

长江水质的评价和预测

摘要

本文采用物元分析法，综合水质各项评价参数建立了单一量化模型，对全流域及各地区近两年半的水质情况进行了分析，并给出了定量的水质污染状况评价。

然后通过分析流域内单一地区的污染来源，建立了地区污染模型，刻画了上游污水和本地区排污对本地区水质的综合影响；并利用该模型给出了长江干流近一年多主要污染物的污染源所在。

鉴于长江系统本身的复杂性，我们基于历史数据分别建立了线性回归和灰色模型 $GM(1,1)$ 、 $GM(1,N)$ 从而对长江水质进行预测，并定量地预测了未来十年各类水质河长的百分比的变化趋势。我们还利用 $GM(1,N)$ 模型得到了第 i 年处理后的废水水排放总量与该年干流上各等级水质河长百分比之间的函数关系。同时我们分别对线性回归模型及灰色模型的优缺点进行了分析评价，并给出了其各自的适用范围。

在污水处理的问题上，我们根据干流上要求达到的水质标准，建立最优化模型，给出了未来十年内每年需要处理的污水的最少量。

最后我们总结了长江水质的多角度分析结果，提出了重视支流和湖区污染治理的建议，并指出应从控制污染源开始，采取全流域群防群治策略。

利用物元分析法，我们得出对于长江水质的整体评级为二级偏三级，流域内各地区水质污染等级为：

攀枝花	朱沱	宜昌	岳阳城陵矶	九江	安庆	南京	乐山	
2	2	2	1	1	2	1	4	
宜宾	泸州	丹江口	长沙	岳阳岳阳楼	武汉宗关	南昌	九江蛤蟆石	扬州
4	5	1	2	2	2	5	1	2

根据我们预测的结果 2005 年各类水质河长所占的百分比如下：

					劣
8.772	39.8618	27.7546	11.8706	6.4726	13.1632

利用往年数据我们求得在 2005 年若要达到消除劣 Ⅴ 类水以及控制 Ⅳ 及 Ⅴ 类水的比例在 20% 以下的目标在当年需处理污水的量至少为 175.535 亿吨。

关键词：物元分析法 量化模型 线性回归 灰色模型

问题重述

长江是我国第一、世界第三大河流，长江水质的污染程度日趋严重，已引起了相关政府部门和专家们的高度重视。2004 年 10 月，由全国政协与中国发展研究院联合组成“保护长江万里行”考察团，从长江上游宜宾到下游上海，对沿线 21 个重点城市做了实地考察，揭示了一幅长江污染的真实画面，其污染程度让人触目惊心。

根据长江沿线 17 个观测站（地区）近两年多主要水质指标的检测数据，以及干流上 7 个观测站近一年多的基本数据（站点距离、水流量和水流速），以及“1995~2004 年长江流域水质报告”给出的主要统计数据。依据国标(GB3838-2002) 给出的《地表水环境质量标准》中 4 个主要项目标准限值及各类水质评定标准。

对下列问题进行研究：

- （1）对长江近两年多的水质情况做出定量的综合评价，并分析各地区水质的污染状况。
- （2）研究、分析长江干流近一年多主要污染物高锰酸盐指数和氨氮的污染源主要在哪些地区。
- （3）假如不采取更有效的治理措施，依照过去 10 年的主要统计数据，对长江未来水质污染的发展趋势做出预测分析，比如研究未来 10 年的情况。
- （4）如果未来 10 年内每年都要求长江干流的Ⅲ类和Ⅳ类水的比例控制在 20% 以内，且没有劣Ⅴ类水，那么每年需要处理多少污水。
- （5）对解决长江水质污染问题提出切实可行的建议和意见。

模型假设

1. 干流上观测站的水质污染来自本地区的排污和上游的污水排放两部分
2. 长江干流的自然净化能力认为是近似均匀的
3. 只针对攀枝花到南京这一段长江干流及部分支流进行分析

问题分析

对于长江水资源的保护和治理问题，利用国家地表水环境质量标准及题中已给出的长江流域观测站的水质检验报告，可以对长江各地区水质的污染状况做出初步分析。继而根据水质情况的综合评价及河流上下游相关资料，确定出长江干流主要污染物的污染源所在。同时在掌握了过去十年长江流域的水质统计数据的基础上，可以对未来长江水质污染的发展趋势建立预测模型，并根据预测结果制定相应的控制及污水处理措施。最终实现改善长江流域环境，减少污染危害，实现可持续性发展的目的。

对于水质综合评价这一问题，我们认为要综合溶解氧、高锰酸盐指数、氨氮、PH 值四方面的因素，建立一个合理均衡的水质评价函数，并将函数值作为水质评价的单一标准，从而对各地区近两年的水质污染状况进行分析评价。并根据不同地区的年平均流量，确定该地区对整个长江流域水质的影响情况，通过线性加权的方法对各地区水质情况进行综合，得到对长江近两年水质情况的整体评价。

高锰酸盐和氨氮是长江干流近一年多的主要污染物，因此找出二者的主要污染源所在对于污水处理方案的制定有着重要意义。根据表中数据，可以发现长江干流及支流上的各指标数值相差并不悬殊，但通过查阅相关资料[1]我们发现支流年均流量与年均上万的长江中下游干流流量相比较小，其携带的注入干流的污染物也相对较少，因此对于污染物主要来源这一问题，我们认为只需主要考虑上游干流污染物对本地造成的水质污染影响。

对未来一段时间长江水质污染的发展趋势做出预测分析时，应对于长江总流量、废水排放总量、污染严重的不可饮用水河长百分比等多方面的情况做出预测评价。

模型建立与求解

（一）物元模型

1.模型准备：

研究的事物、事物的特征、事物关于特征的量值构成了一个有序三元组，而物元分析则是在此基础上研究解决矛盾问题的规律和方法，可以将复杂问题抽象为形象化的模型，并应用这些模型研究基本理论，提出相应的应用方法。利用物元分析方法，可以建立事物多指标性能参数的质量评定模型，并能一定量的数值表示评定结果，从而能够较完整地反映事物质量的综合水平，并易于用计算机进行编程处理。[2]记所研究的事物为 M ，事物的特征为 C ，事物关于特征的量值为 X ，则组成有序三元组

$$R = (M, C, X)$$

为物元， M 、 C 和 X 称为物元 R 的三要素，如果对事物 M 用 n 个特征 $C_1, C_2 \dots C_n$ 及其相应的量值 X_1, X_2, \dots, X_n 来描述，则称为 n 维物元，记做：

$$R = \begin{bmatrix} N, & C_1, X_1 \\ & C_2, X_2 \\ & \vdots & \vdots \\ & C_n, X_n \end{bmatrix}$$

标准事物物元矩阵为：

$$R_0 = \begin{bmatrix} M_0, & Q_1, X_{01} \\ & Q_2, X_{02} \\ & \vdots & \vdots \\ & Q_n, X_{0n} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} M_0, Q_1, [a_{01}, b_{01}] \\ Q_2, [a_{02}, b_{02}] \\ \vdots \\ Q_n, [a_{0n}, b_{0n}] \end{bmatrix} \quad \text{式中, } M_0 \text{ 为评价事物, } Q_i \text{ 为事物评价要素,}$$

$X_{0i} = [a_{0i}, b_{0i}]$ 为经典域, 即各要素的量值范围

节域事物是指评价因素能基本满足要求, 量值范围较标准事物扩大化了的事物, 它包括标准事物和可以转化为标准事物的事物。节域事物物元矩阵为:

$$R = \begin{bmatrix} M, Q_1, X_{p1} \\ Q_2, X_{p2} \\ \vdots \\ Q_n, X_{pn} \end{bmatrix} \quad \text{式中, } M \text{ 为节域事物, } X_{pi} = [a_{pi}, b_{pi}] \text{ 为节域}$$

$$= \begin{bmatrix} M, Q_1, [a_{p1}, b_{p1}] \\ Q_2, [a_{p2}, b_{p2}] \\ \vdots \\ Q_n, [a_{pn}, b_{pn}] \end{bmatrix}$$

被评价事物物元矩阵为

$$R_B = \begin{bmatrix} M_B, Q_1, X_1 \\ Q_2, X_2 \\ \vdots \\ Q_n, X_n \end{bmatrix} \quad \text{其中 } M_B \text{ 为被评价事物, } X_i \text{ 为 } M_B \text{ 关于 } Q_i \text{ 的量值}$$

