

## 2011 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

### 承 诺 书

我们仔细阅读了中国大学生数学建模竞赛的竞赛规则.

我们完全明白, 在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式(包括电话、电子邮件、网上咨询等)与队外的任何人(包括指导教师)研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道, 抄袭别人的成果是违反竞赛规则的, 如果引用别人的成果或其他公开的资料(包括网上查到的资料), 必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺, 严格遵守竞赛规则, 以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为, 我们将受到严肃处理。

我们参赛选择的题号是(从 A/B/C/D 中选择一项填写):   A  

我们的参赛报名号为(如果赛区设置报名号的话):                     

所属学校(请填写完整的全名):   湖南工学院  

参赛队员(打印并签名): 1.   官艳凤  

2.   朱秀辉  

3.   唐宏  

指导教师或指导教师组负责人(打印并签名):   李彬  

日期:  2011  年  9  月  12  日

---

赛区评阅编号(由赛区组委会评阅前进行编号):

2011 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

编 号 专 用 页

赛区评阅编号（由赛区组委会评阅前进行编号）：

赛区评阅记录（可供赛区评阅时使用）：

评阅人										
评分										
备注										

全国统一编号（由赛区组委会送交全国前编号）：

全国评阅编号（由全国组委会评阅前进行编号）：

# 基于城市表层土壤重金属污染分析

## 摘要

关键词：

## 一、问题重述

随着城市经济的快速发展和城市人口的不断增加，人类活动对城市环境质量的影响日显突出。对城市土壤地质环境异常的查证，以及如何应用查证获得的海量数据资料开展城市环境质量评价，研究人类活动影响下城市地质环境的演变模式，日益成为人们关注的焦点。

按照功能划分，城区一般可分为生活区、工业区、山区、主干道路区及公园绿地区等，分别记为 1 类区、2 类区、……、5 类区，不同的区域环境受人类活动影响的程度不同。

现对某城市城区土壤地质环境进行调查。为此，将所考察的城区划分为间距 1 公里左右的网格子区域，按照每平方公里 1 个采样点对表层土（0~10 厘米深度）进行取样、编号，并用 GPS 记录采样点的位置。应用专门仪器测试分析，获得了每个样本所含的多种化学元素的浓度数据。另一方面，按照 2 公里的间距在那些远离人群及工业活动的自然区取样，将其作为该城区表层土壤中元素的背景值。

附件 1 列出了采样点的位置、海拔高度及其所属功能区等信息，附件 2 列出了 8 种主要重金属元素在采样点处的浓度，附件 3 列出了 8 种主要重金属元素的背景值。

现要求你们通过数学建模来完成以下任务：

(1) 给出 8 种主要重金属元素在该城区的空间分布，并分析该城区内不同区域重金属的污染程度。

(2) 通过数据分析，说明重金属污染的主要原因。

(3) 分析重金属污染物的传播特征，由此建立模型，确定污染源的位置。

(4) 分析你所建立模型的优缺点，为更好地研究城市地质环境的演变模式，还应收集什么信息？有了这些信息，如何建立模型解决问题？

## 二、问题分析

随着城市经济的快速发展和城市人口的不断增加，人类活动对城市环境质量的影响日显突出。对于重金属在环境中的影响更为明显，因此研究城市表层土壤重金属污染是迫在眉下的事。

对于问题一，经过对数据和题目的分析，直接使用matlab（附录一）使用二次插值法可以画出8种主要重金属元素在该城区的空间分布图。对于第二小问，我们首先根据所给的数据将已区分好的各个区域归在一起，求出各种重金属元素在该区域的平均值，建立综合污染指数评价法模型；分析各种重金属元素在各个区域的污染指数来分析该城区内不同区域重金属的污染程度。

对于问题二，由所给的数据求出每个区域的各种金属的平均值，采用主成分分析法对其进行综合评价分析。通过主成分的主要元素因子和土壤中的重金属

元素的载荷矩阵和各个因子的累积贡献率以及其百分比来具体分析各种重金属元素对环境污染的主要原因。

对于问题三，根据题目和有关资料对重金属污染物的传播特征的分析，可将8种重金属污染物分为两类。一类是主要在大气中传播，一类是主要在土壤中传播。对于在大气中传播的重金属污染物，我们建立重金属污染物在气体中扩散模型，根据所在的任意位置土壤表面的重金属污染物浓度的多少来确立污染源的位置，函数的最大值即为污染源的位置；同理，对于另一类，我们也可以建立重金属污染物在土壤中扩散模型来确立污染源的位置，只是所考虑的方面不一样，从而所涉及的式子有所差别而已。

### 三、模型假设

- (1) 假设所给的采样点的数据都是可靠准确的；
- (2) 假设每个样本点都能很好的反映该平方公里的实际情况；
- (3) 污染物的排放瞬时完成，且排放速率恒定；
- (4) 风向为水平方向，且风速和风向不随时间的变化而变化；
- (5) 气体的传播服从扩散定律，即单位时间通过单位扩展面积的流量与它的浓度梯度成正比；
- (6) 污染物的沉降速率恒定；

