

赛区评阅编号（由赛区组委会评阅前进行编号）：

2012 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

编 号 专 用 页

赛区评阅编号（由赛区组委会评阅前进行编号）：

赛区评阅记录（可供赛区评阅时使用）：

评 阅 人										
评 分										
备 注										

全国统一编号（由赛区组委会送交全国前编号）：

全国评阅编号（由全国组委会评阅前进行编号）：

机器人避障问题

摘要

机器人避障问题是指在有障碍的工作环境中，寻找一条从起始点到目标点的行走路径，使机器人在运动过程中能安全、无碰撞地绕过所有障碍物。在找到符合以上路径的基础上进行优化，找出最短路径和最短时间路径。对于最短路径，本文采用势场法，即对目标吸引，对障碍排斥，连接起始点和目标点，如果没有障碍物，即为最短路径。当有障碍物时，采用假设—修正法在障碍物周边选择较优登陆点，然后以登陆点为起始点（目标点），采用同样的方法，寻找与其相邻的登陆点，直到各相邻登陆点之间没有障碍物。最后对拐角进行修正，本文以 $r=10$ 半径在拐角处（登陆点）做弧，各弧长和直线长相加为总路径长，进行比较，可得出最短路径。

对于最短时间路径，我们运用穷列举法求出以不同点以不同半径为拐角的行走时间，然后进行比较，得到最短时间路径。

问题（1）最短路径：

$O \rightarrow A$ 最短路径为：471.04 时间：96.0176

$O \rightarrow B$ 最短路径为：853.70 时间：179.3427

$O \rightarrow C$ 最短路径为：1090.80 时间：223.333

$O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow O$ 最短路径为：2760.52 时间：576.7457

问题（2）最短时间路径：

$O \rightarrow A$ 最短时间路径：471.1243 时间：94.2285

关键字：势场法 假设—修正法 登陆点 穷列举

1 问题的重述

1.1 背景分析

图1是一个 800×800 的平面场景图，在原点 $O(0, 0)$ 点处有一个机器人，它只能在该平面场景范围内活动。图中有12个不同形状的区域是机器人不能与之发生碰撞的障碍物，障碍物的数学描述如下表：

编号	障碍物名称	左下顶点坐标	其它特性描述
1	正方形	(300, 400)	边长200
2	圆形		圆心坐标(550, 450)，半径70
3	平行四边形	(360, 240)	底边长140，左上顶点坐标(400, 330)
4	三角形	(280, 100)	上顶点坐标(345, 210)，右下顶点坐标(410, 100)
5	正方形	(80, 60)	边长150
6	三角形	(60, 300)	上顶点坐标(150, 435)，右下顶点坐标(235, 300)
7	长方形	(0, 470)	长220，宽60
8	平行四边形	(150, 600)	底边长90，左上顶点坐标(180, 680)
9	长方形	(370, 680)	长60，宽120
10	正方形	(540, 600)	边长130
11	正方形	(640, 520)	边长80
12	长方形	(500, 140)	长300，宽60

在图1的平面场景中，障碍物外指定一点为机器人要到达的目标点（要求目标点与障碍物的距离至少超过10个单位）。规定机器人的行走路径由直线段和圆弧组成，其中圆弧是机器人转弯路径。机器人不能折线转弯，转弯路径由与直线路径相切的一段圆弧组成，也可以由两个或多个相切的圆弧路径组成，但每个圆弧的半径最小为10个单位。为了不与障碍物发生碰撞，同时要求机器人行走线路与障碍物间的最近距离为10个单位，否则将发生碰撞，若碰撞发生，则机器人无法完成行走。

机器人直线行走的最大速度为 $v_0 = 5$ 个单位/秒。机器人转弯时，最大转弯速度为

$v = v(\rho) = \frac{v_0}{1 + e^{10 - 0.1\rho^2}}$ ，其中 ρ 是转弯半径。如果超过该速度，机器人将发生侧翻，无法

完成行走。

1.2 提出问题

请建立机器人从区域中一点到达另一点的避障最短路径和最短时间路径的数学模型。对场景图中4个点 $O(0, 0)$ ， $A(300, 300)$ ， $B(100, 700)$ ， $C(700, 640)$ ，具体计算：

(1) 机器人从 $O(0, 0)$ 出发， $O \rightarrow A$ 、 $O \rightarrow B$ 、 $O \rightarrow C$ 和 $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow O$ 的最短路径。

(2) 机器人从 $O(0, 0)$ 出发，到达A的最短时间路径。

注：要给出路径中每段直线段或圆弧的起点和终点坐标、圆弧的圆心坐标以及机器人行走的总距离和总时间。

2 问题的分析

对于一般模型，机器人从区域中一点到达另一点的避障最短路径和最短时间问题，首先采用势场法选择合理路径，找到登陆点，在登陆点处进行最小拐弯，求出各路径，取最短路径。对于时间最短路径障碍，在一定范围内进行穷列举，找到最短时间路径。

问题（1）对于从 $O \rightarrow A$ 、 $O \rightarrow B$ 、 $O \rightarrow C$ 采用同样的方法，运用 matlab 求出各路径的长度，然后取最优路径。从 $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow O$ 时，由于机器人不能进行折线转弯，所以在目标点周围寻找一点为圆心，以 r 为半径，使目标点在圆上，从而使机器人在拐弯时经过目标点，求的最短路径。问题（2）迭代的方法，求出一定范围内以不同点为圆心，不定长半径做弧，求出机器人过弧线的最短时间路径。

