

## 2009 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

[默认分类](#) 2009-09-25 21:41:02 阅读 208 评论 12 字号：大中小 订阅

### 承 诺 书

我们仔细阅读了中国大学生数学建模竞赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。

如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们参赛选择的题号是（从 A/B/C/D 中选择一项填写）：       C        
      题      

我们的参赛报名号为（如果赛区设置报名号的话）：                     

所属学校（请填写完整的全名）：       贵州省毕节学院      

参赛队员（打印并签名）： 1.       陈文亭

2. 高显国

3. 宋维

指导教师或指导教师组负责人 (打印并签名): \_\_\_\_\_

日期: \_\_\_\_\_

年\_\_\_\_月\_\_\_\_日

赛区评阅编号 (由赛区组委会评阅前进行编号):

## 2009 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

编号专用页

赛区评阅编号（由赛区组委会评阅前进行编号）：

赛区评阅记录（可供赛区评阅时使用）：

[illegible]

全国统一编号（由赛区组委会送交全国前编号）：

全国评阅编号（由全国组委会评阅前进行编号）：

## 卫星和飞船的跟踪测控模型

### 摘要

本文建立卫星或飞船全程跟踪测控方案的模型，通过图解法，分析法，利用天文知识，地理知识和物理知识对该模型进行求解。要对卫星和飞船的发射和运行过程进行跟踪测控，就要分为两种情况，一是不考虑地球自转，二是考虑地球自转时，联系实际情况，建立合理数学模型，最终计算出结果。

对于问题 1，假设地球是静止的，我们根据两个测控站之间的地心角和正弦定理，计算出最少所需的测控站个数  $N = \lceil 360^\circ / \alpha \rceil + 1$ 。

对于问题 2，由于地球是自转的，所以卫星或飞船在运行过程相继两圈不能回到同一点，我们首先引入星下点轨迹，根据星下点轨道为“8”字形的封闭曲线，得出测控站也应该建立在“8”字形的封闭曲线上，即是卫星或飞船投影在地球上的轨迹，根据星下点轨迹的方程为： $\varphi = \arcsin[\sin i \cdot \sin(\omega st)]$ ，

$\lambda = \Omega_0 + \arctg[\cos i \cdot \tg(\omega st)] - \omega st(2)$ ，再结合天体运动知识，计算出至少需要 一个才能达到全程跟踪的目的

对于问题 3，我们收集的是我国的“神舟七号”飞船的资料，“神七”在全球一共有 16 个测控站，由 11 站和 6 船组成，我们从中选择其中几个测控站作为研究对象，最后结果结合第一，二问的方程得出每个站的测控范围。

关键词：分析法 全球跟踪测控 星下点轨迹 “8”字形 地心角

## 一、问题重述

要对卫星和飞船发射及运行过程中理想状况下完全跟踪与测控，由于测控设备只能观测到该点所在切面上的空域，且与地面夹角在 3 度范围内测控效果不好，所以每个测控站是考虑与地面夹角 3 度以上的空域。一个卫星或飞船在发射与运行的过程中，往往需要多个测控站联合完成任务，如神舟七号发射和运行过程中的测控站的位置。要研究的问题：

(1) 在所有测控站都与卫星或飞船的运行轨道共面的情况下至少应该建立多少个测控站才能对其进行全程跟踪测控。

(2) 如果一个卫星或飞船的运行轨道与地球赤道平面有固定的夹角，且在离地面高度为  $H$  的球面  $S$  上运行。考虑到地球自转时该卫星或飞船在运行过程中相继两圈的经度有一些差异，至少该建立多少个测控站才能对该卫星或飞船可能飞行的区域全部覆盖以达到全程跟踪测控的目的。

(3) 收集我国一个卫星或飞船的运行资料和发射时测控站点的分布信息，分析这些测控站点对该卫星所能测控的范围。

## 二、模型的假设

模型的假设

(1) 卫星和飞船进入太空作的是匀速圆周运动。

(2) 两个测控站测控的范围的交界处至少有一个测控站能进行完全测控。

(3) 不考虑外界环境的影响，测控期间每个测控站不会出现故障。

(4) 在地球表面上，每个测控站与卫星或飞船运行的轨道高度是相等的，且卫星或飞船经过每个测控站的弧长近似等于该测控范围圆的直径。

## 三、问题的分析

对于问题 1，要求所有测控站都与卫星或飞船的运行轨道共面的情况下，分析至少应该建立多少个测控站才能对卫星或飞船进行全程跟踪测控，这是一种理想化的条件，因此我们在不考虑地球自转的情况下，近似把地球看成是标准的球体，把卫星或飞船的运行轨道看成是圆周，况且假设它们都是做匀速圆周运动，通过假定两相邻两测控站的分析及题设条件，运用正弦定理和相关的物理知识，便可求出两个测控站在地心的等效地心角  $\alpha$ ，从而就能求得至少所需的测站点  $N = [360^\circ / \alpha] + 1$ 。