### 四、符号说明

$P_i$ : 土壤重金属 $i$ 的污染指数；

$C_i$ : 土壤重金属 $i$ 的实测值；

$R_i$ : 土壤重金属 $i$ 的背景值；

$x_i$ : 第 $i$ 种指标变量；

$x_{ij}$ : 第 $i$ 个评价对象的第 $j$ 个指标的取值；

$r_{ij}$ : 第 $i$ 个评价对象的第 $j$ 个指标的相关系数；

$b_j$ : 主成分 $y_j$ 的信息贡献率；

$a_p$ : 主成分 $y_p$ 的累积贡献率；

$s$ : 污染物的扩散速度；

$k$ : 风速，单位 m/s；

$H$ : 污染源 $O$ 距有效地面的高度；

$t$ : 任意扩散时刻；

$C(x, y, z, t)$ : 空间任意一点扩散污染物的浓度;

$v_s$ : 空气向土壤的沉降系数;

$w_d$ : 地面干沉降率系数;

$\varphi$ : 冲洗系数;

$k_i (i = x, y, z)$ : 空间任意一点扩散污染物的扩散系数;

$Q_0$ : 从污染源放出的污染物总量;

$Q_1$ : 在  $(t, t + \Delta t)$  内通过某空间域流量;

$Q_2$ : 在某空间域污染物的增量;

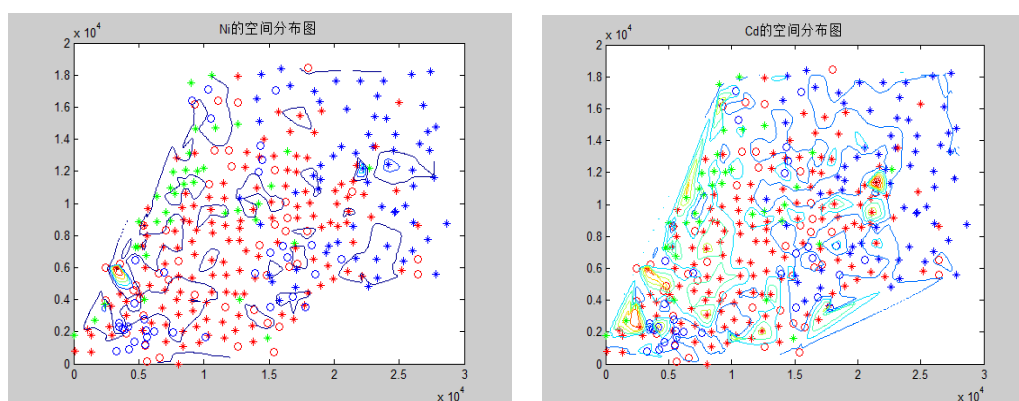
$\partial_x, \partial_y, \partial_z$ : 分别为用浓度标准差表示的  $x, y, z$  轴上的扩散参数;

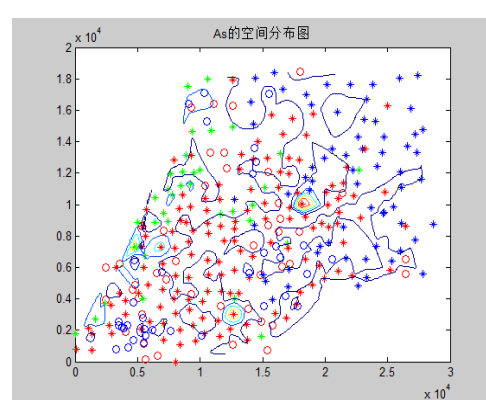
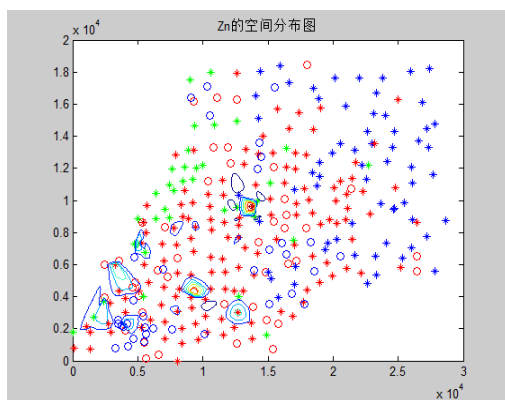
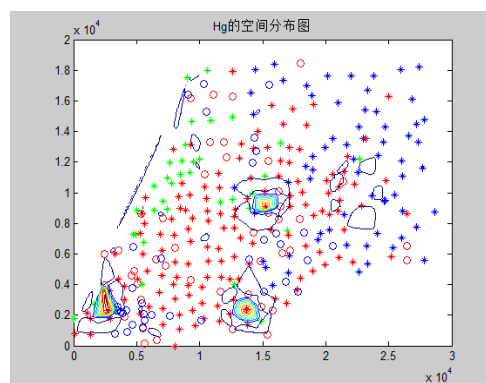
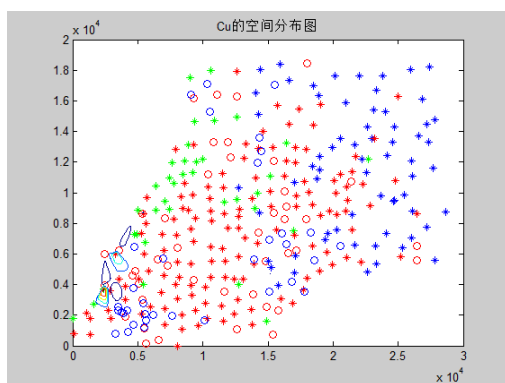
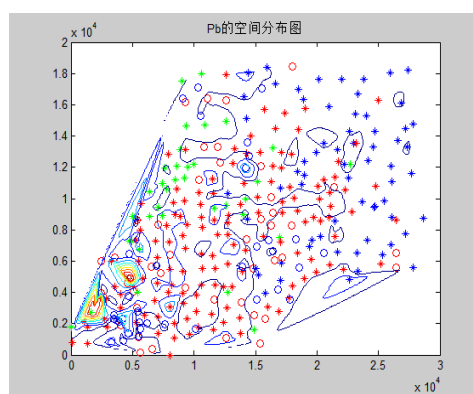
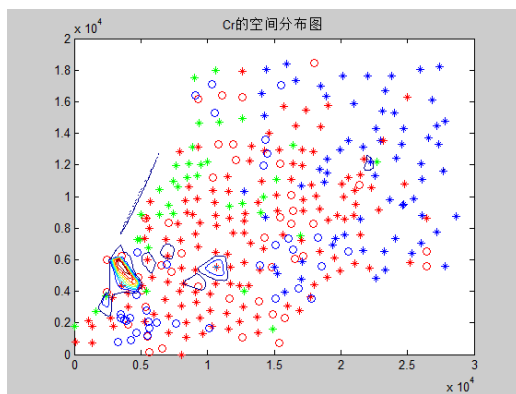
$p_0$ : 为单位体积内污染物排放的速率;

