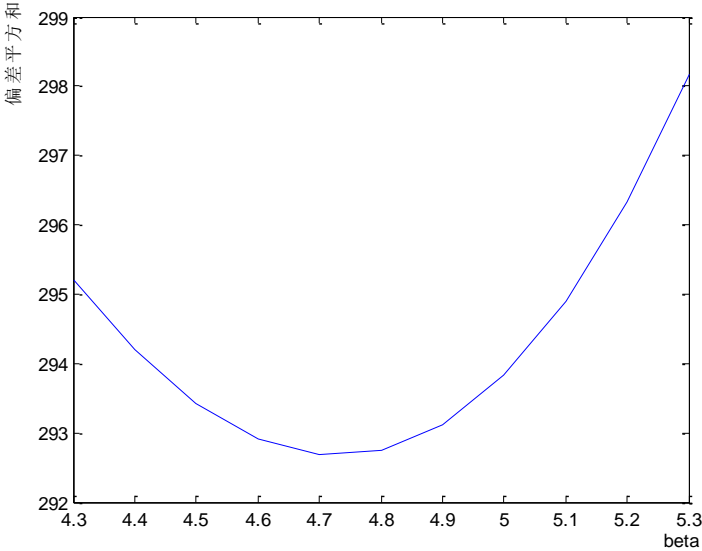


图十三 相对误差散点图（百分比）

由图可知,大部分相对误差(85.67%)在1%以内,只有少数几个点相对误差较大,经计算,平均相对误差为0.058%,在此变位的储油罐下,模型的准确性较高。

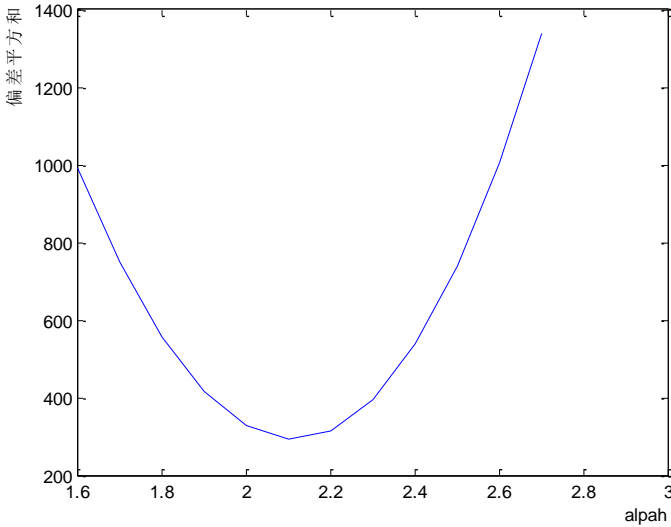
仍用一次性充油后的数据作为方法正可靠性的检验,由于本文除了在对变位后球冠部分的储油量计算时采用近似计算外,其余部分均为准确的理论推导计算,故造成方法不可靠的主要因素是近似计算的准确性。

首先研究罐体变位参数变化对罐容表影响变化大小。固定 $\alpha = 2.1^\circ$ 不变, β 在 4.8° 附近变化,得到油位高度变化量与实际油位高度变化量的偏差平方和,如图十四所示



图十四 β 变化与偏差平方和 (mm^2) 关系曲线 ($\alpha = 2.1^\circ$)

再固定 $\beta = 4.8^\circ$ 不变, α 在 2.1° 附近变化,得到油位高度变化量与实际油位高度变化量的偏差平方和,如图十五所示



图十五 α 变化与偏差平方和 (mm^2) 关系曲线 ($\beta = 4.8^\circ$)