对于问题 2，由于要考虑到地球自转时该卫星或飞船在运行过程中相继两圈的经度的变化，对此我们首先从简单问题入手，先假设地球不自转时，求出卫星运行时在地球上的星下点轨迹，分析其图象，并再次考虑地球自转时卫星或飞船的运行情况，进而求出卫星和飞船在地球上的星下点轨迹，其方程为：

$$\varphi = \arcsin[\sin i \cdot \sin(\omega st)]$$

$$\lambda = \Omega_0 + \arctg[\cos i \cdot \tan(\omega + \sigma)] - \omega t \quad (2)$$

其中  $i$  为轨道倾角;  $\omega$  为卫星绕地球转动的角速度;  $t$  为时间, 从升节点开始算起;  $\lambda$ 、 $\varphi$  为卫星星下点的经度和纬度;  $\Omega_0$  为升节点位置, 从而用几何、物理、地理知识得出卫星或飞船在地球上的轨迹图从整个地球表面看是一个“8”字图形, 通过对此图的分析 and 求解, 最后得出设置站点的最优方案。

对于问题 3, 它要求我们收集中国的一个卫星或飞船的运行资料和发射时测控站点的分布信息, 分析这些测控站点对该卫星所能测控的范围, 对此我们收集了“神七”卫星的运行资料和发射时测控站点的分布信息, 查出了卫星发射时各个测控点经度和纬度的数值, 根据测控点的坐标为:  $X = R \cos \varphi \cos \lambda$ ,  $Y = R \cos \varphi \sin \lambda$ ,  $Z = R \sin \varphi$  就可以算出各个测控点测控的范围。

## 四、模型建立与求解

### 问题 1

由于监控站数目跟卫星距离地点的高度, 监控站的有效视角, 地球半径等因素有关。共面时, 有效监控应保证卫星或飞船在两个监控点的有效监控视角的交点上, 不妨设:  $B$ 、 $C$  表示两个相邻的监控点,  $a$  表示两个测控点的地心角,  $R$  表示地球半径、 $H$  表示卫星高度,  $G$  为万有引力常量,  $M$ 、 $m$  分别为地球和卫星或飞船的质量。此时, 每个监控站有效监控视角  $180^\circ - 6^\circ = 174^\circ$ , 角度用角度制表示, 如下图:

图 1

由图得

$$\angle ABO = 90^\circ + 3^\circ = 93^\circ$$

$$\angle BAO = 180^\circ - \angle ABO -$$

由正弦定理

$$=$$

即

所以

$$87^\circ - \quad =$$

$$a = \text{-----}(1)$$

万有引力提供卫星运动所需的向心力：

得：

$$\text{-----}(2)$$

至少所需测控站数：

$$N = \text{-----}(3)$$

要使得卫星或飞船绕地球作匀速圆周运动时需要测控站数最少，即达到最大高度  $H$ ，但是如果高度  $H$  超过第二宇宙速度 ( $v=11.2\text{km/s}$ ) 时的高度，卫星或飞船就不能围绕地球作匀速圆周运动，即高度刚好等于第二宇宙速度时的高度，需要的测控站最少。

解得：

$$N=3$$

## 问题 2

地球自转时该卫星或飞船在运行过程中相继两圈的经度有一些差异，这样就使得卫星在地球上的投影轨迹不停的移动，画出了一条轨迹，就叫星下点轨迹，所以最基本的是对星下点轨迹的确定，无旋地球上的星下点轨迹为球面上的闭合曲线,即每圈重复相同的星下点轨迹。

其公式为：

$$\varphi = \arcsin[\sin i \cdot \sin u]$$

$$\lambda = \Omega_0 + \arctg[\cos i \cdot \tan u] \quad (1)$$

其中  $i$  及  $u$  为轨道倾角及相位角;  $\lambda$ 、 $\varphi$  为卫星星下点的经度和纬度;  $\Omega_0$  为升节点位置。在惯性空间中观测卫星与地球运动时可知,卫星轨道面保持不变,卫星在轨道上以绝对角速度旋转,其方向与卫星的动量矩矢量方向一致,而地球绕自转轴以角速度旋转。因此,根据卫星相对于旋转地球的角速度,经过积分计算可得卫星在旋转地球上的星下点轨迹方程为:

$$\varphi = \arcsin[\sin i \cdot \sin(\omega_s t)]$$

$$\lambda = \Omega_0 + \arctg[\cos i \cdot \tg(\omega_s t)] - \omega_s t \quad (2)$$

图 1 卫星星下点轨迹( $H=10354.3\text{km}$ )其中  $i$  为轨道倾角; $\omega_s$  为卫星绕地球转动的角速度; $t$  为时间,从升节点开始算起; $\lambda$ 、 $\varphi$  为卫星星下点的经度和纬度; $\Omega_0$  为升节点位置。利用上面的公式计算轨道高度为  $10354.3\text{km}$ ,轨道倾角为  $40.77892^\circ$  的卫星轨道星下点轨迹如图 1 所示

