

承诺书

2008 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

编 号 专 用 页

赛区评阅编号（由赛区组委会评阅前进行编号）：

赛区评阅记录（可供赛区评阅时使用）：

全国统一编号（由赛区组委会送交全国前编号）：

全国评阅编号（由全国组委会评阅前进行编号）：

摘要

本文通过建立相机线性投影模型实现了数码相机双目标定中物像间坐标的转换,并基于立体视觉中的相关理论对两相机的相对位置进行标定。

针对问题一,通过对所涉及的各坐标系间的转换关系的刻画,确定出物像间的投影变换关系。基于传统的参数标定和自标定算法提出了相机参数优化标定算法,算法的整体思想是:首先对相机内外参数进行近似估计,然后通过非线性优化,对待定参数进行优化标定。利用优化出的相机参数所组成的投影变换矩阵,即可唯一确定物平面一点投影在像平面的像点坐标。

针对问题二,基于线性投影模型的相关特性,选定靶标上任意两圆的共切线所对应的切点作为物平面上的特征点,并使用 ACDSsee 软件读取相应像点的像坐标,以此为原始数据带入到线性投影模型中,采用微分进化算法对相机的内外参数进行优化标定,优化结果为:

旋转角度(度)			主点坐标 (像素)	像点坐标 (像素)	A	B	C	D	E
绕 x 轴	绕 y 轴	绕 z 轴	512	横轴	331	422	635	585	281
78.99	34.8	-51.04	389	纵轴	193	195	199	504	497

特别说明:世界坐标系的原点位于靶标中心,Z 轴垂直于物平面,像坐标系的原点位于像平面的左上角,主点表示光轴与像平面的交点。

通过对圆心 A、B、C 所成像点的共线性以及所有圆心投影像点的近似中心性进行检验,论证了结果的合理性。

针对问题三,分别设计了三种检验策略:将像距假定为一变量代入到投影模型中进行重新标定,通过对比其优化值和实际值的偏差检验模型的准确性;引入随机正态白噪声对模型的抗干扰能力进行验证,通过用均匀性噪声代替正态白噪声,并对比分析两种不同的噪声引入方式所取得的实验效果,论证出正态白噪声检验策略的合理性;选择不同数量的特征点,观察其对结果产生的影响,以检验模型的稳定性。经过上述检验表明:模型的精度较高,且具有较好的稳定性。

针对问题四,基于线性代数相关理论,构建了相机相对位置标定模型,并运用线性法进行求解。

最后,本文针对畸变模型和双目立体视觉原理进行了较为深入的讨论,具有一定的实际应用价值。

本文的创新主要表现为:借用微分进化算法求解非线性优化,高效适用;检验方法比较有力,具有较强的说服力。

关键词:线性投影模型 相机内外参数标定 微分进化算法 随机正态白噪声检验 相机相对位置的标定

目录

一	问题重述与分析	3
	问题重述	3
	问题分析	3
	问题本质分析	3
	便利原则的分析	3
	对投影畸变的分析	3
	靶标上圆的投影曲面的形状分析	3
	圆心所成像点的位置分析	4
	对像图灰度的分析	4
二	问题假设	4
三	符号说明	4
四	模型建立与求解	4
4.1	线性投影模型的建立	4
4.1.1	坐标系的定义 ^[1]	5
4.1.2	不同坐标系间的转化	5
1.	从世界坐标系到相机坐标系 ^[2]	5
2.	从相机坐标系到像素坐标系的变换	6
4.1.3	相机内外参数的标定	7
4.1.3.1	参数标定算法概述	7
4.1.3.2	参数标定算法的选定	8
4.2	线性投影模型在问题二中的应用	9
4.2.1	具体算法的流程设计	9
4.2.2	微分进化算法	11
4.2.3	结果的合理性检验	13
4.3	线性投影模型的准确性与稳定性检验	14
4.3.1	给定参量 f 变量化处理反向检验	14
4.3.2	随机噪声检验	15
4.3.3	选取不同的特征点个数下优化结果对比分析	18
4.4	双相机相对位置自标定模型 ^[12]	19
4.4.1	基本矩阵的 E 求解	21
4.4.2	t 或 T 的求解	21
4.4.3	旋转矩阵 R 的求解	21
4.4.4	t 和 k 符号的确定	22
五	模型的推广与进一步讨论	22
畸变模型的讨论 ^[14]		22
双相机立体视觉原理的讨论 ^[1]		22
六	模型优缺点	24
模型的优点		24
模型的缺点		24
七	参考文献	24
八	附录	25
	Mathematic 软件对微分进化算法的编程实现:	25

一 问题重述与分析

问题重述

数码相机定位在交通监管（电子警察）等方面有广泛的应用。所谓数码相机定位是指用数码相机摄制物体的相片确定物体表面某些特征点的位置。最常用的定位方法是双目定位，即用两部相机来定位。而针对双目定位，精确地确定两部相机的相对位置就是关键，这一过程称为系统标定。

而进行系统标定时，所采用的一种做法是：在一块平板上画若干个点，同时用这两部相机照相，分别得到这些点在它们像平面上的像点，利用这两组像点的几何关系就可以得到这两部相机的相对位置。然而，无论在物平面或像平面上我们都无法直接得到没有几何尺寸的“点”。实际的做法是在物平面上画若干个圆（称为靶标），它们的圆心就是几何的点了。而它们的像一般会变形，所以必须从靶标上的这些圆的像中把圆心的像精确地找到，标定就可实现。

使用一位置固定的数码相机对设定好的靶标进行拍摄，得到其像。

(1) 建立数学模型和算法以确定靶标上圆的圆心在该相机像平面的像坐标，这里坐标系原点取在该相机的焦点， $x-y$ 平面平行于像平面；

(2) 针对分别给出的靶标及其像，计算靶标上圆的圆心在像平面上的像坐标；

(3) 设计一种方法检验你们的模型，并对方法的精度和稳定性进行讨论；

(4) 建立用此靶标给出两部固定相机相对位置的数学模型和方法。

问题分析

问题本质分析

工程实际中，经常需要利用数码相机对某物体进行精确定位，此时首先需要进行系统标定以确定两部照相机的相对位置，而系统标定的关键在于如何根据物平面上无几何尺寸的特征点的空间坐标，准确确定出该点在像平面上的位置。因此合理的构建投影变换模型以准确刻画出物像之间的转换关系以及对相机内外参数的确定至关重要。

便利原则的分析

结合问题的实际应用背景，研究人员在通过实验进行系统标定时，应当尽可能设计便利快捷的标定方案，因此在确定靶标和两各照相机的相对位置时，应当尽量保证靶标关于相机光轴大致对称，且靶标同相机之间的物距适中，这对后文中坐标系的设定有一定的价值。

对投影畸变的分析

结合实际，由于相机制造和工艺等原因，目标像点会发生多种类型的畸变，包括径向畸变、切向畸变、薄棱镜畸变等，但从本问题客观实际出发，应当将投影畸变予以忽略予以忽略，原因如下：

1. 畸变模型的引入会使得模型更加复杂，非线性更加严重，影响求解的准确性；
2. 在一个模型中，并非考虑的因素越多越好。只需抓住主要影响因素；
3. 不同的相机的畸变参数不同，参数的具体取值无法准确给定。

靶标上圆的投影曲面的形状分析

一般情况下，靶标上的圆经投影之后将会发生不同程度的形变，结合实际，产生形

变的原因是：基于小孔成像原理，物平面上一线段经过小孔得到的投影直线在长度上将发生一定程度上的伸缩，且靶标上一圆 O 在两个不同方向上的直径 D_i 、 D_j 经过一小孔（半径忽略）投影到像平面上时，所发生的伸缩程度不同，从而导致投影曲面的形状发生了改变，即由圆面转变成了一个形状待定的曲面。

圆心所成像点的位置分析

经过仔细分析，靶标上圆的圆心的投影像点，应该与该圆所对应的闭合投影曲面的中心发生了一定的偏移，但考虑到模型的线性特性，偏移量应当不会太大。

对像图灰度的分析

在考虑拍摄过程中物点颜色的成像时，我们引入“灰度”的概念。像平面上所成的像点事实上是离散分布的，最小单位为像素，在每一个像素点上，根据其所映射的特征点颜色被分为 0—255 等级的“灰度”，且等级越高，像点越暗，0 为纯白，255 为纯黑。在实际问题分析中，考虑到靶标上的点都是深黑的点位于浅白的背景中对比明显，而所成的像从一定程度上来说也是“黑白分明”的，并且考虑到“灰度”问题的复杂性，我们进行了合理的简化处理，即我们认为，像点上只有黑白两种颜色。

二 问题假设

1. 所给的靶标上圆的相对位置以及投影后得到的像图足够精确；
2. 系统是线性的，不考虑各种畸变；
3. 假设数码相机拍摄的图像没有灰度，只有黑白两种颜色；
4. 假设 CCD 板上的相邻像素点的物理尺寸的比值为 1；
5. 假设在 CCD 像面上的图像对称性在计算机帧存中同样适用；

三 符号说明

$O(x_w, y_w, z_w)$	世界坐标系
$C(x_c, y_c, z_c)$	相机坐标系
$O'(x', y')$	图像坐标系
$O''(u, v)$	像素坐标系
R	旋转矩阵
T	平移矩阵
f	像距，单位为 mm
(u_0, v_0)	光轴同像平面的交点，单位为像素
\angle	相机坐标系相对世界坐标系 x 轴的旋转角，单位为度
\angle	相机坐标系相对世界坐标系 y 轴的旋转角，单位为度
γ	相机坐标系相对世界坐标系 z 轴的旋转角，单位为度

四 模型建立与求解

4.1 线性投影模型的建立

基于对问题的理解，欲确定靶标圆心在 CCD 投影面上的投影点，需建立相机成像模型对物像间投影变换关系进行刻画，并通过标定相机内外参数求定像点坐标。

为了避免复杂的透镜系统，我们采用线性的针孔模型来近似成像模型。在针孔相机中，三维空间一个点的图像是从这个点出发的并经过针孔的光线与相机成像平面的交点。在理想情况下，认为从该点发出的光线是理想的直线。用针孔模型来描述一般成像系统是适合的。

在线性投影模型系统中，涉及到多个坐标系，包括图像坐标系，相机坐标系，世界坐标系和像素坐标系等。标定实际上就是确定这些坐标系之间的变换关系，因此我们首先需要明确给出模型涉及的各种坐标系的定义以及它们之间的转换关系。

4.1.1 坐标系的定义^[1]

1. 世界坐标系

世界坐标系是用于描述物体空间位置的一个基准绝对坐标系，表示为 $O(x_w, y_w, z_w)$ 。相机所拍摄的内容还取决于相机在世界坐标系中的位姿，这个位姿参数就是相机的外参数。在本题中为方便求解，设定世界坐标系的原点为正方形靶标的中心，其 Z 轴垂直于靶标平面， X 轴、 Y 同正方形相邻边分别平行。

