

文章编号:1005-3085(2008)07-0032-11

## 透视投影中圆心投影定位和双目立体系统标定

曹 洋, 吴文斐, 张远洋

指导教师: 彭临平

(北京航空航天大学, 北京 100191)

**编者按:** 本文通过仿射变换及坐标变换, 建立了靶标与像之间的变换关系。但由于像与靶标之间没有直接给出点与点之间的关系, 因此确定靶标与像之间的变换关系需要利用问题中给出的各种条件。在本文中, 作者给出了两种有效的方法。首先建立从像到靶标之间的变换关系, 利用靶标中原像为圆的信息来确定像中各个椭圆的方程, 通过系数间的等价关系来确定参数。在求解过程中都建立了优化标准, 并充分利用了参数的约束关系, 并得到了精确结果。本文另一个亮点在于精确性与稳定性的分析。作为模型的检验, 需要通过设计合理的实验, 使模型的精确性与稳定性得以验证。本文充分体现了这一点。

**摘 要:** 本题是典型的相机系统标定问题。问题一中, 根据传统针孔透射原理, 本文建立了基于坐标系变换的离散型模型和基于曲线变换的连续性模型, 提出了求解圆心投影坐标的方案。问题二中, 通过 Canny 边缘算子提取了给定图片的曲线信息, 利用问题一中提出的两种方案得出了圆心投影坐标。同时, 根据图像切点投影规律, 给出了针对本问题的特殊解法。问题三中, 本文通过实验, 讨论图像获取中的三个因素, 对模型精度、稳定性进行分析。同时通过贝努力实验对检验方法进行稳定性分析。问题四中, 利用模型一对两个相机系统外参数进行求解, 建立了相机空间相对位置关系模型。

**关键词:** 相机标定; 坐标系变换; 透视投影; 畸变

**分类号:** AMS(2000) 15A04

**中图分类号:** O185.1

**文献标识码:** A

### 一、问题(1)的解答

#### 1 基本假设

1. 不考虑相机透镜对光的反射作用而形成的类似望远镜的折射反射系统;
2. 假设相机制造过程中焦平面与透镜平面的偏斜角度是固定的;
3. 底片垂直于主光轴;
4. 物距远大于相距, 相距近似等于焦距。

#### 2 模型一的建立(离散型模型)

##### 2.1 模型假设

相机镜头透镜很小, 光学系统为针孔成像系统。

##### 2.2 符号说明

$(u, v)$ : 点在相片坐标系中的坐标;  $(x, y, z)$ : 点在世界坐标系中的坐标;

$f$ : 凸透镜焦距;  $dx, y$ : 每一个像素在物理图像坐标系中  $x$  轴、 $y$  轴方向上的物理尺度。

##### 2.3 模型的建立

###### 2.3.1 坐标系的引入及坐标之间转换的研究

像素图像坐标系: 每个像素点的坐标  $(u, v)$  分别是该像素点在坐标系中的行数和列数, 即  $(u, v)$  是以像素为单位的图像坐标。

**物理图像坐标系:** 以物理单位(毫米)表示的图像坐标系。以相机光轴与图像平面的交点  $O_1$  在像素坐标系中的坐标  $(u_0, v_0)$ , 每一个像素在物理图像坐标系中  $x$  轴、 $y$  轴方向上的物理尺度为  $dx$ 、 $dy$ , 则图像中任意一个像素在两个坐标系下的坐标有如下关系:  $u = \frac{x}{dx} + u_0$ ,  $v = \frac{y}{dy} + v_0$ 。两式用矩阵形式表示为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} dx & 0 & -u_0 dx \\ 0 & dy & -v_0 dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

**相机坐标系:** 以相机光心为原点  $O$ , 其  $x_C$  轴和  $y_C$  轴与物理相图坐标系的  $x$  轴、 $y$  轴平行,  $z_C$  轴为相机光轴, 与图像平面垂直。光轴与图像平面的交点即为物理图像坐标系原点。

**世界坐标系:** 世界坐标系的定义是任意的, 即原点与轴方向的选取任意, 在实现中, 我们可以引入旋转矩阵  $R$  与平移向量  $t$  来描述其任意性。空间中任取一点  $P$ , 其世界坐标系中齐次坐标为  $(X_W, Y_W, Z_W, 1)^T$  在相机坐标系中坐标为  $(X_C, Y_C, Z_C, 1)^T$  于是有

$$\begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_W \\ Y_W \\ Z_W \\ 1 \end{pmatrix} = M_1 \begin{pmatrix} X_W \\ Y_W \\ Z_W \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中  $R$  为  $3 \times 3$  正交单位矩阵, 称为旋转矩阵,  $R = R_1 \times R_2 \times R_3$ ,

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{bmatrix}, \quad R_3 = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

