

关于对卫星和飞船跟踪的测控站分布

摘 要

本文根据天体力学和人造卫星轨道理论,对卫星运行轨迹在地球上进行投影,即用星下点轨迹建立了关于卫星和飞船全程跟踪的测控站分布的数学模型。

对于问题一,我们考虑到要对卫星进行全程监控,且要求卫星运行轨道平面要和测控站共面,利用天体力学知识,得出满足上述条件的卫星运行轨道为地球同步轨道。当地球同步轨道卫星正好为地球静止卫星,其绕地球运行的角速度与地球自转的角速度相同,二者相对静止,此时只需要 1 个位于赤道上的监测点便可实现;若地球同步卫星在顺行轨道¹(即轨道平面与地球赤道平面的夹角小于 90 度的轨道)上绕地球运行时,卫星在地球自转方向与地球相对静止,只在竖直方向上有运动,利用数学知识,卫星轨道运行的星下点³轨迹为一个大圆且过两极,此时应设测控站数为 3 个,如果考虑主控站对测控站的调配作用,应增设一个主控站,共设 4 个站点。

对于问题二,我们将地球和卫星看作一个系统,不考虑其他星球的干扰。当地球自转时该卫星在运行过程中相继两圈的经度差异使得相继两圈的星下点轨迹不重合,此时卫星的星下点轨迹向西平移,在地球上形成一条带状。此时监测点位于条带内。当高度一定时,利用天体运动学和万有引力定律,通过 MATLAB 计算可得:(1)当条带的宽度大于测控站的测控范围在地面投影的直径时,测控站应等距分布到赤道上;(2)当条带的宽度小于等于测控站的测控范围在地面投影的直径时,我们考虑测控站的两种分布方式:呈正三角形分布和正方形分布。将两种分布所得的测控点数作比,得到呈正三角形分布时测控站数目小于正方形分布形式,即测控站呈正三角形分布更优。

对于问题三,我们搜集到神舟七号的运行资料和发射时在国内测控点的地理位置²,我们把地球平面作为坐标面,利用弧长公式和平面几何知识,把测控点的经纬度转化成了经线长和纬线长,以赤道为 x 轴,本初子午线作 y 轴,建立了一个关于纬线长和经线长的二维坐标系。考虑测控点与卫星运行轨道的星下点轨迹条带的不同重合情况和测控点与测控点之间测控范围的重合情况,分析出了其各个情况下的有效覆盖面积。由于测控范围大,计算各个测控站所形成的有效覆盖面积过于繁琐,我们从整体进行估计,根据实际资料,讨论测控站点和星下点轨迹的重合面积,得到了测控站点对于星下点轨迹条带面积覆盖情况,从而解出测控站点监测范围的有效覆盖率为 84.41%。

关键字: 星下点 条带 天体力学 升交点赤经 万有引力定律

一、问题提出

为实现深空探测，需要建立能够对外太空天体进行观测和对外太空探测器（卫星）测量跟踪、导航、遥控和通讯。有计划的对卫星测控站的分布，将会避免站点的重复建设，节约支出经费和提高效率，对实现我国深空探测具有重要意义。

控设备只能观测到所在点切平面以上的空域，且在与地平面夹角 3 度的范围内测控效果不好，实际上每个测控站的测控范围只考虑与地平面夹角 3 度以上的空域。在一个卫星或飞船的发射与运行过程中，往往有多个测控站联合完成测控任务。

请利用模型分析卫星或飞船的测控情况，具体问题如下：

1. 在所有测控站都与卫星或飞船的运行轨道共面的情况下至少应该建立多少个测控站才能对其进行全程跟踪测控？

2. 如果一个卫星或飞船的运行轨道与地球赤道平面有固定的夹角，且在离地面高度为 H 的球面 S 上运行。考虑到地球自转时该卫星或飞船在运行过程中相继两圈的经度有一些差异，问至少应该建立多少个测控站才能对该卫星或飞船可能飞行的区域全部覆盖以达到全程跟踪测控的目的？

3. 收集我国一个卫星或飞船的运行资料和发射时测控站点的分布信息，分析这些测控站点对该卫星所能测控的范围。

二、名次解释与模型假设

2.1 名次解释：

地球同步轨道：卫星在顺行轨道上绕地球运行时，其运行周期（绕地球一圈的时间）与地球的自转周期相同。这种卫星轨道叫地球同步轨道。

地球静止卫星轨道：如果地球同步轨道卫星正好在地球赤道上空离地面 35786 千米的轨道上绕地球运行，由于它绕地球运行的角速度与地球自转的角速度相同，从地面上看去它好像是静止的，这种卫星轨道叫地球静止卫星轨道。地球静止卫星轨道是地球同步轨道的特例，它只有一条。