2. 相机坐标系

相机坐标系是以相机的光学中心为原点，以光轴为 z 轴的坐标系，对应于题中所定义的笛卡尔坐标系，具体表示为： $C(x_c, y_c, z_c)$ 。

3. 图像坐标系

图像坐标系是定义在相机所采集图像上的直角坐标系，其 XOY 面与光轴垂直， X' 轴与 X_c 轴同向， Y' 轴与 Y_c 轴同向，具体表示为： $O'(x', y')$ 。

4. 像素坐标系

坐标系的原点位于图像的左上角，其 u 轴与 X_c 轴同向， v 轴与 Y_c 轴反向。其单位是像素，某个像素的坐标是该像素所处的列数和行数。坐标值表示为： $O''(u, v)$ 。

四个坐标系在立体图像中可以刻画为：

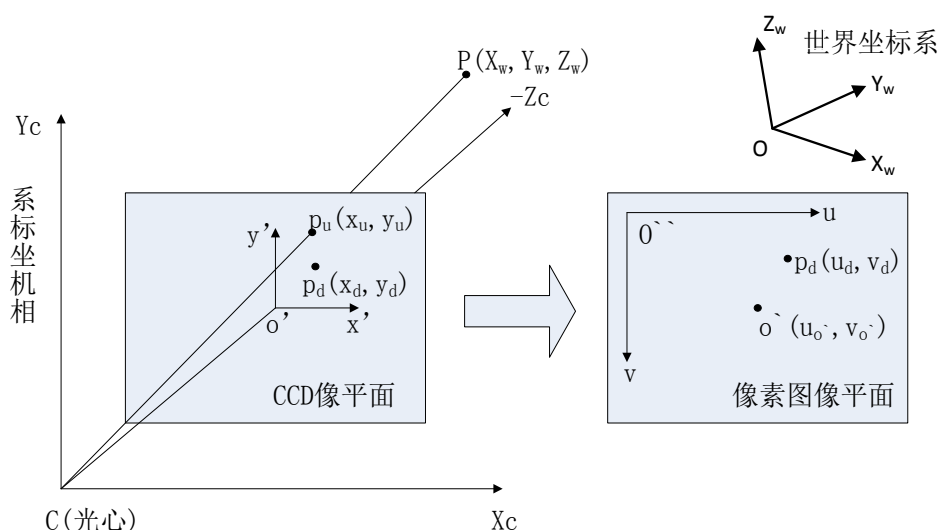


图1、四个坐标系形象图

4.1.2 不同坐标系间的转化

1. 从世界坐标系到相机坐标系^[2]

(1) 世界坐标系和相机坐标系重合时的数学模型：

此种情况下，实际系统采用小孔成像原理。设点 $p(x_w, y_w, z_w)$ 为 3 维世界坐标系中的一点，假设客观场景中特征点均在镜头的前面。借助三角形相似关系，可以得出点 $p(x_w, y_w, z_w)$ 与其在像平面的投影点 $I(x', y')$ 的转换关系：

$$x' = f \frac{x_w}{z_w} = f \frac{x_c}{z_c} \quad (1)$$

$$y' = f \frac{y_w}{z_w} = f \frac{y_c}{z_c} \quad (2)$$

(2) 世界坐标系和相机坐标系分开时的数学模型：

一般的情况，上述两个坐标系统是分开的，可以将两个系统分开时的几何关系转化为两个坐标系统重合时的情形，然后再进行透视投影变换即可得到 3-D 空间点在像平面投影的坐标。具体来说，针对每个世界坐标系中的点分别按下属几个步骤进行几何关系变换。

Step1. 平移世界坐标系原点到相机坐标系原点（即光心），可用变换矩阵 T 完成：

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -D_x \\ 0 & 1 & 0 & -D_y \\ 0 & 0 & 1 & -D_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中， (D_x, D_y, D_z) 为相机坐标系原点在世界坐标系中的坐标。

Step2. 将世界坐标系绕其 X 轴逆时针旋转 α 角，其变换矩阵为 R_1 。

Step3. 将旋转后的世界坐标系绕其 Y 轴逆时针旋转 β 角，其变换矩阵为 R_2 。

Step4. 再绕其 Z 轴逆时针旋转 γ 角，其变换矩阵为 R_3 。

这样经过以上四个步骤的变换，实现了世界坐标系和相机坐标系的完全重合，得到点 $p(x_w, y_w, z_w)$ 在相机坐标系中的坐标，用 (x_c, y_c, z_c) 表示，其计算表达式为：

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{bmatrix} + T \quad (4)$$

其中， R 为对三个坐标轴进行旋转变换后的综合旋转矩阵， R 与平移矩阵 T 共同构成了相机的外参数矩阵，且旋转矩阵 R 满足：

$$R = R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 = \begin{bmatrix} \cos(\beta)\cos(\gamma) & \cos(\beta)\sin(\gamma) & -\sin(\beta) \\ \sin(\alpha)\sin(\beta)\cos(\gamma) - \cos(\alpha)\sin(\gamma) & \sin(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma) + \cos(\alpha)\cos(\gamma) & \sin(\alpha)\cos(\beta) \\ \cos(\alpha)\sin(\beta)\cos(\gamma) + \sin(\alpha)\sin(\gamma) & \cos(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma) - \sin(\alpha)\cos(\gamma) & \cos(\alpha)\cos(\beta) \end{bmatrix}$$

2. 从相机坐标系到像素坐标系的变换

针对本文所使用的线性变换模型，相机坐标系和像素坐标系的关系如下：

$$\begin{bmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} \quad (5)$$

式中像素坐标系采用了齐次坐标， s 表示像坐标系中 u 轴相邻像素间的物理尺寸同 v 轴相邻像素间的物理尺寸之比，即纵横比，针对线性投影模型，一般近似取作 1^[3]。 (u,v) 为某点在像素坐标系中的坐标， (x_c, y_c, z_c) 为该点在相机坐标系中的坐标， A 是一个 3×3 的矩阵，称为相机的内参数矩阵。在针孔模型中，相机内参数的定义如下：

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & u_0 & 0 \\ 0 & f_v & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

其中， f_u 为 X 方向焦距， f_v 为 Y 方向焦距，且两者满足： $f_u = \frac{f}{dx}, f_v = \frac{f}{dy}$ ，式中 f 表征题目所给的像距，即光学中点到像平面的距离， dx 、 dy 表征单位像素坐标系在 x 方向和 y 方向上相邻像素间的距离，针对本题 $dx=dy=\frac{1}{3.78}(mm)$ 。

式(6)中 α 为扭曲系数，与成像栅格的方向夹角有关，当其正交时 $\alpha=0$ ， (u_0, v_0) 为主点，即相机光轴与成像平面的交点坐标。

综合公式(4)、(5)、(6)，可以得到世界坐标系到像素坐标系的变换：

$$\begin{bmatrix} s \\ u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

其中 P 称为相机投影矩阵，且：

$$P = A(R \quad t) = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ p_5 & p_6 & p_7 & p_8 \\ p_9 & p_{10} & p_{11} & p_{12} \end{bmatrix} \quad (8)$$

由此可以看出，一旦确定出旋转矩阵 R 与平移矩阵 T 共同构成的相机外参数矩阵和相机内参数矩阵 A ，结合公式(7)(8)即可针对某给定特征点实现从世界坐标系到像素坐标系的投影变换。

4.1.3 相机内外参数的标定

4.1.3.1 参数标定算法概述

对于相机内参数的标定，根据系统需求的不同，有多种不同的标定算法^[4]。根据标定过程中是否采用标定参照物，可以将标定算法分成传统标定算法和自标定算法两类。

1. 传统相机标定算法^[5]

这类算法基于一定的标定参照物。基本的原理是：基于已知形状、尺寸或空间位置的标定参照物，经过对其图像的处理，利用一系列数学变化和计算方法，求取相机的内参数和外参数。这类算法的优点是系统的标定精度较高，而且算法经过多年的发展，比较成熟。其缺点是标定的过程比较复杂，需要专业人员的操作。且标定完成后，系统设置难以调整，限制了系统的灵活性。同时需要有专用的、精度较高的标定参照物，从而增加了系统的复杂程度和成本。

这类算法中比较有代表性的有：直接线性变换方法(DLT)、RAC 方法、张正友的平面标定方法、孟胡的平面圆标定方法、吴毅红等的平行圆标定方法等^[6]。

2. 相机自标定算法

这类算法无需依赖于标定参照物, 仅利用相机在运动过程中周围环境的图像以及图像之间的对应关系进行标定。这类算法的灵活性好, 不依赖于特定的环境, 标定过程方便。但是标定精度要明显差于传统的相机标定方法。

目前在自标定方面有如下的几类方法^[4]: 利用本质矩阵和基本矩阵的相机标定方法, 利用绝对二次曲线和外极线变换性质的相机标定方法, 利用主动系统控制相机做特定运动的标定方法, 利用多幅图像之间的直线对应关系的相机标定方法。

4.1.3.2 参数标定算法的选定

考虑到系统设计的精确性需求, 并结合文献[3], 本文提出一种相机内外参数的优化算法:

首先确定出靶标和投影图上的点的匹配, 然后计算出靶标和投影图之间的单应性矩阵, 继而利用该单应性矩阵线性解出相机内外参量, 最后对这些参量进行非线性的迭代优化, 得到最终的内外参量值, 具体步骤如下:

令空间坐标系的 $X_w O Y_w$ 平面为靶标所在平面, Z_w 垂直于该平面, 则靶标平面上各点的 Z 坐标均为 0, 则投影方程 (7) 变化为:

$$\begin{bmatrix} s \\ c \\ c \\ e \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ 0 \end{bmatrix} = A(r_1 \ r_2 \ r_3 \ t) \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ 0 \end{bmatrix} = A(r_1 \ r_2 \ t) \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

因此靶标上标志点的坐标 (x_i, y_i) 与其成像对应点 (u_i, v_i) 满足齐次变换:

$$\begin{bmatrix} s \\ c \\ c \\ e \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} \quad (10)$$

其中, H 为单应性矩阵, 并令 $H=(h_1 \ h_2 \ h_3)$, 则有

$$(h_1 \ h_2 \ h_3)=A(r_1 \ r_2 \ t) \quad (11)$$

由于 r_1 与 r_2 为旋转矩阵 R 的两列, 它们相互正交且模均为 1, 由此得到内参的两个约束条件为:

$$h_1^T A^{-T} A^{-1} h_2 = 0, \quad h_1^T A^{-T} A^{-1} h_1 = h_2^T A^{-T} A^{-1} h_2 \quad (12)$$

$$\text{令 } B=A^{-T} A^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}, \text{ 其中 } B \text{ 为对称矩阵满足 } B=B^T。$$