## 五、模型建立及其求解

### 5.1 模型一

经过对数据和题目的分析, 直接使用matlab (附录一) 使用二次插值法可以画出8种主要重金属元素在该城区的空间分布图, 由图形来反映各种的分布情况, 具体图形如下;





注：红 o 代表生活区，绿\*代表工业区，蓝\*代表山区，红\*代表交通道路区，蓝 o 代表公园区

由图形可以得出：某种重金属元素对某个区域具有非常显著的影响，因此我们再次利用软件matlab（附录二）求出各种重金属在各个区域最大的浓度和所在的区域，具体的信息可以在下表体现：

表一 元素分布

元素	最大值 ( $\mu\text{g}/\text{g}$ )	编号	所在区域
As	30.13	84	交通区（4）
Cd	1619.8	95	交通区（4）

Cr	920.84	22	交通区 (4)
Cu	2528.5	8	工业区 (2)
Hg	16000	9	交通区 (4)
Ni	142.5	22	交通区 (4)
Pb	472.48	16	生活区 (1)
Zn	3760.8	61	交通区 (4)

由表格可以知道，Pb主要分布在生活区，Cu元素主要分布在工业区，其他元素主要分布在交通区。

对于第二小问，我们首先根据所给的数据将已区分好的各个区域归在一起，求出各种重金属元素在该区域的平均值，建立综合污染指数评价法模型；分析各种重金属元素在各个区域的污染指数来分析该城区内不同区域重金属的污染程度。

综合污染指数采用国内相关研究常用的内梅罗 (Nemerow) 污染指数来评价土壤重金属的复合污染状况，综合污染指数评价可用来评价土壤中某一重金属元素富集和污染程度，而污染程度一般用污染指数来表示，计算见公式：

$$P_i = C_i / R_i \quad (1)$$

综合污染评价公式：

$$P = \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_i\right)^2 + [\max(P_i)]^2}{2}} \quad (2)$$

单因子指数评价标准为： $P_i \leq 1$ ，无富集（无污染）； $1 < P_i \leq 2$ ，轻度富集（轻度污染）； $2 < P_i \leq 3$ ，中富集（中度污染）； $3 < P_i$ ，过度富集（严重污染）。

由matlab（附录三、四）软件可以得到各种重金属元素在各个区域的污染指数。

表二 污染指数

区域 元素 $P_i$	生活区	工业区	山区	主干道路区	公园绿地区
As	1.7418	2.0143	1.1234	1.5856	1.7399
Cd	2.2305	3.0239	1.1717	2.7693	2.1580
Cr	2.2264	1.7229	1.2568	1.8727	1.4076
Cu	3.7427	9.6618	1.3119	4.7133	2.2873
Hg	2.6583	18.3530	1.1702	12.7664	3.2855
Ni	1.4912	1.6107	1.2564	1.4323	1.2431
Pb	2.2292	3.0013	1.1792	2.0495	1.9583
Zn	3.4349	4.0279	1.0622	3.5196	2.2354
P	3.1706	13.5330	1.2531	9.426	2.7344

