

交巡警服务平台的设置与调度

摘要

由于警务资源是有限的，如何根据城市的实际情况与需求合理地设置交巡警服务平台、分配各平台的管辖范围、调度警务资源是警务部门面临的一个实际课题。本文针对不同情况下的不同目标要求，提供了帮助解决这一课题的一些最优化方案。我们主要完成的工作有：

对问题一的第 1 问，Floyd 算法为 A 区 20 个交巡警平台合理分配了管辖范围。

对第 2 问，建立网络流模型进行警力与交通要道的匹配，用二分时间的方法求得封锁 A 区的最短时间为 8.0157 分钟。此外，给出了最快封锁情况下警力调度的方案。

对第 3 问，建立以最长出警时间及工作量均衡度为目标的双目标规划模型并采用宽容分层序列法求解，第二步优化时利用模拟退火算法求近似解。最终确定为 A 区增加 4 个平台，位置分别为 28, 40, 48, 91 号节点。

对问题二的第 1 问，分城区考虑平台设置方案的合理性。建立综合评价模型，提出出警时间达标率、平均超出时间以及平均工作量这三个评价指标，用夹角余弦法确定指标的权重。经求解比较后，认为 A,B 两区的平台设置方案相对合理，其余四区的方案相对不合理，其中 D,E 两区主要是位置安排不合理，C,F 两区主要是警力不足。针对不合理各区的特定原因，我们给出了相应的有效解决方案。

对第 2 问，分步建立了围堵模型和搜捕模型。针对围堵模型，使用网络流的方法求解，得到嫌犯不同的最大车速下的不同围堵方案。当嫌犯的最大车速在 90km/h 以内时，我们通过适当的警力调度都可以将他围堵在市内。在搜捕模型中，采用逐步缩小包围圈的方法，在邻点度约束和连通性约束的条件下采用基于准备时间的贪心调整法，在一小时内抓获嫌犯。

关键词：网络流模型 双目标规划模型 模拟退火算法 综合评价模型 夹角余弦法

目录

一、问题重述.....	3
二、模型假设.....	3
三、符号说明.....	3
四、问题一的模型.....	3
4.1 初步建模及数据预处理.....	3
4.2 管辖范围的分配.....	4
4.3 封锁方案的制定.....	4
4.3.1 问题分析.....	4
4.3.2 网络流模型.....	5
4.3.3 模型求解.....	5
4.4 服务平台的增设.....	6
4.4.1 问题分析.....	6
4.4.2 双目标规划模型.....	6
4.4.3 模型求解.....	7
4.4.4 结果分析.....	8
4.4.5 效率分析.....	8
五、问题二的模型.....	9
5.1 全市平台设置的合理性.....	9
5.1.1 问题分析.....	9
5.1.2 综合评价模型.....	9
5.1.3 模型求解.....	10
5.1.4 结果分析.....	11
5.1.5 解决方案.....	11
5.2 抓捕犯罪嫌疑人.....	12
5.2.1 问题分析.....	12
5.2.2 围堵模型.....	12
5.2.3 搜捕模型.....	14
5.2.4 结果与优缺点分析.....	16
六、参考文献.....	17
七、附录.....	18

一、问题重述

警察肩负着刑事执法、治安管理、交通管理、服务群众四大职能。为了更有效地贯彻实施这些职能，需要在市区的一些交通要道和重要部位设置交巡警服务平台。每个交巡警服务平台的职能和警力配备基本相同。由于警务资源是有限的，如何根据城市的实际情况与需求合理地设置交巡警服务平台、分配各平台的管辖范围、调度警务资源是警务部门面临的一个实际课题。本文希望通过建立数学模型的方式对题中所给情境进行分析研究，从而为警务部门解决这一难题提供一些理论上的参考。这对国家长治久安、社会和谐稳定以及人民幸福安乐都有着长远而重要的意义。

二、模型假设

1. 突发事件都发生在路口节点上；
2. 每个路口只被一个交巡警服务平台管辖；
3. 相邻两个交叉路口之间的道路近似认为是直线；
4. 所有道路都是双向且畅通无阻的，警车由最短路径到达事发地点；
5. 警车以 60km/h 的速度匀速行驶，不考虑车辆的调头、启动、停止时的加减速过程。

三、符号说明

符号	定义
V	图中所有顶点的集合
E	图中所有路线（边）的集合
$G(V, E)$	抽象的整张无向图
$m(i, j)$	从节点 i 到节点 j 的最短距离（时间）
t_{max}	最长出警时间[$=\sup m(i, j)$]
r_i	平台 i 管辖区域内的总发案率

四、问题一的模型

4.1 初步建模及数据预处理

首先，我们将区域地图抽象为图论模型。已知地图上一些点的坐标和它们之间的邻接关系，可以抽象出一个无向图 $G(V, E)$ ，地图上代表交叉路口的点作为无向图中的节点，连接路口的道路作为图中的边，道路长度为边的权值。之后我们对数据做一些预处理，利用 Floyd 算法，计算出图上任意两点间的最短距离矩阵 \mathbf{M} 。在本题中，因为 G 是无向连通图，所以 \mathbf{M} 是对称矩阵，对角线元素全为零，其他元素都是正数。我们用 $m(i, j)$ 表示 \mathbf{M} 中的 i 行 j 列的元素，即 i, j 的最小距离。由于警车的速度为 60km/h，即 1km/min，当长度及时间的单位分别是千米和分钟时， $m(i, j)$ 在数值上等于从平台 i 到路口 j 的最短时间，故我们在后文中也用 $m(i, j)$ 表示从平台 i 到路口 j 的最短时间。

4.2 管辖范围的分配

这一问题要求节点能够尽快从所属的平台到达，在不考虑均衡各平台工作量的情况下（此问题将在下文讨论），只需将各路口分配给离它最近的平台管辖（后文仍将用到，记作算法一）。在平台位置固定的情况下，算法一能够给出 t_{max} 的下界。

问题即为求距离各路口最近的平台，即

$$\min_i m(i, j) \quad \text{对任意路口 } j, \text{ 平台 } i$$

并记录每个路口取最小值时的平台标号。

经 MATLAB 简单模拟，得到各路口所属平台及相应的最短距离（见附录表 1）。从该表中我们可以看出，除标号为 28、29、38、39、61 和 92 的六个点之外，93.5% 的路口都能在 3 分钟内到达。整理结果后，得到各交巡警服务平台管辖路口标号及其总发案率（如表 1）。

表 1：各交巡警服务平台管辖路口标号及其总发案率

平台编号	管辖路口标号	总发案率 r_i (次数)	平台编号	管辖路口编号	总发案率 r_i (次数)
A1	1, 67, 68, 69, 71, 73, 74, 75, 76, 78	10.3	A11	11, 26, 27	4.6
A2	2, 39, 40, 43, 44, 70, 72	9.7	A12	12, 25	4.0
A3	3, 54, 55, 65, 66	5.6	A13	13, 21, 22, 23, 24	8.5
A4	4, 57, 60, 62, 63, 64	6.6	A14	14	2.5
A5	5, 49, 50, 51, 52, 53, 56, 58, 59	9.7	A15	15, 28, 29	4.8
A6	6	2.5	A16	16, 36, 37, 38	5.0
A7	7, 30, 32, 47, 48, 61	9.6	A17	17, 41, 42	5.3
A8	8, 33, 46	5.0	A18	18, 80, 81, 82, 83	6.1
A9	9, 31, 34, 35, 45	8.2	A19	19, 77, 79	3.4
A10	10	1.6	A20	20, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92	11.5