摄动：一个天体绕另一个天体按二体问题的规律运动时，因受别的天体的吸引或其他因素的影响，在轨道上产生的偏差，这些作用与中心体的引力相比是很小的，因此称为摄动。天体在摄动作用下，其坐标、速度或轨道要素都产生变化，这种变化成分称为摄动项。例如，月球绕地球运动时受到太阳和其他行星吸引以及地球形状的影响，偏离按二体问题规律运动的轨道，而发生摄动。类似摄动的概念，在物理学中称为“微扰”。

升交点：指当卫星轨道平面与地球赤道平面的夹角即轨道倾角不等于零时，轨道与赤道面有两个交点，卫星由南向北飞行时的交点称为升交点。

2.2 模型假设：

- 1、卫星运行轨道为一圆面；
- 2、不考虑其他行星对卫星的摄动影响，不考虑地球形状摄动对卫星轨道的影响；
- 3、卫星运动的星下点轨迹做圆轨道处理；
- 4、地球假设成一个标准的球体、卫星运行轨道为圆形轨道。

三、符号说明

T_1	卫星的运行周期
T_2	地球的自转周期
v_1	卫星在地球自转方向上的分速度
v_2	地球自转的速度
v_3	卫星的竖直分速度
H	卫星到地面的高度
R	地球两极半径，等于 6378km
α	两测控站和地心连线的夹角
n	测控站个数
λ	卫星运行轨道平面和地球赤道平面的夹角
l	卫星的星下点形成的带宽

其他符号在使用时说明.

四、模型建立与求解

4.1 对问题一：

当所有监控站与卫星运行轨道共面时，卫星运行轨道为地球同步轨道 $H=36000\text{km}$ 。此时卫星在顺行轨道（顺行轨道卫星的特点是轨道倾角即轨道平面与地球赤道平面的夹角小于 90° 度。在这种轨道上运行的卫星，绝大多数离地面较近，高度仅为数百公里，故又将其称为近地轨道）上绕地球运行时，其运行周期（ T_1 ）（绕地球一圈的时间）与地球的自转周期(T_2)相同，即 $T_1=T_2$ ，卫星在地球自转方向上的分速度（ v_1 ）等于地球自转的速度(v_2)，即有 $v_1=v_2$ 。卫星水平方向上相对于地球静止，只在竖直方向上有一个竖直分速度 v_3 ，如图 4-1-1 所示

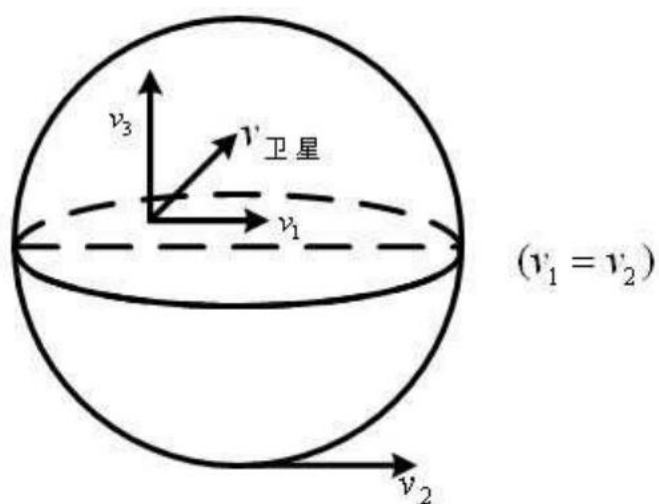


图 4-1-1

此时卫星运动轨道的星下点轨迹形成一个大圆，测控站应设在星下点的轨迹上。如图 4-1-2 所示

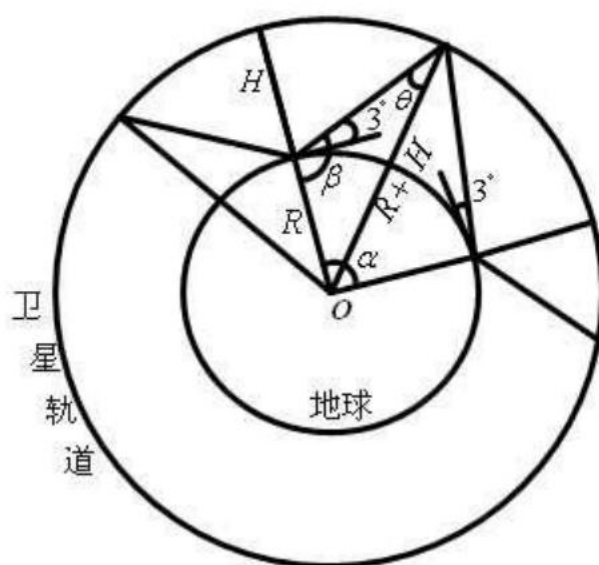


图 4-1-2

β , θ 如图所示, α 为两测控站和地心连线的夹角。 $\beta=90^\circ+3^\circ$, 据此, 建立数学模型如下:

$$\begin{cases} \frac{R}{\sin \theta} = \frac{R+H}{\sin \beta} \\ \frac{\alpha}{2} = 180^\circ - \beta - \theta \\ N = \frac{360^\circ}{\alpha} \end{cases} \quad (1)$$

