

插值与拟合模型

Matlab 的一维插值函数为 `interp1()`，调用格式为：

`yy=interp1(x,y,xx,方法)`

其中 $x=[x_1, x_2, \dots, x_n]'$, $y=[y_1, y_2, \dots, y_n]'$ 两个向量分别为给定的一组自变量和函数值，用来表示已知样本点数据。 xx 为待求插值点处横坐标， yy 返回的对应纵坐标。

插值方法可以选用默认的 'linear' (线性插值)，'nearest' (最近邻等值方式)，'cubic' (三次 Hermite 插值)，'spline' (三次样条插值)。一般可采用样条插值。

问题 1 插值实验

作函数 $y = (x^2 - 3x + 7)e^{-4x} \cdot \sin(2x)$ 在 $[0, 1]$ 取间隔为 0.1 的点图，用插值进行验证

Matlab 程序 `chazhi1.m`：

```
x=0:0.1:1;
```

```
y=(x.^2-3*x+7).*exp(-4*x).*sin(2*x); %产生原始数据
```

```
subplot(1,2,1);
```

```
plot(x,y,x,'ro') %作图
```

```
xx=0:0.02:1; %待求插值点
```

```
yy=interp1(x,y,xx,'spline'); %此处可用 nearest,cubic,spline 分别试验
```

```
%或 yy=spline(x,y,xx);
```

```
subplot(1,2,2)
```

```
plot(x,y,'ro',xx,yy,'b') %作图
```

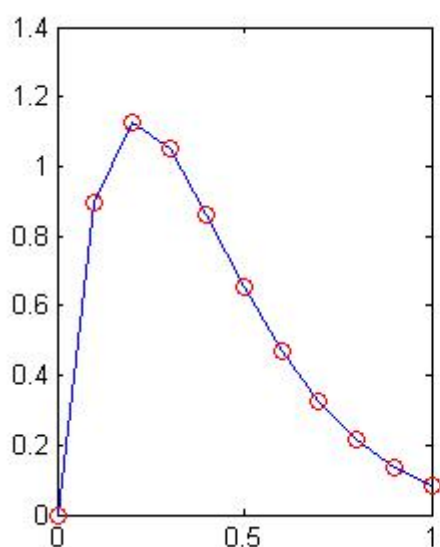


图 1 原始点图

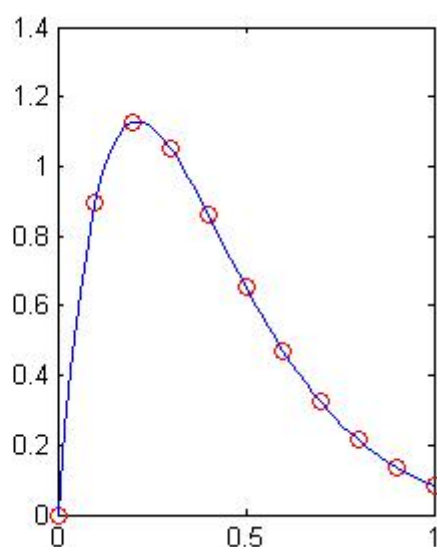


图 2 样条插值图

问题 2 水道测量数据问题

(MCM86A) 表 1 给出了在以码 (1 码=0.914 米) 为单位的直角坐标为 X, Y 的水面一点处以英尺 (1 英尺=0.3048 米) 计的水深 Z 。水深数据是在低潮时测得的。

表 1 水道测量数据在低潮时测得的水深

X(码)	Y(码)	Z(英尺)	X(码)	Y(码)	Z(英尺)
129.0	7.5	4	157.5	-6.5	9
140.0	141.5	8	107.5	-81.0	9
108.5	28.0	6	77.0	3.0	8
88.0	147.0	8	81.0	56.5	8
185.5	22.5	6	162.0	84.0	4
195.0	137.5	8	117.5	-38.5	9
105.5	85.5	8	162.0	-66.5	9

船的吃水深度为 5 英尺。在矩形区域 $(75, 200) \times (-50, 150)$ 里哪些地方船要避免进入。

解答:

所给 14 个点的平面散点图如下, 其中有两点不落在所给区域: $(75, 200) \times (-50, 150)$ 。

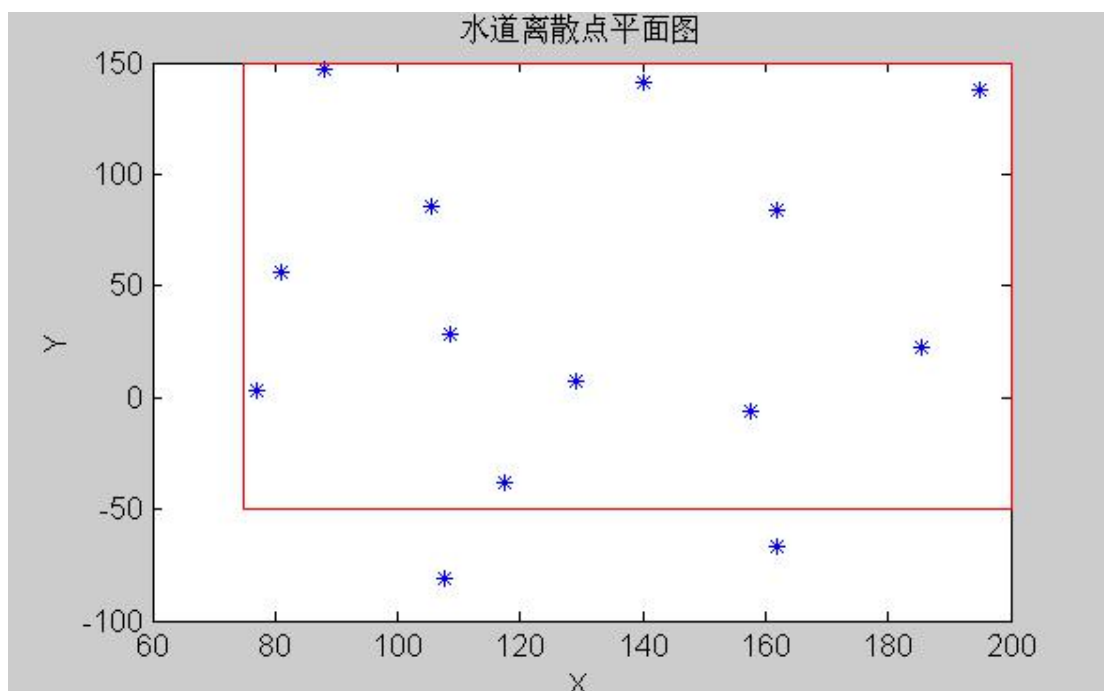


图 3 水道离散点平面图

本问题采用地球科学上的反距离权重法 (IDW)。首先将所给区域 $(75, 200) \times (-50, 150)$ 按较细的网格进行剖分。然后利用所给 14 个点的水深值 Z , 按照 IDW 方法求出所有剖分点的水深值 Z , 并找出水深低于 5 米的点。然后作出水底曲面图, 等值线图, 标出水深低于 5 米的区域。

IDW 算法:

设有 n 个点 (x_i, y_i, z_i) , 计算平面上任意点 (x, y) 的 z 值。

$$z = \sum_{i=1}^n w_i z_i$$

其中权重:

$$w_i = \frac{1/d_i^p}{\sum_{i=1}^n 1/d_i^p}, \quad d_i = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}$$

即 (x, y) 处的 z 值由各已知点加权得到, 其权重为 (x, y) 到各点距离的 p 次方成反比。

p 决定距离 (x, y) 近的 (x_i, y_i) 作用的相对大小。当 p 越大, 则当 (x_i, y_i) 距离 (x, y) 越近,

其相对作用越大, 越远相对作用越小。本题取 $p = 3$ 。

按照 IDW 方法, x 方向剖分 50 个区间, 区间间隔 2.5; y 方向剖分 80 个区间, 区间间隔 $dy = 2.5$ 得到的水底河床图及等值线图如下。实现的 Matlab 程序见后。