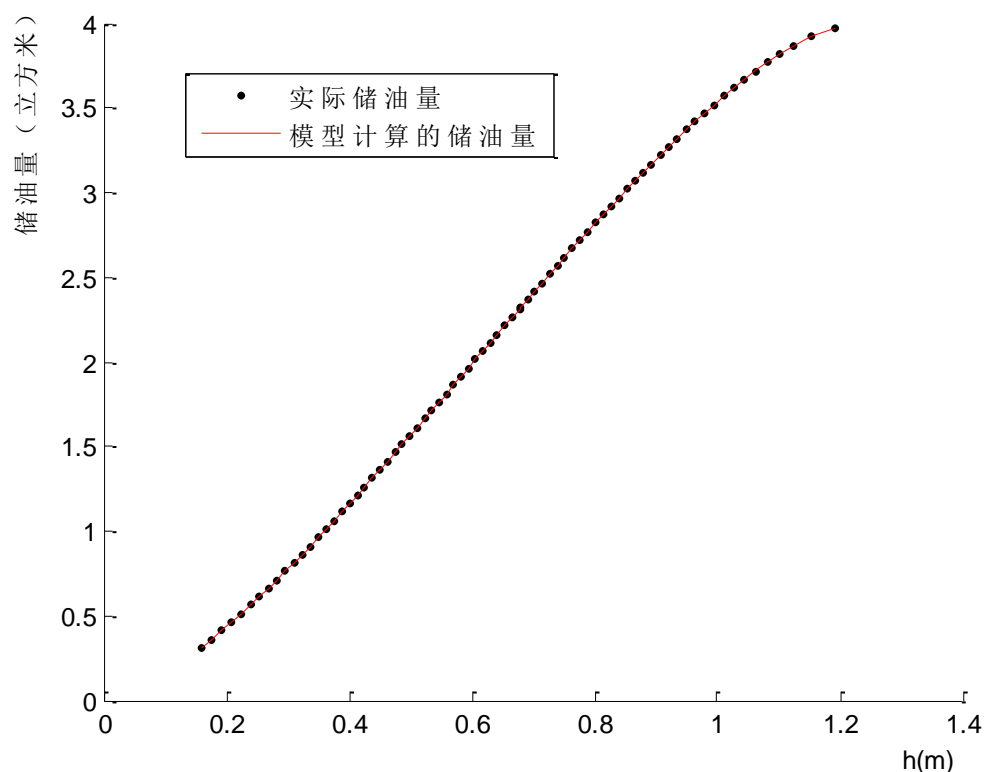
图 14 和图 15 对照分析发现, β 在 4.8° 附近变化时, 偏差平方和变化在 10 mm^2 之内, 而 α 在 2.1° 附近变化时, 偏差平方和变化非常大。由此可知, 纵向变位对罐容表的影响很大, 横向偏转对罐容表的影响较小。

本文在近似计算部分是基于倾斜角 α 较小的假设: 当 α 较小时, 近似算法误差较小, 方法可靠性较高; 反之, 当 α 较大时, 近似计算部分误差较大, 对罐容表影响也较大, 方法可靠性将降低。本文最后计算得 $\alpha=2.1^\circ$, 可知方法可靠性较高。

六、模型的检验

6.1 模型一的检验

此模型的偏差部分是由通过理论计算储油量与附录一无变位进油的实际储油量比较拟合而来。为了检验修正后模型的准确性, 利用附录一中无变位储油罐罐容表数据进行检验, 结果如图十六所示。