式中  $R_1, R_2, R_3$  分别为相机坐标系围绕世界坐标系绕  $X_C, Y_C, Z_C$  轴的旋转矩阵;  $\theta, \varphi, \psi$  为与旋转矩阵对应的 3 个角度。 $t$  为平移向量, 是一个  $1 \times 3$  的向量, 3 个分量分别表示相机坐标系原点与世界坐标系原点在  $X_W, Y_W, Z_W$  方向上的 3 个偏移量,  $M_1$  为  $4 \times 4$  矩阵。

### 2.3.2 透视投影成像关系

根据 Burnelleschi 提出的针孔模型, 空间任意一点  $P$  在图像上的投影位置为光心  $O$  与  $P$  点的连线  $OP$  与图像平面的交点。列出透视方程

$$x = \frac{fX_C}{Z_C}, \quad y = \frac{fY_C}{Z_C}. \quad (2)$$

其中  $(x, y)$  为的物理图像坐标,  $(X_C, Y_C, Z_C)$  为空间点  $P$  在相机坐标系下的坐标, 用齐次坐标和矩阵表示上述透视投影关系如下。

$$Z_C \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$



将(1)、(2)式代入(3)式得到 $P$ 点在世界坐标系中的 $P'$ 坐标与其投影在物理图像坐标系中的坐标的关系如下。

$$Z_C \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_x & 0 & u_0 & 0 \\ 0 & \alpha_y & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_W \\ Y_W \\ Z_W \\ 1 \end{pmatrix} = M_1 M_2 X_W = M X_W. \quad (4)$$

其中,  $\alpha_x = \frac{f}{dx}$ ,  $\alpha_y = \frac{f}{dy}$ ;  $M$  为  $3 \times 4$  矩阵, 称为投影矩阵。

$$M_1 = \begin{bmatrix} \alpha_x & 0 & u_0 & 0 \\ 0 & \alpha_y & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

全由  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$ ,  $u_0$ ,  $v_0$  决定, 仅与相机内部有关, 称其为相机内部参数 ( $Z_C$  相当于放缩比例, 可归一化考虑, 属于确定因素)。

$$M_2 = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

完全由相机相对与世界坐标系的方位决定, 称为相机的外部参数。

这样在不考虑畸变的情况下, 点 $P$ 的世界坐标到像素图像平面的投影点的映射关系就由(4)完全表示。投影矩阵  $M = M_1 M_2$  中仅  $M_2$  含有  $R(\theta, \varphi, \psi)$  和  $t$  六个由世界坐标系与相机坐标系相对位置关系所决定的6个参量, 一旦给定建立的世界坐标系, 则  $R(\theta, \varphi, \psi)$  和  $t$  为常数。

根据此模型求解实物在世界坐标系的轨迹方程。已知靶标的图形特征(为空间圆), 由像方程加上原像的空间几何特征联立方程组, 就可解决  $M$  不可逆而造成的原相不确定的问题, 得出实物解析方程, 求出实物空间圆圆心在投影面上对应的投影点坐标。具体数据的求解过程见模型求解(第二问)。

#### 2.4 考虑畸变时模型改进

当计算精度要求较高或相机镜头是广角镜头时, 线性的针孔模型便不能准确描述相机的成像的几何关系, 在远离图像中心处会有较大畸变, 此时需要考虑建立引入畸变因素的非线性投影关系。

考虑畸变的非线性模型的基本投影关系式为:  $\bar{x} = x + \delta_x(x, y)$ ,  $\bar{y} = y + \delta_y(x, y)$  其中  $(x, y)$  为小孔线性模型计算出来的相点坐标理想值,  $(\bar{x}, \bar{y})$  为实际相点的坐标。  $\delta_x(x, y)$ ,  $\delta_y(x, y)$  是非线性畸变, 与相点在像中的位置有关。畸变可分为径向畸变、离心畸变、薄棱镜畸变三种, 总畸变表达式

$$\delta_x(x, y) = k_1 x(x^2 + y^2) + (p_1(3x^2 + y^2) + 2p_2 xy) + s_1(x^2 + y^2),$$

$$\delta_y(x, y) = k_1 y(x^2 + y^2) + (p_2(3x^2 + y^2) + 2p_1 xy) + s_2(x^2 + y^2).$$

其中  $\delta_x(x, y)$ ,  $\delta_y(x, y)$  的第一项为径向畸变, 第二项为离心畸变, 第三项为薄棱镜畸变,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $s_1$ ,  $s_2$  为非线性畸变参数。根据 Tsai 二步标定思想, 将上式第二、三项省去, 即可得  $\bar{x} = x(1 + k_1 \rho)$ ,  $\bar{y} = y(1 + k_2 \rho^2)$ 。两式表明  $x$  方向与  $y$  方向的畸变相对值与径向半径的平方成正比, 即图像在边缘的畸变较大。相机的外部参数没有改变, 但内部参数就引入了畸变参数, 需要通过已知的实物点与该实物点对应的像点由最小二乘确定参数。

