

# 微分方程模型

## 1. 传染病模型

随着卫生设施的改善、医疗水平的提高以及人类文明的不断发展, 诸如霍乱、天花等曾经肆虐全球的传染性疾病已经得到有效的控制。但是一些新的、不断变异着的传染病毒却悄悄向人类袭来。20 世纪 80 年代十分险恶的爱滋病毒开始肆虐全球, 至今带来极大的危害。长期以来, 建立制止传染病蔓延的手段等, 一直是各国有关专家和官员关注的课题。

不同类型传染病的传播过程有其各自不同的特点, 弄清这些特点需要相当多的病理知识, 这里不可能从医学的角度一一分析各种传染病的传播, 而只是按照一般的传播模型机理建立几种模型。

**模型 1** 在这个最简单的模型中, 设时刻  $t$  的病人人数  $x(t)$  是连续、可微函数, 并且每天每个病人有效接触 (足以使人致病的接触) 的人数为常数  $\lambda$  考察  $t$  到  $t + \Delta t$  病人人数的增加, 就有

$$x(t + \Delta t) - x(t) = \lambda x(t) \Delta t$$

再设  $t=0$  时有  $x_0$  个病人, 即得微分方程

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x, \quad x(0) = x_0 \quad (1)$$

方程 (1) 的解为

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t} \quad (2)$$

结果表明, 随着  $t$  的增加, 病人人数  $x(t)$  无限增长, 这显然是不符合实际的。

建模失败的原因在于: 在病人有效接触的人群中, 有健康人也有病人, 而其中只有健康人才可以被传染为病人, 所以在改进的模型中必须区别这两种人。

**模型 2 (SI 模型)** 假设条件为

1. 在疾病传播期内所考察地区的总人数  $N$  不变, 即不考虑生死, 也不考虑迁移。人群分为**易感染者** (Susceptible) 和**已感染者** (Infective) 两类 (取两个词的第一个字母, 称之为 SI 模型), 以下简称**健康者**和**病人**。时刻  $t$  这两类人在总人数中所占比例分别记作  $s(t)$  和  $i(t)$ 。

2. 每个病人每天有效接触的平均人数是常数  $\lambda$ ,  $\lambda$  称为**日接触率**。当病人与健康者接触时, 使健康者受感染变为病人。

根据假设, 每个病人每天可使  $\lambda s(t)$  个健康者变为病人, 因为病人数为  $Ni(t)$ , 所以每

天共有  $\lambda N s(t) i(t)$  个健康者被感染, 于是  $\lambda N s i$  就是病人数  $Ni$  的增加率, 即有

$$N \frac{di}{dt} = \lambda N s i \quad (3)$$

又因为

$$s(t) + i(t) = 1 \quad (4)$$

再记初始时刻 ( $t=0$ ) 病人的比例为  $i_0$ , 则

$$\frac{di}{dt} = \lambda i(1-i), \quad i(0) = i_0 \quad (5)$$

方程 (5) 是 Logistic 模型。它的解为

$$i(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{i_0} - 1\right)e^{-\lambda t}} \quad (6)$$