定义六维向量 $b=[B_{11} \ B_{12} \ B_{22} \ B_{13} \ B_{23} \ B_{33}]^T$, 再令 H 矩阵的第 i 列 $h_i=[h_{i1}, h_{i2}, h_{i3}]^T$, 从而得到:

$$h_i^T B h_j = v_{ij} b \quad (13)$$

其中,

$$v_{ij} = h_{i1} h_{j1} + h_{i2} h_{j2} + h_{i3} h_{j3}$$

于是式 (13) 可以表达为:

$$\begin{pmatrix} \dot{e}v_{12}^T \\ \dot{e} \\ \dot{e}(v_{11} - v_{22})^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{u}b \\ \dot{u} \end{pmatrix} = 0 \quad (14)$$

对应靶标中每个圆均有如式(14)的方程，设圆的个数为 m ，联立所有参考圆对应方程可得

$$Vb=0$$

其中， V 为 $2m \times 6$ 的矩阵。

设 $x=[h_1^T, h_2^T, h_3^T]^T$ ，式中 h_i 为矩阵 H 的第 i 行向量，则可将式(10)改写为：

$$\begin{pmatrix} \dot{e}M_*^T & 0^T & -uM_*^T \\ \dot{e} \\ \dot{e}0^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{u}x \\ \dot{u} \end{pmatrix} = 0 \quad (15)$$

其中，

$$M_*^T = \begin{pmatrix} \dot{e}X_i \\ \dot{e}Y_i \\ \dot{e}1 \end{pmatrix}$$

设原式中 $s=(h_3M_*^T)^{-1}$ ，如有 n 个特征点，则有 n 个如上式的方程，将这些方程联立得

$$Lx=0 \quad (16)$$

其中， L 是 $2n \times 9$ 矩阵。

通过求解向量 x ，进而求得单应性矩阵 H ，并综合以上各式可得：

$$\begin{aligned} r_1 &= \lambda A^{-1}h_1, \quad r_2 = \lambda A^{-1}h_2 \\ r_3 &= r_1 \times r_2, \quad t = \lambda A^{-1}h_3 \end{aligned} \quad (17)$$

经得到对相机内参数 A 和外参数 R 、 T 的初始估计后，可以计算如下的误差公式：

$$D = \sum_{i=1}^n \|m_{ij} - \tilde{m}(A, R_i, t_i, M_{ij})\| \quad (18)$$

式中， n 为特征点的个数， m_{ij} 为从投影图像中提取的实际的像点， $\tilde{m}(A, R_i, t_i, M_{ij})$ 为借助投影模型所得出的投影点。

通过对式(18)进行非线性优化，在追求误差 Δ 最小的前提下，优化出 \tilde{m} 中各参数的值，从而得到相机的内参数矩阵以及外参数矩阵。

在得到相机内外参数后，并借助式(9)，即可针对一给定的特征点确定出其投影于 CCD 板上像点。

4.2 线性投影模型在问题二中的应用

4.2.1 具体算法的流程设计

通过以上对线性投影模型的阐释，借助已知信息确定出相机的内外参数矩阵，即可求定靶标上各圆圆心在像平面上的像坐标。具体算法步骤如下：

Step1. 在靶标上寻找一系列特征点 $P(x_i, y_i)$ ，并通过解读图 3 得出这些特征点在像平面上的像坐标 $p'(x'_i, y'_i)$ ；

Step2. 借助线性投影模型确定出该相机内外参数的初始估计值，待定的内外参数包括：旋转矩阵 R 、平移矩阵 T 、主点 $P_0(x_0, y_0)$ 。

Step3. 对式(18)进行非线性优化，在追求误差 D 最小的前提下，确定出最优情形对应的内外参数

Step4. 将已知的靶标上圆心坐标代入式(9)，得出其投影平面上的像坐标。算法结束。

在上述算法流程中，Step2 和 Step4 在模型中已经给出详细说明，下面着重针对其他两个步骤进行具体阐释：

Step1. 首先引入线性投影光学系统所具有的三个基本特性：

特性 1. 点成点像。即物空间中的每一点，在像空间有且只有一个点与之对应，这两个对应点称为物像空间的共轭点。

特性 2. 线成线像。即物空间中的每一条直线，在像空间有且只有一条直线与之对应，这两个对应直线称为物像空间的共轭直线。

特性 3. 平面成平面像。即物空间中的每一个平面，在像空间有且只有一个平面与之对应，这两个对应平面称为物像空间的共轭平面。

由此可以总结出以下引理：

引理 1. 靶标所在的物平面上所有特征点投影后对应的像点仍处于同一平面；

引理 2. 两共轭曲面的切线互为共轭，对应切点互为共轭

证明：如下图，设 P_A 、 P_B 为靶标上任意两圆 O_1 、 O_2 的公切线所对应的切点， P'_A 、 P'_B 为其在像平面上的像点，两圆在像平面上的共轭曲面为闭合曲面 O'_1 、 O'_2 ， P_1 、 P_2 表示像平面上闭合曲面 O'_1 、 O'_2 的公切线所对应的切点。

采用反证法进行论证，假设像坐标 P'_A 、 P'_B 同 P_1 、 P_2 至少有一点不重合，因闭合曲面是仍为凸曲面，连接点 P'_A 、 P'_B 必然同曲面交于另一点 P'_C 。

根据特性 2，直线 P_AP_B 同直线 $P'_AP'_BP'_C$ 为一对共轭直线，那么在靶标上与投影点 P'_C 相对应的共轭点 P_C 必然位于直线 P_AP_B 上，并且在圆 O_1 上；而又因 P_AP_B 为圆 O_1 、 O_2 的公切线，则点 P_C 必为圆 O_1 、 O_2 外部的一点，从而产生矛盾，假设不成立，所以得出结论：两共轭曲面的切线互为共轭，切点亦互为共轭，证毕。

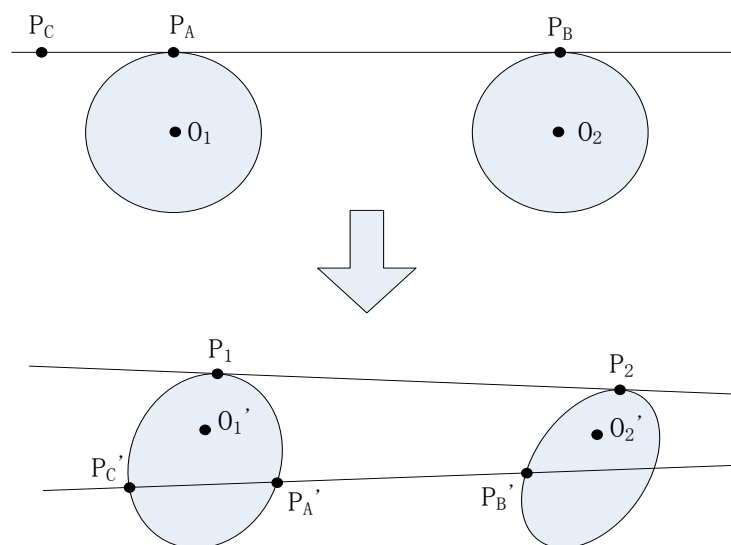


图 2、引理2证明示意图

引理 3. 靶标上两直线的交点对应的像点仍为这两条直线的共轭直线的交点。

基于以上得出的三个引理，特征点寻找方案为：分别在靶标图和投影图上作圆 ABC、圆 CD、圆 DE 的公切线，得出切点 P_A 、 P'_A 、 P_B 、 P_C 、 P'_C 、 P_D 、 P_E 即为所需的特征点。

解读像平面上特征点所对应的像素坐标的具体方法为：

1. 画切线定共轭直线。即在投影面上，绘制出与五个圆对应的共轭闭合曲面 A' 、 B' 、 C' 、 D' 、 E' 的公切线，找出各自的切点坐标。

2. ACDSee8.0 软件读取切点的像素坐标。将所给的投影图在 ACDSee 软件中打开，利用该软件的简单的裁剪功能，即可快速方便的确定出切点的像素坐标，通过同其他像素确定方法相比（如根据分辨率将投影图方格化处理），此方法高效实用。对投影图的预处理示意图如下：

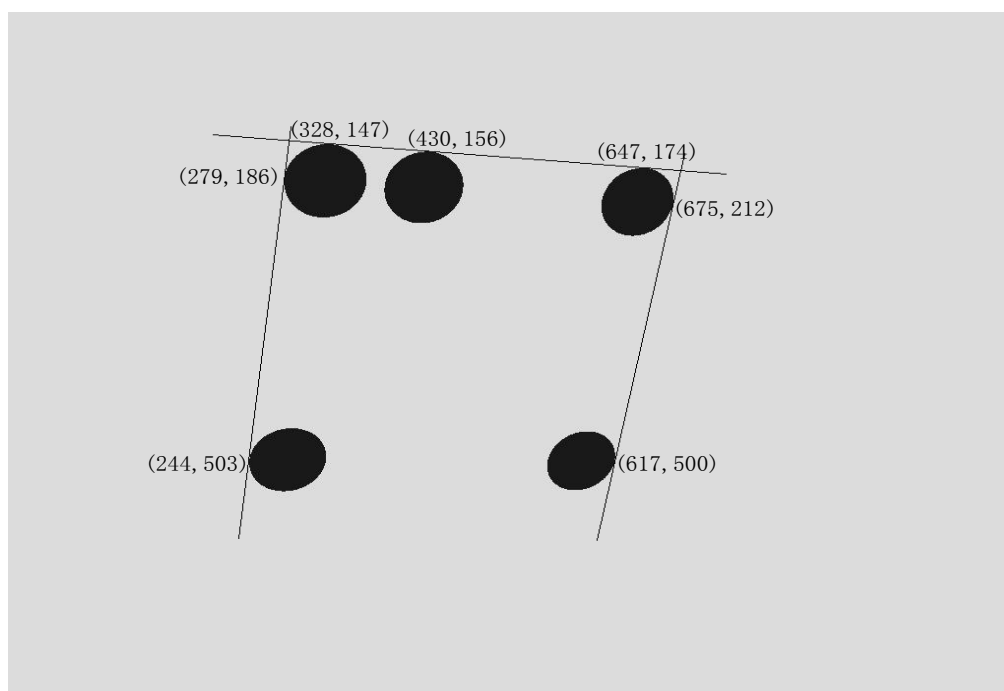


图 3、投影图预处理示意图

Step3. 关键在于如何针对非线性的表达式，选用合适的优化算法。经过综合权衡各类优化算法对本问题的适用性，这里选用微分进化算法进行参数的优化。该算法具体阐述如下。