同时我们构造适当关联函数, 从而对事物符合一事物标准等级的程度进行判定。

2.符号说明

N_i	第 i 类等级水的水质情况
R_i	关于第 i 等级水质的物元矩阵
C_i	水质第 i 个评价参数
m	水质评价等级数
n	水质特征值数

S_{ij}	水质关于评价参数 i 的等级 j 的标准值
$< a_{ij}, b_{ij} >$	水质关于评价参数 i 的等级 j 的量值区间
K_i	第 i 个评价要素的关联函数
α_i	各评价要素的权系数
X_{ij}	某地 j 水环境关于评价参数 i 的实际监测值
X_j	某地区 j 的水质监测情况
u_i	第 i 种污染物
Q_i	第 i 个观测站处的流量

3. 模型建立

我们采用超标加权法求单因素关于水质污染的权系数，我们定义环境质量分指数

$p_i = \frac{X_i}{S_i}$ 表示水环境中污染物 u_i 的浓度超标倍数，因为对于不同等级，污染物 u_i 具有

不同的允许浓度 $s_{i1}, s_{i2} \dots$ ，所以定义 $S_i = \sum_{j=1}^m S_{ij}$ 为平均允许浓度。 p_i 越大则说明 u_i 对

水环境污染的贡献也越大。我们再对 p_i 进行归一化处理，即得到归一化的权数

$$\alpha_i = \frac{p_i}{\sum_{i=1}^n p_i}$$

同时我们需要构造关联函数对各地区的水质等级进行判定，从而分析各地区的水质污染状况。为了计算简便，我们选取线性关联函数构造诸要素的关联函数。各评价要素

的关联函数表示为 $K_j(x_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$)，则综合关联函数为 $K_j(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i * K_j(X_i)$ ，

关联度 $K(x)$ 的大小表示事物符合标准事物等级 j 的情况，其值越大，符合该等级程度

越高。其中 $K_j(x_i)$ 的表示形式为：

当 $j=1$ 时 ,

$$K(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x_i \leq S_{i,j} \\ \frac{S_{i,j+1} - x_i}{S_{i,j+1} - S_{i,j}} & S_{i,j} < x_i < S_{i,j+1} \\ 0 & x_i > S_{i,j+1} \end{cases}$$

当 $1 < j < m$ 时 ,

$$K(x) = \begin{cases} \frac{S_{i,j} - x_i}{S_{i,j} - S_{i,j-1}} & S_{i,j-1} < x_i \leq S_{i,j} \\ \frac{S_{i,j+1} - x_i}{S_{i,j+1} - S_{i,j}} & S_{i,j} < x_i < S_{i,j+1} \\ 0 & etc. \end{cases}$$

当 $j=m$ 时 ,

$$K(x) = \begin{cases} 0 & x_i \leq S_{i,j-1} \\ \frac{x_i - S_{i,j-1}}{S_{i,j} - S_{i,j-1}} & S_{i,j-1} < x_i < S_{i,j} \\ 1 & x_i \geq S_{i,j} \end{cases}$$

首先根据水质分级标准表 :

	类	类	类	类	类	劣 类
溶解量(DO)	7.5	6	5	3	2	0
高锰酸盐指数(CODMn)	2	4	6	10	15	
氨氮 (NH ₃ -N)	0.15	0.5	1.0	1.5	2.0	
PH 值 (无量纲)	6---9					

可得到各等级水质的标准物元矩阵及节域矩阵 (由于水质评价等级较多 , 因此在这里我们只列出 . 级水的节域事物矩阵 , 其余等级的情况在附录中给出) 为 :

$$R_1 = \begin{bmatrix} N_i, DO, <0, 0.2667> \\ COD, <0, 0.1333> \\ NH_3-N, <0, 0.0750> \\ PH, <0.667, 1> \end{bmatrix}, R_2 = \begin{bmatrix} N_i, DO, <0.2667, 0.4667> \\ COD, <0.1333, 0.2667> \\ NH_3-N, <0.0750, 0.2500> \\ PH, <0.667, 1> \end{bmatrix}$$

同时我们也使用了相同的方法对测量数据进行了归一化 , 得到各测量点的归一化物元矩阵。

4. 模型求解

分析至此，我们可以利用题目所给的水文数据对问题进行计算，定量给出各地区的水质情。在水文数据处理过程中，由于长江各地区的水文数据均为月监测结果，时间间隔较小，一般情况下可采用多次监测的平均值作为该水质参数，但我们对该流域的水文参数作图发现其变化较为剧烈，为了突出污染较为严重时期的水文参数对该地区水质污染情况的影响，我们采用内梅罗平均值作为该水质的参数[3]，下式为内梅罗表达式的平均值：

$$\bar{x}_i = \left(\frac{x_{i \max}^2 + \bar{x}_i}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

利用该式计算得出该地区两年来的水质参数为：

单位：mg/L

序号	点位名称	pH*	D0	CODMn	NH3-N
1	四川攀枝花	8.486071	8.063527	4.643561	0.872306
2	重庆朱沱	8.211162	8.156019	3.446376	0.503479
3	湖北宜昌南津关	8.030055	7.569382	4.577424	0.483087
4	湖南岳阳城陵矶	7.990236	7.656994	5.016554	0.383275
5	江西九江河西水厂	8.017634	7.015482	2.897237	0.222052
6	安徽安庆皖河口	7.598156	6.766918	3.976847	0.319772
7	江苏南京林山	7.776005	6.73389	3.067576	0.237115
8	四川乐山岷江大桥	7.829695	4.589129	7.921412	1.545106
9	四川宜宾凉姜沟	8.440416	7.56062	5.978467	1.446583
10	四川泸州沱江二桥	8.020972	5.239863	5.10445	3.931221
11	湖北丹江口胡家岭	8.283063	8.27273	2.243484	0.118512
12	湖南长沙新港	7.363779	5.890149	3.88515	1.230902
13	湖南岳阳岳阳楼	8.149642	7.010678	5.952733	0.692378
14	湖北武汉宗关	8.003948	6.093521	4.788822	0.341032
15	江西南昌滁槎	8.255446	4.077012	6.572695	17.42278
16	江西九江蛤蟆石	7.998222	6.948476	7.02314	0.515238
17	江苏扬州三江营	7.996869	6.572093	4.313875	0.395507

利用超标系数法，我们计算得出各地区各指标的权数，从而利用物元分析模型得到各地区的水质等级；同时我们将各地水文参数与各评价参数不同等级的标准值比较，给出了污染程度较为严重地区的主要污染物。各地区具体水质污染分析见下表：

序号	点位名称	断面情况	水质等级	主要污染指标
1	四川攀枝花	干流	2	
2	重庆朱沱	干流（川-渝省界）	2	
3	湖北宜昌南津关	干流（三峡水库出口）	2	
4	湖南岳阳城陵矶	干流	1	
5	江西九江河西水厂	干流（鄂-赣省界）	1	
6	安徽安庆皖河口	干流	2	
7	江苏南京林山	干流（皖-苏省界）	1	
8	四川乐山岷江大桥	岷江（与大渡河汇合前）	4	溶解氧、高锰酸钾指数、氨氮
9	四川宜宾凉姜沟	岷江（入长江前）	4	氨氮
10	四川泸州沱江二桥	沱江（入长江前）	5	氨氮
11	湖北丹江口胡家岭	丹江口水库（库体）	1	
12	湖南长沙新港	湘江（洞庭湖入口）	2	氨氮
13	湖南岳阳岳阳楼	洞庭湖出口	2	
14	湖北武汉宗关	汉江（入长江前）	2	
15	江西南昌滁槎	赣江（鄱阳湖入口）	5	溶解氧、高锰酸钾指数、氨氮
16	江西九江蛤蟆石	鄱阳湖出口	2	高锰酸钾指数
17	江苏扬州三江营	夹江（南水北调取水口）	2	

5. 问题一回答

对于长江地区综合水质情况，由于题中只给出了从上游攀枝花地区到下游南京地区的数据，因此我们只对这一区间内的水质情况进行分析。且各地区的流量不同，对于整个长江水量的贡献也不同，因此我们根据各地区不同评价参数数值及该地区水流量这两方面的因素对长江流域的水质做出如下综合评价：长江整个水域第 i 种评价参数的平均

$$\text{浓度 } \overline{X_i} = \frac{\sum_{j=1}^N Q_j * X_{ij}}{\sum_{j=1}^N Q_j}, \text{ 根据上式算出的浓度，结合物元模型，便可得：}$$