$i(t) \sim t$  和  $\frac{di}{dt} \sim i$  的图形如图 1 和图 2 所示。

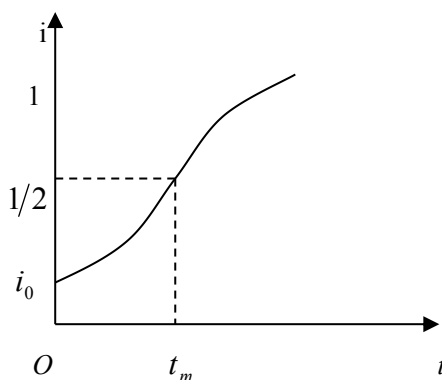


图 1 SI 模型的  $i \sim t$  曲线

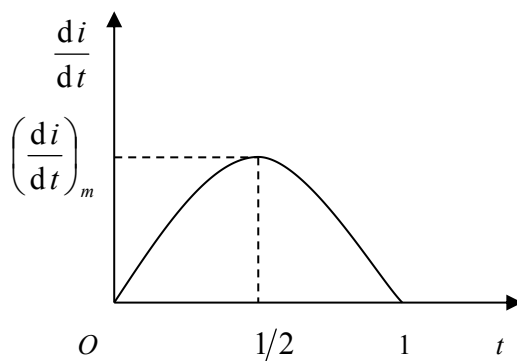


图 2 SI 模型的  $\frac{di}{dt} \sim i$  曲线

由 (5), (6) 式及图 1 可知, 第一, 当  $i = 1/2$  时  $\frac{di}{dt}$  达到最大值  $\left(\frac{di}{dt}\right)_m$ , 这个时刻为

$$t_m = \lambda^{-1} \ln \left( \frac{1}{i_0} - 1 \right) \quad (7)$$

这时病人增加得最快, 可以认为是医院的门诊量最大的一天, 预示着传染病高潮的到来, 是医疗卫生部门关注的时刻。 $t_m$  与  $\lambda$  成反比, 因为日接触率  $\lambda$  表示该地区的卫生水平,  $\lambda$  越小卫生水平越高。所以改善保健设施、提高卫生水平可以推迟传染病高潮的到来。第二, 当

$t \rightarrow \infty$  时  $i \rightarrow 1$ , 即所有人终将被传染, 全变为病人, 这显然不符合实际情况。其原因是模型中没有考虑到病人可以治愈, 人群中的健康者只能变成病人, 病人不会再变成健康者。

为了修正上述结果必须重新考虑模型的假设, 下面两个模型中我们讨论病人可以治愈的情况。

**模型 3 (SIS 模型)** 有些传染病如伤风、痢疾等愈后免疫力很低, 可以假定无免疫性, 于是病人被治愈后变成健康者, 健康者还可以被感染再变成病人, 所以这个模型称 SIS 模型。

SIS 模型的假设条件 1, 2 与 SI 模型相同, 增加的条件为

3. 每天被治愈的病人数占病人总数的比例为常数  $\mu$ , 称为**日治愈率**, 病人治愈后成为仍可被感染的健康者。显然  $1/\mu$  是这种传染病的**平均传染期**。

不难看出, 考虑到假设 3, SI 模型的 (3) 式应修正为

$$N \frac{di}{dt} = \lambda N s i - \mu N i \quad (8)$$

(4) 式不变, 于是 (5) 式应改为

$$\frac{di}{dt} = \lambda i(1-i) - \mu i, \quad i(0) = i_0 \quad (9)$$

定义

$$\sigma = \lambda/\mu \quad (10)$$

注意到  $\lambda$  和  $1/\mu$  的含义, 可知  $\sigma$  是整个传染期内每个病人有效接触的平均人数, 称为**接触数**。

利用  $\sigma$ , 方程 (9) 可以改写作

$$\frac{di}{dt} = -\lambda i \left[ i - \left( 1 - \frac{1}{\sigma} \right) \right] \quad (11)$$

由方程 (11) 容易先画出  $\frac{di}{dt} \sim i$  的图形 (图 3, 图 5), 再画出  $i \sim t$  的图形 (图 4, 图 6)。