3 模型假设与符号说明

3.1 模型的假设

- （1）假设机器人是一质点，其大小忽略不计；
- （2）假设机器人行走时按最大速度匀速前进；
- （3）假设障碍物的形状是规则的且数据可靠。

3.2 符号的说明

- | | |
|-----------|------------------|
| （1） C | 机器人到目标的总距离 |
| （2） r | 机器人避开障碍物旋转的半径 |
| （3） L_i | 机器人的行走的第 i 条路线 |
| （4） D_j | 机器人在走两个圆弧切点连线的中点 |
| （5） Z_i | 机器人经过的第 i 个直线段 |
| （6） h_i | 机器人经过的第 i 个圆弧 |
| （7） t | 行走路径的总时间 |

4 模型的准备

4.1 当障碍物是多边形时拐弯的处理方法

通过比较图(1)中的路径一和路径二，可以得出结论：当旋转半径 r 越小时，切线路

径和弧长越短。所以，我们采用最小转弯方案，即在机器人拐弯时，以 $r = 10$ 单位进行转弯。

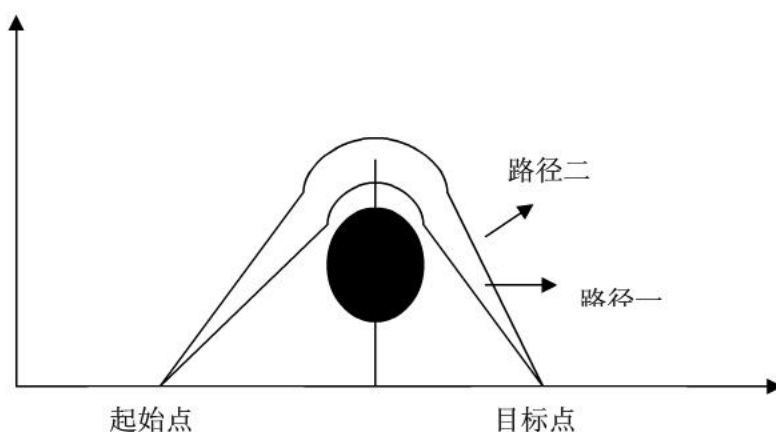


图 (1)

4.2 障碍物是圆时的行走路径方法

当障碍物是圆时，以障碍物半径增加 10 单位作同心圆，机器人沿着同心圆的外环行走，此时路径最短，如图 (2) 所示

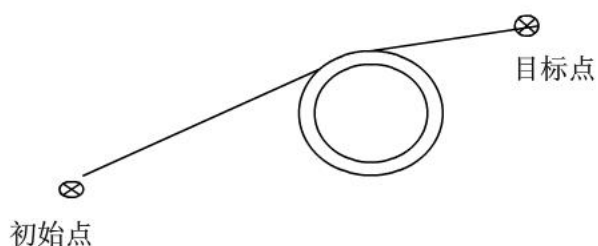


图 (2)

4.3 求路径长度方法:

1、当初始点与目标点有一个障碍物时，如图 (3) 所示:

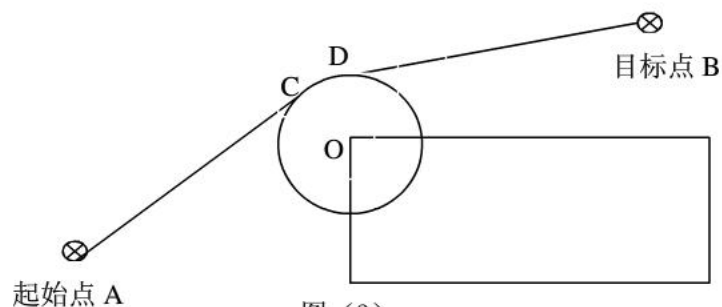


图 (3)

设起始点坐标和目标点坐标为 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 、 $C(x_3, y_3)$ 和 $D(x_4, y_4)$ 分别为机器人经过拐点时与拐角小圆弧的切点，圆心为 $O(x_o, y_o)$ ，圆的半径为 r ，AB 的长度为 a ，AO 的长度为 b ，BO 的长度为 c ，角度 $\angle AOB = \alpha$ ， $\angle AOC = \beta$ ， $\angle BOD = \gamma$ ，

$\angle COD = \theta$ 。求 ADB 的长度，设为 C

解法如下：

如上图可得有以下关系：

$$\begin{cases} a = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ b = \sqrt{(x_o - x_1)^2 + (y_o - y_1)^2} \\ c = \sqrt{(x_o - x_2)^2 + (y_o - y_2)^2} \end{cases}$$