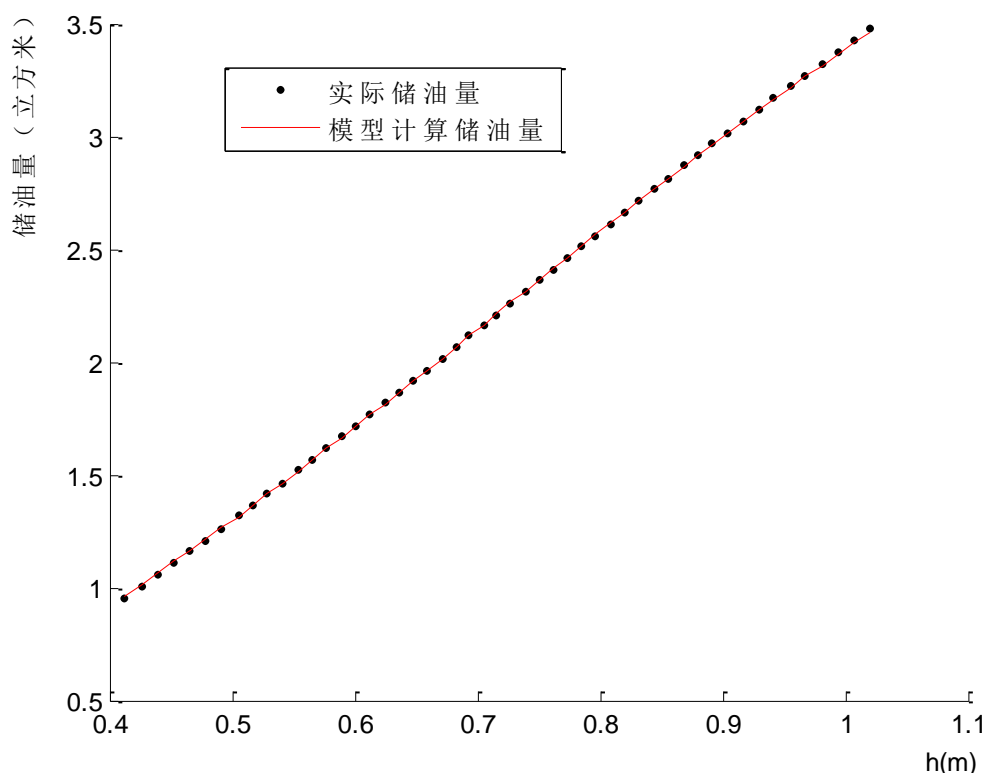
图十六 实际储油量与计算储油量比较检验曲线

由图十六可知, 修正后无变位小椭圆型储油罐罐容模型与实际情况高度一致。

6.2 模型二的检验

同样, 为了检验修正后模型的准确性, 利用附录一中倾斜变位出油数据进行

检验，结果如图十七所示：



图十七 实际储油量与计算储油量比较检验曲线

模型计算储油量与实际相符，误差在 0.5% 之内的数据有 96.07%，最大误差为 1.1%，可见此模型标定的罐容表准确度较高。

模型三、四已经在模型的建立与求解中得到了检验，故此不再赘述。

七、 模型的评价与优化

9.1. 模型的优缺点分析

9.1.1. 模型的优点

问题一，首先建立了理想的无变位平头椭圆柱液位模型，将其与实际的数据进行比对，发现了一个随 h 累加的偏差量，用二次拟合的方法对该偏差拟合，队之前模型进行了修正，并与另一组实际数据对比，得到了很好的效果。考虑纵向倾斜时，采用相同的方法引入偏差修正项，经过检验得到了很好的效果，并以该模型得到了具有较高精度的罐容表。

问题二，模型三首先得到了完整的变位容量积分模型，为该种情形下的一般模型。为简化计算将有变位的容量模型，分解为有变量的圆柱容量模型与无变位的球冠模型，使计算速度大幅提高，模型的精度也在合理的范围之内。通过以最小偏差为目标函数的搜索算法找出了最优的 α, β 值，并得出了此时对应的罐容表。

9.1.2. 模型的缺点

问题二中提高计算速度是以牺牲模型精度为代价的，在更高精度的要求下此

模型需要进一步的改进。模型二在 α 值较大的情况下，偏差很大，需用模型三求解，但速度较慢。

八、 模型推广

在解决完问题一、二之后发现对于不同的参数 α, β ，需要编制不同的容量表。

无偏容量表在此处就没有了作用，这样做不仅浪费了资源（需要大量的表），而且使得查表变得麻烦。针对该问题可以在无变位容量表的基础上引入修正量 $\Delta V(h, \alpha, \beta)$ 来得到其实际对应关系。即通过模型四与模型三之差得到 $\Delta V(h, \alpha, \beta)$ ，

然后，用测得的 h 值查无变位容量表得 $V_1(h)$ ，并代入 $\Delta V(h, \alpha, \beta)$ ，实际容量为 $V_1(h) + \Delta V(h, \alpha, \beta)$ 。

参考文献：

- [1] 国家技术监督局. 卧式金属罐容积检定规程. 1996, 10, 1;
- [2] 李长升，宋杰，项中权. 储油罐模型的静态倾斜试验及理论分析[J]. 天津大学学报, 2004, 10 (37): 892—895;
- [3] 李致荣. 椭圆柱体卧式油罐容积的计算[J]. 数学实践与认识, 1997, 2: 17—26。