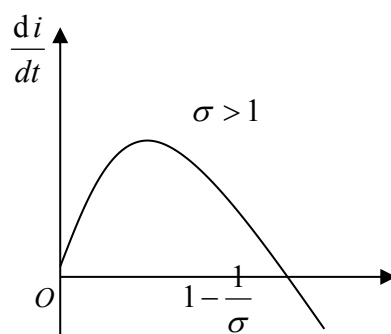
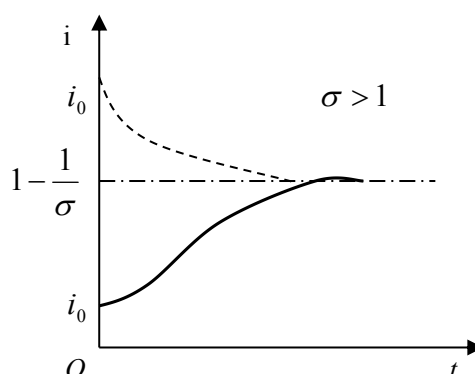
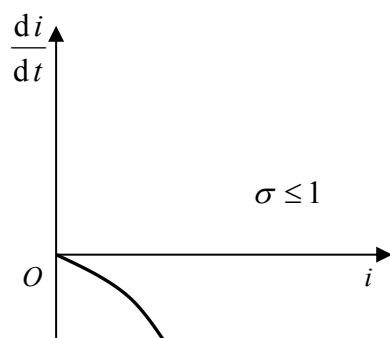
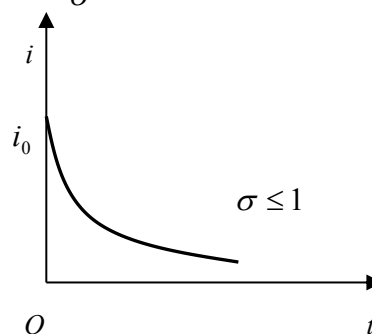


图 3 SIS 模型的  $\frac{di}{dt} \sim i$  曲线 ( $\sigma > 1$ )

图4 SIS模型的 $i \sim t$ 曲线 ( $\sigma > 1$ ),

其中虚线是 $i_0 > 1 - \frac{1}{\sigma}$ 的情况

图5 SIS模型的 $\frac{di}{dt} \sim i$ 曲线 ( $\sigma \leq 1$ )图6 SIS模型的 $i \sim t$ 曲线 ( $\sigma \leq 1$ )

不难看出,接触数 $\sigma = 1$ 是一个阈值。当 $\sigma > 1$ 时 $i(t)$ 的增减性取决于 $i_0$ 的大小(见图4),但其极限值 $i(\infty) = 1 - \frac{1}{\sigma}$ 随 $\sigma$ 的增加而增加(试从 $\sigma$ 的含义给以解释);当 $\sigma \leq 1$ 时病人比例 $i(t)$ 越来越小,最终趋于零,这是由于传染期内经有效接触从而使健康者变成的病人不超过原来病人数的缘故。

SI模型可视为本模型的特例,请读者考虑它相当于本模型中 $\mu$ 或 $\sigma$ 取何值的情况。

**模型4 (SIR模型)** 大多数传染病如天花、流感、肝炎、麻疹等治愈后均有很强的免疫力,所以病愈的人即非健康者(易感染者),也非病人(已感染者),他们已经退出传染系统。这种情况比较复杂,下面将详细分析建模过程。

#### 模型假设

1. 总人数 $N$ 不变。人群分为健康者、病人和病愈免疫的移出者(Removed)三类,称SIR模型。三类人在总数 $N$ 中占的比例分别记作 $s(t)$ , $i(t)$ 和 $r(t)$ 。
2. 病人的日接触率为 $\lambda$ ,日治愈率为 $\mu$ (与SI模型相同),传染期接触为 $\sigma = \lambda/\mu$ 。

#### 模型构成

由假设1显然有

$$s(t) + i(t) + r(t) = 1 \quad (12)$$

根据条件 2 方程 (8) 仍然成立。对于病愈免疫的移出者而言有

$$N \frac{dr}{dt} = \mu Ni \quad (13)$$

再记初始时刻的健康者和病人的比例分别是  $s_0 (s_0 > 0)$  和  $i_0 (i_0 > 0)$  (不妨设移出者的

初值  $r_0 = 0$ )，则由 (8)，(12)，(13) 式，SIR 模型的方程可以写作

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda si - \mu i, & i(0) = i_0 \\ \frac{ds}{dt} = -\lambda si, & s(0) = s_0 \end{cases} \quad (14)$$