### 3 模型二的建立 (连续型模型)

空间椭圆的透视投影变换如图 1 所示。

#### 3.1 符号说明

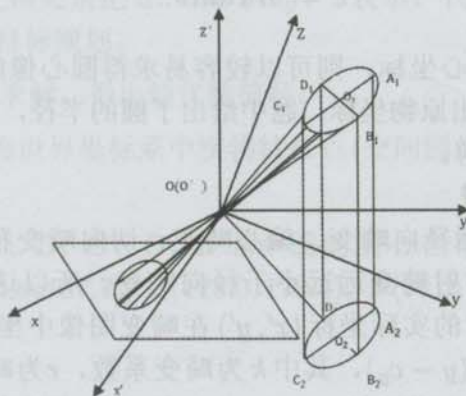


图 1: 连续型模型

1.  $O$  为投影中心, 即光学中心;
2.  $O_1$  为空间圆的中心。  $f$  为透镜焦距;
3.  $O-xyz$  为摄像机坐标系, 建立坐标系  $O'-x'y'z'$  为空间圆坐标系, 其坐标系原点  $O'$  与  $O$  重合,  $z'$  轴的正向指向正交于空间圆  $O_1-A_1B_1C_1D_1$  在像平面上的投影曲线。

#### 3.2 模型的建立

##### 3.2.1 不考虑畸变的线性投射模型

坐标系  $O-xyz$  与坐标系  $O'-x'y'z'$  只存在旋转变换

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ r_4 & r_5 & r_6 \\ r_7 & r_8 & r_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

由参考文献 [1] 得, 建立曲线在相平面的方程

$$(k^2 + n^2 - r^2)x^2 + 2(kl + np - rs)xy + (l^2 + p^2 - s^2)y^2 + 2(mk + nq - rt)x + 2(ml + pq - st)y + m^2 + q^2 - t^2 = 0. \quad (5)$$

其中,  $\theta = \angle A_1O'O_1$ ,  $\Phi = \min(\angle B_1O'O_1, \angle D_1O'O_1)$ ,  $u = \tan(\gamma + \theta) \cos(\gamma) - \sin(\gamma)$ ,  $O_1$  在  $O'-x'y'z'$  中的坐标为  $(x'_{e0}, y'_{e0}, z'_{e0})$ , 矢量  $O'\vec{O}_1$  在  $O'-x'y'z'$  坐标系中的方向与  $xyz$  轴夹角分别为  $\alpha, \beta, \gamma$ 。

$$k = u[\sin \varphi(r_1 \cos \gamma - r_7 \cos \alpha) - \cos \varphi - r_7 \cos \beta], \quad (6)$$

$$l = u[\sin \varphi(r_2 \cos \gamma - r_8 \cos \alpha) - \cos \varphi(r_5 \cos \gamma - r_2 \cos \beta)], \quad (7)$$

$$m = u[\sin \varphi(r_3 \cos \gamma - r_9 \cos \alpha) - \cos \varphi(r_6 \cos \gamma - r_9 \cos \beta)]f, \quad (8)$$

$$n = \tan \theta[\cos \varphi(r_1 \cos \gamma - r_7 \cos \alpha) + \sin \varphi(r_4 \cos \gamma - r_7 \cos \beta)], \quad (9)$$

$$p = \tan \theta[\cos \varphi(r_2 \cos \gamma - r_8 \cos \alpha) + \sin \varphi(r_5 \cos \gamma - r_8 \cos \beta)], \quad (10)$$

$$q = \tan \theta[\cos \varphi(r_3 \cos \gamma - r_9 \cos \alpha) + \sin \varphi(r_6 \cos \gamma - r_9 \cos \beta)]f, \quad (11)$$



$$r = ur_7 \tan \theta, \quad (12)$$

$$s = ur_8 \tan \theta, \quad (13)$$

$$t = ur_9 \tan \theta. \quad (14)$$

由以上分析可知, 如果给出圆心坐标, 则可以较容易求得圆心像的坐标; 如果未知原物的信息, 则上述过程不可逆, 求不出原物坐标; 题中给出了圆的半径, 以此为限制条件, 可得到超越方程组, 可用C语言编程求解。

### 3.2.2 考虑畸变时模型改进

摄像机光学系统的畸变包括径向畸变、偏心畸变、切向畸变和仿射畸变等。由假设, 消除偏心畸变, 而切向畸变和仿射畸变远远小于径向畸变。所以这里只讨论径向畸变。由文献[2], 设在像素坐标系中点 $P$ 的实际坐标 $(x', y')$ 在畸变图像中坐标为 $(x, y)$ 。关系为:  $x' = x + kr^2(x - c_x)$ ,  $y' = y + kr^2(y - c_y)$ , 其中 $k$ 为畸变系数,  $r$ 为畸变半径,  $(c_x, c_y)$ 为畸变中心, 本模型中, 原点为光心, 由对称性,  $(c_x, c_y) = (0, 0)$ , 合并参数得:  $x' = kx, y' = ky$ , 当 $k > 1$ 时是桶形畸变; 当 $k < 1$ 时是枕形畸变。