通过 MATLAB 软件计算得到 $N=2.2972$, 考虑到监控站的数量为整数, 应在卫星所对应的星下点轨迹上设置 3 个测控站, 3 个测控站的纬度相差 120°

对于地球静止卫星轨道, 它处于赤道上方, 且绕地球运行的角速度与地球自转的角速度相同, 相对于地球静止。只需要在卫星所对应的星下点上设置一个测控站即可。

4.2 对问题（二）

1、由于卫星的运行轨道与地球赤道平面有固定的夹角如图 4-2-1,

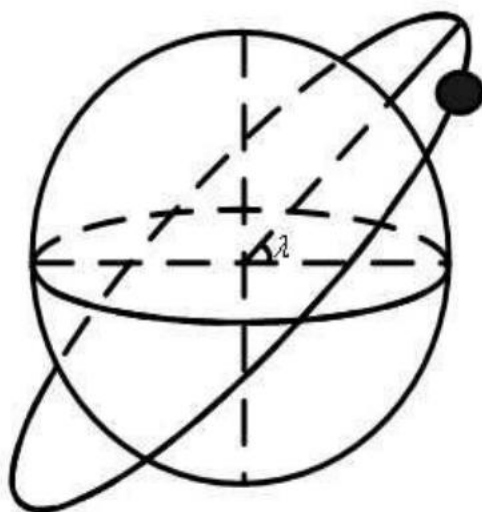
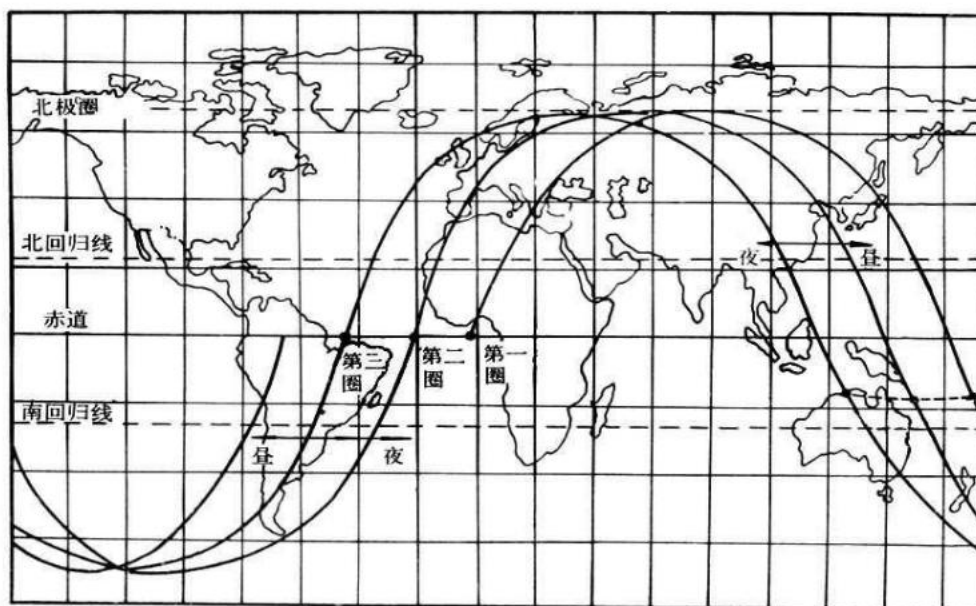


图 4-2-1

并且考虑到地球自转会引起该卫星在运行过程中相继两圈会存在一定的经度差, 由于经度差的存在, 卫星的升交点相对于经度零点持续向西退, 导致卫星运行时在地球上的星下点轨迹不会重合。为此, 我们把地球展开成一个平面, 卫星运行时的前三圈星下点轨迹如图 4-2-2 所示^[2]:



卫星星下点轨迹图

图 4-2-2

随着时间的增加，升交点持续向西退，当星下点轨迹足够多时，形成一条长方形的带状区域（此带状区域描述的是卫星在此区域能等可能出现）如图 4-2-3 所示^[2]：

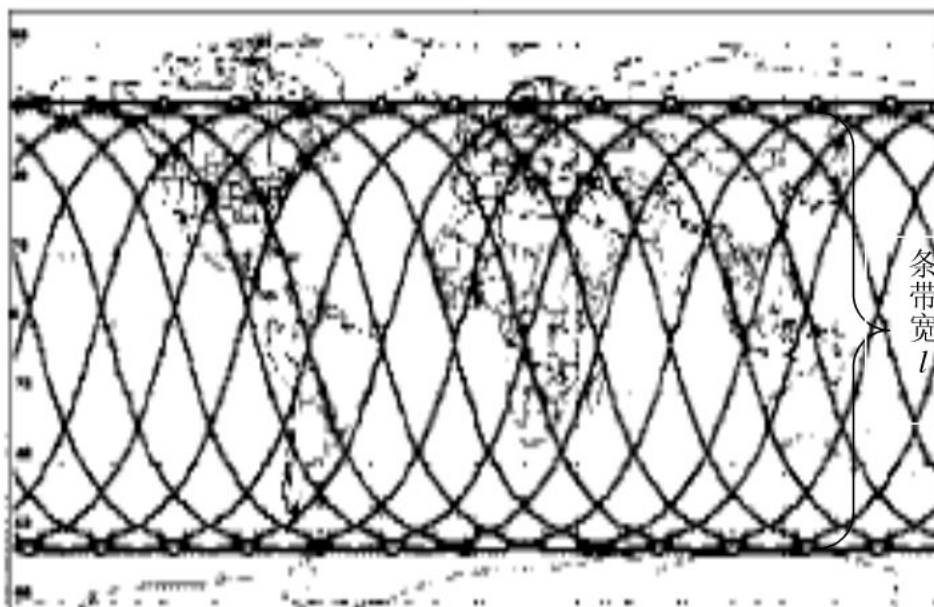


图 4-2-3

我们将测控站分布在条带区域的面积中，测控站的测控范围覆盖整个条带，即实现了对卫星的全程监控。

条带宽：
$$l = \frac{2\lambda\pi R}{180^\circ}$$

测控站的测控范围直径 d 为下图直线 AB 在地球上的投影。如图 4-2-4 所示

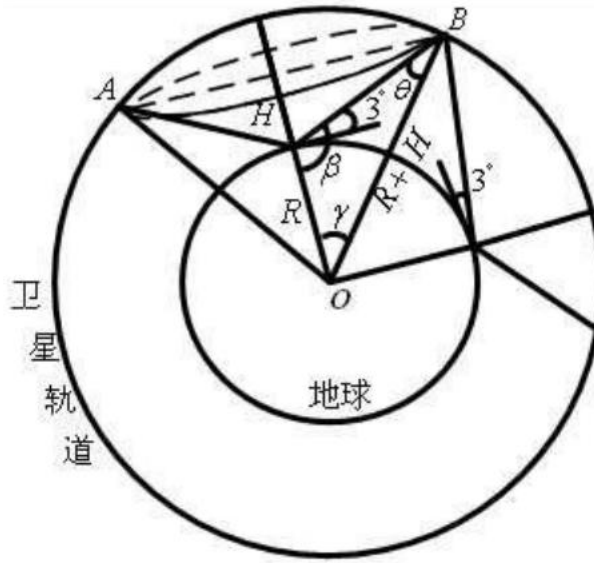


图 4-2-4

其中 $d = 2(R+H)\sin\gamma$

由问题一可知, $\gamma = 180^\circ - \beta - \arcsin\left(\frac{R\sin\beta}{R+H}\right)$

(1)、当 $l < d$ 时, 我们将测控站等距分布在赤道上, 此时测控站测控范围对卫星运行的星下点轨迹有效面积最大, 如图 4-2-5 所示

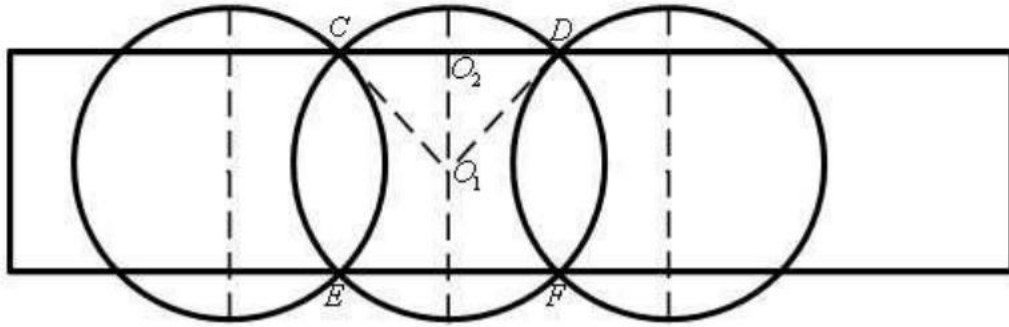


图 4-2-5

由图我们可建立如下数学模型:

$$\begin{cases} CO_2 = l_1 \\ l_1 = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}, \\ n = \frac{2\pi R}{2l_1} \end{cases} \quad (2)$$