在 $\triangle AOB$ 中：

$$\alpha = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$$

在

$Rt\triangle AOC$ ：

$$\beta = \arccos \frac{r}{b}$$

在 $Rt\triangle BOD$ 中：

$$\gamma = \arccos \frac{r}{c}$$

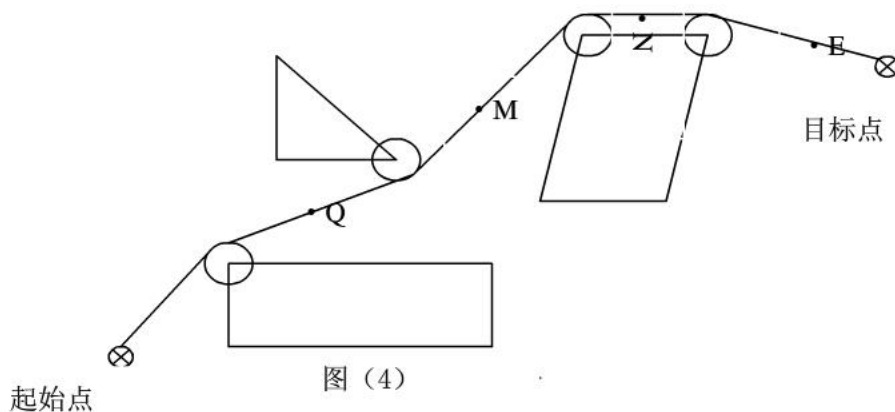
所以：

$$\theta = 2\pi - \alpha - \beta - \gamma$$

从而可得：

$$L = \sqrt{b^2 - r^2} + \sqrt{c^2 - r^2} + r\theta$$

2、当有多个障碍物时，如图 4 所示：



当有多个障碍物时，进行分段求解，分段点分别是两相邻圆切线连线的中点，依次求出各段路径长度，方法同上。

5 模型的建立与求解

5.1 一般模型的求解

针对在问题中的平面场景中，障碍物外指定一点为机器人要达到的目标点，按照规定机器人的行走路径由直线段和圆弧组成，其中圆弧是机器人转弯路径。需要我们建立一般模型进行求解。

5.1.1 机器人从一点到另一点避障最短路径的数学模型：

建立集合 $\Omega = \{v_i | (x_i, y_i)\}$

其中 v_i 为各个障碍物的顶点（节点）及起始点和目标点， (x_i, y_i) 是 v_i 的坐标；

建立集合 Ω' ，其中该集合的初始时只含两个元素，即路径的起始点 v_1 和目标点 v_s ，

具体做法：

第一步：用直线连接起始点和目标点得到线段 v_1v_s ，如果 v_1v_s 之间没有障碍物，则 v_1v_s 为最短路径，否则转到下一步；

第二步：把 v_1v_s 所穿过障碍物的顶点（节点） v_i 添加到 Ω' 中；

第三步：连接目标点与 Ω' 中距离最近的节点得到线段 v_sv_i ，用同样的方法连接起始点与 Ω' 中距离最近的节点得到线段 v_1v_j ；

第四步：同第二步把线段 v_sv_i 、 v_1v_j 所穿过障碍物的顶点（节点）添加到 Ω' ；

依次类推，直到 v_sv_i 、 v_1v_j 中没有障碍物，结束添加节点。

第五步：把添加节点后的集合 Ω' 作为最佳路径的登陆点，这样会得到有限的行走路径，然后通过 MATLAB 计算得到这些路径的距离，从而找到最短路径，

注：在登陆点我们采用了最小转弯半径的方案。

5.1.2 机器人从一点到另一点避障最短时间路径的数学模型：

机器人从起始点到目标点所用的时间不仅与路程有关，还与在轨迹上的速度有关时间—速度—路程的关系：

时间=路程/速度；

我们依据常识得：机器人的速度 v_1 在直轨迹上和曲线轨迹上的运行速度是不同，

一般而言 $v_{直} > v_{弯}$ ，并且 $v_{弯}$ 会受曲线轨迹的半径的影响，总路程也会受曲线轨迹半径影响。在求解过程中我们一般会将曲线轨迹看作圆形来处理，直线与曲线的交汇点看作圆的切点来处理。

模型建立：建立全程时间与速度、路程、曲线半径之间的关系；通过改变或迭代可控变量优化时间。例如对本题分析：

机器人在曲线上速度 $v = \frac{v_0}{1 + e^{10-0.1\rho^2}}$ 建立曲线时间函数 $t_{弯}$

$$t_{弯} = \frac{l_i(1 + e^{10-0.1\rho^2})}{v_0}$$

机器人在直线上速度 v_0 单位，建立直线上时间函数 $t_{直}$

$$t_{直} = d_i / v_0$$

分析速度 v 随圆弧半径 ρ 的增大而增大，且圆弧 l_i 也会随 ρ 的增大而增大，因此建立总时间 t 函数： $t = t_{弯} + t_{直}$ ，并通过多次迭代不断优化时间 t ；模型求解中我们通过改变圆弧的半径和圆心的位置求解时间 t 。解模型时，先通过观察目标点、障碍物、起始点的位置，推测拐点圆弧的圆心的坐标大致方向，并通过几何方法确定圆心横，纵坐标的关系。然后通过改变半径，圆心位置迭代，不断优化时间 t ，即解得最短时间路径。

5.2 问题一的解答

针对机器人从 O 出发， $O \rightarrow A$ ， $O \rightarrow B$ ， $O \rightarrow C$ 和 $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow O$ 的最短路径的各种不同情况，对 $O \rightarrow A$ 有两种不同的路径， $O \rightarrow B$ 也有两种不同的路径， $O \rightarrow C$ 有三种不同的路径， $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow O$ 有一种路径，对于机器人到这四个不同目标点的情况，我们用模型准备中的 4.3 求路径长度的方法，利用 MATLAB 分别计算出各路径的距离，并给出了模型一，模型二，模型三，模型四，然后代入数据进行实证研究。