4.3 封锁方案的制定

4.3.1 问题分析

问题要求调度 20 个平台的警力来封锁 A 区的 13 个出口，每个平台的警力只能封锁一个出口，而每个出口也只需要一个平台。由于这种一一对应的关系，很自然地将问题化归为典型的匹配模型。

将每个封锁方案看作一个向量 $(x_1, x_2, \dots, x_{13})$, $x_i \neq x_j$ 。平台 x_i 用来封锁出口 y_i 。优化指标为：

$$\min \max m(x_i, y_i), \quad i=1, \dots, 13$$

像这样定量的匹配模型难以直接求得最优解，需要对问题作进一步转化。考虑先将问题转化为判定性问题，即对于一定的时间限制，能否找到一种匹配方案成功封锁，然后再考虑缩小时间上限，逼近最优解。

4.3.2 网络流模型

在设定了时间阈值后，网络流模型能够很好的应用于判定是否能在该时间内封锁所有路口，网络流模型的流量平衡条件能够保证每个平台只封锁一个路口，而最大流就是最多封锁的路口数。将此算法记为算法二，具体的执行步骤如下：

- Step 1: 从源到所有平台连一条流量上限为 1 的边；
- Step 2: 从所有要封锁的出口向汇连一条流量上限为 1 的边；
- Step 3: 对于任意一对平台和出口，若它们之间的最短时间小于当前的阈值，则从平台向出口连一条流量上限为 1 的边；
- Step 4: 计算模型的最大流；
- Step 5: 若流量等于出口数，则所有出口在规定时间内均被封锁。

举例说明：假设有 3 个平台和 2 个路口（如图 1），选定时间阈值为 10 分钟；在 10 分钟内，平台一的警力能够封锁路口一，平台二和平台三的警力能够封锁路口二。在这种情况下，流量等于出口数，所有出口在规定时间内被封锁。

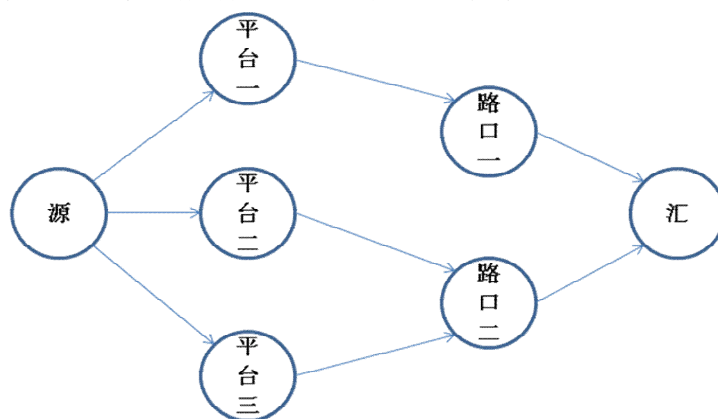


图 1：网络流模型示例

4.3.3 模型求解

采用二分法求解满足条件的最小时间阈值，结果为 8.0157 分钟。与之相对应的警力调度方案如表 2。

表 2：快速封锁警力调度方案

路口标号	12	14	16	21	22	23	24
平台编号	A10	A16	A2	A11	A12	A14	A13
路口标号	28	29	30	38	48	62	
平台编号	A15	A7	A5	A1	A4	A3	

网络流模型的时间复杂度为多项式级别，若采用一般增广路算法，可表达成 $O(|V||E|U)$ ，其中 U 为最大流量。由于题目中的数据量很小，同样可以计算将整个市区封锁的时间为 12.6808 分钟。

4.4 服务平台的增设

4.4.1 问题分析

针对现有交巡警服务平台的工作量不均衡和有些地方出警时间过长的实际情况，需要增设服务平台。换句话说，警务部门在增设平台时，主要考虑优化的两个因素是出警速度和工作量均衡度。分析数据可知，A区的人口密度远远大于同市的其他城区，对出警速度有更高的要求。参考信息得知，我国很多大中城市都对市区发生事故有出警时间的硬指标，故此处出警速度以最长出警时间 t_{max} 衡量；工作量均衡度以所有平台各自管辖区域内总发案率的方差衡量。

4.4.2 双目标规划模型

我们把该问题抽象为通过调整增加平台的具体个数及位置来优化出警速度及工作量均衡度的双目标规划模型。

首先考虑采用评价函数法，在没有调研的情况下，我们选择的评价函数必然带有很大的主观性，故不予采用。再考虑宽容分层序列法，该方法把多个目标按其重要程度排序，先求出第一个目标的最优解，再在达到此目标（有一定宽容值）的条件下求第二个目标的最优解，依此类推直到最后一个目标求解结束即得到最优解，这样的分析范式也符合两种指标的实际情况。

缩短出警时间是警务部门增设服务平台的首要目标，当出警时间被缩短到一定范围内时，我们可以近似地将落在这个范围内的出警时间看作是无差异的。若假设范围上限为 T ，则 $[0, T]$ 内的出警速度都是可以接受的。采用第一小问中的要求，取 $T = 3$ 。在确定增设的平台数量后，枚举所有可能的位置，用算法一求出 t_{max} 的下界。（如图2）其中使得解落在 $[0, 3]$ 内的最小增设平台数为4。

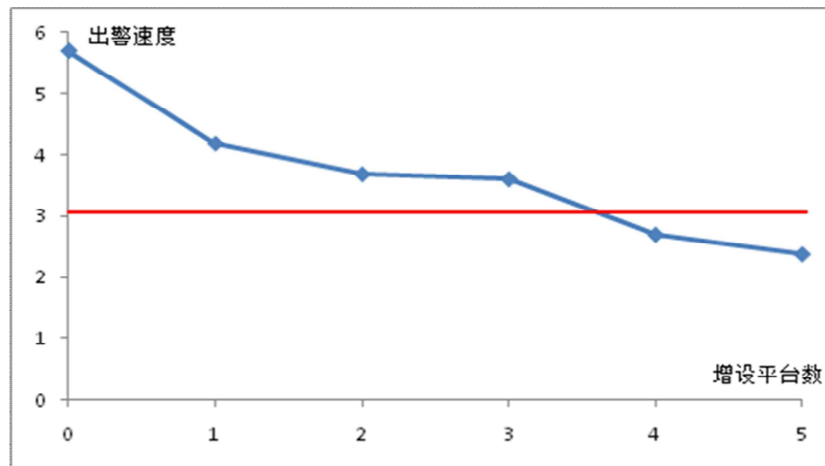


图 2：出警速度与增设平台数的关系

在出警速度最优值小于 T 的条件下，设定一定的宽容值，即并不要求 t_{max} 一定要取最小，只要小于 T 即可。下一步需要调整 4 个新增平台的具体位置来最优化工作量均衡度。假设 $l_{21}, l_{22}, l_{23}, l_{24}$ 为 4 个新增平台的位置， r_i 表示平台 $i (1 \leq i \leq 24)$ 管辖区域内的总发案率， \bar{r} 表示各平台管辖区域内总发案率的平均值，则工作量均衡度的最优化模型可以表示为：

$$\min \frac{\sum_{i=1}^{24} (r_i - \bar{r})^2}{23},$$

$$\text{s.t. } t_{\max} \leq 3.$$

4.4.3 模型求解

假设当前平台位置已经固定，仍需要确定每个节点分别归属哪个平台。由于距离限制，每个节点周围最短距离小于 3 的平台数量不会太多。然而由于未设平台的路口有 72 个，且搜索算法时间复杂度为指数级别，确定性算法在这种问题上难以有好的发挥，转而采用模拟退火算法求近似最优解。