4.2.2 微分进化算法

微分进化(Differential Evolution-DE)算法^[7]是由 Rainer Storn 和 Kenneth Price 于 1995 年提出的一种基于种群优化的新智能优化方法，它可以对非线性不可微连续空间函数进行最小化，是一种进化优化算法，在求解过程中具有高效性、收敛性、鲁棒性等优点^[7]。

微分进化算法的基本思想是：它从某一随机产生的初始种群开始，按照一定的操作规则，如变异、交叉、选择等不断地迭代计算并根据每一个个体的适应值，保留优良个体，淘汰劣质个体，引导搜索过程向最优解逼近。具体寻优过程为，对种群中的每个个体 i ，从当前种群中随机选择三个点，以其中的一个点为基础、另外两个点为参照作一个扰动，所得点与个体 i 交叉后进行“自然选择”，保留较优者，实现种群的进化，直至达到最优解^[8]。

微分进化算法中用到的主要控制参数是种群规模 N 、交叉概率 P_c 、交叉因子 F ，据

文献^[10]， N 通常取值 $5n-10n$ ，其中 n 为变量的个数， P_c 通常取值 0.1 ， F 通常取 0.5 。在本模型的中，相机内参数和外参数的变量个数为 10 ，通过观察参数的不同设定值对目标函数值的影响，这里设定种群规模 N 为 100 ，交叉概率 P_c 为 0.1 ，交叉因子 F 为 0.1 。

针对目标函数式(18)进行优化，即在得出相机的内参数和外参数初始估计值的前提下，追求求出的像点坐标与实际像点坐标的距离达到最小，具体设计的微分进化算法步骤为：

Step1.（初始化）输入进化参数：种群规模 N ，交叉概率 P_c ，交叉因子 F ，最大迭代次数 k ，随机生成初始种群，确定相机内参数和外参数的初始值。

Step2.（初始化检验）判断相机的内外参数是否满足约束，如果满足则继续，否则重新初始化种群。

Step3.（繁殖）通过交叉、变异得到临时种群，判断相机内外参数的可行性并把落在不可行区域内的个体按照就近原则重新确定相机参数。

Step4.（选择）根据临时种群选择产生下一代种群。

Step5.（个体评价）计算种群中每个个体的适应度函数值，并找出全局极值点。

Step6.（终止检验）判断算法是否收敛。如果种群满足终止准则，则输出种群中具有最小目标值的个体作为最优解，得到所求像点与实际像点的最小距离，同时确定相机内参数和外参数。否则转 Step3。

计算流程图如下：

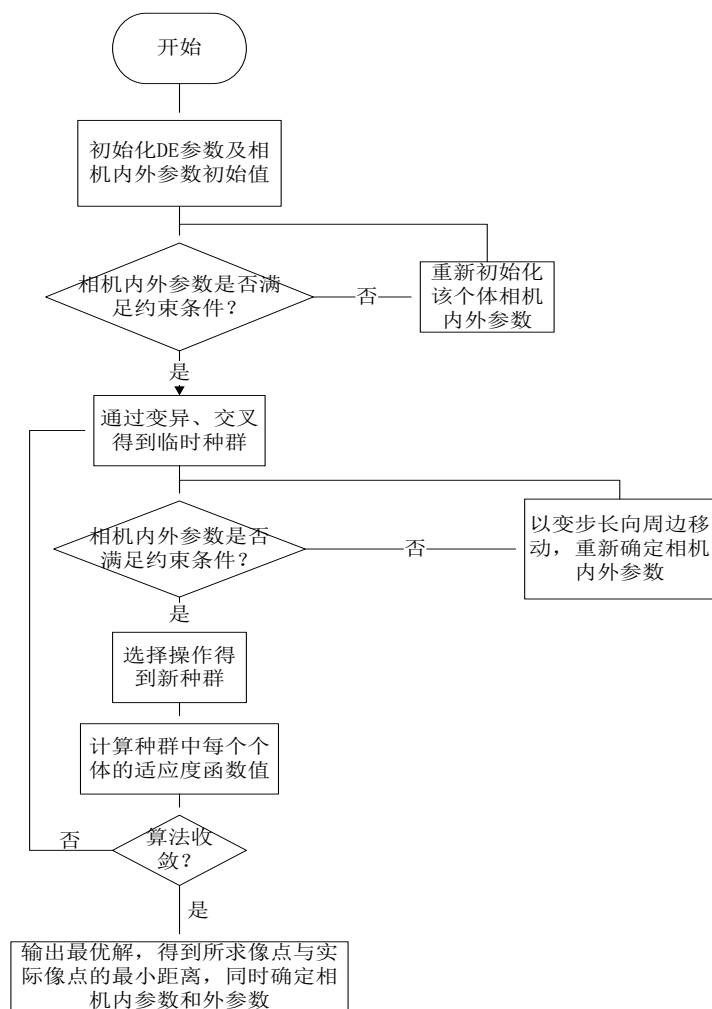


图4、DE算法的计算流程图

基于上述分析，将标定出的相机内外参数的估计值代入微分进化算法模型中作为初值进行优化，借助 mathematic 软件进行编程实现，经优化得出的相机内外参数值为：

$$\text{旋转矩阵 } R = \begin{bmatrix} 0.15684 & 0.109208 & -0.98146 \\ 0.117687 & 0.080769 & -0.14898 \\ -0.4777 & -0.33585 & 0.120583 \end{bmatrix}, \text{ 平移矩阵 } T = \begin{bmatrix} 0.06872 \\ 0.05332 \\ 0.68251 \end{bmatrix}$$

将旋转矩阵转化成角度值为：相对 X 轴的旋转角 $\theta=78.99^\circ$ ，相对 Y 轴的旋转角 $\Psi=34.80^\circ$ ，相对 Z 轴的旋转角 $\Phi=-51.04^\circ$

相机内参数：主点坐标 $P_0(u_0, v_0)=(512, 389)$ 。

将靶标上圆心的世界坐标代入线性投影模型中，借助优化出的相机内外参数利用公式(9)进行求解，分别得出个圆心在投影平面上的像坐标，结果概述如下：

表1、靶标圆心像坐标

靶标圆心	A	B	C	D	E
世界坐标系下 X 轴(mm)	-50	-20	50	50	-50
世界坐标系下 Y 轴(mm)	50	50	50	-50	-50
U 轴(横轴)像素坐标(像素)	331	422	635	585	281
V 轴(纵轴)像素坐标(像素)	193	195	199	504	497

4.2.3 结果的合理性检验

将圆心 A、B、C、D、E 所成的像点标记在像平面上，以考察结果的合理性。

1. 像点的共线性检验

结合前文给出的理想投影模型具有的特性 2，即共轭直线的唯一存在性，针对处于同一直线上的三个圆心 A、B、C 所对应的像点是否仍然共线进行验证，经观察与之相对应的标记于像平面上的像点，可以用一条直线来拟合此三个像点，求出拟合的直线方程为 $v=46.34u-8593$ ，且在 95%的水平下通过了假设检验，标准偏差仅为 0.002244，说明直线的拟合优度较高。我们有理由相信，圆心 A、B、C 所对应的像点仍为共性，说明模型是精确合理的。

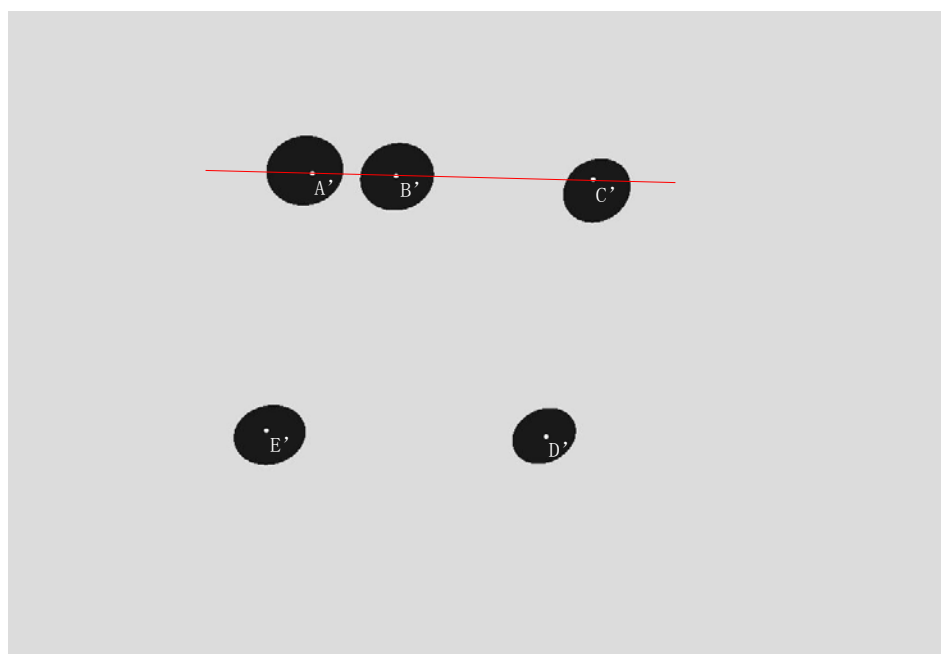


图 5、像平面上特征点标定图

2. 圆心的共轭像点位置的准确性检验

通过分析发现靶标上各圆圆心所成的像点近似位于对应圆的共轭曲面的中心，结合上图，发现圆心像点与对应圆的共轭曲面的中心存在一定偏差，但是偏差不是很大，整体上可以接受，这在一定程度上可以论证出模型的合理性。

通过对结果的检验，上述参数标定算法能够达到较高的精度，并且标定过程简便易行，可以避免传统算法的较大的计算复杂度。

4.3 线性投影模型的准确性与稳定性检验

本文所建立的线性投影模型是一个忽略各种噪声和畸变的理想情况下的线性投影模型，必然同实际情况存有一定误差，因此模型的精度、稳定性应当给予重点关注。这里分别从三个不同的方面对模型的准确性和稳定性进行检验，以探究模型的合理性。

4.3.1 给定参量 f 变量化处理反向检验

为了验证模型的精度，对题目中给定的已知量—像距 f 作为一个未知参量代入公式(18)的非线性模型中进行优化，借助微分进化算法求解非线性优化模型得出像距的优化值，并与实际给定值进行比较，以检验模型的准确性，同时此种方法也可用于探究在增加变量的情况下算法的适用性。

实际给定等效像距的计算公式为：

$$f_u = \frac{f}{dx} = \frac{1557/3.78}{1/3.78} = 1577, f_v = \frac{f}{dy} = \frac{f}{dx} = 1577$$

其中， f 表征题目所给的像距，即光学中点到像平面的距离(mm)， dx 、 dy 表征单位像素坐标系在 x 方向和 y 方向上相邻像素间的距离，针对本题 $dx=dy=\frac{1}{3.78}(mm)$ 。