5.2.1 模型一

对于 $O \rightarrow A$ ，我们通过逆序搜索考虑到有两种行走方案，如下图所示：

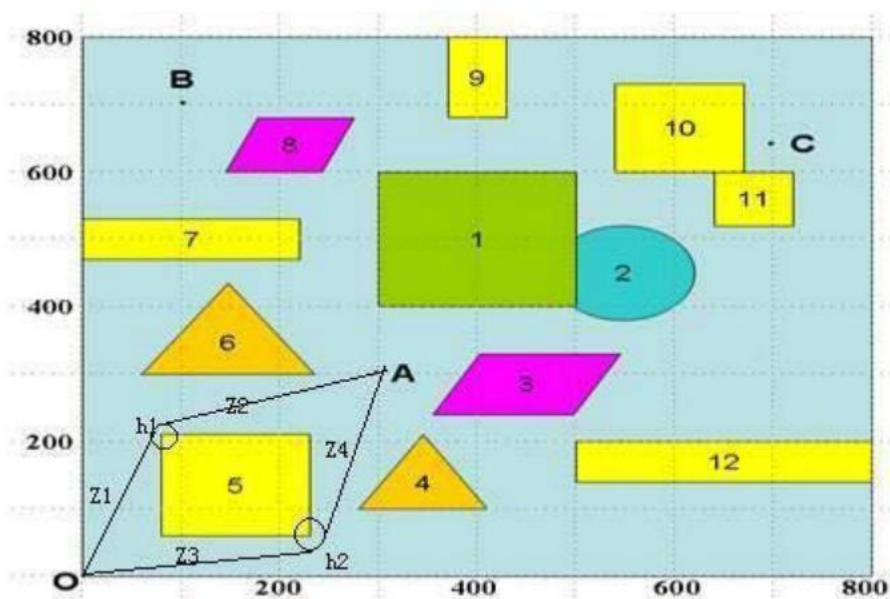


图 5.2.1

假设当 O 的起点从编号为5障碍物的左上角经过为方案一，路径为路线 L_1 ，经过直线 Z_1, Z_2 和圆弧 h_1 。路线的起点从障碍物的右下角经过为方案二，且路径为路线 L_2 ，经过直线 Z_3, Z_4 和圆弧 h_2 。

利用 MATLAB 求解，得到方案一机器人行走的总距离 C 为 471.04 个单位, 求解结果如下表所示。

表 (1): $O \rightarrow A$ 方案一的路线和起始点坐标及圆弧圆心

路线名称	起点坐标	终点坐标	圆心坐标
Z_1	(0, 0)	(70.5, 213.1)	
h_1	(70.5, 213.1)	(76.6, 219.4)	(80, 210)
Z_2	(76.6, 219.4)	(300, 300)	

利用 MATLAB 进行求解，得到方案二机器人行走的总距离为 498.42 个单位，具体结果如下表所示。

表 (2): $O \rightarrow A$ 方案二的路线和起始点坐标及圆弧圆心

路线名称	起点坐标	终点坐标	圆心坐标
Z_3	(0, 0)	(232.1, 50.2)	
h_2	(232.1, 50.2)	(239.7, 57.6)	(230, 60)
Z_4	(239.7, 57.6)	(300, 300)	