方程 (14) 无法求出  $s(t)$  和  $i(t)$  的解析解，可作数值计算。

如取  $\lambda = 11, \mu = 3, i_0 = 0.1, s_0 = 0.9$ ，数值计算结果

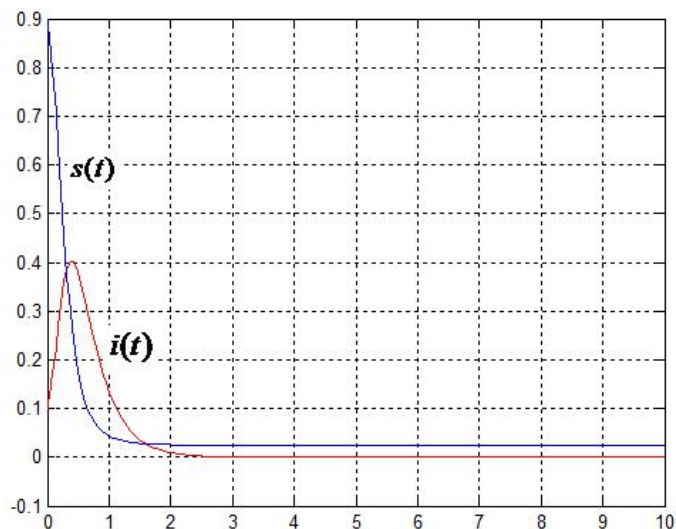


图 7 数值计算示例

Matlab 实现程序：

```
function y=infect(t,x)
lamp=11; %传染率
u=3;    %治愈率
y=[lamp*x(1)*x(2)-u*x(1),-lamp*x(1)*x(2)]';
```

主程序：

```
x0=[0.1,0.9]'; %初始值
[t,x]=ode45('infect',[0,10],x0);
%调用变步长 4 阶 5 级 Runge-Kutta-Felhberg 法计算
plot(t,x(:,1),'r',t,x(:,2),'b');
```

grid on

另: HIV/AIDS 模型

将人群分为易感人群(Susceptible)、感染者(Infected)、患者(AIDS)、死亡者(Death), 离散动力学模型为:

$$\begin{cases} S(t+1) = B(t) + (1 - \lambda(t) - \mu(t))S(t) \\ I(t+1) = \lambda(t)S(t) + (1 - \gamma - \mu(t))I(t) \\ B(t+1) = \text{birth\_rate} \times \lambda_b I(t) + (1 - \gamma_b - \mu(t))B(t) \\ A(t+1) = \gamma I(t) + \gamma_b B(t) + (1 - \delta)A(t) \end{cases}$$

其中  $\lambda(t)$  为第  $t$  年的感染率,  $\mu(t)$  为第  $t$  年的死亡率,  $\gamma$  为从感染者到患者

的转移率,  $\gamma_b = 1/10$ ,  $\lambda_b = 1/4$ ,  $\gamma_b = 1/10$ ,  $\delta$  为患者的死亡率, 常取  $\delta = 1$ 。

$$\lambda(t) = \beta \frac{i(t)}{i(t) + s(t)}, \quad \beta = 0.5256$$

## 2. 战争模型

### 一般战争模型

设  $x(t)$  和  $y(t)$  表示交战双方甲和乙在时刻  $t$  时的兵力, 可设为双方的士兵人数。假设:

1. 每方战斗减员率取决于双方的兵力和战斗力, 甲乙方的战斗减员率分别用  $f(x, y)$  和  $g(x, y)$  表示。
2. 每方的非战斗减员率(如疾病、逃跑)只与本方兵力成正比。
3. 甲乙方的增援率是给定的函数, 分别用  $u(t)$  和  $v(t)$  表示。

由此得到微分方程:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -f(x, y) - \alpha \cdot x + u(t), & \alpha > 0 \\ \frac{dy}{dt} = -g(x, y) - \beta \cdot y + v(t), & \beta > 0 \end{cases} \quad (1)$$

## 一.正规战模型

考虑甲方战斗减员率与乙方兵力成正比, 即  $f = a \cdot y$ 。 $a$  表示乙方平均每个士兵对甲方的杀伤率(单位时间内的杀伤数)。 $a$  可表示为  $a = r_y \cdot p_y$ , 其中  $r_y$  为乙方的射击率,  $p_y$  为乙每次的命中率。