目标函数 E 就设定为工作量均衡度，解的转移采用普遍的 Metropolis 准则：

$$P_{ij}^T = \begin{cases} 1, E(j) \leq E(i) \\ e^{-\frac{E(j)-E(i)}{KT}} = e^{-\frac{\Delta E}{KT}}, \text{其他} \end{cases}$$

在未设平台的 72 个路口中选出 4 个共有 C_{72}^4 种方案，其中满足出警速度宽容范围（3 分钟）的方案有 72 个。由于这道题中模拟退火算法的收敛速度很快，条件允许枚举所有 72 种解，最终得到的最优工作量均衡度为 2.1411，与之对应的新增平台的具体位置为 28, 40, 48 和 91（如图 3）。新增平台后各平台管辖路口标号及总发案率数据见附录表 2。

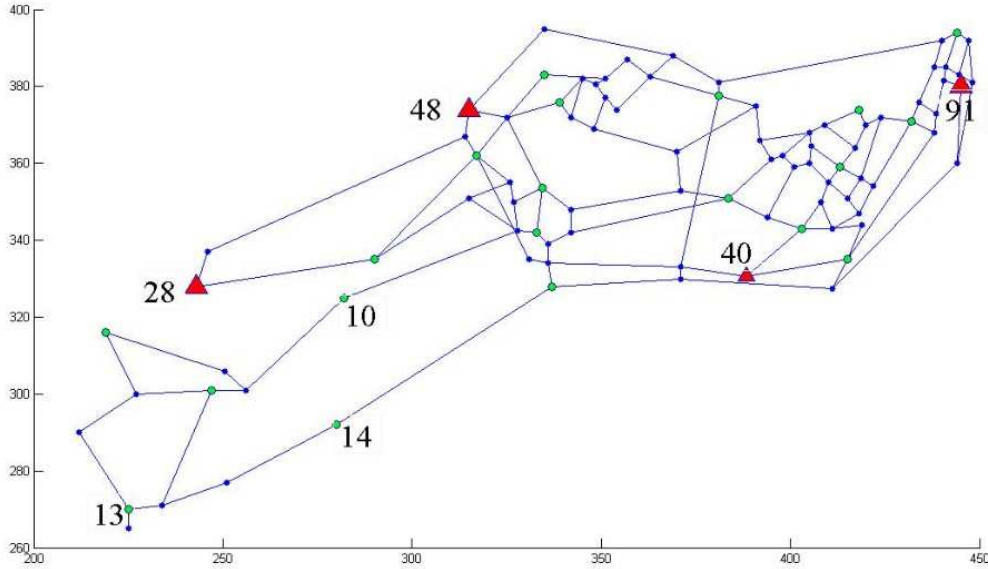


图 3: A 区新增平台位置示意图

4.4.4 结果分析

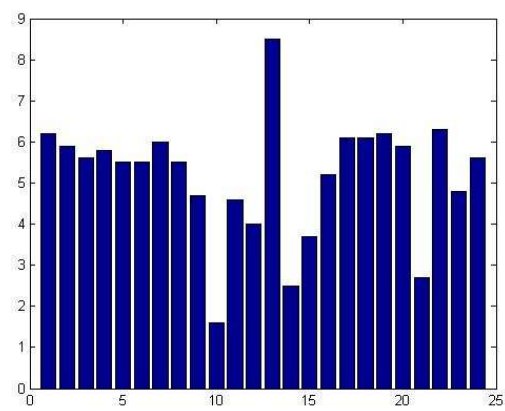


图 4：各平台管辖区域内总发案率

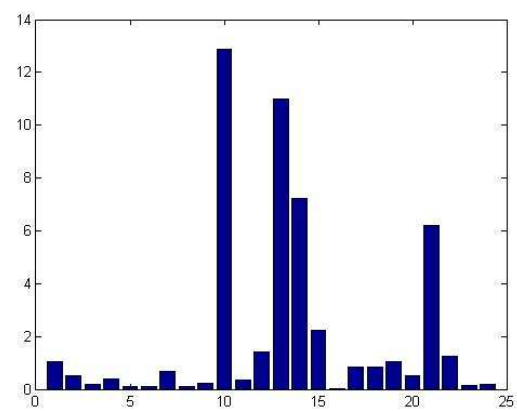


图 5：各平台总发案率对方差的贡献度

从图 5 中可以明显看出有 4 个平台对方差的贡献度较大，分别是 A10，A13，A14 及 A21。其中 A10，A14 和 A21 均因离其他路口较远，管辖的路口数较少导致总发案率偏低，造成不可避免的较大的方差贡献度。A13 的方差贡献度大则是因为它所管辖的路口发案率都较高，在资源条件允许的情况下，可以考虑在附近路口再增设一个平台来减轻 A13 的工作量，具体取舍要依实际情况而定。但我们在 A13 附近搜索第五个平台的位置，总体方差下降并不显著，故我们选择增设四个平台作为最终方案。

4.4.5 效率分析

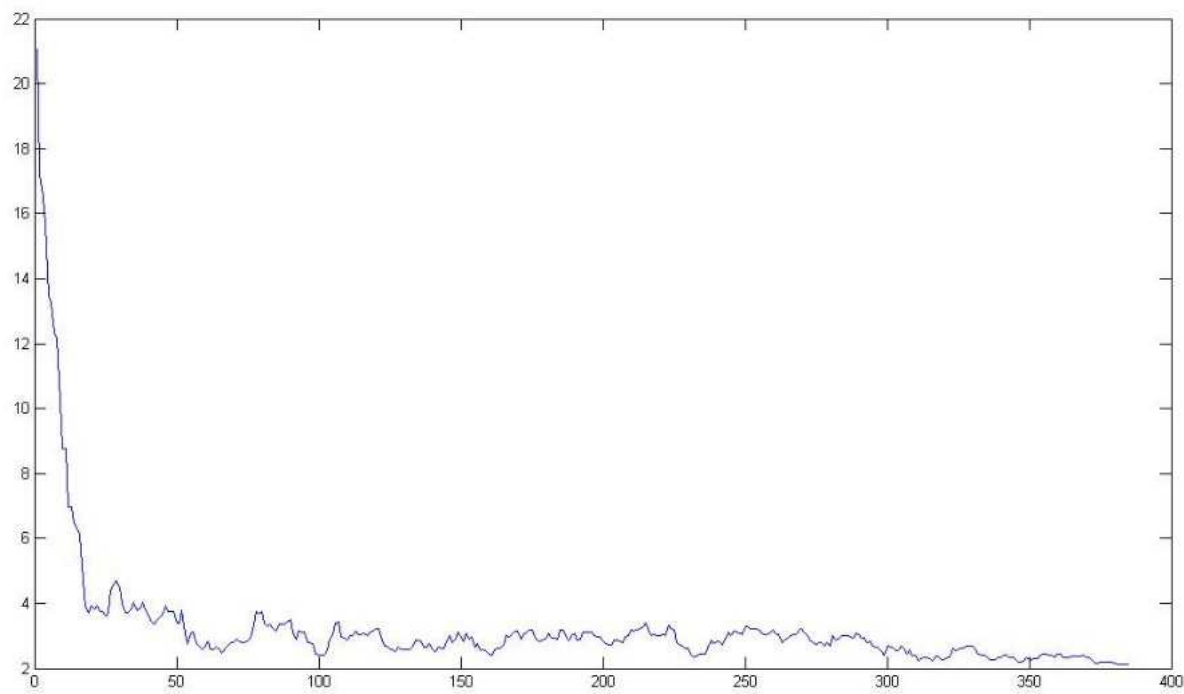


图 6：目标函数适应值曲线

图 6 是模拟退火算法在降温过程中目标函数的变化，算法具有很快的收敛速度，在 500 次迭代内即可稳定，时间复杂度低，可以适应算法三要求的枚举法。

五、问题二的模型

5.1 全市平台设置的合理性

5.1.1 问题分析

根据实际生活经验,如果公共部门出现跨区管理的情况,不仅会造成行政上的混乱,而且不同城区的管理部门之间往往会互相推脱职责最终导致突发事件无法被有效处理。因此,我们可以对该市现有交巡警服务平台设置方案进行分区考虑,即分别关注各区平台设置方案的合理性,如果平台设置显示在区域交界处有过多重复,再考虑平台间的协管或者重新划分区域。