通过以上表格分析可知，生活区为严重污染，工业区为严重污染，山区为轻



度污染接近无污染，主干道路区为严重污染，公园绿地区为中度污染。

## 5.2 模型二

由所给的数据求出每个区域的各种金属的平均值,采用主成分分析法对其进行综合评价分析。

### 5.2.1 模型的建立

### 1) 对原数据进行标准化处理

假设进行主成分分析的指标变量为8种重金属元素： $x_1, x_2, \dots, x_p$ ，评价对象可以  
为五个区域，第*i*个评价对象的第*j*个指标的取值为 $x_{ij}$ 。将各个指标 $x_{ij}$ 转换成标  
准化指标 $x_{ij}$ ，

$$x_{ij} = \frac{\overline{x_{ij}} - \overline{x_j}}{s_i}, \quad (i=1,2,\cdots,p) \quad (3)$$

其中  $\bar{x}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij}, s_j = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2, (j=1, 2, \cdots, p)$ , 即  $\bar{x}_j, s_j$  为第  $j$  个指标的样本均值和样本标准差。对应的, 称

$$x_{ij} = \frac{x_{ij} - \overline{x_j}}{s_i}, \quad (i=1,2,\cdots,p)$$

为标准化指标变量。

2) 计算相关系数矩阵  $R$ 

相关系数矩阵  $R = (r_{ij})_{p \times p}$

$$r_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^n x_{ki} x_{kj}}{n-1}, (i, j = 1, 2, \dots, p) \quad (4)$$

式中 $r_{ii}=1, r_{ij}=r_{ji}, r_{ij}$ 是第 $i$ 个指标与第 $j$ 个指标的相关系数。

### 3) 计算特征值和特征向量

计算相关系数矩阵  $R$  的特征值  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p \geq 0$ , 及对应的特征向量

$u_1, u_2, \dots, u_p$ , 其中  $u_j = (u_{1j}, u_{2j}, \dots, u_{nj})^T$ , 由特征向量组成  $m$  个新的指标变量

[illegible]

式中  $y_1$  是第一主成分,  $y_2$  是第二主成分,  $\dots$ ,  $y_m$  是第  $m$  主成分。

4) 选择  $p(p \leq m)$  个主成分，计算综合评价

a、计算特征值  $\lambda_j (j=1,2,\dots,m)$  的信息贡献率和累积贡献率。称

$$b_j = \frac{\lambda_j}{\sum_{k=1}^m \lambda_k} (j=1,2,\dots,m) \quad (6)$$

为主成分  $y_j$  的信息贡献率；

$$\alpha_p = \frac{\sum_{k=1}^p \lambda_k}{\sum_{k=1}^m \lambda_k} \quad (7)$$

为主成分  $y_1, y_2, \dots, y_p$  的累积贡献率，当  $\alpha_p$  接近于1 ( $\alpha_p = 0.85, 0.90, 0.95$ ) 时，

则选择前  $p$  个指标变量  $y_1, y_2, \dots, y_p$  作为  $p$  个主成分，代替原来  $m$  个指标变量，

从而可对  $p$  个主成分进行综合分析。

b、计算综合得分：

$$Z = \sum_{j=1}^p b_j y_j \quad (8)$$

其中  $b_j$  为第  $j$  个主成分的信息贡献率，根据综合得分就可进行评价。

### 5.2.2 模型的求解

经过对土壤单点样重金属元素含量的数据标准化处理后，利用matlab软件进行主成分分析，可得出如下结果：

表三 变量相关矩阵

指标	As	Cd	Cr	Cu	Hg	Ni	Pb	Zn
As	1.000	.739	-.296	.473	.319	.100	.892	.590
Cd	.739	1.000	-.546	.731	.762	.225	.830	.646
Cr	-.296	-.546	1.000	-.780	-.842	-.015	-.523	.242
Cu	.473	.731	-.780	1.000	.943	.595	.809	.292
Hg	.319	.762	-.842	.943	1.000	.423	.656	.205
Ni	.100	.225	-.015	.595	.423	1.000	.442	.501
Pb	.892	.830	-.523	.809	.656	.442	1.000	.585
Zn	.590	.646	.242	.292	.205	.501	.585	1.000

再利用SPSS统计软件可得到前几个因子的累积贡献率和初始特征值，如表四所示；

表四 解释的总方差

因子	初始特征值			提取平方和载入		
	合计	方差百分比%	累积贡献值%	合计	方差百分比%	累积贡献值%
1	4.828	60.355	60.355	4.828	60.355	60.355
2	1.676	20.956	81.310	1.676	20.956	81.310
3	1.109	13.862	95.172	1.109	13.862	95.172
4	0.368	4.828	100.000			
5	3.913E-8	4.891E-7	100.000			
6	2.643E-9	3.304E-8	100.000			
7	2.194E-9	2.743E-8	100.000			
8	6.468E-18	8.085E-17	100.000			