附录

1. 附录一

无偏情况下储油罐罐容表

h(m)	V(立方米)	h(m)	V(立方米)	h(m)	V(立方米)	h(m)	V(立方米)
0.01	0.004788	0.31	0.81324	0.61	2.0282	0.91	3.2316
0.02	0.013893	0.32	0.85036	0.62	2.0703	0.92	3.2675
0.03	0.025758	0.33	0.88785	0.63	2.1124	0.93	3.3029
0.04	0.03982	0.34	0.92569	0.64	2.1544	0.94	3.3379
0.05	0.05575	0.35	0.96387	0.65	2.1964	0.95	3.3724
0.06	0.07332	0.36	1.0024	0.66	2.2384	0.96	3.4064
0.07	0.092365	0.37	1.0412	0.67	2.2803	0.97	3.4399
0.08	0.11275	0.38	1.0802	0.68	2.3221	0.98	3.4728
0.09	0.13438	0.39	1.1196	0.69	2.3638	0.99	3.5051
0.1	0.15714	0.4	1.1592	0.7	2.4054	1	3.5369
0.11	0.18098	0.41	1.1991	0.71	2.4468	1.01	3.568
0.12	0.20582	0.42	1.2392	0.72	2.4882	1.02	3.5984
0.13	0.23161	0.43	1.2795	0.73	2.5294	1.03	3.6282
0.14	0.25828	0.44	1.32	0.74	2.5704	1.04	3.6573
0.15	0.2858	0.45	1.3607	0.75	2.6113	1.05	3.6855
0.16	0.31411	0.46	1.4016	0.76	2.652	1.06	3.713
0.17	0.34319	0.47	1.4427	0.77	2.6925	1.07	3.7397
0.18	0.37299	0.48	1.4839	0.78	2.7328	1.08	3.7654
0.19	0.40348	0.49	1.5253	0.79	2.7729	1.09	3.7902
0.2	0.43463	0.5	1.5668	0.8	2.8128	1.1	3.814
0.21	0.46641	0.51	1.6084	0.81	2.8524	1.11	3.8367
0.22	0.49878	0.52	1.6501	0.82	2.8917	1.12	3.8583
0.23	0.53173	0.53	1.6919	0.83	2.9308	1.13	3.8787
0.24	0.56523	0.54	1.7337	0.84	2.9696	1.14	3.8977
0.25	0.59926	0.55	1.7757	0.85	3.008	1.15	3.9152
0.26	0.63379	0.56	1.8177	0.86	3.0462	1.16	3.9311
0.27	0.6688	0.57	1.8598	0.87	3.084	1.17	3.9451
0.28	0.70427	0.58	1.9018	0.88	3.1215	1.18	3.9569
0.29	0.74018	0.59	1.944	0.89	3.1586	1.19	3.966
0.3	0.77651	0.6	1.9861	0.9	3.1953	1.2	3.9707

2. 附录二

首先引入以下几个概念：

罐身相对容积 ν ： $\nu = \frac{V_{\text{油}}}{V_{\text{身}}}$ ，即罐身相对容积 ν 等于罐身部分盛油容积 $V_{\text{油}}$ 与

罐身部分全容积 $V_{\text{身}}$ 之比;

凸头相对容积 v' : $v' = \frac{V_{\text{油}}'}{V_{\text{头}}}$, 即凸头相对容积 v' 等于凸头部分盛油容积 $V_{\text{油}}'$ 与

凸头部分全容积 $V_{\text{头}}$ 之比;

相对高度 h' : $h' = \frac{h}{2b}$, 即相对高度 h' 等于盛油高度 h 与全高度 $2b$ 之比(见图);

拱凸度 m : $m = \frac{F}{2b}$, 即拱凸度 m 等于凸头的长 F 与全高度 $2b$ 之比(见图);

椭圆柱型卧式油罐的罐身相对容积 v 与相对高度 h 之间的函数关系 $v = v(h)$, 并由此说明, 罐身相对容积 v 仅与相对高度 h 有关^[1]。换言之, 两个椭圆柱型卧式油罐即使形状大小不同, 只要相对高度相等, 则其对应的罐身相对容积 v 也应该相等。则可按下式计算罐身部分盛油容积 $V_{\text{油}}$:

$$V_{\text{油}} = v \cdot V_{\text{身}}$$

椭圆柱型卧式油罐凸头相对容积 v' 与拱凸度 m 、相对高度 h' 之间的函数关系 $v' = v'(m, h')$, 并由此说明, v' 仅与拱凸度 m 、相对高度 h' 有关, 与 a, b 无关。