为了定量评估各区平台设置方案的合理性,我们建立了综合评价模型。因为题中并没有给出评价指标的绝对数值让我们来评判方案合理与否,所以需要通过各区之间的综合比较来判定各区方案的相对合理性。

5.1.2 综合评价模型

1) 提出评价指标

从出警速度的角度考虑,假设所有路口均按照算法一匹配到最近的平台,将此时的出警速度作为评判一个区的平台设置在时间上的合理性。

特别注意,通过对六城区基本数据的分析,我们发现 A 区的人口密度远远大于其余五区,突发事件在此造成的影响往往也较大,所以对 A 区采取“零容忍”政策,即最长出警时间必须控制在 3 分钟内;而在市郊,最长出警时间的要求就没有那么严格。但是评判出警速度的基本原则仍然保持一致,即大部分节点应该在某个时间上限范围内由所属平台到达,称这些路口为达标路口。与 A 区单独的评判标准不同的是,允许郊区内存在小部分不达标路口,它们的出警时间超出规定范围。然而,我们要求超出的时间不能过长,否则这些不达标路口将成为执法上的盲点。

根据以上论述,我们提出两个评价指标:

i. 出警时间的达标率 η

出警时间的达标率是指达标路口数占该区总路口数的百分比,一定程度上可以反映该区平台设置的整体合理程度。以 B 区为例,设 B 区总路口数为 N^B , 其中达标路口数为 N_1^B , 不达标路口数为 N_0^B (明显有 $N^B = N_1^B + N_0^B$), 则

$$\eta^B = \frac{N_1^B}{N^B} \times 100\%$$

ii. 平均超出时间 \bar{t}

平均超出时间是指某区不达标路口的出警时间超出规定时间(3 分钟)部分的平均值。以 B 区为例,有

$$\bar{t}^B = \frac{\sum_j [\min_i m(i, j) - 3]}{N_0^B},$$

其中 i 为 B 区任意平台, j 为 B 区任意不达标路口。

平均超出时间越大,该区的平台设置越不合理。

此外，从全市警力工作量均衡的角度考虑，我们提出第三个评价指标：

iii. 平均工作量 \bar{r}

先忽略区域内工作量要平均的要求，取而代之的是区与区之间工作量的平均程度，这样做的根据是区内的平均程度可以容易地通过平台的调整、增加以及算法二的安排来优化。平均工作量是指某区所有平台处理事件数的平均值。以 B 区为例，设 B 区平台数为 n^B ，则

$$\bar{r}^B = \frac{\sum_i r_i^B}{n^B}, i \text{ 为 B 区任意平台}$$

根据各区之间平均工作量的比较结果，可以为工作量大的城区适当增加平台。

2) 确定指标权重

指标权重的合理确定是综合评价结果是否可信的一个核心问题，为了避免主观性因素的影响，我们采用客观赋权法来确定权重。常见的 3 种客观赋权法是变异系数法、夹角余弦法和熵值法，考虑到每个指标的大小是否合理要与该市整体的实际情况相联系，而夹角余弦法很好地满足了这种要求，故采用夹角余弦法。^[2]

具体步骤如下：

Step 1: 求出理想的最佳方案 **R** 和最劣方案 **T**。

Step 2: 计算效益型矩阵 **B** 和相对偏差矩阵。

Step 3: 利用列向量夹角定权 **W** 并计算分数向量 **Q**。

5.1.3 模型求解

先分别计算出六个城区的各指标值，得到一个 6×3 的指标矩阵 **P**,

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.9348 & 1.222 & 6.225 \\ 0.9178 & 0.4817 & 8.3 \\ 0.6948 & 1.4854 & 11.012 \\ 0.7692 & 4.6619 & 7.533 \\ 0.6893 & 2.3457 & 7.96 \\ 0.6759 & 1.5497 & 9.272 \end{pmatrix}$$

计算理想的最佳方案 **R** 和最劣方案 **T**，得

$$\mathbf{R} = (0.9348 \quad 0.4817 \quad 6.2250)$$

$$\mathbf{T} = (0.6759 \quad 4.6619 \quad 11.0120)$$

由于 η 是收益型指标（越大越好）， \bar{r} 和 \bar{r} 是成本型指标，采用极差变换法将指标矩阵 **P** 无量纲化，得到效益型矩阵 **B**。

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.8829 & 1.0000 \\ 0.9343 & 1.0000 & 0.5665 \\ 0.0730 & 0.7759 & 0 \\ 0.3604 & 0 & 0.7268 \\ 0.0518 & 0.5541 & 0.6376 \\ 0 & 0.7445 & 0.3635 \end{pmatrix}$$

其中，极差变换法的变换公式如下：

$$\mathbf{B} = (b_{ij})_{n \times m}, b_{ij} = \begin{cases} \frac{p_{ij} - \min_j p_{ij}}{\max_j p_{ij} - \min_j p_{ij}}, & p_{ij} \text{ 为效用型指标} \\ \frac{\min_j p_{ij} - p_{ij}}{\max_j p_{ij} - \min_j p_{ij}}, & p_{ij} \text{ 为成本型指标} \end{cases}$$

再计算出权重向量 \mathbf{W} ,

$$\mathbf{W} = (0.1665 \quad 0.3835 \quad 0.4500)$$

最后计算分数向量 $\mathbf{Q} = \mathbf{P} \times \mathbf{W}$, 得

$$\mathbf{Q} = (0.9321 \quad 0.7940 \quad 0.3036 \quad 0.3870 \quad 0.5080 \quad 0.4491)^T$$

5.1.4 结果分析

通过模型求解, 得到六个城区交巡警服务平台设置相对合理度的高低为 ABEFDC, A,B 两区的综合分数远远高于其他各区; 同样地, 利用成本型矩阵, 可以得到六个城区平台设置相对合理度的高低为 ABEDFC。从综合评价结果与排序可以看出 A,B 两区的平台设置方案相对合理, 而其余四区存在明显问题。由 η 和 \bar{t} 的数值可以看出, C,D,E,F 四区都至少在出警时间达标率和平均超出时间中的一项上存在问题; 由 \bar{r} 的数值可以看出, C,F 两区明显警力不足, 平均工作量偏大。