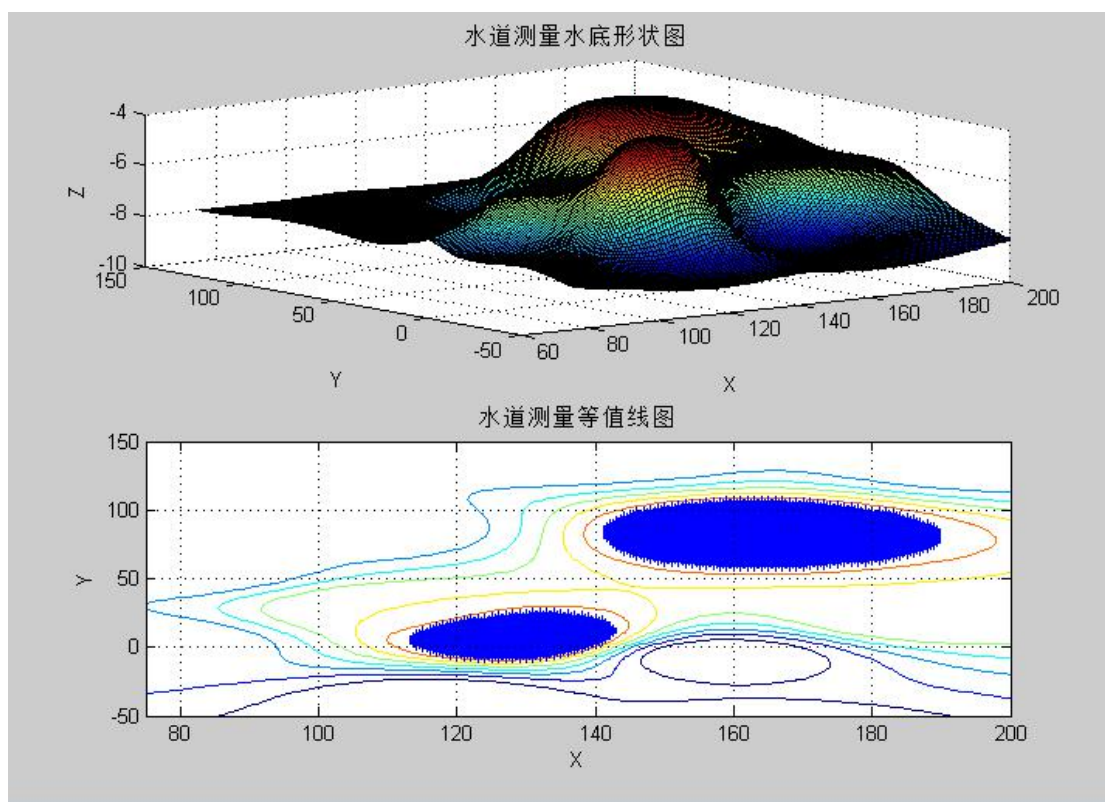


图4 水道测量水底形状图和等值线图
(其中蓝色竖线为水深不足 5 英尺的点)

Matlab 程序如下:

```
clear;
%AMCM86A
data=[129.0,7.5,4;
      140.0,141.5,8;
      108.5,28.0,6;
      88.0,147.0,8;
      185.5,22.5,6;
      195.0,137.5,8;
      105.5,85.5,8;
      157.5,-6.5,9;
      107.5,-81.0,9;
      77.0,3.0,8;
      81.0,56.5,8;
      162.0,84.0,4;
      117.5,-38.5,9;
      162.0,-66.5,9];%水道测量数据
plot(data(:,1),data(:,2),'*')
xx=[75,-50;
    200,-50;
    200,150;
    75,150;
    75,-50];
hold on;
plot(xx(:,1),xx(:,2),'r')
xlabel('X');
ylabel('Y');
title('水道离散点平面图');
pause
d=zeros(14,1);
w=zeros(14,1);

p=3; %参数 p
[X,Y]=meshgrid(75:1:200,-50:1:150); %对(X,Y)进行网格剖分
Z=zeros(size(X));
[m,n]=size(X);

tp=0;
for i=1:m
    for j=1:n
        for k=1:14
            %(x,y)格点到各已知各点距离
            d(k)=sqrt((X(i,j)-data(k,1))^2+(Y(i,j)-data(k,2))^2);
```

```
w(k)=1.0/d(k)^p;%各点权重
end;

s=sum(w);
w=w/s;%权值归一化
z=sum(data(:,3).*w); %加权求和
Z(i,j)=-z;
if z<=5
    tp=tp+1;
    D(tp,1)=X(i,j); D(tp,2)=Y(i,j);%获得水深低于 5 英尺的点
end
end
end

subplot(2,1,1);
surf(X,Y,Z) %作曲面图
xlabel('X');
ylabel('Y');
zlabel('Z');
title('水道测量水底形状图');
subplot(2,1,2);
contour(X,Y,Z); %作等值线图
hold on
plot(D(:,1),D(:,2),'*')%作出水深低于 5 英尺的点
xlabel('X');
ylabel('Y');
title('水道测量等值线图');
grid on
hold off
```