长江干流进两年多的水质总体情况为二级，但长江各支流的污染情况较为严重，因此若考虑支流的状况长江流域总体水质等级为二偏三级。在总流域范围的 17 个点位内，

共有 4 个地区水质情况为一级, 9 个为二级, 2 个为四级, 2 个为五级。干流污染程度相对较轻, 七个观测点处, 3 个所处地区水质达一级标准, 其余 4 个也达到二级标准。一类水区域占总评价干流河长的 29.58%。

(二) 地区污染模型

1. 模型假设

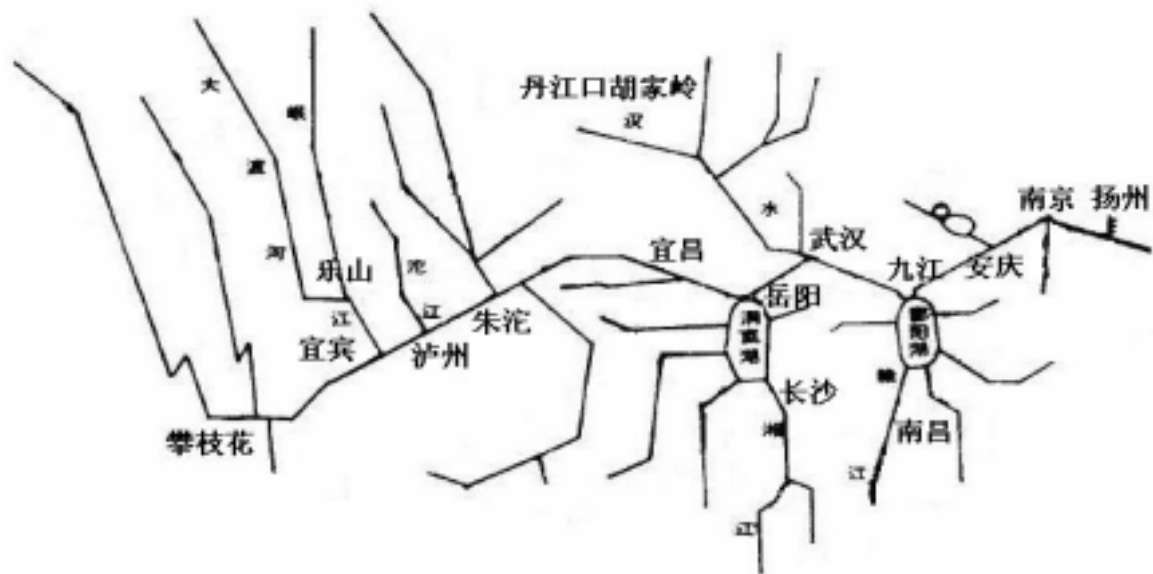
- (1) 降解系数反映的是水中污染物含量随时间的变化情况。
- (2) 高锰酸盐和氨氮均可溶于水, 不考虑其在水中的沉积问题。
- (3) 认为攀枝花上游地区污染状况为 0。
- (4) 某地区的污染物均集中在该地区观测站处排放。
- (5) 支流入水口是干流检测点之间唯一可能出现的污染物排放处。

2. 符号约定

β	降解系数
$h(i)$	长江干流沿线第 i 个观测站的本地排污量
$g(i)$	长江干流沿线第 i 个观测站污染物观测值
d_{ij}	长江干流沿线第 i 和 j 个观测站间的距离
$l(ij)$	注入干流第 i 个观测站的第 j 条支流的排污量
z_i	注入干流第 i 个观测站的支流数
D_j	注入干流某检测站的第 j 条支流与该检测站间距离
\bar{v}_i	干流第 $i-1$ 、 i 个站点间的平均流速

3. 模型建立

通常我们认为一个观测站(地区)的水质污染主要来自于本地区的排污和上游的污水。因此, 首先根据长江地区流域图确定各观测站的上下游关系:



图中已标识出 17 个观测站的具体位置，从而方便我们讨论上下游间的相互影响。

江河自身对污染物都有一定的自然净化能力，即污染物在水环境中通过物理降解、化学降解、生物降解等使水中污染物浓度降低，降解系数反映的即为江河的自然净化能力。根据检测长江干流的自然净化能力是近似均匀的，而长江水域主要污染物高锰酸盐和氨氮的降解系数均通常介于 0.1-0.5 之间，所以我们取 0.2 作为长江主要污染物的降解系数。

考虑上游污水对本地区造成的污染影响时，我们采取“纵向离散，横向混合”的方法进行分析。即假设长江流域上的各污染物排放处均集中在各观测站及主要支流入口处；两个相邻观测站之间的水域排放污水量为零。

因此对于长江干流某观测站的污染状况进行分析时，我们给定如下分析准则：

本地污染物检测值 = 本地污染物排放量 + 干流上游观测点排污量降解后影响
+ 与干流上游节点间汇入的支流排污量降解后影响

数学表达式即为：

$$g(i) = h(i) + \sum_{k=1}^{i-1} h(k) * \beta^{\frac{d_{ik}}{v_i}} + \sum_{k=1}^z l(ik) * \beta^{\frac{D_k}{v_i}} \quad (2-1)$$

3. 模型简化与求解

模型由于题目中缺乏有关支流入水口处流量流速的资料，我们认为在干流第 $i-1$ 和 i 个观测站间汇入的支流的污染物排放量应记入本地排放的污水量，所以只需对干流上个检测点的污染物排放情况进行计算即可。另一方面，干流的自然净化能力是近似均匀的，因此 (2-1) 式可简化为：

$$g(i) = h(i) + g(i-1) * \beta^{\frac{d_{ii-1}}{v_i}} \quad (2-2)$$

利用（2-2）式可从长江干流上的第一个检测站起递推计算出各地区的污染物排放量。为避免同一地区在一年当中不同时间污染物排放量差异较大的情况，我们对长期的情况进行综合考虑，使用一年污染物排放总量的大小作为污染源的判断依据。

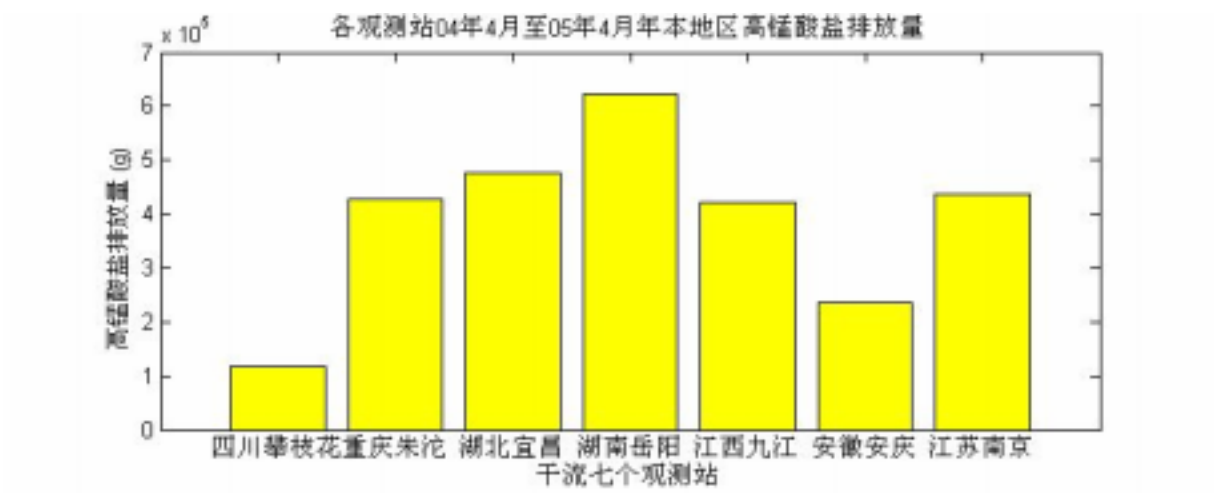
问题二回答

利用此模型，代入近一年多污染物浓度，干流流量，流速，观测点间距离，计算出高锰酸盐和氨氮在各干流观测点的年排放总量。

3.1 各观测点的高锰酸盐年排放总量

地区	攀枝花	朱沱	宜昌	岳阳	九江	安庆	南京
高锰酸盐排放总量（g）	116818	426948	476246	622364	422453	236633	436755