即 v' 与 m, h' 之间的函数关系, 不随椭圆形状改变而改变。故可按下式计算凸头部分盛油容积 $V_{\text{油}}'$:

$$V_{\text{油}}' = v' V_{\text{头}}$$

由于储油罐两端各有一个凸头, 故储油罐盛油容积 $V_{\text{总}}$ 为:

$$V_{\text{总}} = V_{\text{油}} + V_{\text{油}}' = v V_{\text{身}} + 2v' V_{\text{头}}$$

由于我们在第一问中对于无偏位小椭圆柱储油罐的盛油容积情况已经做了求解, 因此这里我们仍然运用第一问结论, 求出中间位椭圆柱时的情况, 这样不失一般性。而这里的圆柱型储油罐罐身只不过是其中的一种特殊情况而已, 只要令长短半轴长相等(即 $a = b$)且等于圆柱底面圆半径 r 即可。

由(1)式知,

$$v = f(h) = \frac{al}{b} [b^2 \arccos(1 - \frac{h}{b}) + (h - b)\sqrt{h(2b - h)}]$$

又此时罐身全容积为:

$$V_{\text{身}} = \pi a b$$

则此时当盛油高度为 h 时, 罐身相对容积 v 为:

$$\begin{aligned}
v &= \frac{V_{\text{油}}}{V_{\text{身}}} = \frac{\frac{al}{b} [b^2 \arccos(1 - \frac{h}{b}) + (h-b)\sqrt{h(2b-h)}]}{\pi abl} \\
&= \frac{\arccos(1 - \frac{h}{b}) - (1 - \frac{h}{b})\sqrt{\frac{2h}{b} - (\frac{h}{b})^2}}{\pi}
\end{aligned} \tag{2}$$

再根据相对高度的规定：

$$h' = \frac{h}{2b}$$

$$\text{即：} \quad h = 2bh' \tag{3}$$

并将式（3）代入式（2），得：

$$v = \frac{\arccos(1 - 2h') - 2(1 - 2h')\sqrt{h' - h'^2}}{\pi}$$

此即为罐身相对容积 v 与相对高度 h' 之间的函数关系 $v = v(h')$ 。

即罐身部分盛油容积 $V_{\text{油}}$ 为：

$$\begin{aligned}
V_{\text{油}} &= \pi abl \cdot \frac{\arccos(1 - 2h') - 2(1 - 2h')\sqrt{h' - h'^2}}{\pi} \\
&= abl \left[\arccos(1 - 2h') - 2(1 - 2h')\sqrt{h' - h'^2} \right]
\end{aligned} \tag{4}$$