由表四可见，前三个主成分分别累计提取了总方差的95.172%，表明所提取的主成分能够较好地代表源数据所蕴涵的信息。

将表四的前三个主成分的主要元素因子和土壤中的重金属元素的载荷矩阵反映在表五中；

表五 载荷矩阵

	因子		
元素	1	2	3
As	.730	.368	-.508
Cd	.909	.104	-.245
Cr	-.660	.736	.146
Cu	.928	-.272	.245
Hg	.861	-.422	.187
Ni	.495	.274	.806
Pb	.942	.176	-.144
Zn	.549	.794	.070

从表五中可见，Cd、Cu和Pb在主成分1中具有非常高的载荷，Hg和As在主成分1中的载荷仅次于前三种。研究证实Pb和Cd在来源上关系较密切，并且Pb主要来源于汽车尾气排放而汽车轮胎磨损可以释放Cd，再加上Cu可以来源于汽油和车体的磨损，从而可以推断出因子1可能主要代表汽车交通运输活动的影响。其次Hg污染不仅与燃煤污染有关，在很大的程度上还与汽车尾气的排放有关；As和S一样在空气中以 $AsO_2$ 为主，也可以是由汽车燃料燃烧所释放的，进一步的加大了推断的可能性。由表格可以看出，第一主成分解释的原变量方差最多

(60.355%)，而其后的主成分所解释的方差逐渐在减少，因此可以认为第一主成分是污染的主要来源，鉴于此，可认为主干道路区上的尾气排放和轮胎磨损是重金属Cd、Cu、Pb、Hg和As污染的主要原因。

在表五中体现了，Cr和Zn在主成分2中具有较高的载荷。有学者研究表明，

厂矿企业的三废排放中含有大量的Zn和Cr，因此可以断定因子2为工业活动的影响。与此我们可以认为工业区的工业废气排放是重金属Zn和Cr的主要原因。

在表五中也体现了，Ni单独在主成分3中具有较高的载荷，且与其他元素关系不密切。由资料显示，废水中含有较多的Ni，因此也可以认为生活区的生活废水、污水是重金属Ni的主要原因。

综合以上所述，可知Ni使生活区的污染变严重，Cr和Zn使工业区的污染变严重，Cd、Cu、Pb、Hg和As使主干道路区的污染变严重。与第一问的结果一致，验证了两个模型的准确性。

### 5.3 模型三

根据题目和有关资料对重金属污染物的传播特征的分析，可将8种重金属污染物分为两类。一类是主要在大气中传播，一类是主要在土壤中传播。对于在大气中传播的重金属污染物，我们建立重金属污染物在气体中扩散模型来确立污染源的位置；而对于另一类，我们则建立重金属污染物在土壤中扩散模型来确立污染源的位置。

#### 1) 重金属污染物在气体中的扩散模型

记污染物开始扩散的时刻为 $t=0$ ，并且以污染源作为扩散中心，则可将 $t$ 时刻无穷空间中任一点 $(x, y, z)$ 的污染物浓度记为 $C(x, y, z, t)$ 。假设单位时间内通过单位法向量面积的流量与浓度梯度成正比，则有

$$\vec{q} = -k_i \cdot \text{grad}C$$

其中 $k_i (i=x, y, z)$ 是扩散系数，grad表示浓度梯度，其中的负号代表重金属粉尘的浓度是由高到低的地方扩散。

假设空间域 $\Omega$ 的体积为 $V$ ，包围空间域 $\Omega$ 的曲面为一规则的球面，设其表面面积为 $S_{\text{表}}$ ，外法线向量为 $\vec{n} = \left(-\frac{x}{z}, -\frac{y}{z}, 1\right)$ ，

则在 $(t, t+\Delta t)$ 内流通过空间域 $\Omega$ 的流量可表示为：

$$Q_1 = \int_t^{t+\Delta t} \iint_S \vec{q} \cdot \vec{n} d\sigma dt \quad (9)$$

空间域 $\Omega$ 所包围的区域内污染的重金属的增量可表示为：

$$Q_2 = \iiint_V [C(x, y, z, t+\Delta t) - C(x, y, z, t)] dV \quad (10)$$

$$\text{由污染源排放出的该重金属的总量为：} Q_0 = \int_t^{t+\Delta t} \iint_{\Omega} p_0 dV dt \quad (11)$$

由质量守恒可得出： $Q_0 = Q_1 + Q_2$ ，即，

$$\iiint_V [C(x, y, z, t + \Delta t) - C(x, y, z, t)] dV + \int_t^{t+\Delta t} \iint_s \vec{q} \cdot \vec{n} d\sigma dt = \int_t^{t+\Delta t} \iiint_\Omega p_0 dV dt \quad (12)$$

根据曲面积分Gauss公式得：  $\iint_s \vec{q} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_V \text{div} \vec{q} dV$  (13)

则式子 (12) 可以转换成

$$\iiint_V \left[ \frac{C(x, y, z, t + \Delta t) - C(x, y, z, t)}{\Delta t} \cdot \Delta t \right] dV + \int_t^{t+\Delta t} \iiint_V \text{div} \vec{q} dV dt = \int_t^{t+\Delta t} \iiint_\Omega p_0 dV dt \quad (14)$$