综上所述，经过比较我们可以知道方案一是 $O \rightarrow A$ 的最短路径，其距离是 471.04 个单位，总时间为 96.0176 秒。

5.2.2 模型二

对于 $O \rightarrow B$ 我们通过逆序搜索考虑到有两种较短的路径，如图所示：

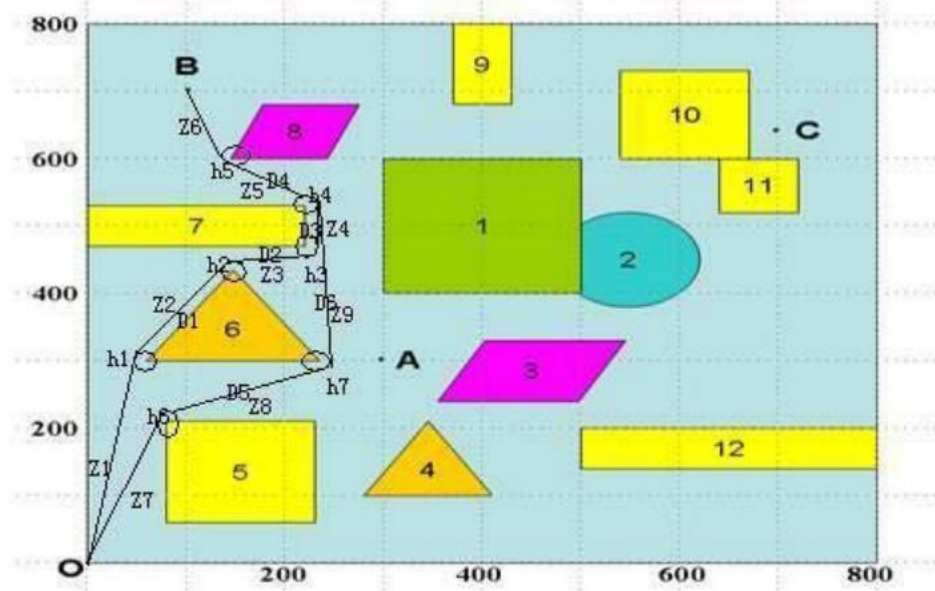


图 5.2.2

假设当以 O 为起点从编号为 6 的障碍物左边路过即从三角形左下顶点经过为方案一，路径为线路 L_3 ，线路为 $Z_1 \rightarrow h_1 \rightarrow Z_2 \rightarrow h_2 \rightarrow Z_3 \rightarrow h_3 \rightarrow Z_4 \rightarrow h_4 \rightarrow Z_5 \rightarrow h_5 \rightarrow Z_6$ 。假设当以 O 为起点从编号为 6 的障碍物右边路过即从三角形右下顶点经过为方案二，路径为线路 L_4 ，线路为： $Z_7 \rightarrow h_6 \rightarrow Z_8 \rightarrow h_7 \rightarrow Z_9 \rightarrow h_4 \rightarrow Z_5 \rightarrow h_5 \rightarrow Z_6$ 。如图所示（图 5.2.2），利用 MATLAB 求解，得到方案一机器人行走的总距离 C 为 853.70 个单位。方案二机器人行走的总距离 C 为 877.38 个单位，求解结果如下两表所示。

表 (3): $O \rightarrow B$ 方案一的路线和起始点坐标及圆弧圆心

线路名称	起点坐标	终点坐标	圆心坐标
Z_1	(0, 0)	(50.1, 301.6)	
h_1	(50.1, 301.6)	(51.7, 305.6)	(60, 300)
Z_2	(51.7, 305.6)	(141.7, 440.5)	
h_2	(141.7, 440.5)	(148, 444.8)	(150, 435)

Z_3	(148. 0, 444. 8)	(222, 460. 2)	
h_3	(222, 460. 2)	(230, 470)	(220, 470)
Z_4	(230, 470)	(230, 530)	
h_4	(230, 530)	(225. 5, 538. 4)	(220, 530)
Z_5	(225. 5, 538. 4)	(144. 5, 591. 6)	
h_5	(144. 5, 591. 6)	(140. 7, 596. 3)	(150, 600)
Z_6	(140. 7, 596. 3)	(100, 700)	

表 (4): $O \rightarrow B$ 方案二的线路和起始点坐标及圆弧圆心

线路名称	起点坐标	终点坐标	圆心坐标
Z_7	(0, 0)	(70. 5, 213. 1)	
h_6	(70. 5, 213. 1)	(76, 219. 2)	(80, 210)
Z_8	(76, 219. 2)	(239, 290. 8)	
h_7	(239, 290. 8)	(245, 300. 6)	(235, 300)
Z_9	(245, 300. 6)	(230, 530. 7)	
h_4	(230, 530. 7)	(225. 5, 538. 4)	(220, 530)
Z_5	(225. 5, 538. 4)	(144. 5, 591. 6)	
h_5	(144. 5, 591. 6)	(140. 7, 596. 3)	(150, 600)
Z_6	(140. 7, 596. 3)	(100, 700)	

综上所述, 经过比较我们可以知道方案一是 $O \rightarrow B$ 的最短路径, 其距离是 853. 70 个单位, 总时间为 179. 3427 秒。

5. 2. 3 模型三

对于 $O \rightarrow C$, 我们通过逆序搜索考虑到有三种较短的路径, 如图所示:

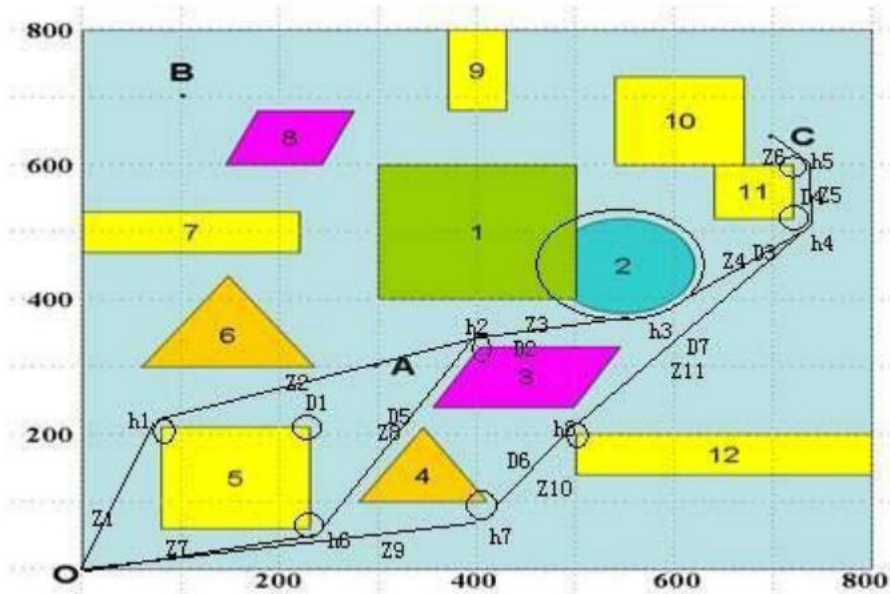


图 5.2.3

假设当以 O 为起点从 5 号障碍物左上角出发的为方案一，路径为 L_5 ，线路为：

$$Z_1 \rightarrow h_1 \rightarrow Z_2 \rightarrow h_2 \rightarrow Z_3 \rightarrow h_3 \rightarrow Z_4 \rightarrow h_4 \rightarrow Z_5 \rightarrow h_5 \rightarrow Z_6。$$