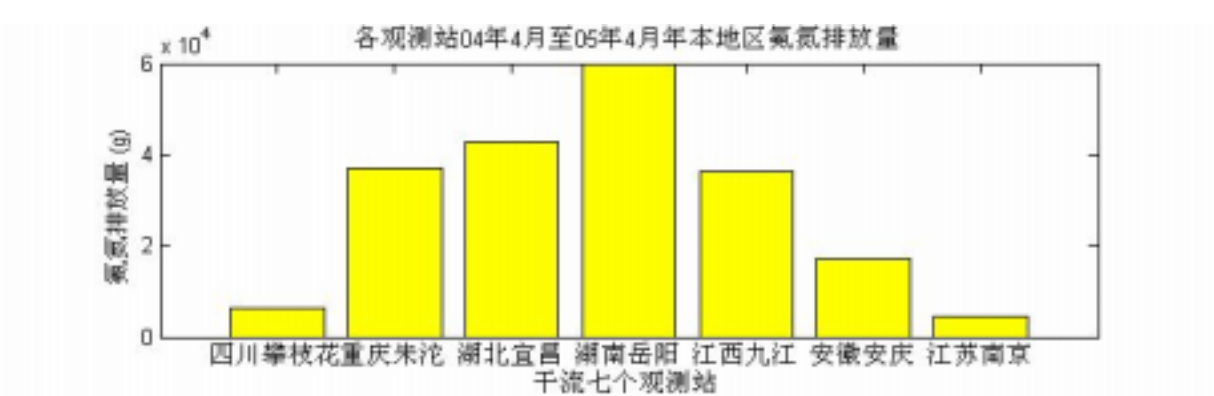
比较各地区数据发现湖南岳阳城陵矶地区年高锰酸盐排放总量最大，因此我们认为高锰酸盐的主要污染源分布在该地区。



3.2 各观测点的氨氮年排放总量

地区	攀枝花	朱沱	宜昌	岳阳	九江	安庆	南京
氨氮排放总量（g）	6261	36934	42849	59862	36368	16999	4444

比较各地区数据发现湖南岳阳城陵矶地区氨氮排放总量最大，因此我们认为氨氮的主要污染源分布在该地区。



(三) 线性回归预测模型

1. 模型假设

(1) 未来十年内长江地区为发生特大洪水等灾害，长江总流量保持不变

2. 符号约定

$y(t)$ t 时刻非饮用水河长占评定河长的百分比

λ_1 $y(t)$ 关于长江总流量的权系数

λ_2 $y(t)$ 关于废水排放总量的权系数

$S(t)$ t 时刻长江总流量

$r(t)$ t 时刻时废水排放总量

Q $y(t)$ 关于时间变化公式的常数项

3. 模型建立

根据题目附件 4 中给出的过去十年长江的主要统计数据，需要我们对长江未来水质污染的发展趋势做出预测分析。根据国家《地表水环境质量标准》，水质等级属于 1. 2. 3 类的为可饮用水，污染程度较轻，因此我们用 4. 5 类及劣五类水的综合情况即非饮用水河长占评定河长的百分比代表长江污染水质比例，并结合长江流域废水排放总量作为长江水质污染状况；对其发展趋势进行预测分析。

由于长江流域的污水排放主要来源是沿岸的工农业废水和城市生活废水，排放的废水量会随经济产量的增加而增加，我们认为二者的变化量呈线性关系，因此具有共同的变化率，所以我们可以用通过相关资料[4]得出的起始时刻长江流域 GDP 增长值作为废水排放量的固有增长率。我们记初始时刻时的污水总排量为 r_0 ，在题目给定的不采取更有效的治理措施的前提下，废水排放总量越大，单位时间内其增长量也必然越大，二者之间存在的固有增长率为 k 。同时，另一方面水域环境的承载能力是有限的，水质恶劣会影响到沿岸城市的生活质量，进而影响工农业，最终导致该承载能力对经济的增长起到阻滞作用，即对废水排放量的增长有阻滞作用。当废水排放总量越接近该流域水环境最大承载废水量 r_m 时，阻滞作用越明显，因此我们选用 Logistic 模型对废水排放总量进行描述。

而当废水排放总量一定时，长江总流量越大，各污染物质的浓度越低，相应水质状况越好，非饮用水河长会随之减小，其在评价河长中所占百分比也会相对较小。若流域

总水流量一定时，向该水域排放的废水总量应与各污染物浓度成正比，非饮用水占评价河长的百分比也会相应随该因素的取值变化线性增长。另一方面由于水环境的复杂性，水质污染状况还会受到其他一些相对稳定的不明因素的影响，在这里，我们添加常数项 Q 反应这一部分因子的作用。同时考虑到总流量与污水排放总量的单位及数据数量级均不同，因此我们对这两方面的数据先进行归一化处理，再考虑其对于水质污染状况的加权作用，其中 $S(t)$ 与河长百分比成反比关系，因此对其倒数进行归一化处理，结果

用 $\frac{1}{S(t)}$ 表示， $r(t)$ 归一化结果用 $\tilde{r}(t)$ 表示，最终我们构造近似公式：

$$y(t) = \lambda_1 * \frac{1}{S(t)} + \lambda_2 * \tilde{r}(t) + Q \quad (3-1)$$

对非饮用水占评价河长的百分比进行预测分析。

基于上述分析我们最终建立的如下微分预测模型：

$$\begin{cases} \frac{dr(t)}{dt} = k * r(t) \left(1 - \frac{r(t)}{r_m} \right) \\ r(0) = r_0 \\ y(t) = \lambda_1 * \frac{1}{S(t)} + \lambda_2 * \tilde{r}(t) + Q \end{cases}$$

4. 模型求解

预测分析步骤如下：

Step 1：运用分离变量法得到废水总排量的表达式为：

$$r(t) = \frac{r_m}{1 + \left(\frac{r_m}{r_0} - 1 \right) e^{-kt}}$$

Step 2：为了分析长江整体水质的发展情况，我们对全流域水文数据进行分析；由于每年枯水期、丰水期及平水期的水文数据波动较大，规律性较差；因此我们选用近十年的长江水域报告中水文年的全流域数据（一年内所有检测数据的平均值）作为水质污染状况发展趋势预测的依据。

Step 3：由于已知资料给出的均为年平均水文状况，因此我们将微分模型离散化，只对每一年的水质状况进行预测分析评价，不针对瞬时的水文情况进行考虑。

Step 4：通过查阅相关资料[4]，我们发现 94 年左右时，长江流域地区的 GDP 增长率为 14.98%，我们将其作为废水总排污量的固有增长率即 k 计算的初值，并利用附件

4 中的统计数据得出初始时刻污水总排量 r_0 及过去十年中每年的废水排放总量，进行曲线拟合，得到该水域的承载能力及废水排放总量固有增长率。从而可以分别预测出未来十年的废水排放总量。

Step 5：分析过去十年长江总流量数据的变化规律，预测未来十年的长江总流量。

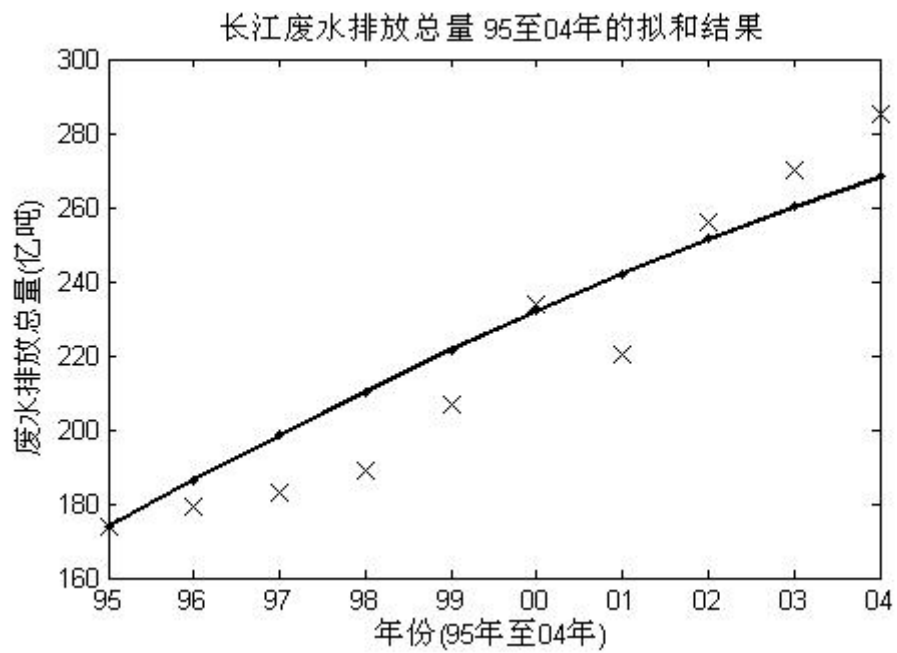
Step 6：以题目所给过去十年数据为样本，利用多元线性回归求取非饮用水河长百分比近似公式，得到参数 λ_1, λ_2, Q 的具体数值。