同样, 乙方战斗减员率与甲方兵力成正比, 即  $g = b \cdot x$ 。 $b$  表示甲方平均每个士兵对乙方的杀伤率(单位时间内的杀伤数)。 $b$  可表示为  $b = r_x \cdot p_x$ , 其中  $r_x$  为甲方的射击率,  $p_x$  为甲每次的命中率。

不考虑非战斗减员和兵力增加, 初始时双方兵力分别为  $x_0, y_0$ , 一般微分方程:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -a \cdot y \\ \frac{dy}{dt} = -b \cdot x \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0 \end{cases}$$

其中  $a = r_y \cdot p_y$ ,  $r_y$  为乙方的射击率,  $p_y$  为乙每次的命中率。

$b = r_x \cdot p_x$ ,  $r_x$  为甲方的射击率,  $p_x$  为甲每次的命中率。

方程可化为:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{b \cdot x}{a \cdot y} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$\text{则: } a \cdot y^2 - b \cdot x^2 = k$$

由初始条件有:

$$k = a \cdot y_0^2 - b \cdot x_0^2$$

当  $k > 0$  时, 曲线与  $y$  轴相交, 表示乙方最终获胜, 获胜时剩余兵力为  $y = \sqrt{\frac{k}{a}}$ 。

当  $k < 0$  时, 曲线与  $x$  轴相交, 表示甲方最终获胜, 获胜时剩余兵力为  $x = \sqrt{-\frac{k}{b}}$ 。

当  $k = 0$  时, 双方打成平局, 最终同归于尽, 剩余兵力都为 0。

$$\text{乙方获胜条件} \left( \frac{y_0}{x_0} \right)^2 > \frac{b}{a} = \frac{r_x \cdot p_x}{r_y \cdot p_y}$$

当甲方战斗力增加 4 倍, 则乙方只需将兵力增加 2 倍。

该模型也称为平方模型。

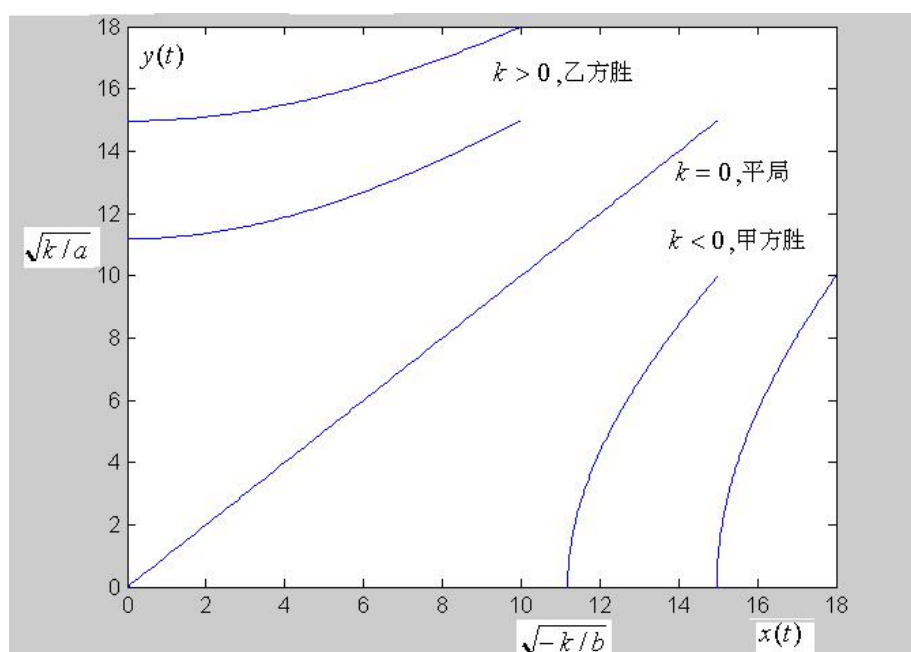


图 1 正规战模型的相轨线

## 二.游击战模型

当甲乙双方都使用游击战时, 任一方兵力的减少不但与对方兵力有关, 而且与己方的兵力有关。对方和己方兵力越多, 己方战斗减员率越大。

设乙方杀伤率为  $c$ ,  $c = r_y \cdot p_y = r_y \cdot \frac{s_{ry}}{s_x}$ , 其中  $r_y$  为乙方的射击率,  $p_y$  为乙每次