问题 3. 估计水塔水流量

(MCM91A) 美国某洲的各用水管理机构要求各社区提供以每小时多少加仑计的用水率以及每天总的用水量,但许多社区并没有测量水流入或流出当地水塔的水量的设备,他们只能代之以每小时测量水塔中的水位,精度在 0.5%以内,更为重要的是,无论什么时候,只要水塔中的水位下降到某一最低水位 L 时,水泵就启动向水塔重新充水至某一最高水位 H ,但也无法得到水泵的供水量的测量数据。因此,在水泵工作时,人们容易建立水塔中的水位与水泵工作时的用水量之间的关系。水泵每天向水塔充水一次或两次,每次约两小时。

表 2 白某小镇某天的水塔水位

时间(秒)	0	3316	6635	10619	13937	17921	21240	25223	28543
水位(0.01英尺)	3175	3110	3054	2994	2947	2892	2850	2797	2752
时间(秒)	32284	35935	39332	39435	43318	46636	49953	53936	57254
水位	2697	水泵工作	水泵工作	3550	3445	3350	3260	3167	3087
时间	60574	64554	68535	71854	75021	79154	82649	85968	89953
水位	3012	2927	2842	2767	2697	水泵工作	水泵工作	3475	3397
时间	93270								
水位	3340								

试估计在任何时刻,甚至包括水泵正在工作期间内,水从水塔流出的流量 $f(t)$,并估计一天的总用水量,表 1 中给出了某个真实小镇某一天的真实数据。

表 1 中给出了从第一次测量开始的以秒为单位的时刻,以及该时刻的高度单位为百分之一英尺的水塔中水位的测量值,例如,3316 秒后,水塔中的水位达到 31.10 英尺。水塔是一个垂直圆形柱体,高为 40 英尺,直径 57 英尺,通常当水塔的水位降至 27.00 英尺时水泵开始向水塔充水,而当水塔的水位升至 35.50 英尺时水泵停止工作。

解答:

1. 水塔充水时间的确定

(1) 第一次充水时间的确定

当时间 $t=32284$ 秒时,水位 26.97 英尺,约低于最低水位 27 英尺,因此可作为第一次开始充水时刻。

当 $t=39435$ 秒时,水塔水位 35.5 英尺,恰为最高水位,因此可作为第一次充水的结束时刻。充水时间为 $dt=(39435-32284)/3600=1.9864$ 小时,也接近充水时间 2 小时。

(2) 第二次充水时间的确定

当时间 $t=75021$ 秒时,水位 26.97 英尺,约低于最低水位 27 英尺,因此可作为第二次开始充水时刻。

当 $t=82649$ 秒时,水泵在工作,但充水时间达到 $dt=(82649-75021)/3600=2.1189$ 小时;但下一时刻 $t=85968$ 时,水塔水位 34.75 英尺,低于最高水位 35.50 英尺。

因此可将 $t=82649$ 秒作为第二次充水的结束时刻,且该时刻水位为最大充水高度 35.50 英尺。

2. 计算各时刻塔内水的体积

单位转换为 1 英尺=0.3048 米, 1 升=1/3.785411 加仑

体积计算公式为 $v = \pi \cdot d^2 h / 4$

表 3 不同时刻水体积表

时间(小时)	水体积(加仑)	时间(小时)	水体积(加仑)	时间(小时)	水体积(加仑)
0 (1)	606125	10.9542 (2)	677715	20.8392	514872
0.9211	593716	12.0328	657670	22.9581 (3)	677715
1.8431	583026	12.9544	639534	23.8800	663397
2.9497	571571	13.8758	622352	24.9869	648506
3.8714	562599	14.9822	604598	25.9083	637625
4.9781	552099	15.9039	589325		
5.9000	544081	16.8261	575008		
7.0064	533963	17.9317	558781		
7.9286	525372	19.0375	542554		
8.9678	514872	19.9594	528236		