Step 7：利用长江总流量及废水排放总量的预测情况，结合式 (3-1)，给出未来十年的水文年长江非饮用水河长占评价河长的百分比。

5. 问题三回答

利用 Logistic 模型对过去十年的废水排放总量进行曲线拟合，得到废水排放总量固有增长率为 15%，水环境所能容纳的废水排放饱和值为：330.9 亿吨/年

曲线拟合情况如图所示：

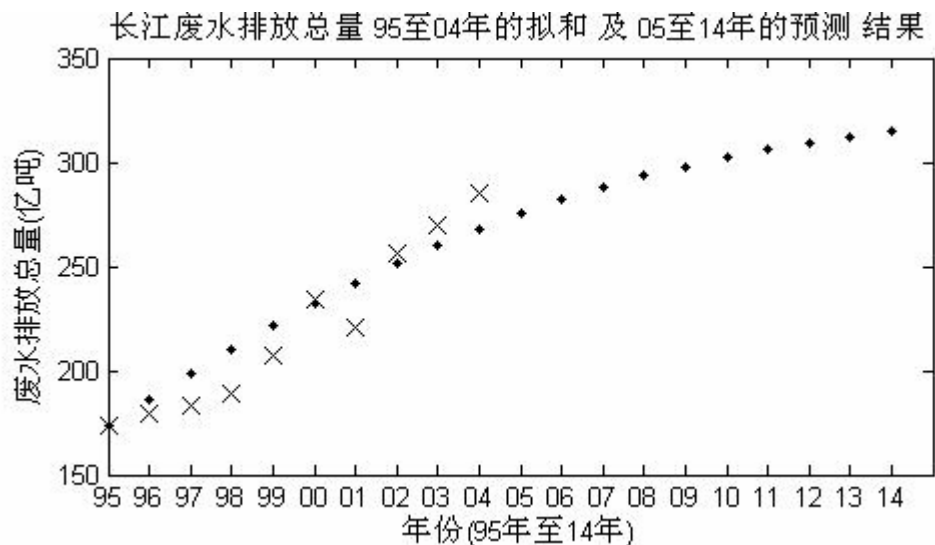


通过观察，可以发现曲线拟合结果与过去十年废水排放总量吻合情况较好，因此我们认为选用 Logistic 模型能够较好的刻画废水排放总量的变化情况。

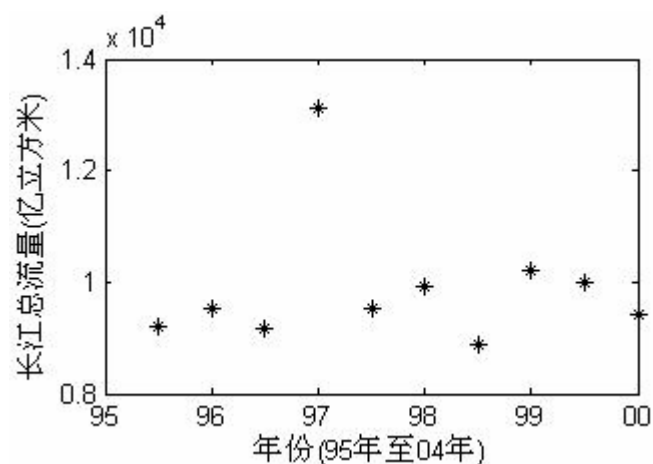
在得到主要参数值的基础上，我们对未来十年长江废水排放总量进行预测分析，得到如下数据：

年份	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
水文年废水排放总量(亿吨)	275.5	282.1	288.0	293.3	298.0	302.2	305.9	309.1	312.0	314.5

水文年废水排放总量的发展趋势预测曲线如下图所示：



为了对长江每年总流量情况进行分析，我们首先绘制了过去十年长江总流量的散点图（如下）：



从图中可以看出，除 98 年外，其余年份长江总流量的变化情况并不剧烈，其原因是 98 年长江流域发生特大洪涝灾害，导致总流量远高于其他年份。因此可以认为没有强烈自然灾害时，各水文年长江总流量应为 $[0.85, 1.05]$ 区间上的一随机值。因为 98 年的总流量数据偏离此区间较远，因此在对过去十年的总流量进行分析计算时将 98 年的数据舍弃不用。

因此我们选用矩估计法预测未来十年的水文年总流量，得到如下数据：

年份	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
总流量 (亿立方米)	9523.9	9736.5	9082.3	9956.1	9371.2	9793.6	9658.3	9127.5	9835.1	10056.7

对过去十年各水文年长江总流量倒数及废水排放总量进行归一化处理得到：

年份	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
总流量倒数	0.9661	0.9348	0.9696	0.9348	0.8961	1.0000	0.8710	0.8911	0.9455	0.9661
废水排放总量	0.5258	0.5409	0.5530	0.6256	0.7072	0.6664	0.7736	0.8160	0.8613	0.5258

以归一化数据作为样本，我们利用 Matlab 对多元线性回归模型进行求解，得到式 (3-1) 中的各参数取值情况为：

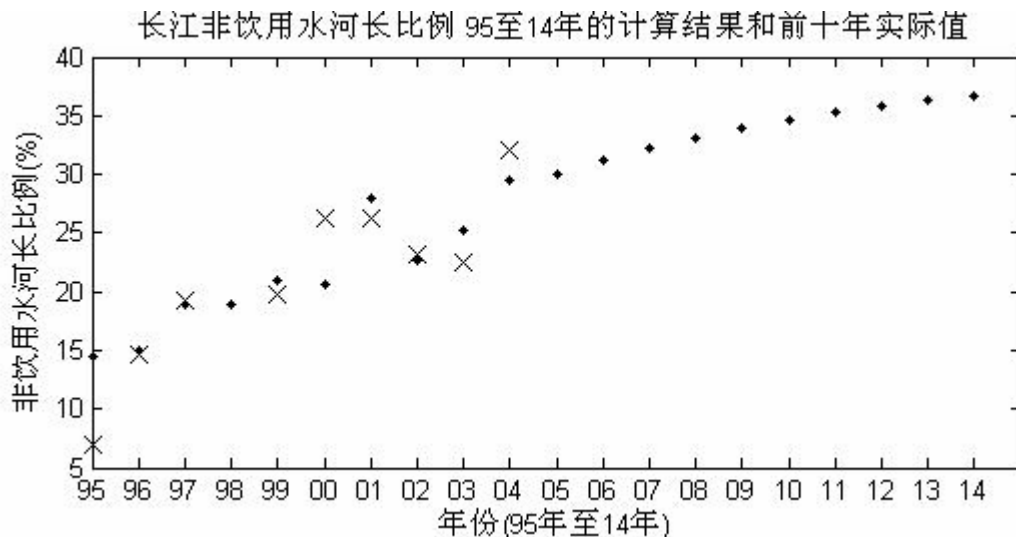
$$\begin{cases} \lambda_1 = 49.9704 \\ \lambda_2 = 56.5356 \\ Q = -66.8754 \end{cases}$$

式 (3-1) 进行离散化且代入各参数取值后的具体表达形式即为：

$$y(n) = 49.9704 * \frac{1}{S(n)} + 56.5356 * \tilde{r}(n) - 66.8754 \quad (3-2)$$

我们将未来十年的总流量及废水排放总量进行归一化处理后的结果代入 (3-2) 式，即可得到未来十年的水文年全流域非饮用水河长占评价河长百分比情况为：

年份	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
百分比 (%)	30.06	31.19	32.20	33.11	33.91	34.63	35.26	35.82	36.30	36.73