## 二、问题(2)的解答

本问需要根据已给靶标及靶标的照片, 来求出靶标上指定点在照片上投影点的对应位置。本节分三大步来解决这一问题。

## 4 照片信息的提取

通过Canny边缘算子对照片实施以下处理。

1. 用matlab读入照片生成三个RGB图像数字矩阵。
2. 对三个矩阵取均值得到不含颜色的一个图像数字矩阵。
3. 利用Canny算子得出经过噪声抑制和边缘处理的边缘曲线。
4. 以光轴与相片的交点为原点, 照片长宽方向为 $u$ 、 $v$ 轴建立像平面坐标系 $O-uv$ 。
5. 对得到的边缘曲线利用最小二乘法得出照片上5条曲线的轨迹方程如下。

$$u^2 - 0.09196uv + 1.0408v^2 + 396.36u - 422.38v + 76842 = 0,$$

$$u^2 - 0.13881uv + v^2 + 204.28u - 386.43v + 43644 = 0,$$

$$u^2 - 0.25246uv + 0.933v^2 - 212.48u - 286.43v + 36722 = 0,$$

$$u^2 - 0.37667uv + 1.0994v^2 - 185.99u - 288.34v + 22572 = 0,$$

$$u^2 - 0.22891uv + 1.2319v^2 + 427.96u + 238.17v + 61187 = 0.$$

## 5 模型一、二求解

### 5.1 根据模型一求解

#### 5.1.1 不考虑畸变的情况

1. 根据靶标建立世界坐标系, 原点在靶标圆圆心,  $xy$ 平面与靶标圆共面, 对靶标空间解析方程的求解转化为对相机的外参数 $M_2$ 的求解。

2. 利用靶标上五个圆的几何特征(半径为12的圆)及特征点(公切线的切点), 建立约束方程。

3.  $Z_C(p^T, 1)^T = MX_W$ , 其中  $p^T$ 、 $X_W$  分别表示靶标上点在像平面的投影坐标和在世界坐标系内的空间坐标。由变换关系把  $u$ 、 $v$  用  $x$ 、 $y$ 、 $z$  表示, 代入拟合的二次曲线, 建立方程组, 结合2中方程, 建立多目标规划。

4. 采用Newton迭代法求解, 得出较优数值解。

5. 由上步求出的  $M$ , 将世界坐标系中实物特征点(空间圆的圆心)通过  $M$  投影变换到像素像平面上即为第二问所求。

按照上面步骤, 求得  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 、 $E$  五个圆的圆心在相片坐标系中的平面坐标分别为:  $A(189.3, 194.2)$ ,  $B(-90.6, 187.7)$ ,  $C(128.0, 170.4)$ ,  $D(71.2, -119.5)$ ,  $E(-228.2, -118.9)$  其中, 旋转矩阵

$$R = \begin{bmatrix} -0.152638 & 0.922685 & 0.354054 \\ 0.940443 & 0.025497 & 0.338994 \\ 0.303757 & 0.384711 & -0.871624 \end{bmatrix}, \quad \text{平移向量 } t = \begin{bmatrix} -131.069 \\ -185.142 \\ 1441.920 \end{bmatrix} \quad (\text{单位: mm}).$$

### 5.1.2 考虑畸变时模型一求解方法

根据Tsai的两部标定思想, 选取  $\bar{x} = x(1 + k_1\rho^2)$ ,  $\bar{y} = y(1 + k_2\rho^2)$  作为畸变修正后的坐标修正。其中  $k_1, k_2$  为一次畸变系数,  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ 。我们通过对照片进行分析, 将畸变误差可以归类为径向畸变误差中的枕形畸变, 我们估算  $k_1 = 2 \times 10^{-4}$ ,  $k_2 = 1 \times 10^{-4}$ , 这样求得  $A, B, C, D, E$  五个圆心的畸变修正后的投影点坐标为:  $A(-188.7, 193.6)$ ,  $B(-90.3, 187.1)$ ,  $C(127.7, 169.9)$ ,  $D(71.0, -119.2)$ ,  $E(-227.5, -0.87)$ , 旋转矩阵

$$R = \begin{bmatrix} -0.149685 & 0.923102 & 0.354228 \\ 0.943257 & 0.025918 & 0.331050 \\ 0.296412 & 0.383682 & -0.874602 \end{bmatrix}, \quad \text{平移向量 } t = \begin{bmatrix} -132.507 \\ -185.405 \\ 1391.416 \end{bmatrix} \quad (\text{单位: mm}).$$

## 5.2 模型一的评价

本模型建立了世界坐标系、相机坐标系、物理图像坐标系、像素图像坐标系, 并给出了它们之间坐标的映射关系。从机理上分析了实物与像之间点对点的映射关系。在模型的改进中较全面地考虑了相机本身的畸变因素, 列出了修正函数, 实际使用中有助于更好的定位。不足之处是列出的超越方程组、约束条件比较复杂复杂, 求解耗时较长。