其中(1)表示第一段开始, (2) 表示第二段开始, (3) 表示第三段开始

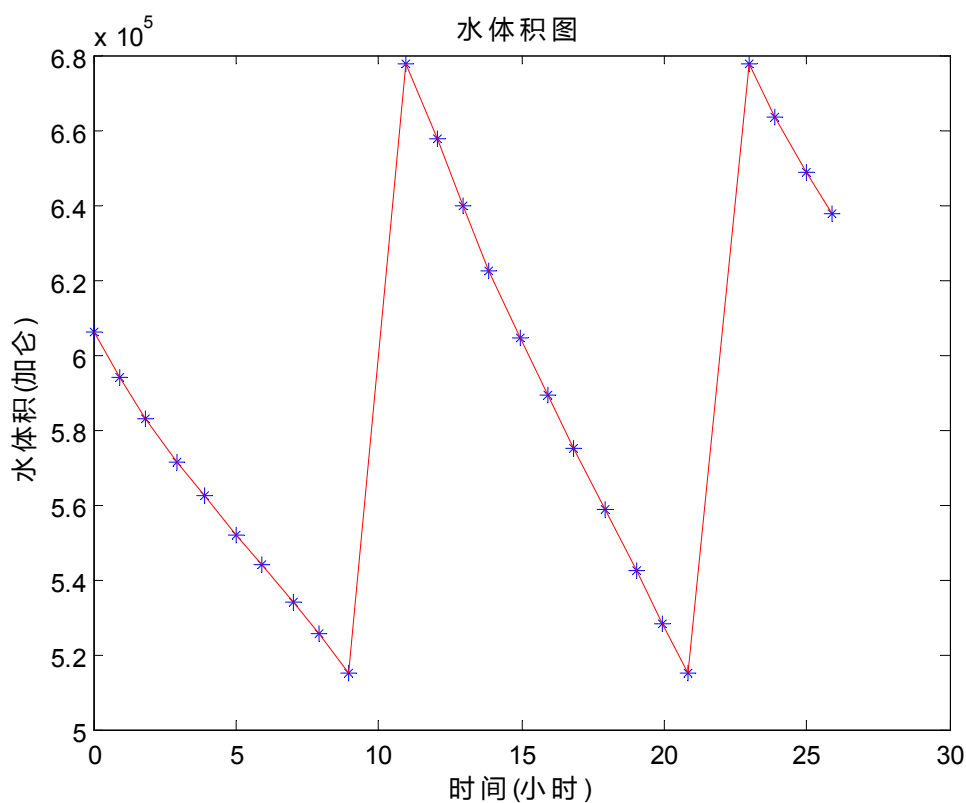


图 5 水体积图 (*表示数据点)

3. 计算各时刻点的水流量(加仑/小时)

$$\text{水流量公式为: } f(t) = \left| \frac{dv(t)}{dt} \right|$$

以上 25 个时刻处的水流量采用差分的方法得到, 共分三段分别处理。

差分公式为:

(1) 对每段前两点采用向前差分公式

$$f(t_i) = \left| \frac{-3V_i + 4V_{i+1} - V_{i+2}}{2(t_{i+1} - t_i)} \right|$$

(2) 对每段最后两点采用向后差分公式

$$f(t_i) = \left| \frac{3V_i - 4V_{i-1} + V_{i-2}}{2(t_i - t_{i-1})} \right|$$

(3) 对每段中间点采用中心差分公式

$$f(t_i) = \left| \frac{-V_{i+2} + 8V_{i+1} - 8V_{i-1} + V_{i-2}}{12(t_{i+1} - t_i)} \right|$$