5.1.5 解决方案

对不合理方案的修改是相当复杂的, 需要考虑实际因素, 既不能将已有设置全部推翻重来, 也不能不计成本地加入很多的新平台。

D,E 两区 \bar{r} 小, 但是出警速度却很慢, 通过观察发现, 在平台的设置上, 有一些点明显不合理, 针对这种现象, 我们的做法是把这些明显不合理的点删去, 再加入等量多的平台, 使其出警速度得以优化。对于重新加入的平台位置选择, 采用枚举法加快出警速度, 对所有 η 、 \bar{t} 达到一定指标的方案进行人工删选, 并在位置固定后用算法三安排每个平台服务的节点。得出结果如下:

D	删除点	322	325	328
	增加点	329	333	370

E	删除点	373	376
	增加点	388	464

C,F 两区 \bar{r} 大, 警力明显不足, 出警速度也很慢, 而且在平台的设置上, 也有一些点明显不合理, 针对这种现象, 我们先将这些明显不合理的点删去, 再加入比所删平台数量更多的平台, 多增加的平台数目主要由 \bar{r} 确定, 使其平均工作量降到与其他四区大概相等的水平。在数目确定的情况下, 枚举所有可能选择, 对所有 η 、 \bar{t} 达到一定指标的方案进行人工删选, 并在位置固定后用算法三安排每个平台服务的节点。

由于 C 区点数过多, 枚举所有可能情况不切实际, 且 C 区的发案率分布较为均匀, 我们将已经设置的平台的周围节点从枚举范围中除去, 运行速度大大提升。在实际操作中, 取 $\eta=0.8$, $\bar{t}=1.5$, 规定平台周围的节点距平台直线距离小于 1 公里。

得出结果如下：

C	删除点	166	169			
	增加点	209	239	258	287	313

F	删除点	483		
	增加点	507	520	527

5.2 抓捕犯罪嫌疑人

5.2.1 问题分析

关于嫌犯，我们首先假设其踪迹在案发后不可追踪，即 3 分钟内嫌犯可以跑到路程范围允许的一切地方，而警方对此没有具体信息。其次，假设嫌犯充分狡猾，如果有任意一条逃离市区的道路没有在合适的时间内被封锁，抓捕工作都会失败。最后，假设嫌犯的车速可快可慢，可掉头、转弯，但最大车速固定（记作 v ）。

抓捕工作分两步完成：

- 1) 迅速建立包围圈围堵嫌犯，使嫌犯无法逃出该市。若无法建立这样一个包围圈，则抓捕工作失败；
- 2) 在包围圈内搜捕嫌犯，搜捕工作的基本前提是不能放跑嫌犯，目标为在尽量短的时间内抓获嫌犯。若效率相当，则使用警力的越少越好。

5.2.2 围堵模型

在寻找评判是否能围堵成功之前，首先介绍两个定义：若点 j 属于点集 S ，若其所有邻点均属于 S ，则称点 j 是集合 S 的内点；反之，则称为边界点。将内点集记作 V_1 ，边界点集记作 V_2 。

$$S = V_1 \cup V_2; V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

若点 $j \in V_2 \subset S$ ，将 j 的所有邻点加入 S 称为对点 j 的一次增广，此时 $j \in V_1$ 。

如果我们能够找到一个点集 S ，包含嫌疑犯的出发点，且集合 S 的所有边界点警察都能赶在嫌疑犯之前到达，则围堵成功；否则，围堵失败。我们希望在最小的地理范围内进行围堵。

- 1) 我们设计的围堵模型的具体如下：

将嫌犯在案发 3 分钟内可能到达过的顶点（在路上不算）集定义为初始集，记作 S_0 。

将 S_0 的所有边界点一起增广，新得到的点集记作 S_1 。这是因为使得 $S_0 \subset S_1$ ，且 S_0 中所有的点均为 S_1 的内点， S_1 是满足成功围堵条件的最小集合。嫌犯若要逃离，必须经过 S_1 的某个边界点， $V_1 \subset S_1$ 便形成了一个包围圈。因此，警方只要赶在嫌犯之前封锁住这些边界点，则围堵成功；

若不能在目前的点集围堵成功，则选择其中一个边界点进行增广，再进行评判。在边界点的选择上，我们采用贪心法，选择嫌疑犯到达时间和最近平台到达时间差最大的边界点，基本想法是增广最难包围的边界点。

对于当前的点集，可以采用网络流模型进行评判是否可以包围。

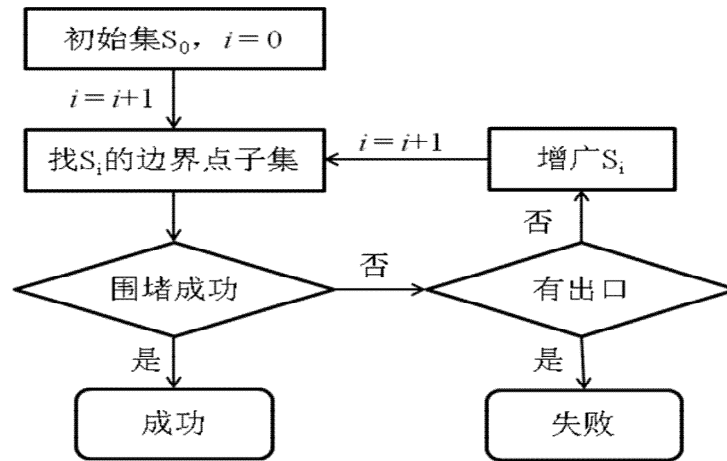


图 7：围堵模型

2) 采用网络流模型求解，具体步骤如下：

Step 1: 从源到所有的平台连一条流量上限为 1 的边；

Step 2: 从所有边界点向汇连一条流量上限为 1 的边；

Step 3: 若平台 i 到边界点 j 的时间 $m(i, j) < m(32, j)/v - 3$ ，则从平台 i 向边界点 j 连一条流量上限为 1 的边；

Step 4: 计算在给定的包络集下模型的最大流；

Step 5: 若流量等于边界点数目，则围堵成功。

与算法二相同，流量平衡条件可以保证每个平台只围堵一个边界点。

3) 结果以及灵敏度分析

在参数 v 取不同值的情况下，我们得到不同的包围圈及其所含节点数（见表 3）。

表 3：包围圈所含节点数与嫌犯最大车速的关系

$v(\text{km/min})$	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
节点数	9	12	20	22	20	21
$v(\text{km/min})$	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	>1.5
节点数	22	21	21	22	22	不可

当疑犯的最大车速与警车速度相比较小时，用来围堵疑犯的包围圈所含节点数对速度的变化比较敏感；当疑犯车速与警车速度相当时，包围圈所含节点数表现出相当良好的稳定性；而当疑犯车速比警车速度快到一定程度时，我们发现在此问题中已经无法围堵疑犯。