## 5.3 根据模型二求解

参数估计: 物距远大于相距, 相距近似等于焦距,  $f = 1577$ , 像素 = 417.2 mm。

### 5.3.1 不考虑畸变的线性模型求解如下

1. 由得到的椭圆方程:  $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ , 对比系数得:  $k^2 + n^2 - r^2 = A$ ,  $2(kl + np - rs) = B$ ,  $l^2 + p^2 - s^2 = C$ ,  $2(mk + np - rt) = D$ ,  $2(ml + pq - st) = E$ ,  $m^2 + q^2 - t^2 = F$ 。



2.  $\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ r_4 & r_5 & r_6 \\ r_7 & r_8 & r_9 \end{bmatrix}$  为旋转矩阵,  $r_1$  至  $r_9$  不相互独立, 可以表示为

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha' \cos \gamma' - \cos \beta' \sin \alpha' \sin \gamma' & -\cos \beta' \cos \gamma' \sin \alpha' - \cos \alpha' \sin \gamma' & \sin \alpha' \sin \beta' \\ \cos \gamma' \sin \alpha' + \cos \alpha' \cos \beta' \sin \gamma' & \cos \alpha' \cos \beta' \cos \gamma' - \sin \alpha' \sin \gamma' & -\cos \alpha' \sin \beta' \\ \sin \beta' \sin \gamma' & \cos \gamma' \sin \beta' & \cos \beta' \end{bmatrix},$$

$\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  分别表示绕  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴的旋转角度。

3. 由几何关系,  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 2$ 。

4.  $|A_1 \vec{O}_1| = |B_1 \vec{O}_1| = R$ , 相距  $f$  已知, 则

$$|A_1 \vec{O}_1| = |O' \vec{O}_1| \tan \theta = \frac{z'_{e0}}{\cos \gamma} \tan \theta = R,$$

$$|B_1 \vec{O}_1| = z'_{e0} \tan(\gamma + \phi) - |O' \vec{O}_1| \sin \gamma = z'_{e0} \tan(\gamma + \phi) - \frac{z'_{e0}}{\cos \gamma} \sin \gamma = R.$$

5. 由1和4中方程组成超越方程组, 采用搜索法求解, 对  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$ 、 $\theta$ 、 $\alpha'$ 、 $\beta'$ 、 $\gamma'$  在各自可能的范围内进行搜索, (5)-(13)中  $l$ 、 $m$ 、 $n$ 、 $p$ 、 $q$ 、 $r$ 、 $s$ 、 $t$ 、 $u$  用它们表示,  $f$  已知, 使(2.1)-(2.8)所有等式  $\sum (\text{左边} - \text{右边})^2$  最小, 搜索中可逐步细化搜索步长, 减小搜索域, 逼近结果。

6. 最后  $a = \frac{q_1 l_1 - m_1 p_1}{k_1 p_1 - n_1 l_1}$ ,  $b = \frac{m_1 n_1 - k_1 q_1}{k_1 p_1 - n_1 l_1}$ 。其中  $k_1 = r_2 \cos \gamma - r_7 \cos \alpha$ ,  $l_1 = r_2 \cos \gamma - r_8 \cos \alpha$ ,  $m_1 = (r_3 \cos \gamma - r_9 \cos \alpha)f$ ,  $n_1 = r_4 \cos \gamma - r_7 \cos \beta$ ,  $p_1 = r_5 \cos \gamma - r_8 \cos \beta$ ,  $q_1 = (r_6 \cos \gamma - r_9 \cos \beta)f$  求解结果为  $A(-187.7, 194.4)$ ,  $B(-87.7, 185.3)$ ,  $C(127.9, 171.0)$ ,  $D(71.2, -117.8)$ ,  $E(-226.9, -118.7)$ , 其中旋转矩阵

$$R = \begin{bmatrix} -0.138976 & 0.912863 & 0.383883 \\ 0.955127 & 0.021171 & 0.295438 \\ 0.261567 & 0.407716 & -0.874843 \end{bmatrix}, \quad \text{平移向量 } t = \begin{bmatrix} -130.71 \\ -184.29 \\ 1402.23 \end{bmatrix} \quad (\text{单位: mm}).$$

### 5.3.2 考虑畸变因素求解

如果加入畸变因素则需修正上述结果。

在所给的照片上做  $AC$  位于正方形外的公切线, 与  $B$  相交, 这说明发生了枕形畸变。由圆  $B$  突出的部分的尺度和  $B$  的位置估算  $k = 1 + 4 \times 10^{-3}$ 。实际应用时应以一标准图在不同位置不同角度大量拍照, 对比照片与实物得到畸变系数。

对原结果修正后的结果为:  $A(186.9, 193.6)$ ,  $B(-87.4, 184.5)$ ,  $C(127.4, 170.4)$ ,  $D(70.9, -117.4)$ ,  $E(-226.0, -118.3)$ 。旋转矩阵

$$R = \begin{bmatrix} -0.151515 & 0.920495 & 0.360184 \\ 0.941571 & 0.023512 & 0.335992 \\ 0.300810 & 0.390047 & -0.870274 \end{bmatrix}, \quad \text{平移向量 } t = \begin{bmatrix} -131.83 \\ -184.41 \\ 1382.87 \end{bmatrix} \quad (\text{单位: mm}).$$