所以，赤道上测控站的个数 n 为 $n = \frac{2\pi R}{\sqrt{d^2 - l^2}}$

(2)、当 $l \geq d$ 时，测控站测控范围直径小于星下点轨迹所形成的带宽。
此时我们考虑两种测控站的分布方式，分别建立一个正三角形和正四边形的模型。
模型一：正三角形设立监测站分布图如图 4-2-6 所示如下

1、测

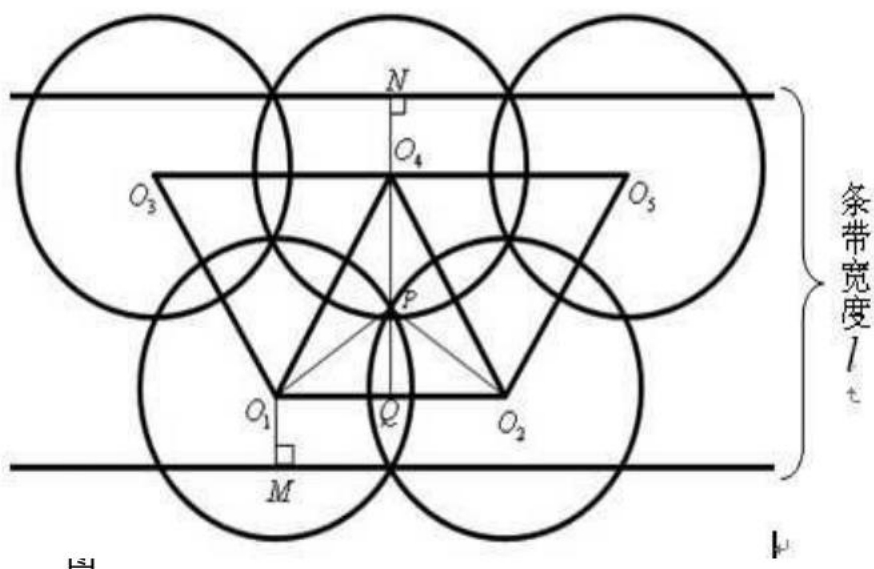


图 4-2-6

$O_1O_2O_4$ 为正三角形 P 为三圆的共同交点，易知，P 为 $O_1O_2O_4$ 的中心。 o_1p 为测控点范围的半径， $o_1p = \frac{d}{2}$

$$\therefore \angle PO_1Q = 30^\circ$$

$$\therefore O_1Q = O_1P \cos \angle PO_1Q = \frac{1}{2} O_1O_2 = \frac{\sqrt{3}d}{4}$$

$$\text{即 } O_1O_2 = \frac{\sqrt{3}d}{2}$$

$$O_1O_2O_4 \text{ 的高 } O_4Q = \sqrt{3}O_1Q = \frac{3}{4}d$$

由于测控站等距分布在赤道两侧，所以测控站离条带边界的距离为

$$O_1M = \frac{l - O_4Q}{2} = \frac{l}{2} - \frac{3d}{8},$$

相同纬度上，两个测控站的距离为 O_1O_2 。通过 O_1M 和 O_1O_2 可以计算出每个测控点在条带上分布的具体位置。

此时测控站的个数为 $n_1 = \frac{2\pi R}{O_1Q} = \frac{8\sqrt{3}\pi R}{3d}$

模型二：正四边形设立监测站分布图如图 4-2-7 如下所示

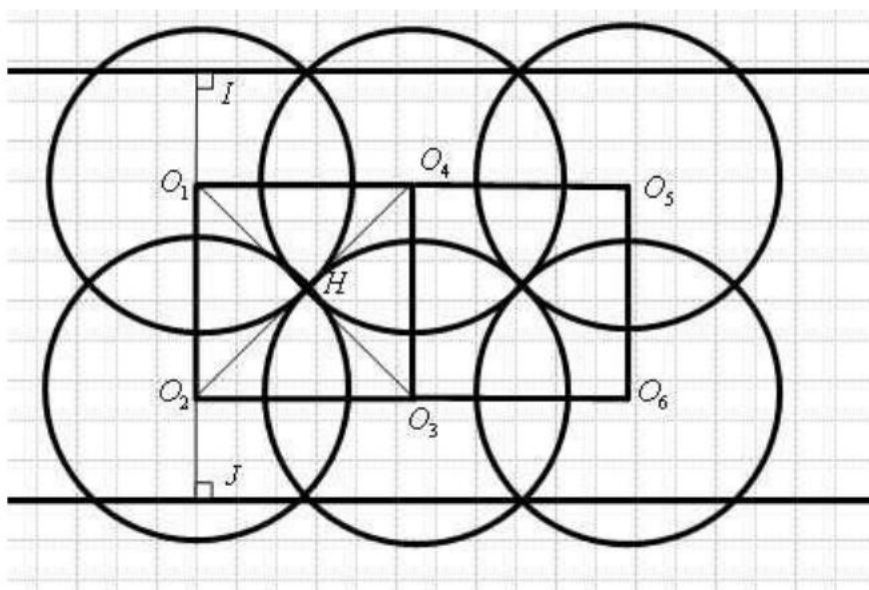


图 4-2-7

已知 $O_1O_2O_3O_4$ 为正方形，且 $O_1H = \frac{1}{2}d$ 所以 $O_4O_3 = O_1O_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}d$