具体检验时，为了增强说服力，仿照前文对随机白噪声的引入方式，将噪声对 f_u 、 f_v 的优化结果的影响补充考虑，通过优化得出不同噪声水平下相机在 u 轴和 v 轴的等效像距 f_u 、 f_v ，并与实际值进行比较，结果对比如下：

表格 2、不同噪声水平下 f_u 、 f_v 的非线性优化值

噪声水平 σ (像素)	f_u	相对误差 $\frac{ f_u-f }{f} \cdot 100\%$	f_v	相对误差 $\frac{ f_v-f }{f} \cdot 100\%$
0	1569.04	0.50	1545.46	2.00
0.2	1608.54	2.00	1545.64	1.99
0.4	1559.02	1.14	1545.46	2.00
0.6	1608.54	2.00	1545.46	2.00
0.8	1594.79	1.13	1545.46	2.00
1	1608.54	2.00	1546.45	1.94
1.2	1584.88	0.50	1545.46	2.00
1.4	1578.04	0.07	1545.46	2.00
1.6	1594.08	1.08	1545.46	2.00
1.8	1552.44	1.56	1545.46	2.00
2	1563.23	0.87	1547.36	1.88

结合上表，不难发现在不同的噪声水平下， f_u 、 f_v 的非线性优化值与实际值的相对误差比较小，可以控制在 2%以内，从而说明模型的抗干扰能力较好，并在一定程度上验证了模型的精确性。

综合以上三步检验，我们有理由相信该模型的稳定性、抗干扰能力和精确性均较好，模型是高效实用的。

4.3.2 随机噪声检验

对在问题二求解时，首先在靶标上选取了七个特征点，并在投影图中得到对应像点的横纵坐标，这里为了检验算法和模型的稳定性，对这些像点的横纵坐标同时引入正态白噪声(单位:像素)，考察其对优化出的内外参量产生的影响。具体操作是,将原有的投影变换矩阵调整为:

$$\begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + N(0, \sigma^2) \quad (19)$$

引入正态白噪声均值为 0，方差 σ^2 在 0 到 2 之间以步长 0.2 逐步增加，且针对每个方差所对应的白噪声随机试验 100 次，实验结果如下表:

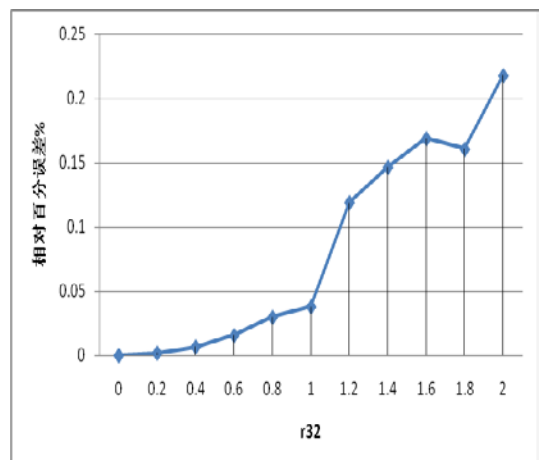
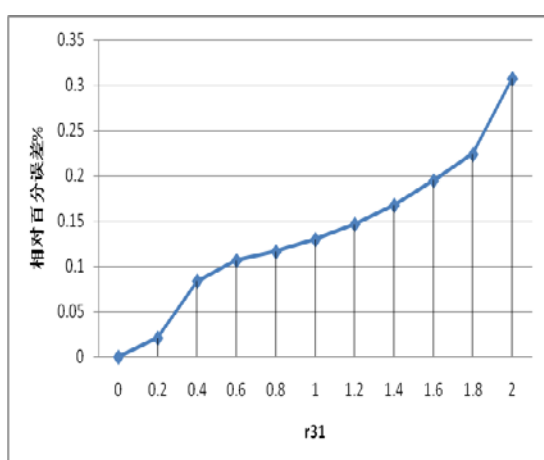
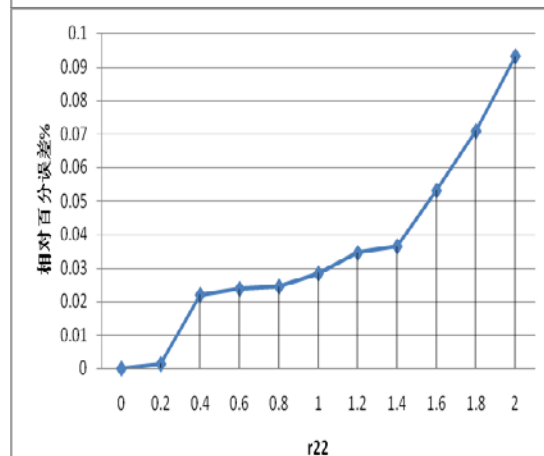
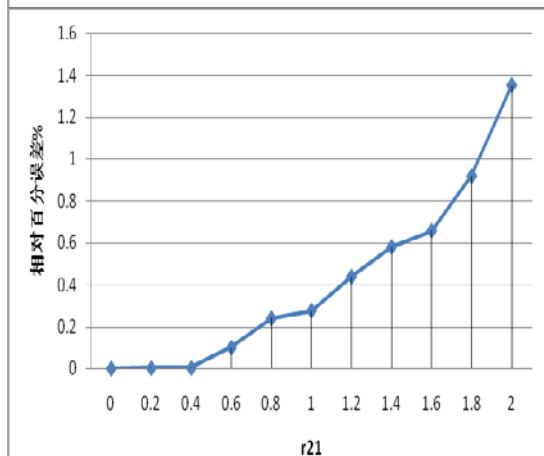
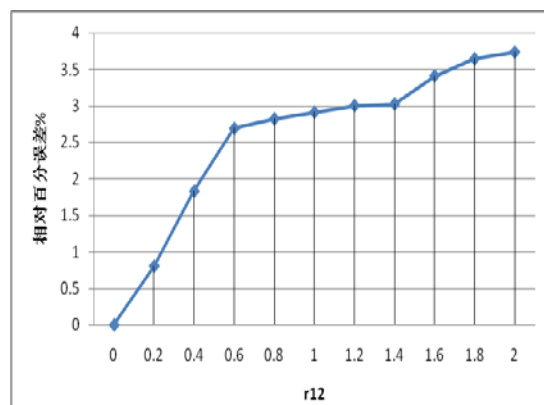
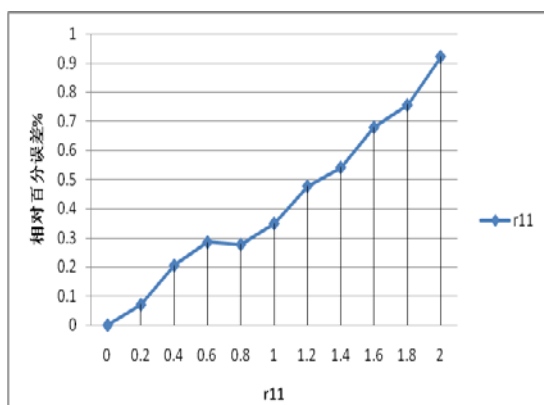
表 3、随机噪声检验结果一览表(每种噪声水平下100次实验的均值)

σ (像素)	r11	r12	r21	r22	r31	r32	t1	t2	t3	u0	v0
0	0.157	0.109	0.118	0.081	-0.478	-0.336	0.069	0.053	0.682	511.304	388.273
0.2	0.157	0.110	0.118	0.081	-0.478	-0.336	0.069	0.053	0.682	512.304	388.773
0.4	0.157	0.111	0.118	0.081	-0.478	-0.336	0.069	0.053	0.682	512.330	388.867
0.6	0.157	0.112	0.118	0.081	-0.478	-0.336	0.069	0.053	0.682	513.140	389.134
0.8	0.157	0.112	0.118	0.081	-0.478	-0.336	0.069	0.053	0.682	513.440	389.273
1	0.157	0.112	0.118	0.081	-0.478	-0.336	0.069	0.053	0.682	514.530	390.120
1.2	0.158	0.112	0.118	0.081	-0.478	-0.336	0.069	0.054	0.682	515.767	390.773
1.4	0.158	0.113	0.118	0.081	-0.479	-0.336	0.069	0.054	0.682	515.760	392.564
1.6	0.158	0.113	0.118	0.081	-0.479	-0.336	0.070	0.054	0.682	516.730	393.170
1.8	0.158	0.113	0.119	0.081	-0.479	-0.336	0.070	0.054	0.682	517.800	394.665
2	0.158	0.113	0.119	0.081	-0.479	-0.337	0.070	0.054	0.683	517.930	395.773

其中旋转矩阵 $R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$ 、平移矩阵 $T = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$ 为相机外参数，主点坐标

$P_0(u_0, v_0)$ 为相机内参数。

作出不同噪声水平下相机内外参数的相对误差均值随噪声的变化曲线，如下图所示：(注：横轴表示 σ (像素)的实验值，体现了噪声的波动水平)