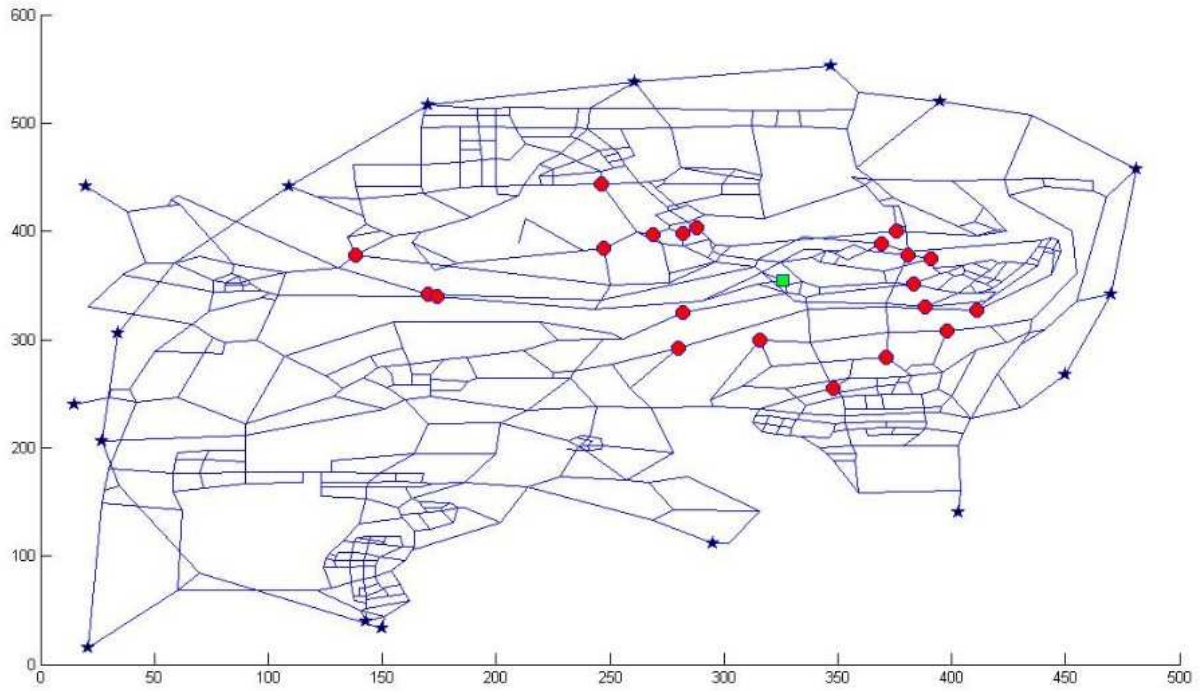


图 8: $v = 1$ 时的包围圈示意图

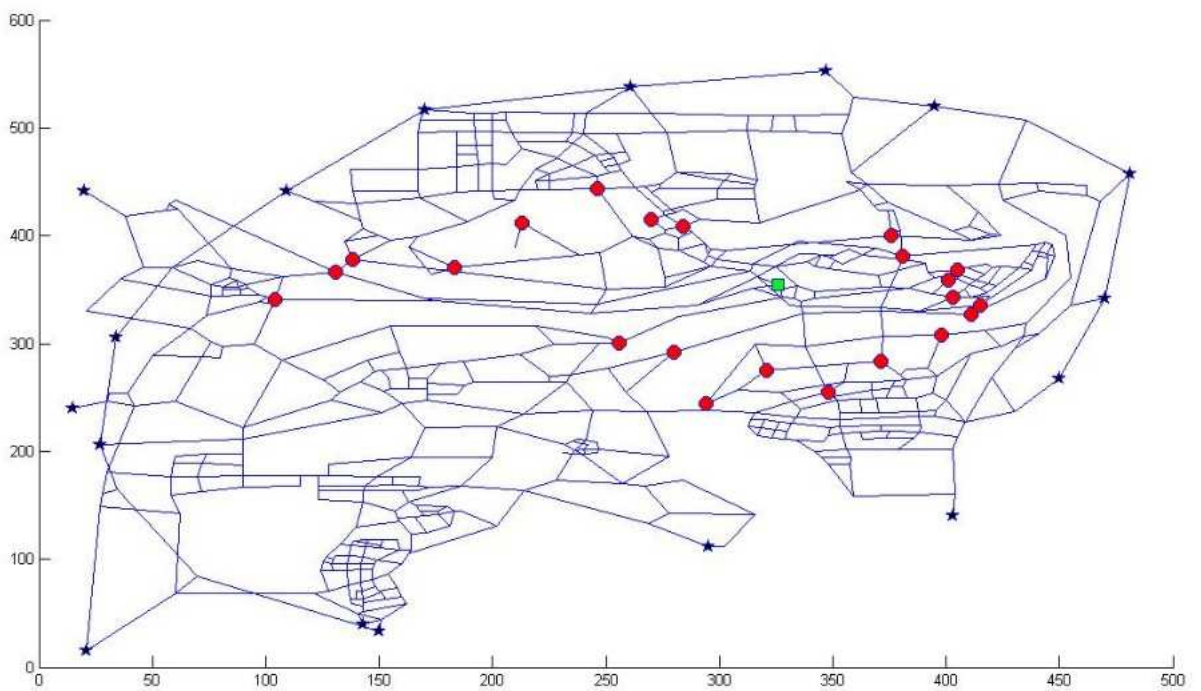


图 9: $v = 1.5$ 时的包围圈示意图

5.2.3 搜捕模型

将每个平台的警力称为一支交警队。围堵成功后，逐步缩小包围圈进行抓捕，初步考虑由所有参与围堵的交警队和包围圈内部平台的交警队联合进行。当警车与嫌犯车辆在道路上或路口节点相遇时，抓捕则宣告成功。若能每次成功减少包络集的一个边界点，且不放跑嫌犯，则在有限步操作后必能抓捕成功。

定义一个边界点邻接的内点数量为该边界点的内点度，定义一个边界点邻接的内点与边界点的数量总和为它的邻点度。

首先考察最外层的包络集（即成功围堵的包络集），所有内点度为 1 的边界点必能被收缩至与之邻接的唯一内点，即将该边界点的警力调度到邻接的唯一内点上。然而上述操作过后，再直接删去内点度为 1 的边界点有可能会放跑嫌疑人，原因是最外层包络集的边界点之间不可能存在嫌疑人，但是收缩之后的包络集的边界点之间有可能存在嫌疑人。（如图 10 中右图）