与三角形分布讨论类似，我们可以由 O_1I 和 O_1O_4 的距离确定出测控站在星下点轨迹条带内的分布地点，在这里不详细阐述。

此时测控站的个数为 $n_2 = \frac{4\pi R}{O_1O_4} = \frac{4\sqrt{2}\pi R}{d}$ 。

我们对两种方案下的测控站个数进行比较

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\frac{8\sqrt{3}\pi R}{3d}}{\frac{4\sqrt{2}\pi R}{d}} = 0.8165 < 1.$$

所以 $n_1 < n_2$ ，即测控站正三角形分布方案优于正方形分布方案。

对于其他的覆盖方式，其有效覆盖面积，均小于正三角形或正方形的有效覆盖面积。讨论方法与上述类似，这里不再赘述。

4.3 对问题三：

通过网络，我们收集到神舟七号运行的详细资料。分析讨论神舟七号的测控点对其所能监控的范围。

神舟七号卫星详细轨道参数如下，

倾斜角： 42.401

近地点 x 远地点： 330 x 337 公里

在此只列出计算其运行范围所需要的参数，其他详细参数见附录（1）

为了便于计算,我们在这里把神舟七号卫星运行轨道处理成一个圆轨道，其离地高

$$\text{度 } h = \frac{\text{近地点} + \text{远地点}}{2} = 333.5 \text{ km} \text{ 根据第二问的模型中条带宽度的求解公式 } l = \frac{2\lambda\pi R}{180^\circ},$$

可得神舟七号运行轨道的星下点轨迹带宽为 $l = 9.4399 \times 10^3 \text{ km}$ ，测控站测控范围直径

$$d = 6.8636 \times 10^3 \text{ km}。$$

我们利用 $l = \alpha R$ （弧线长计算公式）将测控站的经度纬度转换成经线长、纬线长后，把每个测控站点作为一个二维坐标点，把地球展开成一个坐标平面，以赤道为轴，本初子午线为 y 轴，计算出下表：

表一 各监测站的经纬度

单位： km

	经度	纬度	经线长 (x)	纬线长 (y)
喀什站	116. 46	39. 92	8455. 6	4399. 3
和田站	75. 94	39. 52	8900. 9	4399. 3
东风	79. 94	37. 12	10965	4420. 4
青岛	120. 33	36. 07	13395	4015. 2
渭南	109. 5	34. 52	12189	3842. 7
厦门	118. 1	24. 46	13147	2722. 8
纳米比亚	22. 34S	17. 06E	2486. 8	1899. 1
马林迪	2. 45S	40. 05E	272. 7269	4452. 7
卡拉奇	24. 51N	67. 02E	2728. 4	7458. 2
圣地亚哥	32. 26S	70. 04W	3591. 1	7792. 2