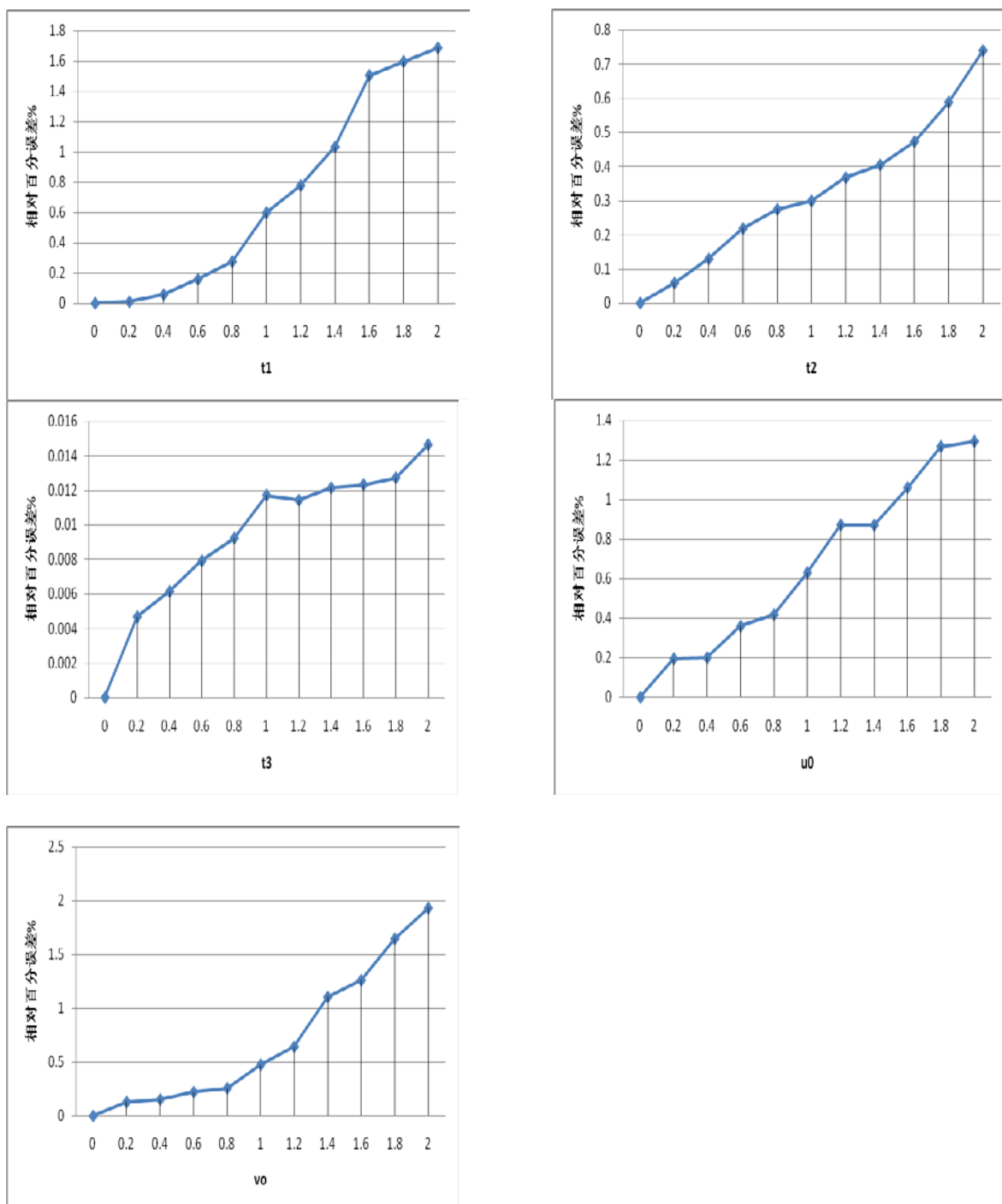


图6、正态白噪声检验各参数偏差图

纵观以上各图可以总结出以下结论：

结论 1. 实际情况下，噪声水平越大所引起的偏差应该越大。而模拟实验中通过引入不同水平下的正态白噪声，优化出内外参数的具体值随 σ 的增大而增加，说明白噪声的波动水平越大，引起的偏差越大，整体上近似呈现出线性递增的变化趋势，且变化具有一定的连续性，没有出现尖点、突变的情况，从而论证出模型的抗噪声性能好；

结论 2. 偏差的变化幅度较小，在噪声变化区间上其相对误差控制在 2%以内，且部分值的波动极小，比如在 z 轴上的平移向量的相对误差始终保持在 0.014%之内，从而可以说线性投影模型对噪声不敏感，具有较好的鲁棒性。

为了探讨随机噪声检验方法的精度和稳定性，并基于对参考文献[11]，引入均匀性

噪声替代正态白噪声，观察对结果的影响，具体的均匀噪声设计策略为：对各像点的横纵像素坐标同时加入噪声(像素)，噪声水平在 0 到 2 区间内均匀选取，以 0.2 为步长逐步增大，绘制出各参数关于无噪声情形下优化值的相对偏差图如下：

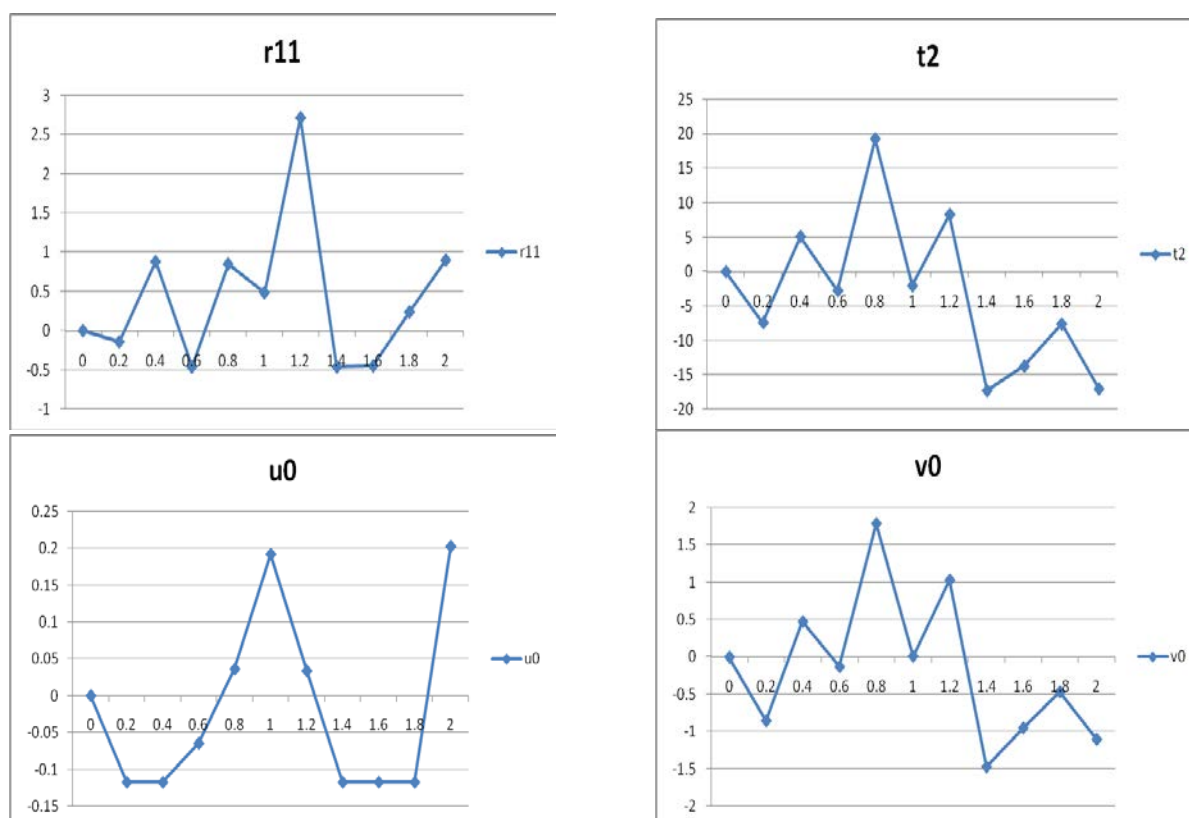


图 7、均匀噪声检验各参数偏差图

注：仅给出了部分参数的相对误差以说明问题，未给出的参数相应的数据具有相似的规律，这里不予赘述。

通过对比两种噪声引进方式所得出的相对偏差图，总结出以下几点结论：

结论 1. 均匀噪声引入方案所得出的各参数偏差随噪声水平的增大并未呈现出近似线性的特点，且在部分点出现了突变；

结论 2. 均匀噪声的相对偏差较大，部分噪声下出现接近 25% 的偏差。

因此，文献中所给的均匀噪声检验方案不适用于本模型，分析原因如下：现实中不可能出现各像点坐标的噪声同增同减的情况，出现白噪声的情况更为普遍，这种均匀噪声同实际的不相符限制了此检验方法的适用性。

4.3.3 选取不同的特征点个数下优化结果对比分析

前文中使用了 7 个特征点来确定靶标圆心的投影像坐标，为了研究特征点选取个数的不同将给结果的稳定性带来的影响，这里分别选取 4、7、13 个特征点代入线性投影模型，分别得到各靶标圆心的投影像坐标，结果对比如下：

表 4、不同特征点个数下优化结果

参数\点数	13 个特征点	7 个特征点	4 个特征点	均值	方差
X/（度）	79.01	78.99	79.02	79.01	0.0153
Y/（度）	34.81	34.8	34.83	34.81	0.0153
Z/（度）	-51.11	-51.04	-51.09	-51.08	0.0361
t 1/（mm）	0.0687	0.0687	0.0687	0.0687	0
t 2/（mm）	0.0533	0.0533	0.0533	0.0533	0
t 3/（mm）	0.6824	0.6825	0.6825	0.6825	0
u 0/（像素）	511	512	513	512	1
v 0/（像素）	388	389	390	389	1
A/（像素）	(328,192)	(331,393)	(327,193)	(329,192)	(3.74,0.13)
B/（像素）	(421,195)	(422,195)	(420,196)	(421,195)	(1.19,0.28)
C/（像素）	(636,202)	(635,199)	(637,202)	(636,202)	(0.92,4.84)
D/（像素）	(586,505)	(585,504)	(586,506)	(586,505)	(1.08,1.85)
E/（像素）	(278,496)	(281,497)	(277,496)	(278,496)	(3.98,1.33)

从上表可以看出，选取不同的特征点个数所求出的相机内外参数变化很小，其方差接近于 0，且求得像点坐标的波动很小，其方差始终保持在 5 以内，从而说明本模型对所选取的特征点的个数不敏感，模型的稳定性较好。

4.4 双相机相对位置自标定模型^[12]

在双目定位中，不仅需要获得各相机内外参数矩阵，而且需要获得双相机的相对位置，本文从文献[12]中受到启发，建立了双相机相对位置自标定模型，模型具体如下。

假定两相机分别为左相机和右相机，通过对靶标进行拍照得到两幅图像 $photo_1(x,y)$ 和 $photo_2(x,y)$ 。首先基于针孔成像模型针对靶标上的一组特征点 $\{p_i(x_{wi},y_{wi},z_{wi})\}$ ，可以得到其分别投影到 $photo_1(x,y)$ 和 $photo_2(x,y)$ 上的像点 $\{P_i(x,y)\}$ 、 $\{p_i(x',y')\}$ ，从而在这组像点之间的对应关系：

$$\{P_i(x,y)\} \ll \{p_i(x',y')\}, \quad 1 \leq i \leq n$$

其中 n 表示靶标上特征点个数。此时问题的关键在于如何根据上述 n 组对应关系，求定两相机之间的正交旋转矩阵 R 和平移向量 t。

设靶标上一点在左右相机的图像坐标系下的坐标分别为：

$$P_i = \begin{pmatrix} \hat{e}x_i \\ \hat{e}y_i \\ \hat{e}z_i \end{pmatrix}, \quad P'_i = \begin{pmatrix} \hat{e}x'_i \\ \hat{e}y'_i \\ \hat{e}z'_i \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i \leq n \quad (20)$$

$$\text{而该点在世界坐标系重的坐标为 } P_{wi} = \begin{pmatrix} \hat{e}X_{wi} \\ \hat{e}Y_{wi} \\ \hat{e}Z_{wi} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i \leq n$$