同理，可以得到凸头相对容积 v' 与拱凸度 m 、相对高度 h' 之间的函数关系 $v' = v'(m, h')$ 。

设凸头的长为 F ，它的横截面上椭圆的半长轴为 a ，半短轴为 b ，建立如图 1 所示的直角坐标系 $0xyz$ ，平面 $x0y$ 为凸头与罐身相接的截面。

易知，在平面 $x0y$ 上，椭圆的方程为： $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

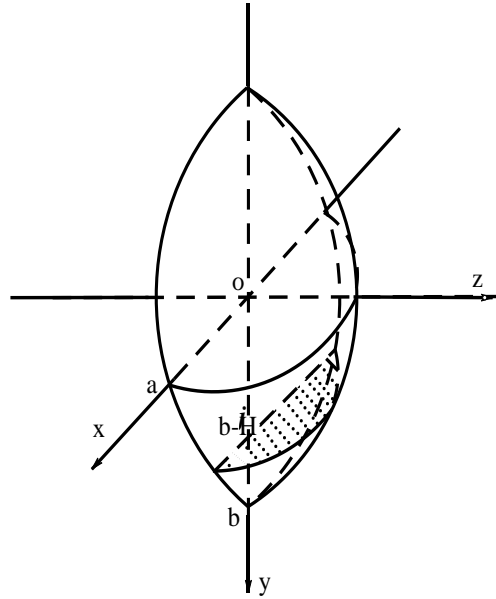


图 1 凸头液面视图

由于凸头曲面可以看成是旋转椭球面的一部分，且在平面 yOz 上，这个旋转椭球面的截面为一个圆。根据勾股定理，这个圆的半径 r 满足方程（图 2）：

$$R^2 = b^2 + (R - F)^2$$

即有：

$$R = \frac{b^2 + F^2}{2F}$$

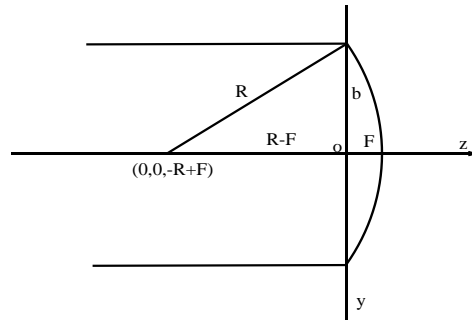


图 2 椭球面截面圆几何关系图

根据拱凸度的规定：

$$m = \frac{F}{2b}$$

即：

$$F = 2bm$$

(5)

推得：

$$R = \frac{b + 4bm^2}{4m}$$

在图七所在示的直角坐标系中，易知旋转椭球面的中心是 $(0, 0, F - R)$ 。若设旋转椭球面的方程为：

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2 + (z + R - F)^2}{R^2} = 1$$

由于点 $(a, 0, 0)$ 在旋转椭球面上，故将其代入上述方程，得：

$$A^2 = \frac{a^2 R^2}{2RF - F^2}$$

又由 $2FR - F^2 = b^2$ ，得：

$$A^2 = \frac{a^2 R^2}{b^2}$$

故旋转椭球面的方程为：

$$\frac{b^2 x^2}{a^2 R^2} + \frac{y^2 + (z + R - F)^2}{R^2} = 1$$

得：

$$z = \pm \sqrt{\left(\frac{b + 4bm^2}{4m}\right)^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2} - y^2} - \frac{b - 4bm}{4m}$$

则图 1 中凸头部分的全容积为：

$$V_{\text{头}} = \iint_A \left[\sqrt{\left(\frac{b + 4bm^2}{4m}\right)^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2} - y^2} - \frac{b - 4bm}{4m} \right] dx dy$$

其积分域 A 是由 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ 确定的。

将积分变量 x, y 依 $x = a\rho \cos \theta$ ， $y = b\rho \sin \theta$ 变换成 ρ ， θ 。

则：

$$\begin{aligned} V_{\text{头}} &= ab \iint_{A'} \left[\sqrt{\left(\frac{b + 4bm^2}{4m}\right)^2 - b^2 \rho^2} - \frac{b - 4bm}{4m} \right] \rho d\rho d\theta \\ &= ab^2 \iint_{A'} \left[\sqrt{\left(\frac{1 + 4m^2}{4m}\right)^2 - \rho^2} - \frac{1 - 4m^2}{4m} \right] \rho d\rho d\theta \end{aligned}$$

其中：变换后的积分域 A' 为： $0 \leq \rho \leq 1$ ， $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 。

$$\text{故：} \quad V_{\text{头}} = ab^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left[\sqrt{\left(\frac{1 + 4m^2}{4m}\right)^2 - \rho^2} - \frac{1 - 4m^2}{4m} \right] \rho d\rho = \frac{\pi ab^2 m}{3} (3 + 4m^2)$$

作代换 $m = \frac{F}{2b}$ ，得到：

$$V_{\text{头}} = \frac{\pi a F}{6} (3b^2 + F^2)$$

当盛油高度为 h 时，凸头部分的盛油容积为：

$$V_{\text{油}}' = \iint_B \left[\sqrt{\left(\frac{b+4bm^2}{4m} \right)^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} - y^2} - \frac{b-4bm^2}{4m} \right] dx dy$$

其中，积分域 B 由 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ 及 $y \geq b-h$ （即 $y \geq b-2bh'$ ）所确定的。