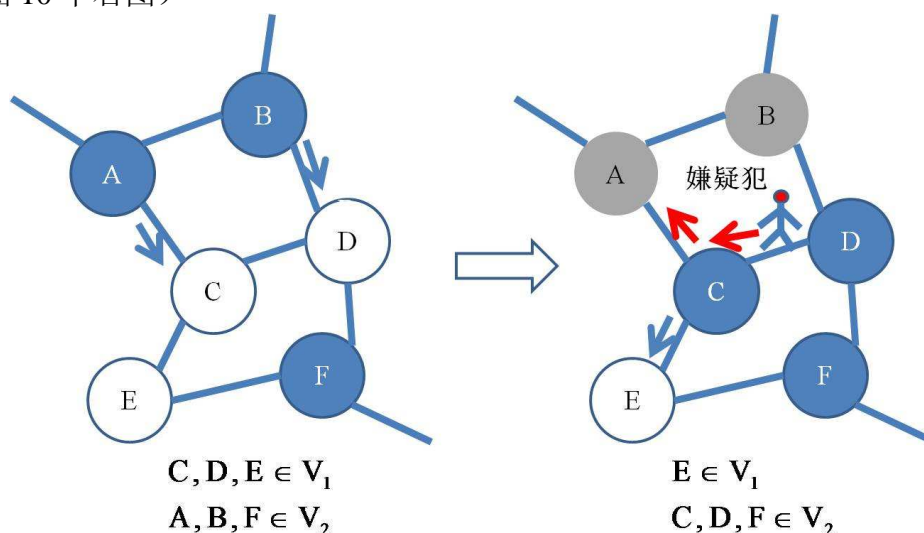


图 10：边界点收缩示意图

由此我们得出收缩操作的第一个约束条件：邻点度约束。在前一次收缩完成后，若再收缩某个边界点，其上的交警队数目必须大于等于其邻点度。

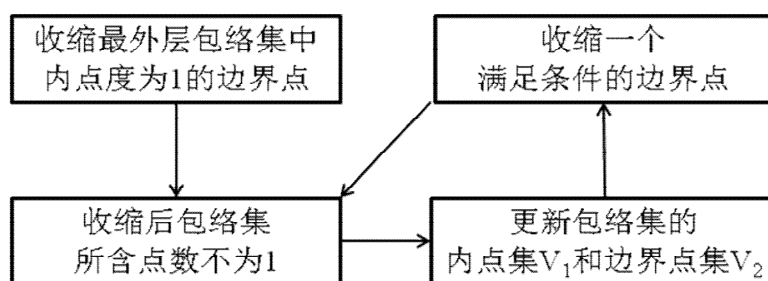


图 11：

由于我们在搜捕环节的目标是花最少的时间抓到嫌疑，需要一个指标来引导我们的收缩操作。现在引入准备时间的概念。准备时间指的是点 i 最早可以开始收缩的时间，记作 $pre(i)$ 。首先设包络集中所有点的准备时间为 0。选定收缩的点 i 以后，将其警力分配到所有邻点上，不得遗漏，因为在处理最外层包络集后，嫌犯可能位于两个边界点之间。邻点 j 的准备时间更新为

$$pre(j) = \max \{pre(i) + t(i, j), pre(j)\}$$

通过这个操作，虽然我们每次只收缩一个边界点，但实际上它们是可以同时进行的。每次只收缩一个点相当于给定一个收缩顺序，相当于每次交警队到达新的地点时就原地待命，直到下一步指示可以继续缩小包围圈。

在收缩过程中互不影响点同时进行，如下图所示的局部包围圈，边上的数字代表路程。A 点的准备时间为 5，假设它可以收缩，则 B 和 C 的准备时间更新为 7 和 8（初

始为 0)。紧接着收缩 B 点，D 的准备时间更新为 8。最后收缩 C 点，将 D 的准备时间更新为 11。虽然每次只收缩了一个点，但是实际上模拟的是 A 的两批警力同时出发，并在 D 集合待命。

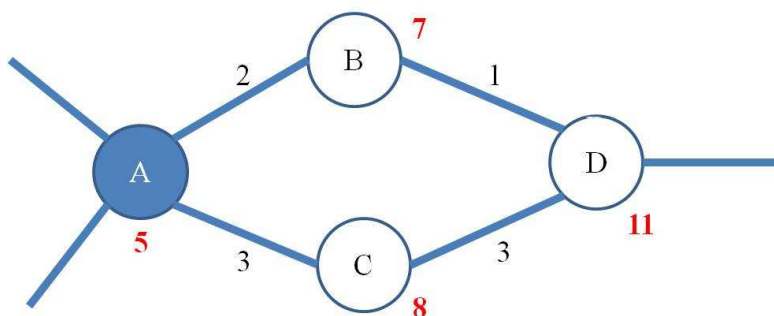


图 12: 准备时间示意图

对于任意一种收缩顺序，如果最后其能顺利收缩为一个点，则最后一个点的准备时间即为搜捕时间。

优化目标： $\min pre(k)$ ，对于任意收缩顺序，其中 k 是最后的收缩点。

至此搜捕模型没有考虑，如果没有可收缩边界点怎么办。在编程求解的过程中，这个问题也确实发生了，当迭代到某一步， V_2 中没有任何一个点可以收缩，搜捕失败。考虑到 G 是一张平面图，所以每个点的邻点度都不太大，大多分布在 2-5；相反，随着包围圈的缩小，警察越来越集中，收缩不应该在中途失败。这个矛盾的产生是因为在收缩的过程中，收缩某点有可能将包络集割裂。

比如在图 12 中，若 A 和 B 收缩完毕后，D 也成为了边界点，且可以收缩。当它收缩时一部分警力分配给了 C，并将 C 孤立。C 只能收缩至自身，其上含有的所有警力将无法继续参加包围，形成浪费。

基于以上分析，我们得出收缩操作的第二个约束条件：连通性约束。每次收缩的边界点都不能破坏包络集的连通性。连通性是指集合内的任意两点，可以只通过集合内部的点互达。

对于我们的优化目标 $\min pre(k)$ ，采用贪心法选取收缩顺序，每次选择准备时间最小的可收缩边界点，将其警力分散到所有邻点，若警力不能被邻点数整除，则将余数任意分配至某邻点。

5.2.4 结果与优缺点分析

- 1) 图 12 和 13 中显示的是当嫌疑犯最大车速 $v = 1$ 时的搜捕过程，其中“□”表示最外层包络集中的点，共 71 个；“△”表示所含点数等于 26 的包络集中的点；“○”表示最终围堵的点。此次搜捕过程共耗时 56 分钟。
- 2) 若把包络集内交警队数目等于点数的情况视作搜捕成功，则整个过程只需 29 分钟，当包络集所含点数为 26 时迭代结束。
- 3) 模型的显著优点是推广性强，因为它并不依赖于点 P，无论嫌疑的初始位置在哪里，模型都能尽快围堵或判定围堵失败。
- 4) 模型的缺点主要有二：
 - i. 没有考虑最外层包络集以外的其他警力，可能会导致搜捕时间偏长；
 - ii. 在增广和收缩的过程中都采用了贪心法，解的质量可能会不高。改进的方向是加入一些评估函数，因为时间有限我们未能找到比贪心法更好的智能搜索，实为遗憾。