由于  $\frac{\partial C}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{C(x, y, z, t + \Delta t) - C(x, y, z, t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_t^{t+\Delta t} k \text{div}(\text{grad} C) dt}{\Delta t}$  (15)

故式子 (14) 即可转换成  $\iiint_V \left[ \frac{\partial C}{\partial t} \right] dV \cdot \Delta t + \iiint_V \text{div} \vec{q} dV \cdot \Delta t = \iiint_\Omega p_0 dV \cdot \Delta t$  (16)

化简得：  $\iiint_V \left[ \frac{\partial C}{\partial t} \right] dV + \iiint_V \text{div} \vec{q} dV = P_0$  (17)

根据A. Fick扩散微分方程式中：

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U_x \frac{\partial C}{\partial X} + U_y \frac{\partial C}{\partial Y} + U_z \frac{\partial C}{\partial Z} = k_x \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + k_y \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + k_z \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \quad (18)$$

其中：C为气体浓度；t为时间； $u_x, u_y, u_z$ 为x, y, z方向风速； $k_x, k_y, k_z$ 为x, y, z方向上的扩散系数。

假设重金属污染物在无风条件下扩散，此时有，

$$\frac{\partial C}{\partial t} = k_x \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad (19)$$

结合式子 (18) 可解出 (17) 的结果为：

$$C(x, y, z, t) = \frac{P_0}{(4\pi t)^{1.5} (k_x k_y k_z)^{0.5}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{4k_x t} - \frac{y^2}{4k_y t} - \frac{(z-H)^2}{4k_z t} \right\} \quad (20)$$

由此得到地面土壤表层的浓度：

$$C'(x, y, z, t) = (v_s - w_d - \phi) C(x, y, z, t) \quad (x^2 + y^2 + z^2 = s^2 t^2) \quad (21)$$

由 (21) 式可知，土壤表层的浓度是一个向四周逐渐减少的函数。

## 2) 重金属污染物在土壤中的扩散模型

记污染物开始扩散的时刻为  $t=0$ ，并且以污染源作为扩散中心，则可将t 时刻无穷平面中任一点 (x, y) 的污染物浓度记为 C(x, y, t)。假设单位时间内通过单位路程的流量与浓度梯度成正比，则有

$$\vec{q} = -k_i \cdot \text{grad} C$$

其中  $k_i (i = x, y)$  是扩散系数, grad 表示浓度梯度, 其中的负号代表重金属污染物的浓度是由高到低的地方扩散。

假设在平面  $S$  上, 设其传播路径为  $l$ , 法线向量为  $\vec{n} = \left(-\frac{x}{y}, 1\right)$ ,

则在  $(t, t + \Delta t)$  内流通过平面  $S$  的流量可表示为:

$$Q_1 = \int_t^{t+\Delta t} \int_l \vec{q} \cdot \vec{n} ds dt \quad (9)$$

平面  $S$  所包围的区域面积内污染的重金属的增量可表示为:

$$Q_2 = \iint_S [C(x, y, t + \Delta t) - C(x, y, t)] d\sigma \quad (10)$$

在有水气共存的土壤中, 即土壤非饱和带中, 污染物随水运移时, 水中的污染物会与气体及土壤颗粒发生物质交换。水气两相间的物质交换平衡可用亨利定律来表示:

$$C_a = HC_w \quad (22)$$

式中,  $C_a$  为气体中的污染物浓度 ( $mg \cdot cm^{-3}$ ),  $C_w$  为水中的污染物浓度 ( $mg \cdot cm^{-3}$ ),  $H$  为亨利系数。不同物质的  $H$  值可在文献中查到。对于水中污染物与固体颗粒间的物质交换, 经常用到以下这一简单的线性方程:

$$q_s = K_d C_w \quad (23)$$

式中,  $q_s$  为固体颗粒表面的污染物浓度 ( $mg \cdot g^{-1}$ ),  $K_d$  为污染物在水与固体颗粒间的分配系数 ( $cm^3 \cdot g^{-1}$ )。

对于土壤中的水-固物质交换, 可以使用 Freundlich 方程。它是一个经常被使用的非线性吸附等温线方程, 其表达式为:

$$q_s = K_F C_w^{1/n} \quad (24)$$

$K_F$  为 Freundlich 分配系数 ( $mg^{1-1/n} \cdot g^{-1} \cdot cm^{3/n}$ ),  $1/n$  表示水-固吸附非线性指数。

假设气相为静止, 且不考虑污染物在气相中的扩散, 污染物在非饱和带中随水运移可由下列一维对流-扩散方程来表示:

$$\theta_w \frac{\partial C_w}{\partial t} + \rho \frac{\partial q_s}{\partial t} + \theta_a \frac{\partial C_a}{\partial t} = -\theta_w v_x \frac{\partial C_w}{\partial x} + \theta_w D_w \frac{\partial^2 C_w}{\partial x^2} \quad (25)$$