得到各点水流量表

表 4 不同时刻水流量表

时间(小时)	水流量 (加仑/小时)	时间(小时)	水流量 (加仑/小时)	时间(小时)	水流量 (加仑/小时)
0 (1)	14404	10.9542 (2)	19469	20.8392	14648
0.9211	11182	12.0328	20195	22.9581 (3)	15220
1.8431	10063	12.9544	18941	23.8800	15263
2.9497	11012	13.8758	15903	24.9869	13711
3.8714	8798	14.9822	18055	25.9083	9634
4.9781	9991	15.9039	15646		
5.9000	8124	16.8261	13742		
7.0064	10161	17.9317	14962		
7.9286	8487	19.0375	16652		
8.9678	11023	19.9594	14495		

其中(1)表示第一段开始, (2) 表示第二段开始, (3) 表示第三段开始

4. 用三次样条拟合流量数据

对表 4 中 25 个时刻点的流量数据采用三次样条插值得到一条光滑曲线, 作为任意时刻的流量曲线, 见图 6。

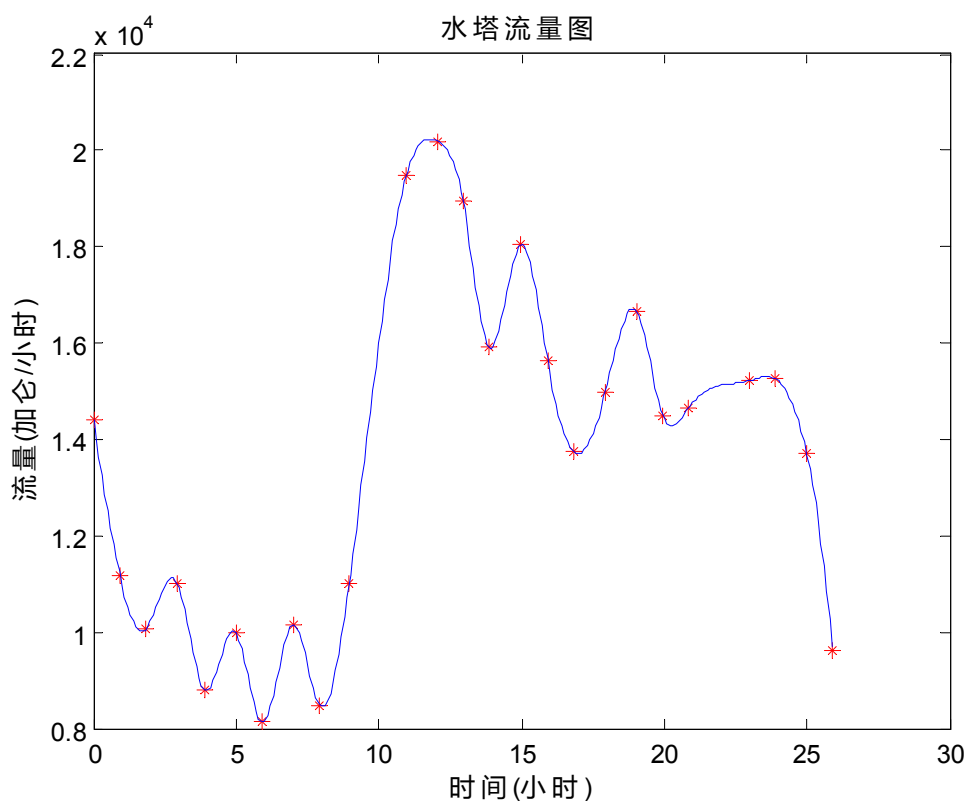


图6 水塔流量图 (*表示数据点, 实线为样条曲线)

5. 一天总用水量计算

一天流水总量计算:

方法 1: 直接积分法:

$$S_1 = \int_0^{24} f(t) dt = 332986 (\text{加仑})$$

积分可采用梯形法的数值积分法。

设由样条插值得到 n 个点 y_1, y_2, \dots, y_n , 采用间隔为 h 。则数值积分公式为:

$$S = [y_1 + y_n + 2(y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1})] \cdot \frac{h}{2}$$