假设当以 O 为起点从 5 号障碍物右下角出发的为方案二，路径为 L_6 ，线路为：

$$Z_7 \rightarrow h_6 \rightarrow Z_8 \rightarrow h_2 \rightarrow Z_3 \rightarrow h_3 \rightarrow Z_4 \rightarrow h_4 \rightarrow Z_5 \rightarrow h_5 \rightarrow Z_6。$$

假设当以 O 为起点从 4 号障碍物右下顶点出发的路线为方案三，路径为 L_7 ，线路为：

$$Z_9 \rightarrow h_7 \rightarrow Z_{10} \rightarrow h_8 \rightarrow Z_{11} \rightarrow h_4 \rightarrow Z_5 \rightarrow h_5 \rightarrow Z_6。$$

如图所示（图 5.2.3），我们利用 MATLAB 求解，得到方案一机器人行走的总距离 C 为 1178.42 个单位，方案二机器人行走的总距离 C 为 1167.42 个单位，方案三机器人行走的总距离 C 为 1090.80 个单位，求解结果如下表所示。

表（5） $O \rightarrow C$ 方案一的线路和起始点坐标及圆弧圆心坐标

线路名称	起点坐标	终点坐标	圆弧圆心
Z_1	(0, 0)	(70.5, 213.1)	
h_1	(70.5, 213.1)	(76.5, 219.4)	(80, 210)
Z_2	(76.5, 219.4)	(396.5, 339.4)	
h_2	(396.5, 339.4)	(398.2, 339.8)	(400, 330)
Z_3	(398.2, 339.8)	(564.9, 371.4)	

h_3	(564. 9, 371. 4)	(612. 6, 400. 1)	(550, 450)
Z_4	(612. 6, 400. 1)	(725. 1, 511. 4)	
h_4	(725. 1, 511. 4)	(730, 520)	(720, 520)
Z_5	(730, 520)	(730, 600)	
h_5	(730, 600)	(727. 7, 606. 4)	(720, 600)
Z_6	(727. 7, 606. 4)	(700, 640)	

表（6） $O \rightarrow C$ 方案二的线路和起始点坐标及圆弧圆心坐标

线路名称	起点坐标	终点坐标	圆弧圆心
Z_7	(0, 0)	(232. 1, 50. 2)	
h_6	(232. 1, 50. 2)	(238. 8, 55. 2)	(230, 60)
Z_8	(238. 8, 55. 2)	(391. 2, 334. 8)	
h_2	(391. 2, 334. 8)	(398. 2, 339. 8)	(400, 330)
Z_3	(398. 2, 339. 8)	(564. 9, 371. 4)	
h_3	(564. 9, 371. 4)	(612. 6, 400. 1)	(550, 450)
Z_4	(612. 6, 400. 1)	(725. 1, 511. 4)	
h_4	(725. 1, 511. 4)	(730, 520)	(720, 520)
Z_5	(730, 520)	(730, 600)	
h_5	(730, 600)	(727. 7, 606. 4)	(720, 600)
Z_6	(727. 7, 606. 4)	(700, 640)	

表 (7): $O \rightarrow C$ 方案三的线路和起始点坐标及圆弧圆心坐标

线路名称	起点坐标	终点坐标	圆弧圆心
Z_9	(0, 0)	(412.1, 90.2)	
h_7	(412.1, 90.2)	(418.3, 94.5)	(410, 100)
Z_{10}	(418.3, 94.5)	(491.7, 205.5)	
h_8	(491.7, 205.5)	(492.1, 206.1)	(500, 200)
Z_{11}	(492.1, 206.1)	(728, 514)	
h_4	(728, 514)	(730, 520)	(720, 520)
Z_5	(730, 520)	(730, 600)	
h_5	(730, 600)	(727.7, 606.4)	(720, 600)
Z_6	(727.7, 606.4)	(700, 640)	

综上所述, 经过比较我们可以知道方案三是 $O \rightarrow C$ 的最短路径, 其距离是 1090.80 个单位, 总时间为 223.333 秒。

5.2.4 模型四

对于 $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow O$ 我们通过逆序搜索考虑到有一种较短的路径。如图所示:

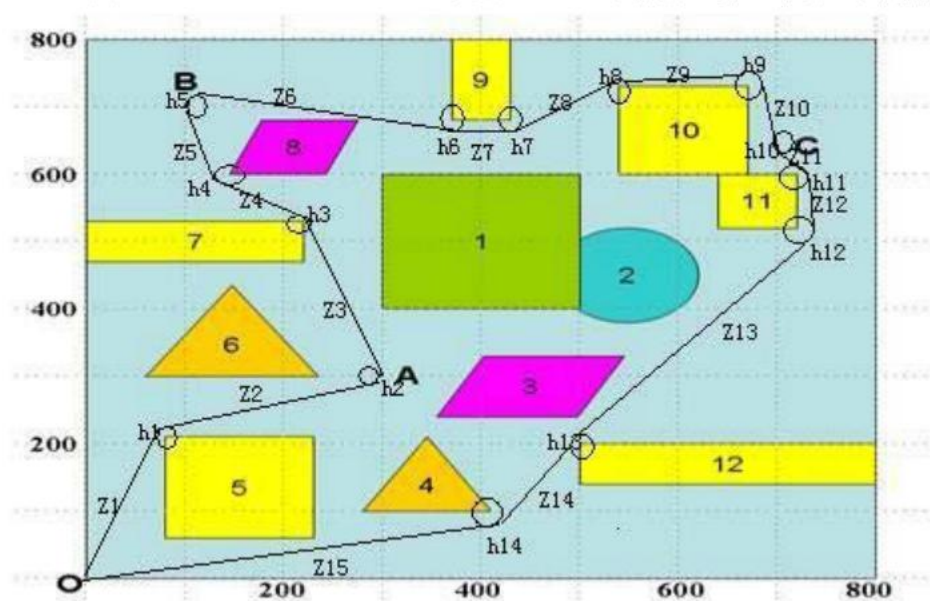


图 5.2.4

此模型的路径为 L_8 ，具体线路为：

$Z_1 \rightarrow h_1 \rightarrow Z_2 \rightarrow h_2 \rightarrow Z_3 \rightarrow h_3 \rightarrow Z_4 \rightarrow h_4 \rightarrow Z_5 \rightarrow h_5 \rightarrow Z_6 \rightarrow h_6 \rightarrow Z_7 \rightarrow h_7$
 $\rightarrow Z_8 \rightarrow h_8 \rightarrow Z_9 \rightarrow h_9 \rightarrow Z_{10} \rightarrow h_{10} \rightarrow Z_{11} \rightarrow h_{11} \rightarrow Z_{12} \rightarrow h_{12} \rightarrow Z_{13} \rightarrow h_{13} \rightarrow Z_{14}$
 $\rightarrow h_{14} \rightarrow Z_{15}$ 。如图所示，我们利用 MATLAB 求解，得到机器人从起点到目标点的总距离 C 为 2760.52 个单位。求解结果如下表所示。

表 (8): $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow O$ 的路线和起始坐标及圆弧圆心坐标

线路名称	起点坐标	终点坐标	圆弧圆心
Z_1	(0, 0)	(70.5, 213.1)	
h_1	(70.5, 213.1)	(76.9, 219.5)	(80, 210)
Z_2	(76.9, 219.5)	(293.1, 290.5)	
h_2	(293.1, 290.5)	(299.6, 302.9)	(290, 300)
Z_3	(299.6, 302.9)	(229.6, 532.9)	
h_3	(229.6, 532.9)	(225.5, 538.4)	(220, 530)
Z_4	(225.5, 538.4)	(144.5, 591.6)	
h_4	(144.5, 591.6)	(140, 599.3)	(150, 600)
Z_5	(140, 599.3)	(102.1, 693.8)	
h_5	(102.1, 693.8)	(111.5, 709.9)	(110, 700)
Z_6	(111.5, 709.9)	(368.5, 670)	
h_6	(368.5, 670)	(370, 670)	(370, 680)
Z_7	(370, 670)	(430, 670)	
h_7	(430, 670)	(427.4, 689.7)	(430, 680)
Z_8	(427.4, 689.7)	(534.4, 738.3)	
h_8	(534.4, 738.3)	(540, 740)	(540, 730)

Z_9	(540, 740)	(670, 740)	
h_9	(670, 740)	(679. 9, 731. 4)	(670, 730)
Z_{10}	(679. 9, 731. 4)	(692. 9, 641)	
h_{10}	(692. 9, 641)	(696. 1, 635)	(702. 8, 642. 4)
Z_{11}	(696. 1, 635)	(726. 7, 607. 4)	
h_{11}	(726. 7, 607. 4)	(730, 600)	(720, 600)
Z_{12}	(730, 600)	(730, 520)	
h_{12}	(730, 520)	(728, 514)	(720, 520)
Z_{13}	(728, 514)	(492. 1, 206. 1)	
h_{13}	(492. 1, 206. 1)	(491. 7, 205. 5)	(500, 200)
Z_{14}	(491. 7, 205. 5)	(418. 3, 94. 5)	
h_{14}	(418. 3, 94. 5)	(412. 1, 90. 2)	(410, 100)
Z_{15}	(412. 1, 90. 2)	(0, 0)	

综上所述，我们得到机器人 $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow O$ 的行走路线最短路径是距离为 2760. 52 个单位, 总时间为 576. 7452 秒。

5.3 问题二的解答

由 5.12 的一般最短时间路径的思路来解求从 O 点到 A 点最短时间路径。

分析速度 v 随圆弧半径 ρ 的增大而增大，且圆弧 l_i 也会随 ρ 增大而增大，因此建立

总时间 t 函数： $t = t_{\text{弯}} + t_{\text{直}}$ ，并通过多次迭代不断优化时间 t ；模型求解中我们通过改变

圆弧的半径和圆心的位置求解时间 t ，通过观察目标点、障碍物、起始点的位置，可得圆弧的圆心处于曲线内部，对障碍物 5 号分析，可确定圆弧的圆心坐标： $y=K-x$ ；圆弧的半径 r 在每个确定圆弧的圆心上不断变化，直到半径 r 超出范围为止，再沿函数 $y=K-x$ ，改变圆心位置并重复 r 变化，解得该 K 值下的最优解 t 。然后改变 K 值观察总时间 t 的变化趋势，推出优化值 t ，即时间优化路径。