式中,  $\theta_w$ ,  $\theta_a$  分别为土壤含水率与含气率,  $\rho$  为土壤干容重 ( $g \cdot cm^{-3}$ ),  $v_x$  为孔隙水流速度 ( $cm \cdot min^{-1}$ ),  $x$  为平面距离 ( $cm$ ),  $D_w$  为扩散系数 ( $cm^2 \cdot min^{-1}$ )。

$$\text{综上式子可得: } R_t \frac{\partial C_w}{\partial t} = -v_x \frac{\partial C_w}{\partial x} + D_w \frac{\partial^2 C_w}{\partial x^2} \quad (26)$$

$$\text{式中, } R_t \text{ 为延滞系数, 即 } R_t = 1 + \frac{\rho K_d}{\theta_a H} + \frac{\theta_w}{\theta_a H} \quad (27)$$

延滞系数  $R_t$  代表污染物运移时由于发生了水—气及水—固体颗粒之间的物质交换而产生的延滞作用。

则土壤中污染物的总浓度:  $Q_2 = C_w + C_a + q_s$

$$\text{由污染源排放出的该重金属的总量为: } Q_0 = \int_t^{t+\Delta t} \int_l p_0 ds dt \quad (11)$$

由质量守恒可得出:  $Q_0 = Q_1 + Q_2$ , 即,

$$\iint_s [C(x, y, t + \Delta t) - C(x, y, t)] d\sigma + \int_t^{t+\Delta t} \int_l \vec{q} \cdot \vec{n} ds dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_l p_0 ds dt \quad (12)$$

$$\text{根据曲面积分 Gauss 公式得: } \int_l \vec{q} \cdot \vec{n} ds = \iiint_s \text{div} \vec{q} d\sigma \quad (13)$$

则式子 (12) 可以转换成

$$\iint_s \left[ \frac{C(x, y, t + \Delta t) - C(x, y, t)}{\Delta t} \cdot \Delta t \right] d\sigma + \int_t^{t+\Delta t} \iiint_s \text{div} \vec{q} d\sigma = \int_t^{t+\Delta t} \int_l p_0 ds dt \quad (14)$$

$$\text{由于 } \frac{\partial C}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{C(x, y, t + \Delta t) - C(x, y, t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_t^{t+\Delta t} k \text{div}(\text{grad} C) dt}{\Delta t} \quad (15)$$

$$\text{故式子 (14) 即可转换成 } \iint_s \left[ \frac{\partial C}{\partial t} \right] d\sigma \cdot \Delta t + \iiint_s \text{div} \vec{q} d\sigma \cdot \Delta t = \int_l p_0 ds \cdot \Delta t \quad (16)$$

$$\text{化简得: } \iint_s \left[ \frac{\partial C}{\partial t} \right] d\sigma + \iiint_s \text{div} \vec{q} d\sigma = P_0 \quad (17)$$

根据 A. Fick 扩散微分方程式中:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U_x \frac{\partial C}{\partial X} + U_y \frac{\partial C}{\partial Y} + U_z \frac{\partial C}{\partial Z} = k_x \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + k_y \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + k_z \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \quad (18)$$

其中:  $C$  为气体浓度;  $t$  为时间;  $u_x, u_y, u_z$  为  $x, y, z$  方向风速;  $k_x, k_y, k_z$  为  $x, y, z$  方向上的扩散系数。

假设重金属污染物在无风条件下扩散, 此时有,

$$\frac{\partial C}{\partial t} = k_x \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad (19)$$

结合式子 (18) 可解出 (17) 的结果为:

$$C(x, y, z, t) = \frac{P_0}{(4\pi t)^{1.5} (k_x k_y k_z)^{0.5}} \exp \left\{ -\frac{x}{4k_x t} - \frac{y}{4k_y t} - \frac{(z-H)}{4k_z t} \right\} \quad (20)$$

由此得到地面土壤表层的浓度:

$$C'(x, y, z, t) = (v_s - w_d - \phi) C(x, y, z, t) \quad (x^2 + y^2 + z^2 = s^2 t^2) \quad (21)$$

由 (21) 式可知, 土壤表层的浓度是一个向四周逐渐减少的函数。

## 六、模型的评价及改进

## 七、参考文献

- [1] 杨苏才, 曾静静, 王胜利, 南忠仁, 兰州市表层土壤 Cu、Zn、Pb 污染评价及成因分析, 市场周刊·理论研究第, 2004. 11。
- [2] 吴邵华, 周生路, 潘贤章, 赵其国, 城市扩建过程对土壤重金属积累影响的定量分析, 土壤学报, 2011. 5。
- [3] 刘丽琼, 魏世江, 江韬, 三峡库区消落带土壤重金属分析特征及潜在风险评价, 中国环境科学, 2011, 31 (17): 1204-1211。
- [4] 彭 胜, 陈家军, 王红旗, 挥发性有机污染物在土壤中的运移机制与模型, 土壤学报, 第 38 卷第 3 期 2001 年 8 月
- [5] 王雄军, 赖健青等, 基于因子分析法研究太原市土壤重金属污染的主要来源 2008. 17 (2) : 671-676。
- [6] 放射气体模型的预估模型
- [7] 姜启源, 谢金星, 叶俊, 数学模型 (第三版), 高等教育出版社, 2003, 1-12。
- [8] 王沫然, MATLAB 与科学计算 (第二版), 电子工业出版社, 2004, 89-90。
- [9] 王冬琳, 数学建模及实验, 国防工业出版社, 2004, 197-199