方法 2: 分段计算法

$$\text{第一次充水前用水 } V_1 = 606125 - 514872 = 91253 (\text{加仑})$$

$$\text{第一次充水后第二次充水前用水 } V_2 = 677715 - 514872 = 162843 (\text{加仑})$$

$$[22.9581, 23.88] \text{ 期间用水 } V_3 = 677715 - 663397 = 14318 (\text{加仑})$$

$$\text{第一次充水期间用水: } V_4 = \int_{8.9678}^{10.9542} f(t) dt = 30326 (\text{加仑})$$

$$\text{第二次充水期间用水: } V_5 = \int_{20.8392}^{22.9581} f(t)dt = 31605(\text{加仑})$$

$$[23.88, 24]\text{期间用水: } V_6 = \int_{23.88}^{24} f(t)dt = 1524(\text{加仑})$$

$$\text{总共用水 } S_2 = \sum_{i=1}^6 V_i = 331869(\text{加仑})$$

$$\text{两种方法结果相差 } err = \left| \frac{S_1 - S_2}{S_1} \right| = 0.34\%$$

6. 水泵水流量计算

第一次充水期间水塔体积增加

$$\Delta V_1 = 677715 - 514872 = 162843(\text{加仑})$$

$$\text{充水时间: } \Delta t_1 = 10.9542 - 8.9678 = 1.9864(\text{小时})$$

第一次充水期间水泵平均流量

$$p_1 = \frac{\Delta V_1 + \int_{8.9678}^{10.9542} f(t)dt}{\Delta t_1} = 97246(\text{加仑 / 小时})$$

第二次充水期间水塔体积增加

$$\Delta V_2 = 677715 - 514872 = 162843(\text{加仑})$$

$$\text{充水时间: } \Delta t_2 = 22.9581 - 20.8392 = 2.1189(\text{小时})$$

第二次充水期间水泵平均流量

$$p_2 = \frac{\Delta V_2 + \int_{20.8392}^{22.9581} f(t)dt}{\Delta t_2} = 91769(\text{加仑 / 小时})$$

则整个充水期间水泵平均流量

$$p = (p_1 + p_2) / 2 = 94507(\text{加仑 / 小时})$$

附 Matlab 程序

```
%AMCM91A
```

```
c=0.3048; %1 英尺等于 0.3048 米
```

```
p=1.0/3.785; %1 升=1/3.785411 加仑
```

```
d=57*c; %直径
```

```
h=31.75*c;
```

```
v=pi*d*d*h/4*1000*p;
```

```
data=[0,3175;
```

```
3316,3110;
```

```

6635,3054;
10619,2994;
13937,2947;
17921,2892;
21240,2850;
25223,2797;
28543,2752;
32284,2697;
39435,3550;
43318,3445;
46636,3350;
49953,3260;
53936,3167;
57254,3087;
60574,3012;
64554,2927;
68535,2842;
71854,2767;
75021,2697;
82649,3550;
85968,3475;
89953,3397;
93270,3340];%原始数据
t=data(:,1)/3600;%计算时间(小时为单位)
v=pi*d*d*data(:,2)/100*c/4*1000*p;%计算体积

%计算差分
n=length(v);
f=zeros(n,1); %存储差分值
%计算第一段
n1=10;
for i=1:n1
    if i<=2 %前两点采用向前差分
        f(i)=abs(-3*v(i)+4*v(i+1)-v(i+2))/(2*(t(i+1)-t(i)));
    elseif i<=n1-2
        %采用中心差分公式
        f(i)=abs(-v(i+2)+8*v(i+1)-8*v(i-1)+v(i-2))/(12*(t(i+1)-t(i)));
    elseif i>=n1-1
        f(i)=abs(3*v(i)-4*v(i-1)+v(i-2))/(2*(t(i)-t(i-1)));
    end
end

%计算第二段
n2=21;