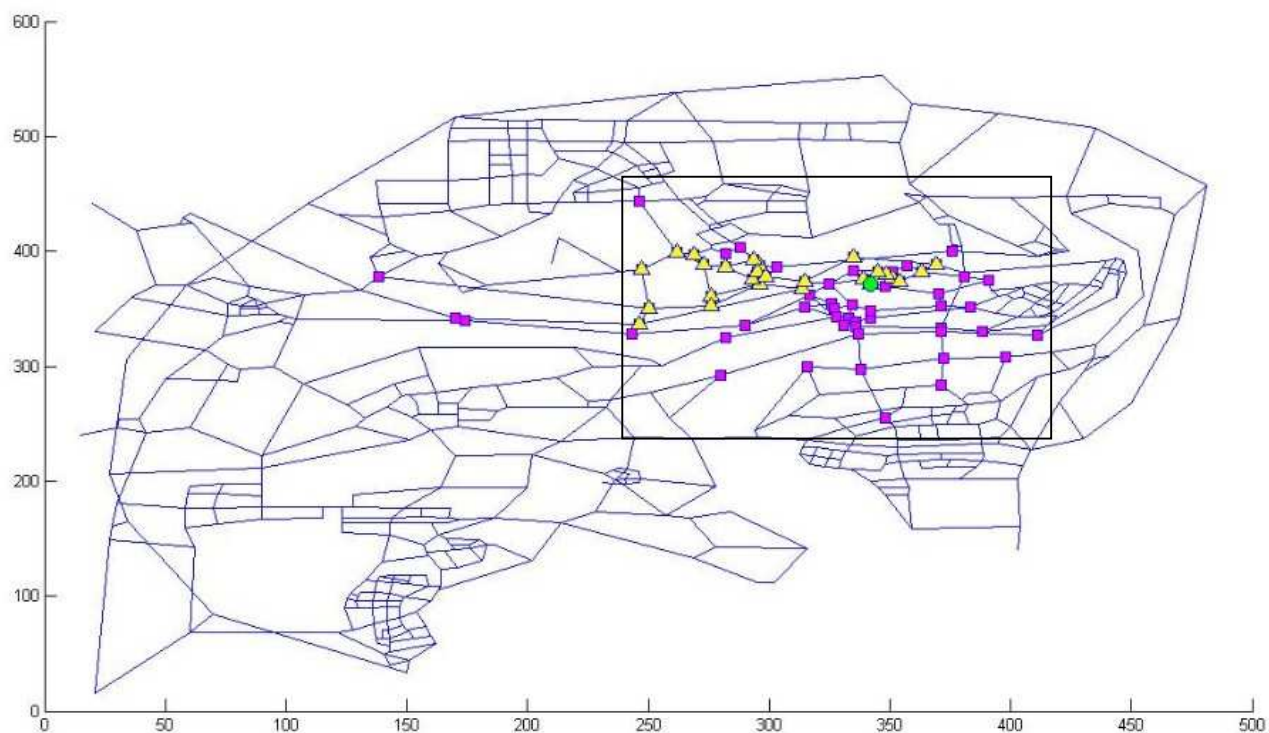


图 13: $\nu = 1$ 时的搜捕过程

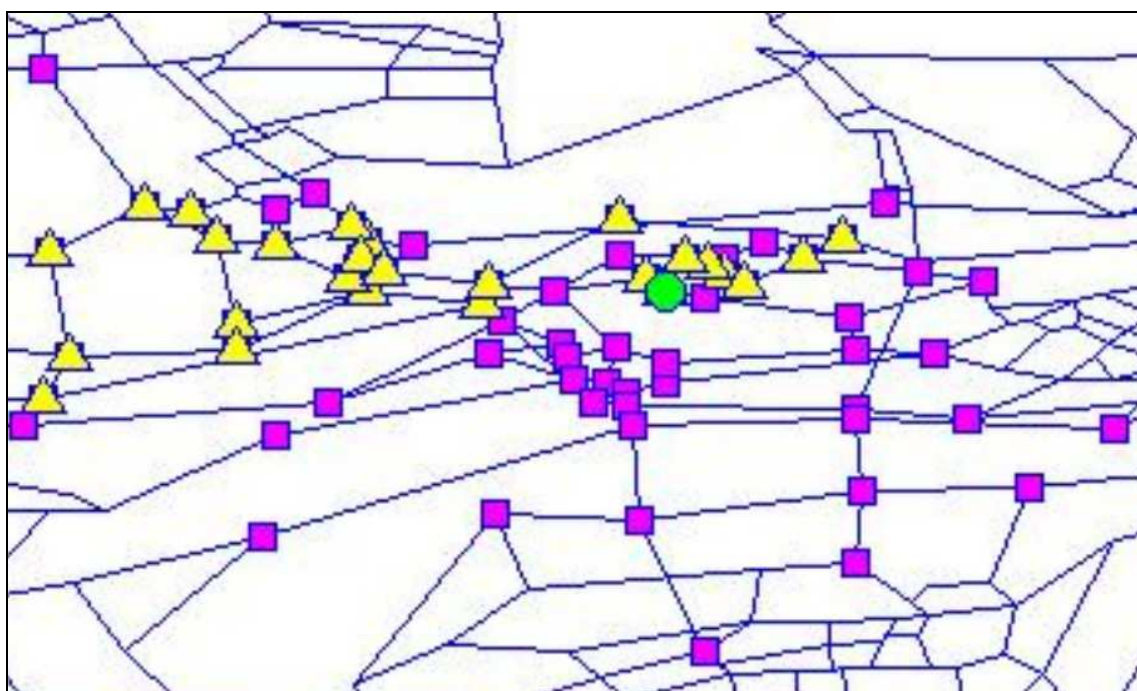


图 14: $\nu = 1$ 时的搜捕过程（局部放大）

六、参考文献

- [1] 张军,《计算智能》,北京:清华大学出版社,2009年。
- [2] 吴礼斌,《数学实验与建模》,北京:国防工业出版社,2007年。
- [3] 姜启源,《数学模型》(第三版),北京:高等教育出版社,2009年。

七、附录

附表 1：A 区各路口所属平台及相应的最短距离

路口标号	所属平台编号	最短距离(km)	路口标号	所属平台编号	最短距离(km)
1	A1	0	47	A7	1.2806
2	A2	0	48	A7	1.2902
3	A3	0	49	A5	0.5
4	A4	0	50	A5	0.8485
5	A5	0	51	A5	1.2293
6	A6	0	52	A5	1.6594
7	A7	0	53	A5	1.1708
8	A8	0	54	A3	2.2709
9	A9	0	55	A3	1.2659
10	A10	0	56	A5	2.0837
11	A11	0	57	A4	1.8682
12	A12	0	58	A5	2.3019
13	A13	0	59	A5	1.5209
14	A14	0	60	A4	1.7392
15	A15	0	61	A7	4.1902
16	A16	0	62	A4	0.35
17	A17	0	63	A4	1.0308
18	A18	0	64	A4	1.9363
19	A19	0	65	A3	1.524
20	A20	0	66	A3	1.8402
21	A13	2.7083	67	A1	1.6194
22	A13	0.9055	68	A1	1.2071
23	A13	0.5	69	A1	0.5
24	A13	2.3854	70	A2	0.8602
25	A12	1.7889	71	A1	1.1403
26	A11	0.9	72	A2	1.6062
27	A11	1.6433	73	A1	1.0296
28	A15	4.7518	74	A1	0.6265
29	A15	5.7005	75	A1	0.9301
30	A7	0.5831	76	A1	1.2836
31	A9	2.0557	77	A19	0.9849
32	A7	1.1402	78	A1	0.6403
33	A8	0.8276	79	A19	0.4472
34	A9	0.5025	80	A18	0.8062
35	A9	0.4243	81	A18	0.6708
36	A16	0.6083	82	A18	1.0793
37	A16	1.1182	83	A18	0.5385
38	A16	3.4059	84	A20	1.1752
39	A2	3.6822	85	A20	0.4472
40	A2	1.9144	86	A20	0.3606
41	A17	0.85	87	A20	1.4651
42	A17	0.9849	88	A20	1.2946
43	A2	0.8	89	A20	0.9487
44	A2	0.9487	90	A20	1.3022

45	A9	1.0951	91	A20	1.5988
46	A8	0.9301	92	A20	3.6013

附表 2：增设平台后 A 区各平台管辖路口标号及总发案率

平台编号	管辖路口标号	总发案率 (次数)	平台编号	管辖节点编号	总发案率 (次数)
A1	1, 43, 73, 76, 77	6.2	A13	13, 21, 22, 23, 24	8.5
A2	2, 67, 69, 71, 78	5.9	A14	14	2.5
A3	3, 54, 55, 64, 65	5.6	A15	15, 31	3.7
A4	4, 57, 60, 62, 63	5.8	A16	16, 33, 46	5.2
A5	5, 52, 53, 56, 59	5.5	A17	17, 41, 42, 72	6.1
A6	6, 50, 51, 58	5.5	A18	18, 80, 81, 82, 83	6.1
A7	7, 30, 32	6	A19	19, 66, 68, 74, 75, 79	6.2
A8	8, 34, 45	5.5	A20	20, 85, 86, 89	5.9
A9	9, 35, 36, 37	4.7	A21(28)	28, 29	2.7
A10	10	1.6	A22(40)	38, 39	6.3
A11	11, 26, 27	4.6	A23(48)	47, 48, 49, 61	4.8
A12	12, 25	4	A24(91)	84, 87, 88, 90, 91, 92	5.6