### 5.4 模型二的评价

本模型建立了两个坐标系, 从机理出发进行了实物与像之间坐标的推导, 得到了相应的映射函数。相对模型一, 坐标系减少, 图形更加直观。加入畸变因素后也可以修正结果。但是中间变量太多, 推导过程太过复杂, 方程组形式复杂。

## 6 特殊解法

假设 光学系统是针孔透视投影系统, 不考虑畸变。

引理 如果两圆经过透视投影后的相为椭圆, 则两圆的公切线在相中仍然为公切线。采用以下步骤求解圆心坐标 (见图 2)。

1. 利用 matlab 读入相片, 拟合得到 5 个椭圆的解析方程。
2. 由定理得, 圆  $ABC$  位于正方形外的公切线经过透视投影后仍为椭圆的公切线。
3. 设出切线方程, 与椭圆方程联立, 依次求出  $I_1$ - $I_5$  相应的切点  $A$ 、 $B \cdots L$  坐标。
4. 联结  $AG$ 、 $ID$  交于  $O_1$ 。因为原图像中  $AO_1G$  的原像共线, 由引理, 相片中  $AO_1G$  共线。同理,  $IO_1D$  共线。原像中交点为圆心, 所以  $O_1$  为圆心的像。由切点坐标求出  $AG$ 、 $ID$  方程, 联立可得  $O_1$  坐标。
5. 类似地,  $O_2, O_3, O_4, O_5$  为圆心的像, 其坐标均可求出。求解结果为:  $A(-188.9, 194.1)$ ,  $B(-88.9, 186.6)$ ,  $C(127.9, 170.3)$ ,  $D(70.9, -119.4)$ ,  $E(-227.1, -118.0)$ 。

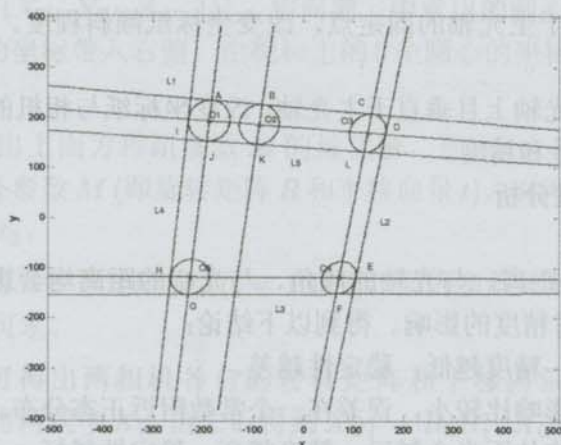


图 2: 特殊解法图

## 三、模型精度和稳定性的检验与检验方法稳定性分析

通过实验对模型进行检验。下面给出检验实验的实验环境、模型检验实验方案的设计、通过实验的结果对模型精度和稳定性的分析、检验方法的合理性、稳健性分析。并在附件中给出实验数据。

## 7 检验方法

### 7.1 实验环境

试验仪器: 分光仪、光导轨、松下 TZ3 相机、刻度尺、靶标。靶标竖直放立在水平分光仪上, 照相机和分光仪在光导轨上运动, 刻度尺可以测量两者距离, 分光仪转动可以读出偏转的角度。松下 TZ3 相机参数: 焦距 5mm, 分辨率  $1280 \times 960$ 。

### 7.2 模型检验方法设计

#### 7.2.1 精度、误差定义以及理论分析

1. 取一坐标纸并固定, 以坐标纸上的原点、 $x$  轴、 $y$  轴为原点、 $x$  轴、 $y$  轴, 以垂直坐标纸方向为  $z$  轴, 建立世界坐标系。



2. 用相机对坐标纸拍照。在照片中建立坐标系,以照片中心为原点,照片平面上两垂直方向为  $x$  轴、 $y$  轴。由模型一得

$$\begin{pmatrix} u & v & 1 \end{pmatrix}^T = M \begin{pmatrix} X_W & Y_W & Z_W & 1 \end{pmatrix}^T, \quad (15)$$

$M$  为  $3 \times 4$  矩阵,  $M = (a_{ij})_{3 \times 4}$ 。

3. 在坐标纸和照片中取对应的 60 个点 (不含坐标纸原点), 带入 (15) 式中, 运用最小二乘法拟合得矩阵。

4. 取坐标纸原点带入 (15) 式右边, 计算左边得  $(u', v', b')^T$ 。

5. 在相片中取坐标纸标记的原点  $(u, v, 1)^T$ , 用  $\lambda = |(u', v', b')^T - (u, v, 1)^T|$  表示误差, 用相对误差  $1 - \frac{f}{|(u, v, 1)^T|}$  表示精度, 坐标纸该状态下的误差, 误差越大精度越小。