的命中率;  $s_x$  为甲方活动面积,  $s_{ry}$  为乙方有效射击面积。

设甲方杀伤率为  $d$ ,  $d = r_x \cdot p_x = r_x \cdot \frac{s_{rx}}{s_y}$ , 其中  $r_x$  为甲方的射击率,  $p_x$  为甲每次

的命中率;  $s_y$  为乙方活动面积,  $s_{rx}$  为甲方有效射击面积。



其一般微分方程化为：

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -c \cdot x \cdot y \\ \frac{dy}{dt} = -d \cdot x \cdot y \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0 \end{cases} \quad (4)$$

方程(2)可化为：

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{d}{c} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (3)$$

则：  $c \cdot y - d \cdot x = k$

由初始条件有：

$$k = c \cdot y_0 - d \cdot x_0$$

当  $k > 0$  时，曲线与  $y$  轴相交，表示乙方最终获胜，获胜时剩余兵力为  $y = \frac{k}{c}$ 。

当  $k < 0$  时，曲线与  $x$  轴相交，表示甲方最终获胜，获胜时剩余兵力为  $x = -\frac{k}{d}$ 。

当  $k = 0$  时，双方打成平局，最终同归于尽，剩余兵力都为 0。

$$\text{乙方获胜条件 } \frac{y_0}{x_0} > \frac{d}{c} = \frac{r_x \cdot s_{rx} \cdot s_x}{r_y \cdot s_{ry} \cdot s_y}$$

当甲方活动面积增加一倍时，则乙方需将兵力增加一倍。

该模型也称为线性律模型。

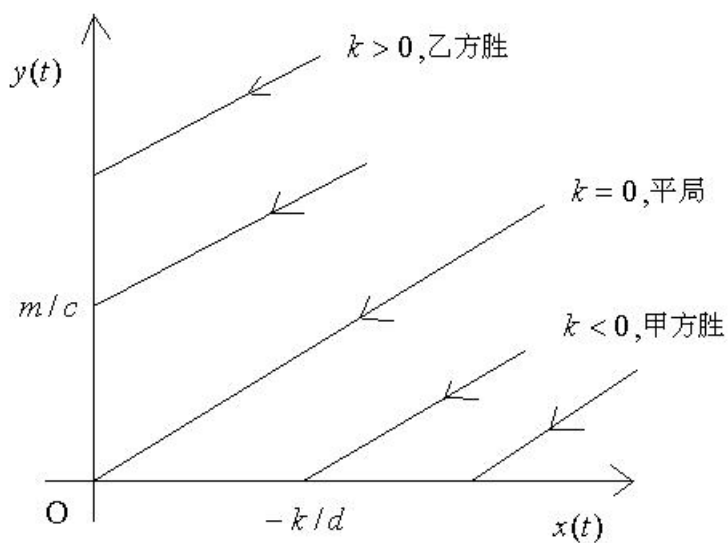


图2 游击战模型的相轨迹线

### 三、混合战争模型

假设甲方为游击战争，乙方为正规战争。

方程为：

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -c \cdot x \cdot y \\ \frac{dy}{dt} = -b \cdot x \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0 \end{cases}$$