根据上图, 8 字形的封闭曲线, 现只考虑该 8 字封闭曲线的 1/4, 可以转化成下图来求解

设卫星或飞船速度为  $V$ , 周期为  $T$ , 地球自转速度为  $v_1$ ,  $M$ 、 $m$  分别为地球和卫星或飞船的质量, 地球上重力加速度为  $g$ ,  $R$  为地球半径,  $G$  为万有引力常量, 卫星或飞船距地面的高度为  $H$ , 所以

$$\dots\dots\dots(1)$$

由公式:

$$\dots\dots\dots(2)$$

$$\dots\dots\dots(3)$$

由 (1) (2) (3)

解得:

又由:



得：

在图 3 中 CB 的长为：

$$CB=H\times\tan 87^{\circ}, AB=2\times CB$$

卫星或飞船近似看成是通过圆 ACB 的圆心，所以卫星或飞船通过的路程可以看成是圆 ABC 的直径，即路程  $L=AB$ 。

$$AB=2H\times\tan 87^{\circ}$$

卫星或飞船通过该路程所需要的时间为

$$\text{通过 } 90^{\circ} \text{ 圆心角的时间为： } \frac{1}{4}\times T$$

所以需要的测控站：

当卫星或飞船高度为第二宇宙速度  $V=11.2\text{Km/s}$  时的高度：代人数据解得：

$$N=9$$

### 问题 3

我们收集了神舟七号的运行资料和发射时测控站的分布信息。

神舟七号轨道高度  $h$  约：**335km**

神舟七号线速度  $v$  约：**7.7km/s**

由于地球的平均半径  $r$  为 6371.004 千米

根据  $t=2\pi (r+h) / v$

可知绕地球一圈需 **90** 分钟左右。神舟七号在天飞行总时间为 **68** 小时 **27** 分 **35** 秒，共绕地球飞行 **45** 圈。

神发射时测控站的分布负责火箭和飞船升上天时的航道测量，测控网络覆盖率可以达到 **100%**，发射时测控站点的位置分别在：

- 第一个是新疆的喀什

- 第二个是渭南站，在西安附近。
- 第三个是青岛站，在青岛
- 第四个在西边第一个是东风站，就是在发射场
- 第五个是厦门站，在厦门

要分析发射时这些测控点对卫星所能测控的范围。根据第（2）问可知，

在惯性空间中观测卫星与地球运动时可知,卫星轨道面保持不变,卫星在轨道上以绝对角速度旋转,其方向与卫星的动量矩矢量方向一致,而地球绕自转轴以角速度旋转。因此,根据卫星相对于旋转地球的角速度,经过积分计算可得卫星在旋转地球上的星下点轨迹方程为:

$$\varphi = \arcsin[\sin i \cdot \sin(\omega t)]$$

$$\lambda = \Omega t + \arctg[\cos i \cdot \tan(\omega t)] - \omega t \quad (1)$$

由以上星下点轨迹方程,可以知道任意时刻已知星座中任意卫星所在位置,然后计算测控站可视大圆在地球表面的投影,进一步通过方程

$$X = R \cos \varphi \cos \lambda$$

$$Y = R \cos \varphi \sin \lambda$$

$$Z = R \sin \varphi \quad (2)$$

(式中  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$  分别为地球圆球面的坐标,  $\lambda$ 、 $\varphi$  为卫星星下点的经度和纬度)可以计算出星下点轨迹与可视大圆在地面投影的笛卡耳坐标,分别计算他们到测控站之间的弦长,如果星下点轨迹的弦长等于可视大圆在地面投影的弦长,则说明卫星刚好在测控站可视最大范围内。

根据问题（1）解得：

$$a =$$

设  $b$  为星下点轨迹对应的弦长：

$$b = R \times \sin(a/2)$$

根据问题（2）解得：

$$\angle AOB = v_1 \times L / R \times V$$

可视大圆在地面投影的弦长为：

$$c = R \times \cot(a/2)$$

即根据测控点的经度和纬度坐标，可计算出弦长  $b$  和  $c$  的长度，此时，若：

$b > c$ , 则可视角为  $a$ , 若  $c \geq b$ , 可视角为  $\angle AOB$ , 此时可视角就是可视范围。

## 五、模型评价

优点:

- 1、该模型能直观地描述卫星或飞船环绕地球的运动轨迹;
- 2、模型与真实, 符合实际。使我们能更进一步对卫星或飞船环绕地球运动轨迹的了解。

缺点:

- 1、该模型引进的未知数和参数很多, 数据量大, 不易计算 ;
- 2、该模型中, 卫星或飞船在每个测控范围内运动轨迹看成是一条直线, 与实际路线不相等, 所以存在一定的误差。

## 六、参考文献

- [1] 刘南, 行星地球概观, 北京: 高等教育出版社, 2007。
- [2] 易照华等, 天体力学引论, 北京: 科学出版社, 1978。
- [3] 刘步林, 数学在天体学中的运用, 北京: 科学出版社, 1979。