则由线性投影模型可知，当物点与其对应的像点已知时，可以通过一个非线性最优化过程，得到旋转矩阵 R_{wr} 、 R_{wl} ，和平移矩阵 T_{wr} 、 T_{wl} ，再由等式：

$$P_{ci} = R_{wl} \cdot P_{wi} + T_{wl}$$

$$P'_{ci} = R_{wr} \cdot P_{wi} + T_{wr}$$

可得该点在两相机坐标系下的坐标分别为：

$$P_{ci} = \begin{bmatrix} \hat{e}X_i \\ \hat{e}Y_i \\ \hat{e}Z_i \end{bmatrix}, \quad P'_{ci} = \begin{bmatrix} \hat{e}X'_i \\ \hat{e}Y'_i \\ \hat{e}Z'_i \end{bmatrix} \quad (21)$$

上式中， R_{wr} 、 T_{wr} 和 R_{wl} 、 T_{wl} 分别为右侧和左侧照相机的旋转变换矩阵和平移矩阵。

因 R 和 t 分别为左相机坐标系运动至右相机坐标系时的旋转矩阵和平移向量，从而可以得出：

$$P'_{ci} = R \cdot P_{ci} + t, \quad 1 \leq i \leq n \quad (22)$$

对于平移向量 $t = [t_1, t_2, t_3]^T$ ，常引入下列反对称矩阵 T ：

$$T = \begin{bmatrix} 0 & t_3 & -t_2 \\ -t_3 & 0 & t_1 \\ t_2 & -t_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

容易验证：

$$T \cdot t = T^T \cdot t = 0 \quad (24)$$

以及对于任意向量 u ，都有：

$$u^T \cdot T \cdot u = 0 \quad (25)$$

对式(22)的双边同时左乘矩阵 T ，并借助公式(24)，则有：

$$T \cdot P'_{ci} = T \cdot R \cdot P_{ci} \quad (26)$$

记 $E = T \cdot R$ ，并称之为基本矩阵。再用 P'^T_{ci} 同时左乘两边，根据式(25)，则有

$$P'^T_{ci} \cdot E \cdot P_{ci} = 0 \quad (27)$$

根据公式(1)(2)

$$\frac{x_i}{f1} = \frac{X_i}{Z_i}, \quad \frac{y_i}{f1} = \frac{Y_i}{Z_i}, \quad \frac{x'_i}{f2} = \frac{X'_i}{Z'_i}, \quad \frac{y'_i}{f2} = \frac{Y'_i}{Z'_i} \quad (28)$$

其中， $f1$ 表示左侧相机光学中心到像平面的距离， $f2$ 表示右侧相机光学中心到像平面的距离。

则上式可以转化为如下的基本方程：

$$[x'_i, y'_i, f2] \cdot E \cdot \begin{bmatrix} \hat{e}x_i \\ \hat{e}y_i \\ \hat{e}f1 \end{bmatrix} = 0, \quad 1 \leq i \leq n \quad (29)$$

上述基本方程说明，找到一组对应点，即可以建立一个线性方程约束。

E 是 $3'3$ 矩阵，一共有 9 个元素，但由于上述线性方程的约束是齐次的，当 E 满足

方程时， $k \cdot E$ 也满足，因而独立的参数只有 8 个。因此，一般而言，要求得 E ，需要至少知道 8 组对应点。

4.4.1 基本矩阵的E求解

记

$$E = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ h_4 & h_5 & h_6 \\ h_7 & h_8 & h_9 \end{bmatrix} \quad h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \\ h_7 \\ h_8 \\ h_9 \end{bmatrix}$$

则可将基本方程改写为

$$Ah=0 \quad (30)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} x_1'x_1 & x_1'y_1 & x_1' & y_1'x_1 & y_1'y_1 & y_1' & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2'x_2 & x_2'y_2 & x_2' & y_2'x_2 & y_2'y_2 & y_2' & x_2 & y_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n'x_n & x_n'y_n & x_n' & y_n'x_n & y_n'y_n & y_n' & x_n & y_n & 1 \end{bmatrix}$$

虽然 $n=8$ 时，即可求解该方程，但由于存在噪声，一般需要多于 8 组的对应点进行求解。此时是一个超定方程组，一般采用最小二乘法进行求解，即要求在向量 h 的模为一(即 $\|h\|=1$)的约束下，使

$$\|Ah\|=\min \quad (31)$$

由线性代数理论可知，上述的 h 即为 $A^T A$ 的最小特征值所对应的单位特征向量。

4.4.2 t 或 T 的求解

因 $E=T \cdot R$ ，所以 $E^T=R^T \cdot T^T$ ，因此：

$$E^T \cdot t=R^T \cdot T^T \cdot t=0 \quad (32)$$

类似的，在平移向量的方向向量 n_t 的模为一(即 $\|n_t\|=1$)的约束下，使

$$E^T \cdot t=\min \quad (33)$$

它就是 $E^T E$ 的最小特征值所对应的单位特征向量。

4.4.3 旋转矩阵R的求解

依据文献[13]中 Tsai 和 Huang 的证明， R 可由 E 的奇异值分解：

$$E=ULV^t \quad (34)$$

按下法求得：

$$R=U \cdot \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S \end{bmatrix} \cdot V^t \quad (35)$$

其中 $k = \pm 1$ ， $S = \det(U) \det(V)$ 。

4.4.4 t 和 k 符号的确定

首先在 R, t 已确定的情况下，借助公式 (22) (28) 不难求出

$$Z_i = \frac{t_1 - t_3 x_i'}{x_i' (r_{31} x_i + r_{32} y_i + r_{33}) - (r_{11} x_i + r_{12} y_i + r_{13})}$$

或者

$$Z_i = \frac{t_2 - t_3 y_i'}{y_i' (r_{31} x_i + r_{32} y_i + r_{33}) - (r_{21} x_i + r_{22} y_i + r_{23})}$$

以及相应的

$$Z_i' = \frac{(r_{31} x_i + r_{32} y_i + r_{33}) t_1 - (r_{11} x_i + r_{12} y_i + r_{13}) t_3}{x_i' (r_{31} x_i + r_{32} y_i + r_{33}) - (r_{11} x_i + r_{12} y_i + r_{13})}$$

或者

$$Z_i' = \frac{(r_{31} x_i + r_{32} y_i + r_{33}) t_2 - (r_{21} x_i + r_{22} y_i + r_{23}) t_3}{y_i' (r_{31} x_i + r_{32} y_i + r_{33}) - (r_{21} x_i + r_{22} y_i + r_{23})}$$

根据我们坐标系的选择法，应有 $Z_i < 0$ 和 $Z_i' < 0$ ，据此可以确定 t 和 k 的符号。

这样即可确定出两坐标系之间的正交旋转矩阵 R 和平移向量 t ，两坐标系的相对位置随之确定。

五 模型的推广与进一步讨论

畸变模型的讨论^[14]

若是考虑相机镜头畸变对系统成像的影响，我们可以引入如下的畸变模型，即

$$\hat{u} = u + u_r [k_1 r^2 + k_2 r^4 + 2p_1 v_r + p_2 (\frac{r^2}{u_r} + 2u_r)]$$

$$\hat{v} = v + v_r [k_1 r^2 + k_2 r^4 + 2p_2 u_r + p_1 (\frac{r^2}{v_r} + 2v_r)]$$

其中， u, v 是理想的针孔模型投影下的值， \hat{u}, \hat{v} 为实际图像中的观测值， k_1, k_2 是径向畸变参数， p_1, p_2 是切向畸变参数，且其他参数满足

$$u_r = u - c_x, v_r = v - c_y, r^2 = u_r^2 + v_r^2$$

此时，非线性优化则可进一步修正为

$$D = \sum_{i=1}^n \|m_{ij} - \tilde{m}'(A, k_1, k_2, p_1, p_2, R_i, t_i, M_{ij})\|$$

可以通过设定 k_1, k_2, p_1, p_2 的初值为零，并借用本文采用的微分进化算法进行非线性优化，确定出 \tilde{m}' 中各参数的值。

双相机立体视觉原理的讨论^[1]

在实际应用中，利用相机的双目定位原理确定运动物体的位置有着十分广泛的应用背景，因此这里有必要针对双目定位原理展开讨论

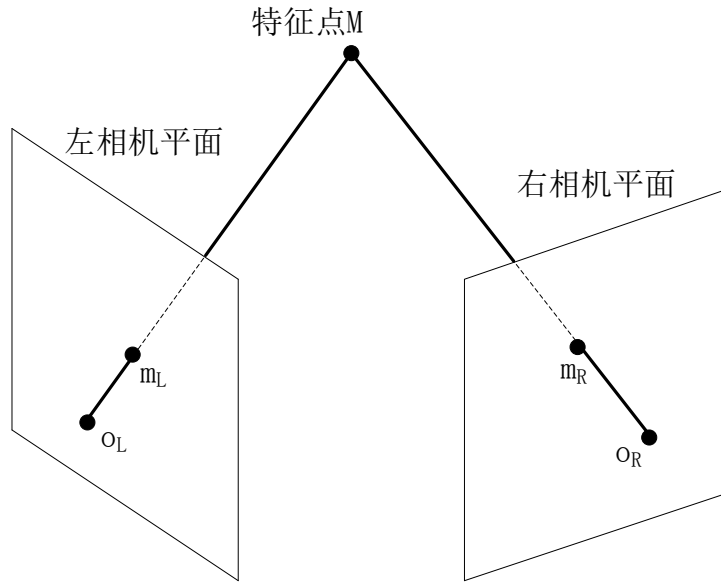


图8、双相机成像原理图

基本原理如上图所示，空间点 M 和左相机光心 O_L 构成一条直线，此直线在左相机成像平面上唯一确定像点 m_L 。同时右相机成像平面上的像点 m_R 也有唯一确定。反之，若两相机位置固定，则由左右两相机像点 m_L 、 m_R 可以唯一确定点 M 的空间位置。

一个简单的想法是通过计算直线 $\overline{O_L m_L}$ 和 $\overline{O_R m_R}$ 的交点的方法确定 M ，但是因为无法精确得到 m_L 、 m_R ，这种方法误差较大。较好的方法是利用投影矩阵关系计算得到 M 。其推导如下：

设空间点 M 的坐标为 (x, y, z) ，其对应的 m_L 、 m_R 的坐标分别为 (u_L, v_L) 、 (u_R, v_R) 。左右相机的投影矩阵分别为：

$$P_L = \begin{bmatrix} P_{L1} & P_{L2} & P_{L3} & P_{L4} \\ P_{L5} & P_{L6} & P_{L7} & P_{L8} \\ P_{L9} & P_{L10} & P_{L11} & P_{L12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad P_R = \begin{bmatrix} P_{R1} & P_{R2} & P_{R3} & P_{R4} \\ P_{R5} & P_{R6} & P_{R7} & P_{R8} \\ P_{R9} & P_{R10} & P_{R11} & P_{R12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