## 八、附录

附录一:

```
plot(xm(1),ym(1),'ow')
hold
for i=1:319
    switch gongneng(i)
        case 1
            plot(xm(i),ym(i),'or')
        case 2
            plot(xm(i),ym(i),'*g')
        case 3
            plot(xm(i),ym(i),'*b')
```



```

        case 4
        plot(xm(i),ym(i),'*r')
        case 5
        plot(xm(i),ym(i),'ob')
    end
end
load data.txt
load data2.txt
x=data(:,1)';
y=data(:,2)';
z=data2(:,8)';
xi=0:100:max(x);
yi=min(y):100:max(y);
zi=griddata(x,y,z,xi,yi','cubic');
contour(xi,yi,zi)
title('Zn的空间分布图')

```

附录二:

```

for i=1:8;
    [a,b]=max(data(:i));
End

```

附录三:

```

%划分区域
for i=1:size(qu,1)
    if qu(i)==1
        shenghuo=[shenghuo;i];
    end
    if qu(i)==2
        gongye=[gongye;i];
    end
    if qu(i)==3
        shanqu=[shanqu;i];
    end
    if qu(i)==4
        daolu=[daolu;i];
    end
    if qu(i)==5
        gongyuan=[gongyuan;i];
    end
end
shenghuo, gongye, shanqu, daolu, gongyuan,

```

结果:

1) 生活区为以下采样点:

12	13	16	18	20	21	23	25	33	36	39	42
63	67	68	72	94	106	107	152	154	156	157	158
176	180	183	184	186	187	195	198	199	243	254	258
259	267	268	269	272	273	276	306				

2) 工业区为以下采样点:

4	6	8	29	30	31	103	153	177	185	197	221
223	224	225	226	228	230	231	232	233	237	238	239
246	247	248	249	255	262	270	271	274	275	277	278

3) 山区为以下采样点:

62	76	80	81	82	92	100	101	104	108	109	
110	111	112	114	115	116	117	119	120	121	122	123
124	125	126	127	128	129	131	132	133	134	135	136
137	138	189	194	207	209	210	211	217	218	219	220
251	280	281	282	286	287	288	290	291	295	296	297
298	299	300	301	302	304	305					

4) 主干道路区为以下采样点:

1	2	3	5	7	9	10	14	15	17	19	22
26	27	28	32	34	35	37	38	40	41	43	44
45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	64	65	66	71	73	75	77
78	79	83	84	85	86	87	88	89	90	91	93
95	96	97	98	99	102	105	113	118	130	150	151
155	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169
170	171	172	173	174	175	178	179	181	182	188	191
192	196	201	203	204	205	206	208	212	214	215	216
222	227	229	234	235	236	240	241	242	244	245	250
252	256	257	260	261	263	264	265	266	279	283	284
285	289	292	293	303	318						

5) 公园绿地区为以下采样点:

11	24	69	70	74	139	140	141	142	143	144	145
146	147	148	149	190	193	200	202	213	253	294	307
308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	319	

附录四:

```
load data.txt
qu=data(:,4);
shenghuo=[];gongye=[];shanqu=[];daolu=[];gongyuan=[];
for i=1:size(qu,1)
    if qu(i)==1
        shenghuo=[shenghuo;i];
    end
end
```

```

    if qu(i)==2
        gongye=[gongye;i];
    end
    if qu(i)==3
        shanqu=[shanqu;i];
    end
    if qu(i)==4
        daolu=[daolu;i];
    end
    if qu(i)==5
        gongyuan=[gongyuan;i];
    end
end
shenghuo=shenghuo', gongye=gongye', shanqu=shanqu', daolu=daolu', gongyua
n=gongyuan',
load data2.txt
load data3.txt
pingjunzhi=data3(:,1);
fangcha=data3(:,2);
shenghuo=data2(shenghuo,:);
a1=std(shenghuo)
shenghuo=mean(shenghuo)'/pingjunzhi;
gongye=data2(gongye,:);
a2=std(gongye)
gongye=mean(gongye)'/pingjunzhi;
shanqu=data2(shanqu,:);
a3=std(shanqu)
shanqu=mean(shanqu)'/pingjunzhi;
daolu=data2(daolu,:);
a4=std(daolu)
daolu=mean(daolu)'/pingjunzhi;
gongyuan=data2(gongyuan,:);
a5=std(gongyuan)
gongyuan=mean(gongyuan)'/pingjunzhi;
pi=[shenghuo, gongye, shanqu, daolu, gongyuan]
p=sqrt(mean(pi).^2+(max(pi)).^2)/sqrt(2)

```