6. 问题四回答

利用线性回归模型求解非饮用水百分比近似公式的方法，可以拓展至各等级水质河长百分比的求解。而且对该近似公式的形式进行变换，即可在已知某等级水质的河长百分比的前提下，求解出相应的最大废水排放流量。

类似于多元统计回归方法在问题 3 中的应用，在问题 4 种，使用附件 4 给出的 95 年至 04 年的长江总流量、废水排放总量、干流 IV、V 类水河长比例等数据，得出统计回归的系数向量(49.2729 42.6323 -59.0336)，从而得到长江总流量的倒数、废水排放总量与 IV、V 类水河长比例之间的线性关系表达式为

$$y(t) = 49.27 * \frac{1}{S(t)} + 42.6323 * \tilde{r}(t) - 59.03\%$$

问题 4 要求把长江干流 IV 类和 V 类水的比例控制在 20%以内，假设长江总流量在未来 10 年内趋于定值，该值可由 95 年至 04 年取平均得到，因此利用

$$y(t) = \lambda_1 * \frac{1}{S(t)} + \lambda_2 * \tilde{r}(t) + Q \text{ 建立不等式：}$$

$$\tilde{r}(t) \leq \frac{y(t) - Q - \lambda_1 * \frac{1}{s(t)}}{\lambda_2}, \text{ 即 } r(t) \leq \frac{y(t) - Q - \lambda_1 * \frac{1}{s(t)}}{\lambda_2} * r_m$$

代入参数值：Q=-59.03%， $\lambda_1=49.27$ ， $\lambda_2=42.63$ 可解该不等式得到满足长江干流 IV 类和 V 类水的比例在 20%以内条件下的废水最大排放量 256.8230 亿吨。

利用前面 Logistic 模型求出的未来 10 年废水排放总量值，即可求出满足长江干流 IV 类和 V 类水的比例在 20%以内条件下，每年需要处理的污水量。

年度	污染需处理量（亿吨）
2005	18.6511
2006	25.2319
2007	31.1530
2008	36.4522
2009	41.1718
2010	45.3575
2011	49.0554
2012	52.3114
2013	55.1700
2014	57.6730

由于附件 4 劣 5 类水河长比例信息缺乏且数据量少，使用多元统计回归的方法，计算出来的结果不能很好的反映各变量间实际的关系。

(四) 灰色预测模型

长江是一个很复杂的庞大的系统，这类系统的内部因素往往难以识别，各种因素相互之间的关系较为隐蔽，因此对于这类系统我们根据具体灰色系统的行为特征数据，充分利用数量不多的数据和信息寻求相关因素自身与各因素之间的数学关系，建立相应的数学模型。灰色模型（Grey Model）则是利用离散随机数经过生成变为随机性被显著削弱而且较有规律的生成数，建立起的微分方程形式的模型，从而便于对其内部变化过程进行研究和描述。

1. GM(1, 1)模型

根据我们的观察，各类水质流域的长度是不稳定的，但是各类水质流域长度占总流域的百分比却是相对稳定的。因此我们就各类水质流域的百分比自身建立了最简单的GM(1, 1)灰度模型。

1.1 建模准备

首先，为了保证灰度建模方法的可行性，需要对已知数据列作必要的检验处理。设参考数据为 $x^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$ ，计算数列的级比

$$\lambda(k) = \frac{x^{(0)}(k-1)}{x^{(0)}(k)} \quad (k=2, 3, \dots, n)$$

如果所有的级比 $\lambda(k)$ 都落在可容覆盖 $X = \left(e^{-\frac{2}{n+1}}, e^{\frac{2}{n+1}} \right)$ 内，则数列 $x^{(0)}$ 可以作为

模型 GM(1, 1) 和进行数据灰色预测。否则，需要对数列 $x^{(0)}$ 作必要的变换处理，使其落入可容覆盖内。即取适当的常数 c ，做平移变换

$$y^{(0)}(k) = x^{(0)}(k) + c \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

则使数列 $y^{(0)} = (y^{(0)}(1), y^{(0)}(2), \dots, y^{(0)}(n))$ 的级比

$$\lambda(k) = \frac{y^{(0)}(k-1)}{y^{(0)}(k)} \in X \quad (k=2, 3, \dots, n)$$

1.2 模型建立

GM(1, 1) 表示模型是一阶的，且只含 1 个变量的灰色模型。我们选取各年第 i 级水质水域百分比的数据 $x_i^{(0)}(t)$ 进行研究。

设 $x^{(0)}$ 为 n 个元素的数列 $x^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$ ， $x^{(0)}$ 的累加生成数列为

$$x^{(1)} = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n)),$$

其中 $x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^n x^{(0)}(i)$ ($k=1, 2, \dots, n$) 则定义 $x^{(1)}$ 的灰导数为

$$d(k) = 0.5x^{(1)}(k) + 0.5x^{(1)}(k-1)$$

令 $z^{(1)}$ 为数列 $x^{(1)}$ 的均值数列，即

$$z^{(1)} = 0.5x^{(1)}(k) + 0.5x^{(1)}(k-1) \quad (k=2, 3, \dots, n),$$

则 $z^{(1)} = (z^{(1)}(2), z^{(1)}(3), \dots, z^{(1)}(n))$.

于是定义 GM(1, 1) 的灰微分方程模型为：

$$d(k) + az^{(1)}(k) = b,$$

$$\text{即 } x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b$$

其中 $x^{(0)}(k)$ 称为灰导数， a 称为发展系统， $z^{(1)}(k)$ 称为白化背景值， b 称为灰作用量

将时刻 $k=2, 3, \dots, n$ 代入表达式，可得

$$\begin{cases} x^{(0)}(2) + az^{(1)}(2) = b \\ x^{(0)}(3) + az^{(1)}(3) = b \\ \dots\dots\dots \\ x^{(0)}(n) + az^{(1)}(n) = b \end{cases}$$

$$\text{令 } Y_N = (x^{(0)}(2), x^{(0)}(3), \dots, x^{(0)}(n))^T, u = (a, b)^T, B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 \\ -z^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix},$$

称 Y_N 为数据向量， B 为数据矩阵， u 为参数向量，则 GM(1, 1) 可以表示为矩阵方程

$$Y_N = B \bullet u$$

如果存在 $(B^T B)^{-1}$ ，则根据最小二乘原理有

$$\hat{u} = (\hat{a}, \hat{b})^T = (B^T B)^{-1} B^T Y_N$$

$x^{(1)}(t)$ 满足一阶常微分方程： $\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b$ 则 $x^{(1)}(t) = [x^{(1)}(t_0) - b/a] * e^{-a(t-t_0)} + b/a$

根据上式可得 $x^{(1)}(t)$ 的递推关系

$$x^{(1)}(t+1) = (x^{(1)}(1) - b/a) * e^{-at} + b/a$$

上式也称为灰度模型的白化，即由一个不确定的未知系统转化为一参数确定的确定系统。这也就是建立灰度模型的立意所在。

1.3 模型求解

我们对于不同时间各段内里程的百分比分别采用灰度模型进行求解（假设初始时刻为 1，即 1995 年，且单位间隔为一年）。由于所给的数据并不全满足灰度模型的适用条件，再代入计算之前对于数据进行了预处理，求得

$$\hat{u} = \begin{pmatrix} 0.0473 & -0.0241 & 0.0218 & -0.004 & -0.0374 & -0.0773 \\ 43.3597 & 62.4088 & 110.8734 & 30.7436 & 9.7951 & 10.4251 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{pmatrix}$$

$$\text{则 } x_i^{(1)}(t+1) = (x_i^{(1)}(1) - b_i/a_i) * e^{-a_i t} + b_i/a_i$$

根据该模型可求得在自由污染状况下，自 2005 年起各年度长江全流域各类河段长度的百分比如下所示

等级 \ 年度	2005	2006	2007	2008	2009
I	0.008772	0	0	0	0
II	0.398618	0.410949	0.418734466	0.425485	0.431194
III	0.277546	0.254453	0.229989713	0.206669	0.184533
IV	0.118706	0.117958	0.115967344	0.1138	0.111472
V	0.064726	0.069021	0.072580106	0.075961	0.07915
劣 V	0.131632	0.147618	0.162728371	0.178086	0.19365

等级 \ 年度	2010	2011	2012	2013	2014
I	0	0	0	0	0
II	0.435866	0.43951	0.442147	0.443802	0.444508
III	0.163614	0.143929	0.125486	0.108279	0.092294