由于带宽大于测控范围的直径 即 $l > d$

4. 3. 1 所以测控站和条带之间存在两种关系

1 、测控站监测范围完全处于星下点轨迹的带宽当中，此时有效覆盖面积为 100%。

2 、测控站监测范围部分位于星下点轨迹的带宽当中，且测控站位于条带区域中。

如图 4-3-1 所示

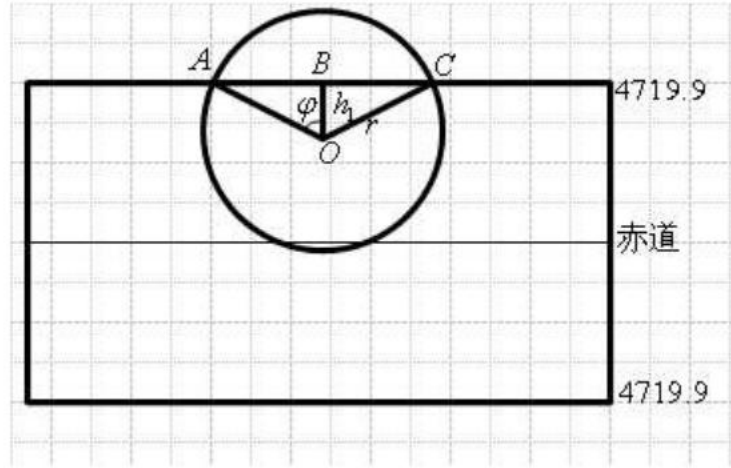


图 4-3-1

由于星下点轨迹分布在赤道两侧， $l = 9.4399 \times 10^3 \text{ km}$ ，所以轨道两侧条带宽度为 4719.9km。

我们设测控点到条带边界的距离为 h_1 ，测控站监测范围的半径为 r ，则

$BC = \sqrt{r^2 - h_1^2}$ ， $\varphi = \arccos \frac{r}{h_1}$ ，落在条带区域内的有效面积 S 为：

$$S = \pi r^2 - \frac{2\varphi \pi r^2}{360} + h_1 \sqrt{r^2 - h_1^2}。$$

当测控站监测范围部分位于条带区域中且测控站位于条带区域外时，如图 4-3-2 所示。

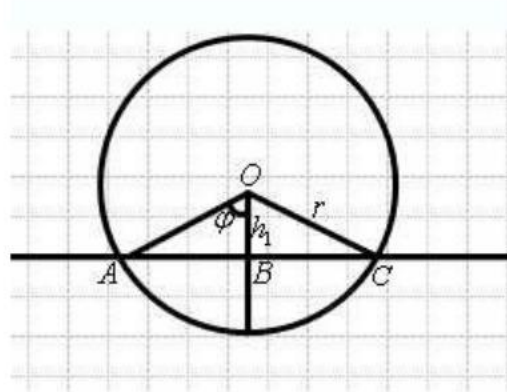


图 4-3-2

此时的有效覆盖面积为：

$$S = \frac{2\varphi \pi r^2}{360} - h_1 \sqrt{r^2 - h_1^2}$$

4.3.2 有效覆盖面积

由于条带当中存在测控站监测区域的覆盖，我们计算此时的有效覆盖面积，如图 4-3-3 所示：

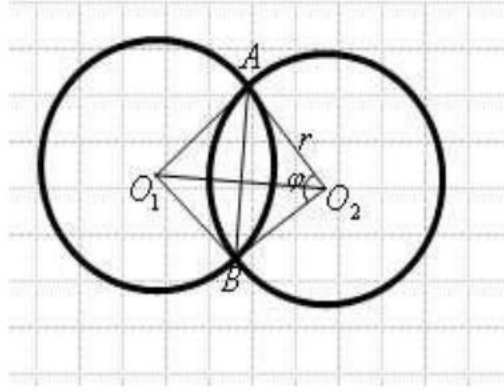


图 4-3-3

由题目可知 O_1 O_2 各自的经度和纬度，即可知道线段 O_1O_2 的长度，我们设

$O_1O_2 = h_2$ ，则 $\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{h_2}{2r}$ ，所以 $\varphi = 2 \arccos \frac{h_2}{2r}$ ，则扇形 ABO_2 的面积 $S_1 = \frac{\varphi \pi r^2}{360}$ 。

已知一个测控站的监测范围面积为 $S = \pi r^2$ ， ABO_2 的面积为 S_3

$$S_3 = \frac{1}{2} r^2 \sin \varphi$$

则两测控站所组成的有效覆盖面积 S_2 为

$$S_2 = 2(S - S_1 + S_3)。$$

当测控站过多时，有效覆盖面积计算太过繁杂，我们这里通过对神舟七号实际的测控站分布做一个测控站监测范围的模拟，估计出神舟七号测控站对其星下点轨迹运行条带的有效覆盖面积，算出 η 有效面积覆盖率。

我们考虑到神舟七号远洋测控站点可以移动，假设其测控范围全落在条带内。根据条带宽度和测控范围直径，大致画出下图 4-3-4 所示的测控站分布。其中远洋测控站用虚线圆表示。