通过 MATLAB（附录二）圆心坐标关系： $y=K-x$ ，解得不同 K 值下的时间 t （路径在障碍物左上方）如表（9）

表（9）：不同 K 值下机器人行走的时间（路径在障碍物左上方）

K	拐点圆心坐标	圆心半径	圆 O 切点	圆 A 切点	时间	总路程
270	(109, 161)	66.94	(44.039, 177.15)	(162.11, 120.25)	95	475.04
280	(93, 187)	36.42	(58.06, 197.28)	(80.7, 224.28)	94.58	472.89
290	(82, 208)	12.83	(69.82, 212.01)	(77.66, 220.07)	94.23	471.12
300	(103, 197)	36.42	(69.397, 208.59)	(91.64, 231.6)	94.54	472.70
310	(125, 185)	61.48	(66.55, 204.06)	(172.36, 145.798)	94.92	474.58
320	(145, 175)	83.82	(65.279, 200.9)	(220.2, 137.965)	95.35	476.73

通过 MATLAB 标关系: $y=K-x$, 解得不同 K 值下的时间 t (路径在障碍右下方) 如表（10）

表(10)：不同 K 值下机器人行走的时间（路径在障碍物右下方）

K	拐点圆心	圆心半径	圆 O 切点	圆 A 切点坐标	时间	总路程
250					103.91	
260					101.841	
270	(192,78)	52.048	(198.85,26.405)	(242.55,65.61)	100.8598	504.3
280	(211,69)	31.0238	(216.43,38.45)	(241.12,61.56)	100.2366	501.1832
290	(228,62)	12.83	(230.69,49.46)	(240.454,58.92)	99.722	498.587
300	(220,80)	32,36	(226.75,48.35)	(251.6491,73.25)	100.19	500.93
310	(212,98)	52.05	(222.76,47.08)	(263.276,89.07)	100.745	502.7268
330					102.101	
350					103.907	

综上所述，对表格中的时间趋势进行比较分析得：当通过障碍物上方时， $k=290$ 时间 $t_1=94.23$ 取最小值，同样，在障碍物下方时 $t_2=99.722$ 取最小值；然后比较两个最小值 $t_1 < t_2$ ，因此机器人从 $O(0, 0)$ 到 $A(300, 300)$ 绕障碍物左上方，其中拐点圆弧的圆心 $O(82, 208)$ ，半径 $r=12.83$ ，从 O 相切点 $(69.82, 212.01)$ 从点 A 相切点 $(77.66, 220.07)$ ，时间 $t=94.23$ ，总的路线长为 $C=471.12$ 。

6 模型结果的分析与检验

本文建立了在一个 800×800 的平面场景图中，一个在 origin $O(0, 0)$ 的机器人在该平面内活动，不能与平面场景中的障碍物发生碰撞的情况下从区域中的一点到达另一点的避障最短路径和最短时间的数学模型。对题中给出的具体 4 个点 O, A, B, C 利用最优化模型，对机器人从 O 出发到目标点的所有路径进行优化，得到从

$O \rightarrow A, O \rightarrow B, O \rightarrow C, O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow O$ 的最短路径长度，然后判断路线是否安全、无碰撞，检验结果符合要求。

7 模型的推广与改进方向

7.1 模型推广

本文运用了路径优化数学模型，设计出了机器人在这个 800×800 的平面场景中不与障碍物发生碰撞时从区域中一点到达另一点的避障最短路径和计算出了最短时间的路程。此模型用到了场势法、假设与修正法及拐角处曲线化等，该模型同样可以推广适用于航天航空、爬山、航海岛礁规避问题、山间道路规划问题等‘障碍物’规划化，第二问的障碍物规避且最优时间路径模型优于比赛问题例如：足球比赛，篮球比赛等群体赛事，同时该模型也是机器人足球比赛必考虑的模型。

7.2 改进方向

- (1) 该在选着登陆点时，可用人工势场法的函数的来确定。
- (2) 该模型在优化中用优化软件可更快，更方便求解；

8 模型的优缺点

8.1 模型的优点

- (1) 本模型在对问题的求解过程中运用多条路径多种方案进行求解，在相对优化之中取得最优解。
- (2) 本模型在优化后的路径求长度时用了解析几何的方式，结果的精确度较高。
- (3) 本模型简单易懂，便于实际中运用于操作。

8.2 模型的缺点

- (1) 该模型只是对现场情况已知条件下解求，不能在模糊的条件下用。
- (2) 该模型求解复杂，需要大量的迭代计算。
- (3) 模型型中对路径的选择，确定困难，没有普遍的方法。

参考文献

- [1]张法荣.障碍物群中近似最短路径的搜索算法.计算机工程,第25卷第三期.1999年3月.
- [2] 霍迎辉,张连明.一种移动机器人的路径规划算法.电子工程师世界网.2010,8.
- [3] 朱向阳,宁汉,熊有伦.凸多边形之间的为最小平移距离—机器人运动规划.中国科学(E),第31卷,第3期,2011,6.
- [4] 王景存,张晓彤,陈彬,陈和平,一种基于Dijkstra算法的启发式最有路径搜索算法.北京科技大学学报.第29卷第3期,2007,3.