### 7.2.2 实验步骤

1. 控制坐标纸垂直于主光轴、坐标纸在照相机坐标系  $z$  坐标不变, 改变坐标纸与光轴距离由 0 至 50cm。每 5cm 拍照一次, 计算误差和精度。

2. 控制坐标纸原点位于主光轴的固定点, 改变坐标纸倾斜程度。由  $0^\circ$  到  $90^\circ$  每  $5^\circ$  拍照一次。计算误差和精度。

3. 坐标纸原点位于主光轴上且垂直于主光轴, 改变坐标纸与相机的距离, 由 40cm 到 100cm 每 5cm 拍照一次。计算误差和精度。

## 7.3 模型精度和稳定性分析

### 7.3.1 $R$ 、 $t$ 的影响

考虑到坐标纸与光轴的距离、与光轴的倾角、与光心的距离均会影响计算的精度, 故采用控制变量法分别研究三者对精度的影响。得到以下结论:

1. 靶标距离光轴越远, 精度越低, 稳定性越差。
2. 倾斜程度对精度的影响比较小, 误差在一个常数附近正态分布。
3. 在分辨率范围内, 物体距光心越远, 精度越高, 稳定性越好。

综上所述, 如果要对相机进行定位, 首先应该选择距离光轴近、与光轴夹角小且与光心距离适中的图形进行定位; 照相摄影时也应尽量使照片中的主要事物位于此位置。

### 7.3.2 畸变对模型精度和稳定性的影响

$\bar{x} = x(1 + k_1\rho^2)$ 、 $\bar{y} = y(1 + k_2\rho^2)$ , 则灵敏度为:  $\frac{\partial \bar{x}}{\partial k_2} / \frac{\bar{x}}{k_2} = \frac{k_2\rho^2}{1+k_2\rho^2}$ ,  $\frac{\partial \bar{y}}{\partial k_2} / \frac{\bar{y}}{k_2} = \frac{k_2\rho^2}{1+k_2\rho^2}$ 。畸变越明显对坐标的影响越显著, 离光轴距离越远对坐标的影响越显著。而  $\Delta x = \bar{x} - x = xk_1\rho^2$ ,  $\Delta y = \bar{y} - y = yk_2\rho^2$ 。误差随畸变参数线性增大。所以畸变越大精度越小, 稳定性越低。

## 7.4 检验方法的稳定性分析

作为衡量模型精度以及稳定性的检验方法, 它本身的稳定性是很重要的。因此, 我们对检验方法进行考察, 分析检验方法的稳定性。本文对检验方法进行了  $n$  重 Bernoulli 实验, 测试其稳定性。实验思想是利用控制变量法分析影响模型精度的三个试验因素: 相机与靶标距离、靶标距相机主光轴距离、靶标平面与相机主光轴夹角, 对每种控制方案进行 20 次独立重复试验, 计算出三种控制方案下最后投影点在像坐标系中坐标, 分别求出其横、纵坐标的方差  $\delta_i$ , 其中  $i$  表示相机与靶标相对位置关系 (共三个) 对方差的影响程度。经实验得:

1. 方差随相机主光轴与靶标平面夹角 ( $0^\circ$  至  $90^\circ$ ) 的增大而减小。
2. 方差随相机与靶标距离 (保持在分辨率允许范围内) 的增大而减小。
3. 方差随靶标离相机主光轴距离的增大而减小由实验得出我们检验方法的稳定性 (由方差体现) 的变化规律, 总体来讲, 稳定性在相机与靶标相对位置较正常 (即处于正前方附

近, 在像素要求距离范围内) 最好, 随相对位置的变化, 稳定性有所降低, 但波动幅度 (方差) 在 0.05 内, 可以接受。

## 四、双目立体视觉系统参数标定—双目相对位置确定

### 8 相机相对定位法

#### 8.1 模型建立及求解

如果用两个相机同时观察同一空间立体对象 (题给靶标), 首先可以用前面第一问中单一摄像机的标定方法得出两个相机坐标系与世界坐标系的相对位置关系参数  $R$  和  $t$ 。步骤如下。

1. 建立世界坐标系: 同模型一, 设原点为靶标中心, 垂直靶标面为  $z$  轴。

2. 由  $(u, v, 1)^T = M(X_W, Y_W, Z_W, 1)^T$ , 将问题二中求出的圆心带入左侧, 靶标中对应圆的圆心在世界坐标系中的坐标带入右侧。由靶标上的 5 个圆心的坐标与它们的相点坐标, 建立方程组。

3. 用最小二乘法求出上面方程组参数  $M$  的最优解, 而  $M = M_1 M_2$ , 内参数矩阵  $M_1$  已知, 即可得出了相机的外参数  $M$  (即旋转矩阵  $R$  和平移向量  $t$ )。对两个相机分别运用上述方法得两个相机的  $R_1, R_2, t_1, t_2$ 。