则解为

$$c \cdot y^2 - 2 \cdot b \cdot x = n$$

$$\text{其中 } n = c \cdot y_0^2 - 2 \cdot b \cdot x_0$$

相轨线是抛物线。 $n < 0$ , 甲方胜； $n = 0$ , 平局； $n > 0$ , 乙方胜。

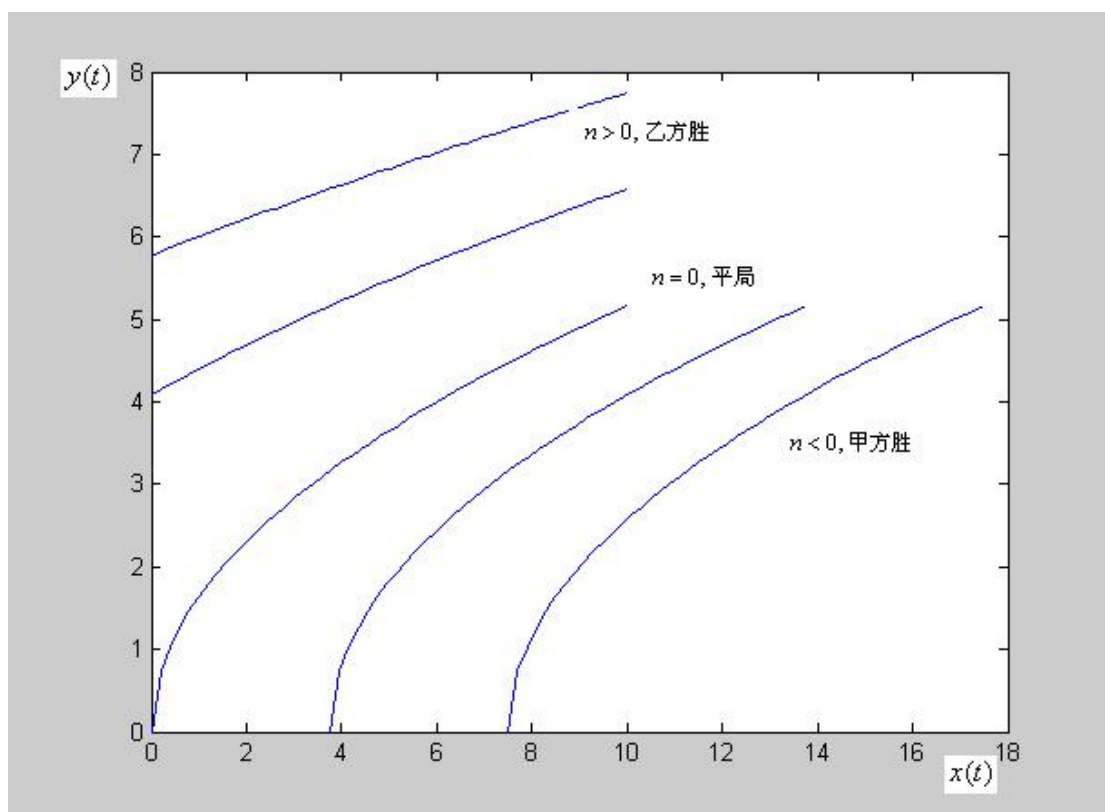


图3 混合战争模型的相轨线

乙方获胜条件

$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 > \frac{2b}{c \cdot x_0}$$

而  $b = r_x \cdot p_x$ ,  $c = r_y \cdot p_y = r_y \cdot \frac{s_{ry}}{s_x}$ , 代入有:

$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 > \frac{2 \cdot r_x \cdot p_x \cdot s_x}{r_y \cdot s_{ry} \cdot x_0}$$

设乙方正规部队火力强, 甲方则隐蔽范围大。设甲方兵力  $x_0 = 100$ , 命中率  $p_x = 0.1$ , 火力  $r_x = \frac{1}{2} r_y$ , 活动面积  $s_x = 0.1 \text{ km}^2$ , 乙方每次射击的有效面积为  $s_{ry} = 1 \text{ m}^2$ , 则

$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 > \frac{2 \cdot r_x \cdot p_x \cdot s_x}{r_y \cdot s_{ry} \cdot x_0} = \frac{2 \times 0.1 \times 0.1 \times 10^6}{2 \times 1 \times 100} = 100$$

即  $\frac{y_0}{x_0} = 10$ , 乙方必须以 10 倍于甲方的兵力才能获胜。