IV	0.109002	0.106405	0.103701	0.100906	0.098036
V	0.08214	0.08492	0.087485	0.089831	0.091956
劣 V	0.209379	0.225235	0.241181	0.257182	0.273205

1.4 模型精度检验

对于该模型我们使用统计学上惯用的相对均方误差来衡量模型的精度, 即

$$\delta = \frac{(x_i^{(0)} - \overline{x_i^{(0)}})^2}{\overline{x_i^{(0)}}^2}, \text{ 其中 } x_i^{(0)} \text{ 为实际数据, } \overline{x_i^{(0)}} \text{ 为代入模型求得数据}$$

检验结果为

等级\年份	1996	1997	1998	1999	2000
I	0.148504	0.131394	0.114453	0.09778	0.081475
II	0.242282	0.260764	0.279321	0.297808	0.316072
III	0.462818	0.445307	0.426738	0.407213	0.386849
IV	0.106796	0.109272	0.111512	0.113491	0.115182
V	0.02351	0.027713	0.032081	0.036588	0.041205
超 V	0.016089	0.025551	0.035894	0.04712	0.059218
相对均方误差	0.156404	0.027985	0.11145	0.146098	0.052639

等级\年份	2001	2002	2003	2004
I	0.065636	0.05036	0.035737	0.02185
II	0.333956	0.351304	0.36796	0.383777
III	0.36578	0.344153	0.322128	0.299869
IV	0.116563	0.117618	0.118332	0.118696
V	0.045899	0.050635	0.055377	0.060087
超 V	0.072165	0.08593	0.100467	0.115722
相对均方误差	0.016002	0.049327	0.055029	0.077296

可见该模型对于已有数据的匹配程度很好, 因此该一阶灰度模型对于该问题是适用的。

2. GM(1, N)模型

2.1 模型准备

经过查阅相关的资料[8]，我们引入了灰度关联系数 γ 的概念，对于初值化后的数据 $X_1 = (X_1^{(1)}, X_1^{(2)} \dots X_1^{(N-1)}, X_1^{(N)})$ 和 $X_i = (X_i^{(1)}, X_i^{(2)} \dots X_i^{(N-1)}, X_i^{(N)})$ ($i=1,2,\dots,N$)存在灰度关联函数

$$\gamma(X_i^{(k)}, X_1^{(k)}) = \frac{\min_i \min_k |x_1^{(k)} - x_i^{(k)}| + \zeta \min_i \min_k |x_1^{(k)} - x_i^{(k)}|}{|x_1^{(k)} - x_i^{(k)}| + \zeta \min_i \min_k |x_1^{(k)} - x_i^{(k)}|},$$

式中 ζ 为分辨系数，取0.5。 X_1 对 X_i 的灰色关联度 $\gamma_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \gamma(X_i^{(k)}, X_1^{(k)})$ ， γ_i 越大，表明因素 i 对因素1的影响越大。

对于初始化之后的数据，通过计算灰度关联系数我们发现总水量、废水排放量与水质等级比例之间的关联系数均大于0.85，因此选取总水量 $w^{(0)}(t)$ ，与总水量、废水排放量建立GM(1, N)模型。

根据前文的分析，我们认为长期来看长江全流域的水流量满足正态分布，在无人为控制情况下，污染的排放满足阻滞的情形。

2.2 模型建立

GM(1, N)表示的是一阶，包含有N个变量的灰色模型。设系统有N个行为因子，即原始数列为

$$x_i^{(0)} = (x_i^{(0)}(1), x_i^{(0)}(2) \dots x_i^{(0)}(n)), i=1,2 \dots N$$

记 $x_i^{(1)}$ 为 $x_i^{(0)}$ 的累加生成数列(AGO)，即

$$\begin{aligned} x_i^{(1)} &= (x_i^{(1)}(1), x_i^{(1)}(2), \dots, x_i^{(1)}(n)) \\ &= (x_i^{(1)}(1), x_i^{(1)}(1) + x_i^{(0)}(2), \dots, x_i^{(1)}(n-1) + x_i^{(0)}(n)) \\ & \quad i=1,2 \dots N \end{aligned}$$

其中 $x_i^{(1)}(k) = \sum_{j=1}^k x_i^{(0)}(j)$ ($k=1,2,\dots,n$)取 $x_i^{(1)}$ 的均值(mean)数列

$$z_1^{(1)}(k) = 0.5x_1^{(1)}(k) + 0.5x_1^{(1)}(k-1) \quad (k=2,3,\dots,n), \text{ 则}$$

$z_1^{(1)} = (z_1^{(1)}(2), z_1^{(1)}(3), \dots, z_1^{(1)}(n))$ 于是可得到GM(1, N)的灰微分方程为

$$x_1^{(0)}(k) + az_1^{(1)}(k) = \sum_{i=2}^N b_i x_i^{(1)}(k) ,$$

其中 $x_1^{(0)}(k)$ 为灰导数, $z_1^{(1)}(k)$ 为背景值, $a, b_i (i=2,3,\dots,N)$ 为参数。

如果对于一切时刻 $k=2, 3, \dots, n$, 引入向量矩阵符号:

$$Y_N = (x_1^{(0)}(2), x_1^{(0)}(3), \dots, x_1^{(0)}(n))^T, u = (a, b_2, b_3, \dots, b_N)^T$$

$$B = \begin{bmatrix} -z_1^{(1)}(2) & x_2^{(1)}(2) & \cdots & x_N^{(1)}(2) \\ -z_1^{(1)}(3) & x_2^{(1)}(3) & \cdots & x_N^{(1)}(3) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -z_1^{(1)}(n) & x_2^{(1)}(n) & \cdots & x_N^{(1)}(n) \end{bmatrix}$$

则 GM(1, N) 的灰色微分方程为

$$Y_N = B \cdot u$$

如果存在 $(B^T \bullet B)^{-1}$, 则有

$$\hat{u} = (\hat{a}, \hat{b}_2, \hat{b}_3, \dots, \hat{b}_N)^T = (B^T B)^{-1} B^T Y_N$$

GM(1, N) 的白化型为

$$x_1^{(1)}(t+1) = [x_1^{(0)}(1) - \frac{1}{a} \sum_{i=2}^N b_i x_i^{(1)}(t+1)]e^{-at} + \frac{1}{a} \sum_{i=2}^N b_i x_i^{(1)}(t+1)]e^{-at}$$

GM(1, N) 模型表明了相关因素之间的一种联系

2.3 模型求解

问题三回答:

经过与 GM(1, 1) 类似的计算, 可得

$$\hat{u} = \begin{pmatrix} 1.1192 & 1.2377 & 2.6322 & 1.4865 & 1.5721 & 1.1192 \\ -42.2482 & -46.1957 & 168.5964 & -17.2575 & -16.8749 & -42.2482 \\ 44.3555 & 49.2173 & -167.2927 & 19.4287 & 18.9207 & 44.3555 \end{pmatrix}$$

根据该模型可求得在自由污染状况下, 自 2005 年起各年度长江全流域各类河段长度的百分比如下所示

等级 \ 年份	2005	2006	2007	2008	2009
I	0.039182	0.037218	0.044254	0.040725	0.044472

II	0.192164	0.192556	0.191149	0.191855	0.191106
III	0.192164	0.192556	0.191149	0.191855	0.191106
IV	0.192164	0.192556	0.191149	0.191855	0.191106
V	0.192164	0.192556	0.191149	0.191855	0.191106
劣 V	0.192164	0.192556	0.191149	0.191855	0.191106

等级\年份	2010	2011	2012	2013	2014
I	0.036963	0.03755	0.037644	0.043085	0.043262
II	0.192607	0.19249	0.192471	0.191383	0.191348
III	0.192607	0.19249	0.192471	0.191383	0.191348
IV	0.192607	0.19249	0.192471	0.191383	0.191348
V	0.192607	0.19249	0.192471	0.191383	0.191348
劣 V	0.192607	0.19249	0.192471	0.191383	0.191348

模型精度检验

等级\年份	1995	1996	1997	1998	1999
I	0.258	0.090749	0.087145	0.01062	0.099082
II	0.426	0.183844	0.315202	0.28762	0.34233
III	0.247	0.267542	0.248991	0.52087	0.287749
IV	0.039	0.171009	0.14268	0.112753	0.115253
V	0.03	0.141943	0.081749	0.041004	0.051455
劣 V	0	0.144913	0.124234	0.027133	0.104132
相对均方误差	0.166666667	0.166667	0.166667	0.166667	0.166667