4. 由 3 可得出各自的外参数矩阵  $M_{i2} (i = 1 \text{ 或 } 2)$ , 而内参数矩阵  $M_{i1} (i = 1 \text{ 或 } 2)$  已知。故两相机的投影矩阵  $M$  均可求。

由上面的分析, 即可得出两相机各自的转移矩阵和平移向量。故有  $X_{C1} = R_1 X_W + t_1$ ,  $X_{C2} = R_2 X_W + t_2$  将两式中  $X_W$  消去后得到  $X_{C1} = R_1 R_1^{-1} X_{C2} + t_1 - R_1 R_2^{-1} t_2$ 。记  $R = R_1 R_2^{-1}$ ,  $t = t_1 - R_1 R_2^{-1} t_2$ , 则双相机的相对几何位置  $R$  和  $t$  可有上式计算。即解决了双相机相对位置的问题。

#### 8.2 模型的验证

由题给的数据进行计算得出, 题中所给的照片的旋转矩阵和位移向量为

$$R = \begin{bmatrix} -0.149583 & 0.922602 & 0.355572 \\ 0.943758 & 0.025979 & 0.294865 \\ 0.294865 & 0.384879 & -0.874599 \end{bmatrix}, \quad t = \begin{bmatrix} -132.59 \\ -185.65 \\ 1320.57 \end{bmatrix} \text{ (单位: mm)}.$$

用 matlab 拟合三维立体图, 如图 3 所示。下面我们自己设置测试数据进行相机的定标实验, 基于实验结果相机二到相机一的旋转矩阵和位移向量为

$$R = R_1 R_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0.7233 & -0.0580 & -0.6881 \\ 0.1790 & 0.9782 & 0.1057 \\ 0.6669 & -0.1996 & 0.7179 \end{bmatrix},$$

$t = t_1 - R_1 R_2^{-1} t_2 = [812.07 \quad -19.33 \quad 466.94]^T$ 。示意图如图 4。



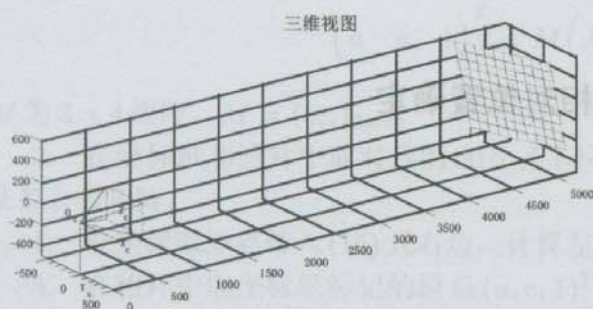


图3: 题给照片标定

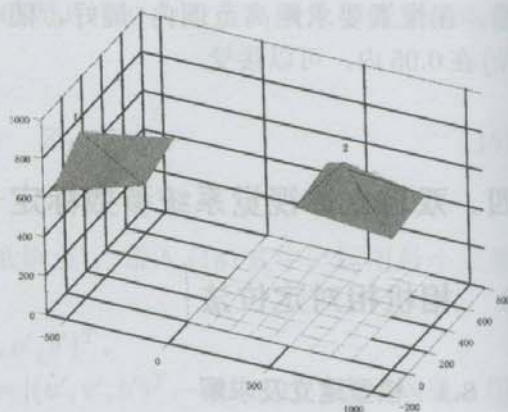


图4: 双目标定

### 8.3 模型评价与分析

模型的核心思想是利用第一问建立的模型二中单个相机的旋转矩阵  $R$  和平移向量  $t$  的求解方法, 将两相机相对位置的求解转化为各自对世界坐标系的外参数矩阵的求解 ( $R_i$  和  $t_i$ ,  $i = 1, 2$ )。最终解决了双目测量系统中系统标定的问题。解决过程清晰、简单易行, 且通过试验验证了其精度与稳定性。

#### 参考文献:

- [1] 张广军. 机器视觉[M]. 北京: 科学出版社, 2005
- [2] 郑毅, 刘上乾. 利用直线特征的定标图像非线性畸变校正[J]. 仪器仪表学报, 2007, 6

## Location of the Center of Circle in Perspective Projection and Binocular Calibration

CAO Yang, WU Wen-fei, ZHANG Yuan-yang

Advisor: PENG Lin-ping

(Beihang University, Beijing 100191)

**Abstract:** The problem is a typical issue of camera systematic calibration. In problem one, we establish a discrete model and a continuous model based on the traditional linear pinhole projection model, and provide the solutions to get the coordinates of the centers for every circles. In problem two, by using the Canny edge operator, we get information of the image, and get the coordinates of five centers. We also provide a special method to solve this problem based on the properties that common tangents on a plane remain in the perspective projection. In problem three, through experiments, we study the influence of different factors to the accuracy and stability of the model. In problem four, based on the problem one, we get the parameters of two cameras and establish the model of relations between two cameras.

**Keywords:** camera calibration; coordinate system transformation; perspective projection; distortion