根据公式 $\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$ ，可以得到如下方程：

$$C = \begin{bmatrix} P_{L1} - P_{L9}u_L & P_{L2} - P_{L10}u_L & P_{L3} - P_{L11}u_L \\ P_{L5} - P_{L9}v_L & P_{L6} - P_{L10}v_L & P_{L7} - P_{L11}v_L \\ P_{R1} - P_{R9}u_R & P_{R2} - P_{R10}u_R & P_{R3} - P_{R11}u_R \\ P_{R5} - P_{R9}v_R & P_{R6} - P_{R10}v_R & P_{R7} - P_{R11}v_R \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} -P_{L4} \\ -P_{L8} \\ -P_{R4} \\ -P_{R8} \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

由最小二乘法有

$$M = (C^T C)^{-1} C^T D$$

六 模型优缺点

模型的优点

1. 借助 ACDS8.0 中简单的裁剪工具, 读取像平面上各点像素, 算法方便快捷。
2. 基于线性投影模型相关特性, 在靶标上选取各圆的切点为特征点, 为模型的求解打下了坚实的数据基础。
3. 借用微分进化算法求解非线性优化, 相对其他算法较为高效, 鲁棒性较优。
4. 设计三种检验策略对模型的精度和稳定性进行论证, 检验方法比较有力, 说服力较强。并且通过对正态白噪声检验和均匀噪声检验的试验效果进行对比, 进一步论证了正态白噪声检验的有效性
5. 模型的稳定性与精度较高。

模型的缺点

1. 建立的线性投影模型忽略了各种畸变, 与实际存在一定误差。
2. 对于图像的灰度没有进行消除, 对于像点坐标会产生一定的误差。

七 参考文献

- [1] 张竞丹, 基于采样数据集的真实感建模技术, 硕士学位论文, 清华大学计算机系, 22-24, 2003. 06
- [2] 刘秀坤、杜清运, 增强现实系统中虚拟与现, 信息空间视觉匹配的算法研究, 测绘科学, 第 32 卷第 5 期: 27-30, 2007. 09
- [3] 王峰等, CCD 摄像机图像中心两种标定方法的应用研究, 第 35 卷第 2 期: 296, 2006 年 2 月
- [4] 张景瑞, 计算机立体视觉标定算法及其在牙科手术仿真中的应用, 硕士学位论文, 清华大学计算机科学与技术系, 2001。
- [5] 中国科学院自动化研究所, 摄像机标定, <http://www.nlpr.ia.ac.cn/english/rv>, 2008. 09. 20
- [6] Intel Corp. Open Source Computer Vision Library Reference Manual, <http://developer.intel.com>.
- [7] 阳明盛、罗长童, 最优化原理方法及求解软件, 128-140, 北京: 科学出版社, 2006
- [8] 金义雄、程浩忠等, 改进粒子群算法及其在输电网规划中的应用, 中国电机工程学报, 25(4):46-50, 2005.
- [9] 牛卫平, 基于 GIS 和微分进化算法的变电站选址及定容, 硕士论文, 华北电力大学(北京), 2007
- [10] Storn R, Price K. DE-a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous space. Journal of global optimization, 114:341-359
- [11] 吴福朝等, 非线性模型下的摄像机自标定, 计算机学报, 第 25 卷第 3 期: 280-282, 2002 年 3 月
- [12] 吴立德, 计算机视觉, 上海: 复旦大学出版社, 1993. 12
- [13] Tsai, R. Y. ,Huang, T. S. ,Uniqueness and Estimation of 3D Motion Patameters offigid Bodies with Curved surfaces, IEEE Trans. PAMI, 11(1984),

[14] 王栋等, 利用图像畸变对称性实现相机中心位置标定, 电子器件, 第 30 卷第 3 期: 1004-1006, 2007 年 6 月

八 附录

Mathematic软件对微分进化算法的编程实现:

```
NMinimize[{
(RandomNormal[328, 0. 2*2+0. 2*2+0. 2*2+0. 2*2+0. 2]-((fu*r11+u0*r31)*(-50)+(fu*r12+u0*r32)*
62+fu*t1+u0*t3))^2+(RandomNormal[147, 0. 2*2+0. 2*2+0. 2*2+0. 2*2+0. 2]-((fv*r21+v0*r31)*(-5
0)+(fv*r22+v0*r32)*62+fv*t2+v0*t3))^2+(RandomNormal[430, 0. 2*2+0. 2*2+0. 2*2+0. 2]-((
fu*r11+u0*r31)*(-20)+(fu*r12+u0*r32)*62+fu*t1+u0*t3))^2+(RandomNormal[156, 0. 2*2+0. 2*2
+0. 2*2+0. 2*2+0. 2]-((fv*r21+v0*r31)*(-20)+(fv*r22+v0*r32)*62+fv*t2+v0*t3))^2+(RandomNor
mal[647, 0. 2*2+0. 2*2+0. 2*2+0. 2*2+0. 2]-((fu*r11+u0*r31)*(50)+(fu*r12+u0*r32)*62+fu*t1+u0
*t3))^2+(RandomNormal[174, 0. 2*2+0. 2*2+0. 2*2+0. 2*2+0. 2]-((fv*r21+v0*r31)*(50)+(fv*r22+v
0*r32)*62+fv*t2+v0*t3))^2+(RandomNormal[244, 0. 2*2+0. 2*2+0. 2*2+0. 2*2+0. 2]-((fu*r11+u0*r
31)*(-62)+(fu*r12+u0*r32)*(-50)+fu*t1+u0*t3))^2+(RandomNormal[503, 0. 2*2+0. 2*2+0. 2*2+0.
2*2+0. 2]-((fv*r21+v0*r31)*(-62)+(fv*r22+v0*r32)*(-50)+fv*t2+v0*t3))^2+(RandomNormal[28
0, 0. 2*2+0. 2*2+0. 2*2+0. 2*2+0. 2]-fu*r11+u0*r31)*(-50)+(fu*r12+u0*r32)*(-62)+fu*t1+u0*t3)
)^2+(RandomNormal[536, 0. 2*2+0. 2*2+0. 2*2+0. 2*2+0. 2]-((fv*r21+v0*r31)*(-50)+(fv*r22+v0*r
32)*(-62)+fv*t2+v0*t3))^2+(RandomNormal[576, 0. 2*2+0. 2*2+0. 2*2+0. 2*2+0. 2]-((fu*r11+u0*r
31)*(50)+(fu*r12+u0*r32)*(-62)+fu*t1+u0*t3))^2+(RandomNormal[535, 0. 2*2+0. 2*2+0. 2*2+0. 2
*2+0. 2]-((fv*r21+v0*r31)*(50)+(fv*r22+v0*r32)*(-62)+fv*t2+v0*t3))^2+(RandomNormal[617,
0. 2*2+0. 2*2+0. 2*2+0. 2*2+0. 2]-((fu*r11+u0*r31)*(62)+(fu*r12+u0*r32)*(-50)+fu*t1+u0*t3))
)^2+(RandomNormal[500, 0. 2*2+0. 2*2+0. 2*2+0. 2*2+0. 2]-((fv*r21+v0*r31)*(62)+(fv*r22+v0*r32
)*(-50)+fv*t2+v0*t3))^2+(RandomNormal[279, 0. 2*2+0. 2*2+0. 2*2+0. 2*2+0. 2]-((fu*r11+u0*r31
)*(-62)+(fu*r12+u0*r32)*(50)+fu*t1+u0*t3))^2+(RandomNormal[186, 0. 2*2+0. 2*2+0. 2*2+0. 2*2
+0. 2]-((fv*r21+v0*r31)*(-62)+(fv*r22+v0*r32)*(50)+fv*t2+v0*t3))^2+(RandomNormal[675, 0.
2*2+0. 2*2+0. 2*2+0. 2*2+0. 2]-((fu*r11+u0*r31)*(62)+(fu*r12+u0*r32)*(50)+fu*t1+u0*t3))^2+
(RandomNormal[212, 0. 2*2+0. 2*2+0. 2*2+0. 2*2+0. 2]-((fv*r21+v0*r31)*(62)+(fv*r22+v0*r32)*
(50)+fv*t2+v0*t3))^2+(RandomNormal[460, 0. 2*2+0. 2*2+0. 2*2+0. 2*2+0. 2]-((fu*r11+u0*r31)*(-
8. 5061)+(fu*r12+u0*r32)*(46. 5518)+fu*t1+u0*t3))^2+(RandomNormal[210, 0. 2*2+0. 2*2+0. 2*2+
0. 2*2+0. 2]-((fv*r21+v0*r31)*(-8. 5061)+(fv*r22+v0*r32)*(46. 5518)+fv*t2+v0*t3))^2+(Rando
mNormal[386, 0. 2*2+0. 2*2+0. 2*2+0. 2*2+0. 2]-((fu*r11+u0*r31)*(-31. 4939)+(fu*r12+u0*r32)*
(53. 4482)+fu*t1+u0*t3))^2+(RandomNormal[179, 0. 2*2+0. 2*2+0. 2*2+0. 2*2+0. 2]-((fv*r21+v0*r3
1)*(-31. 4939)+(fv*r22+v0*r32)*(53. 4482)+fv*t2+v0*t3))^2+(RandomNormal[383, 0. 2*2+0. 2*2+
0. 2*2+0. 2*2+0. 2]-((fu*r11+u0*r31)*(-31. 9788)+(fu*r12+u0*r32)*(50. 7136)+fu*t1+u0*t3))^
2+(RandomNormal[190, 0. 2*2+0. 2*2+0. 2*2+0. 2*2+0. 2]-((fv*r21+v0*r31)*(-31. 9788)+(fv*r22+v
0*r32)*(50. 7136)+fv*t2+v0*t3))^2+(RandomNormal[454, 0. 2*2+0. 2*2+0. 2*2+0. 2*2+0. 2]-((fu*r
11+u0*r31)*(-9. 6066)+(fu*r12+u0*r32)*(44. 002)+fu*t1+u0*t3))^2+(RandomNormal[220, 0. 2*2+
0. 2*2+0. 2*2+0. 2*2+0. 2]-((fv*r21+v0*r31)*(-9. 6066)+(fv*r22+v0*r32)*(44. 002)+fv*t2+v0*t3
))^2, 0. 98*1023/2 ≤ u0 ≤ 1. 02*1023/2, 0. 98*767/2 ≤ v0 ≤ 1. 02*767/2, 1577*0. 98 ≤ fu ≤
1577*1. 02, 1577*0. 98 ≤ fv ≤ 1577*1. 02},
{fu, fv, r11, r12, r21, r22, r31, r32, t3, t1, t2, u0, v0},
Method->{"DifferentialEvolution",
"SearchPoints"->130,
"ScalingFactor"->0. 1,
"RandomSeed"->3},
MaxIterations->300]//Timing
```