故凸头相对容积为：

$$v' = \frac{V_{\text{油}}'}{V_{\text{头}}} = \frac{\iint_B \left[\sqrt{\left(\frac{b+4bm^2}{4m} \right)^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} - y^2} - \frac{b-4bm^2}{4m} \right] dx dy}{\frac{\pi ab^2 m}{3} (3+4m^2)} \quad (6)$$

将积分变量 x, y 依 $x = a\rho \cos \theta$ ， $y = b\rho \sin \theta$ 变换成 ρ ， θ 。

则变换后积分域变换为：

$$\frac{1-2h'}{\sin \theta} \leq \rho \leq 1, \quad \arcsin(1-2h') \leq \theta \leq \pi - \arcsin(1-2h').$$

故式（6）变换为：

$$\begin{aligned} v' &= \frac{\int_{\arcsin(1-2h')}^{\pi - \arcsin(1-2h')} d\theta \int_{\frac{1-2h'}{\sin \theta}}^1 ab\rho \left[\sqrt{\left(\frac{b+4bm^2}{4m} \right)^2 - b^2\rho^2} - \frac{b-4bm^2}{4m} \right] d\rho}{\frac{\pi ab^2 m}{3} (3+4m^2)} \\ &= \frac{6 \int_{\arcsin(1-2h')}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1-2h'}{\sin \theta}}^1 \rho \left[\sqrt{\left(\frac{b+4bm^2}{4m} \right)^2 - b^2\rho^2} - \frac{b-4bm^2}{4m} \right] d\rho}{\pi m(3+4m^2)} \quad (7) \end{aligned}$$

此式即为凸头相对容积 v' 与拱凸度 m 、相对高度 h' 之间的函数关系 $v' = v'(m, h')$ 。

而对于本题来说，则是当 $a=b=r$ 的特殊情形，（7）式也同样适合。

v' 与 a, b 无关。故在（7）式中令 $a=b=1$ ，得到：

$$v' = \frac{\iint_{B'} \left[\sqrt{\left(\frac{1+4m^2}{4m} \right)^2 - x^2 - y^2} - \frac{1-4m^2}{4m} \right] dx dy}{\frac{\pi m}{3} (3+4m^2)}$$

其中，积分域 B' 由 $x^2 + y^2 \leq 1$ 及直线 $y \geq 1-2h'$ 围成。

即：

$$\begin{aligned}
 v' &= \frac{3}{\pi m(3+4m^2)} \int_{1-2h'}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \left[\sqrt{\left(\frac{1+4m^2}{4m}\right)^2 - x^2 - y^2} - \frac{1-4m^2}{4m} \right] dx \\
 &= \frac{3}{\pi m(3+4m^2)} \left\{ \int_{1-2h'}^1 \left[\left(\frac{1+4m^2}{4m}\right)^2 - y^2 \right] \arcsin \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{\left(\frac{1+4m^2}{4m}\right)^2 - y^2}} dy - \frac{1-4m^2}{4m} \int_{1-2h'}^1 \sqrt{1-y^2} dy \right\} \\
 &= \frac{3}{\pi m(3+4m^2)} \left\{ \int_{1-2h'}^1 \left[\left(\frac{1+4m^2}{4m}\right)^2 - y^2 \right] \arcsin \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{\left(\frac{1+4m^2}{4m}\right)^2 - y^2}} dy - \frac{1-4m^2}{4m} \left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arccos(1-2h') - (1-2h')\sqrt{h'-h'^2} \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{8}$$

即凸头部分的盛油容积为：

$$V_{油}' = \frac{\pi m}{3} (3+4m^2) v' \tag{9}$$

综上所述，无变位储油罐盛油容积为：

$$\begin{aligned}
 V_{总} &= V_{油} + V_{油}' \\
 &= ab \left[\arccos(1-\frac{h}{2b}) - 2(1-\frac{h}{2b})\sqrt{\frac{h}{2b} - (\frac{h}{2b})^2} \right] \frac{\pi m}{3} + \frac{\pi m}{3} (3+4m^2) v'
 \end{aligned} \tag{10}$$

得：

$$V_{总} = abl \left[\arccos(1-\frac{h}{b}) - 2(1-\frac{h}{b})\sqrt{\frac{h}{2b} - (\frac{h}{2b})^2} \right] + \frac{\pi F}{6b} (3 + \frac{F^2}{b^2}) v' \tag{11}$$