等级\年份	2000	2001	2002	2003	2004
I	0.081873	0.105816	0.06633	0.072924	0.010436
II	0.341205	0.354305	0.340071	0.343449	0.040566
III	0.335734	0.266521	0.372538	0.353132	0.027543
IV	0.111992	0.115421	0.111656	0.112774	0.270598

V	0.045522	0.051555	0.042872	0.04473	0.338751
劣 V	0.083673	0.106383	0.066533	0.07299	0.312105
相对均方误差	0.166667	0.166667	0.166667	0.166667	0.166667

与 GM(1, 1)相比 GM(1, N)的相对均方误差稍大，但是误差的波动相对较小，这也说明了考虑变量数的增加增加了模型的稳定性

问题四回答

假设污水处理是在排放之前即被处理，即被处理之前没有造成过污染。又由于根据之前的研究发现，污水的产生是满足一定的规律的，因此污水处理的问题可转换为污水的有效排放的问题。对于政府总是希望既能够达到水质要求，又处理尽量少的污水。因此可得一规划模型。

符号约定：

$e(t)$ t 时刻处理后的污水排放总量

$e_0(t)$ t 时刻处理前生产出的污水累积量

$s(t)$ t 时刻长江总流量

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } \Delta \\
 & \text{s.t} \\
 & \Delta(t) = e_0(t) - e(t); \\
 & x_6^{(0)}(t) = 0; \\
 & x_5^{(0)}(t) + x_4^{(0)}(t) \leq 0.2 \sum_{i=1}^6 x_i^{(0)}(t); \\
 & x_i^{(0)}(t) = f_i(e(t), s(t))
 \end{aligned}$$

根据干流的数据，使用 GM(1, N)模型求得参数向量

$$\hat{u} = \begin{pmatrix} 5.8497 & 1.8273 & 1.9661 & 1.2377 & 1.7462 & 1.2739 \\ 158.0305 & 7.0427 & 129.9624 & -67.6291 & -38.9609 & -39.1866 \\ -153.2933 & -4.6742 & -128.4397 & 69.6947 & 41.1638 & 41.3121 \end{pmatrix},$$

则根据求得的向量，依据 GM(1, N)的白化型公式可得 $f_i(e(t), w(t))$ 的具体表达式

使用 Mathematica 解得

自 2005 年起要保持干流内无劣 V 类水，且 IV、V 类水的比例低于 20%，则每年应处理的污水量如下所示：

年度	2005	2006	2007	2008	2009
污 水 处 理 量 (亿吨)	175.535	181.118	131.924	135.915	106.06

年度	2010	2011	2012	2013	2014
污 水 处 理 量 (亿吨)	116.334	144.716	99.1891	134.739	113.355

由于系统在提出要求之后为了达到要求，必须在处理当前污染源的同时对于之前的下游污染后果进行处理，因此提出达标要求之初会出现污水处理量陡增的情况，当环境的状况趋于稳定，污染源已被控制，则污水的处理量又恢复稳定。

对长江水质污染问题的建议和意见

1. 支流和湖泊的污染与干流污染的关系

通过对长江近两年多的水质情况做出定量的综合评价，特别是对各地区水质污染状况的分析，模型一的评价结果我们可以看出长江干流的水质还是较好的，但主要支流和重点湖泊的污染情况严重，如岷江、沱江、洞庭湖、鄱阳湖。分析其主要原因是由于长江干流水量充足，自净能力强于支流，因而支流对干流的污染并不是干流污染的主要来源。

例如：岷江和沱江的氨氮污染对干流的影响。其中岷江和沱江的流量数据来自于参考文献[6]，各站氨氮平均值和攀枝花、朱沱的平均流量均为附件 3 两年半数据的算术平均值。

站名	两年半的氨氮平均值 (mg/L)	两年半的平均流量(立方米/秒)	至朱沱需时 (天)	至朱沱的氨氮总量(g)
四川宜宾凉姜沟（岷江）	0.43	2752.41	2.4	692.7835
四川泸州沱江二桥（沱江）	0.82	501.015	1.6	287.4806
四川攀枝花（干流）	0.18	2646.2	4.8	163.2026
重庆朱沱（干流）	0.33	12510	0	4128.3

来源于支流岷江和沱江的氨氮占朱沱氨氮总量的比例	约 23.7%
来源于上游攀枝花的氨氮占朱沱氨氮总量的比例	约 4.0%

相对于支流，湖泊的污染同样严重，位于鄱阳湖入口的江西南昌滁槎两年半的水质综合评价为Ⅴ类，溶解氧、高锰酸盐指数、氨氮等各项污染指标均不满足可饮用水标准。但鄱阳湖出口和入口氨氮浓度比为 6%，说明湖泊对该污染物具有自净的能力，为干流起到了缓冲的作用。

虽然依靠干流充沛的水量，现在支流和湖泊还没有使干流水质严重恶化，但由于现在湖泊面积不断下降，自净能力随之下降，流入湖泊的支流污染排放量进一步加大，湖泊终将失去缓冲作用，导致大量污染物直接流入干流，再加上本身自净能力弱的支流的污染排放量也继续加大，伴随着干流枯水期延长，自身自净能力下降，水质会急剧恶化，不可饮用水河长比例将大幅增加，对沿岸城市的生产生活造成危害，最终制约长江沿岸的经济的发展。

因此，为维护包括支流，湖泊地区在内的全流域的经济利益，需要对支流，湖泊的污染排放加以更为严格的限制和治理，改善支流污染情况，维持湖泊的自净缓冲作用，这样能够降低干流污染加剧的压力，同时极大的改善支流、湖区城市的环境状况。

2. 上游污染对下游的影响和相应污染治理决策

参照本文前述污染源模型，上游的污染物会扩散到下游，虽然存在着依靠自净能力的降解，但仍有大量污染物扩散到下游。例如，下表是两年半中对于各观测站来源于上游（含上游支流）的高锰酸盐 CODMn 污染量占该观测站高锰酸盐 CODMn 量的比例的平均值。

站名	朱沱	宜昌	岳阳	九江	安庆	南京
比例(%)	10.3623	16.0877	23.0052	35.8509	57.7350	39.1057

该表说明，上游污染物的扩散对下游造成水质恶化压力，在进行污染治理决策时，不仅要针对一个地区的污染物排放进行特别治理，还要考虑到上游的影响。最理想的解决办法是对全流域的污染治理进行统一决策，将污染处理设施尽量放置在主要污染源的下流尽量近处，最大限度减少污染物扩散对下游造成影响。这样不但保护了更长河段的水资源，同时降低了下游治理污染的负担和经济成本。同时加大上下游的污染治理，有利于增大全流域污染治理的效果。

模型评价及拓展

我们所建立的几个模型最大的优点是应用便捷，无论从模型的结构还是算法的求解都是易于理解且便于实施的。更值得注意的是大多数的模型对于现有的算例都能得到一个比较好的结果。这也说明对于一些诸如河流一类的复杂系统使用简单结构进行近似的可行性，这也是建模的一个主要目的。但是由于长江系统高度的非线性和模型的过于简化，我们所建立的线性回归模型对于某些算例的运算结果并不十分理想，相比之下，这也说明了灰色模型和物元分析法等特征分析方法在分析已知部分数据或规律的未知系统时独到的优势。另外在确定污染源所在地区的时候，根据我们的模型只能找到污染源

所处干流上的区段而不能确定其具体位置，但是这种情况将随着流域更多信息的获得而得到改善。

参考文献

- [1] 长江支流, <http://www.e5116.org.cn/travel/01/10/01/files/02.htm>, 2005-9-16
- [2] 韩家悦,《物元分析法在水环境质量评价应用中的初探》,《南水北调与水利科技》,第3卷第2期,33-35,2005年
- [3] HJ/T 2.3-93, 中华人民共和国环境保护行业标准 环境影响评价技术导则 地面水环境
- [4] 长江流域的可持续发展
<http://dl2.lib.tongji.edu.cn/wf/~HYLW/H047525/pdf/H0475250035.pdf>, 2005-9-18
- [5] 韩中庚,《数学建模方法及其应用》,北京:高等教育出版社,2005年
- [6] 长江流域水系概况 CCTV_国家地理, <http://www.cctv.com/geography/index.shtml>, 2005-9-19