```

```

for i=n1+1:n2
    if i<=n1+2 %前两点采用向前差分
        f(i)=abs(-3*v(i)+4*v(i+1)-v(i+2))/(2*(t(i+1)-t(i)));
    elseif i<=n2-2
        f(i)=abs(-v(i+2)+8*v(i+1)-8*v(i-1)+v(i-2))/(12*(t(i+1)-t(i)));
    elseif i>=n2-1
        f(i)=abs(3*v(i)-4*v(i-1)+v(i-2))/(2*(t(i)-t(i-1)));
    end
end

%计算第三段
n3=25;
for i=n2+1:n3
    if i<=n2+2 %前两点采用向前差分
        f(i)=abs(-3*v(i)+4*v(i+1)-v(i+2))/(2*(t(i+1)-t(i)));
    elseif i<=n3-2
        f(i)=abs(-v(i+2)+8*v(i+1)-8*v(i-1)+v(i-2))/(12*(t(i+1)-t(i)));
    elseif i>=n3-1
        f(i)=abs(3*v(i)-4*v(i-1)+v(i-2))/(2*(t(i)-t(i-1)));
    end
end

plot(t,f,'r*'); %画原始点图

tmin=min(t); tmax=max(t);
tt=tmin:0.1:tmax; %获得离散的时间点,用于作样条曲线
ff=spline(t,f,tt); %计算三次样条插值
hold on
plot(tt,ff,'b'); %画样条曲线
xlabel('时间(小时)');
ylabel('流量(加仑/小时)');
title('水塔流量图');
hold off

dt=0.05;
t2=0.5:dt:24.5; %获得离散的时间点,用于积分
nn=length(t2);
f2=spline(t,f,t2);
%计算 24 小时用水量,采用复化梯形公式
s=(f2(1)+f2(nn)+2*sum(f2(2:nn-1)))*dt/2 ;
fprintf('(全部积分法)1 天总水流量 s= %8.2f\n',s);

%第一次水塔增加的水
v10=v(11)-v(10);

```

```

dt1=t(11)-t(10);
%第一次充水其间流出的水
tp=t(10):dt:t(11);
nn=length(tp);
yp=spline(t,f,tp); %计算三次样条插值
v11=(yp(1)+yp(nn)+2*sum(yp(2:nn-1)))*dt/2 ;
v1=v10+v11;%第一次充水总量
p1=v1/dt1; %第一次充水的平均水流量

```

```

%第二次水塔增加的水
v20=v(22)-v(21);
dt2=t(22)-t(21);
%第二次充水其间流出的水
tp1=t(21):dt:t(22);
nn=length(tp1);
yp1=spline(t,f,tp1); %计算三次样条插值
v21=(yp1(1)+yp1(nn)+2*sum(yp1(2:nn-1)))*dt/2 ;
v2=v20+v21;%第二次充水总量
p2=v2/dt2; %第二次充水的平均水流量

```

```

p=(p1+p2)/2; %两次充水平均水流量
fprintf('两次充水平均水流量 p= %8.2f\n',p);

```

```

%第一次充水前总流量
vv1=v(1)-v(10);
%两次充水间总流量
vv2=v(11)-v(21);
% t=83649 到 85968 其间流量
vv3=v(22)-v(23);
%第一次充水期间流量
ta=t(10):dt:t(11); %获得离散的时间点,用于积分
nn=length(ta);
fa=spline(t,f,ta);

```

```

s1=(fa(1)+fa(nn)+2*sum(fa(2:nn-1)))*dt/2 ;

```

```

%第二次充水期间流量
tb=t(21):dt:t(22); %获得离散的时间点,用于积分
nn=length(tb);
fb=spline(t,f,tb);
s2=(fb(1)+fb(nn)+2*sum(fb(2:nn-1)))*dt/2 ;

```

```
%t=85968 到 86400 流量

tc=t(23):dt:24; %获得离散的时间点,用于积分
nn=length(tc);
fc=spline(t,f,tc);
s3=(fc(1)+fc(nn)+2*sum(fc(2:nn-1)))*dt/2 ;
ss=vv1+vv2+vv3+s1+s2+s3;
fprintf('(部分积分法)1 天总水流量 ss= %8.2f\n',ss);

err=abs((s-ss)/s);
fprintf('两种算法总量相对误差%6.2f%%\n',err*100);
```

程序计算结果为:

```
(全部积分法)1 天总水流量 s= 332986.22
两次充水平均水流量 p= 94507.48
(部分积分法)1 天总水流量 ss= 331869.29
两种算法总量相对误差 0.34%
```