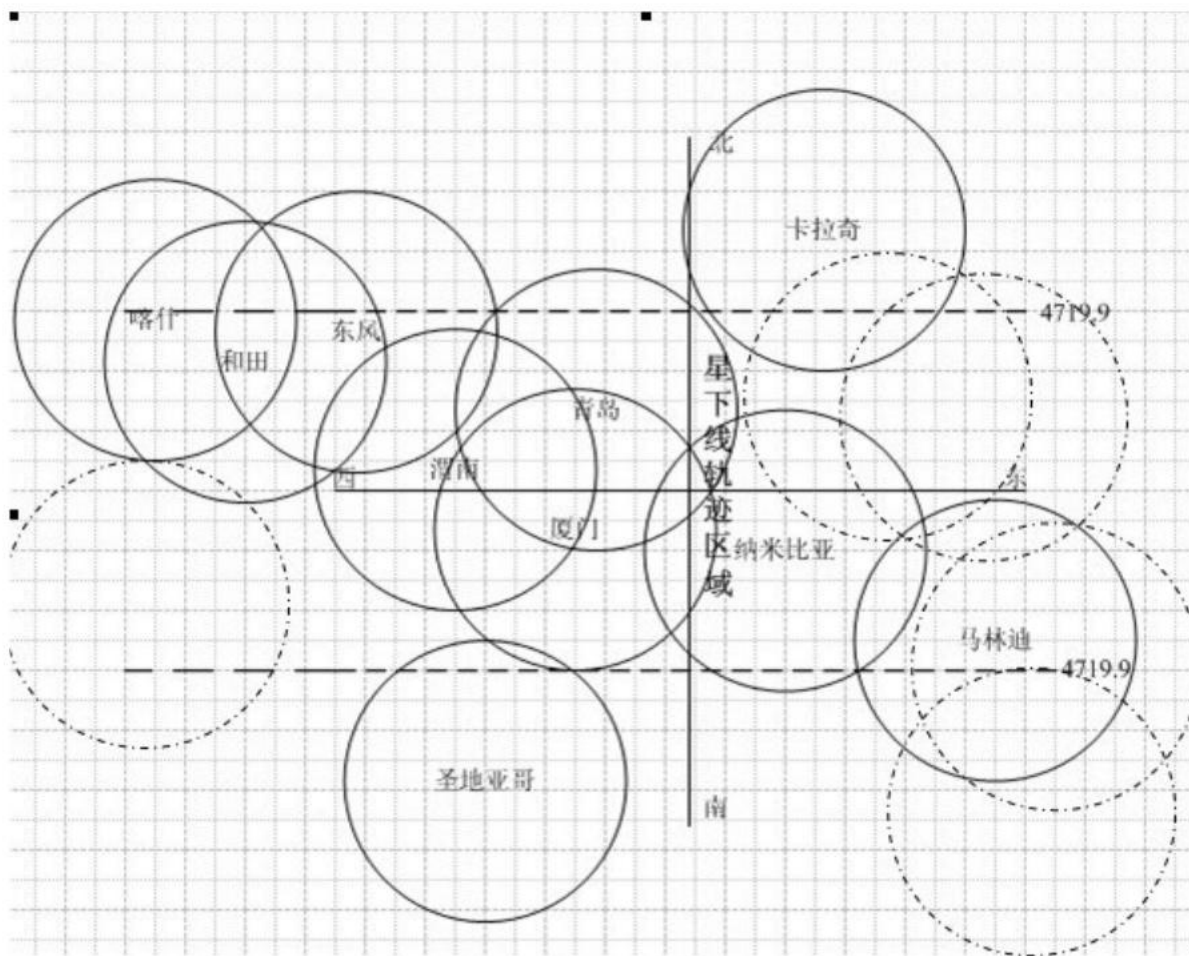


图 4-3-4

对于中国境内的站点，需对通过国内上空领域的卫星进行全境监控，其测控站覆盖面积为喀什到青岛的水平距离乘以测控站半径长。通过分析我们认为纳米比亚站和卡拉奇站测控范围全落在条带内，而马林迪站和圣地亚哥站的监控范围只有一半左右落在条带内。

测控面积 A 为：

$$A = a + b_1 + b_2 + b_3 + b_4$$

其中 a 为国内检测站点测控的有效覆盖面积， b_1 为 5 个远洋测控站的测控面积， b_2 为卡拉奇测控面积， b_3 纳米比亚测控面积， b_4 马林迪测控面积和圣地亚哥测控面积

此时测控站点的覆盖率 $\eta = \frac{\text{测控面积}}{\text{条带面积}}$ ，即

$$\eta = \frac{A}{2\pi Rl}。$$

带入神七的实际数据计算得到测控点面积覆盖率为 84.41%。

五、模型的推广与评价

5.1 模型的推广：

由于一个测控站对一颗卫星的监控只是相对较短的时间，当卫星处于该测控站监测范围之外，该测控站处于实际不工作状态。利用建立的模型，计算卫星运行的周期，当卫星即将运动到该监控站监控范围的时候，监控站才启动监控。这样可以避免人力和物力的浪费，节约有限的资源。

5.2 模型的评价：

本文所建的模型较好解决了测控站的个数安排，算出了测控站安排的最少个数，并且解释了实际应用中卫星测控站的分布情况。但对于问题三的计算过程太过复杂，我们只在分析中提出了用二维坐标计算覆盖面积的思路，计算出大致结果，理论计算不够精确。

六、参考文献

- [1] <http://baike.baidu.com/view/849680.htm>,2009.9
- [2] <http://www.hkhtbbs.cn/space/simple/?t629.html> 2009.9
- [3] <http://www.chinavalue.net/wiki/showcontent.aspx?titleid=222337> 2009.9
- [4]张云彬 张永生 近圆轨道遥感卫星星下点轨迹的计算 测绘学院学报 第18卷第4期 2001.12
- [5]<http://www.hkhtbbs.cn/space/simple/?t629.html>; 2009.9
- [6]<http://hi.baidu.com/nzssz/blog/item/fc186e0e7b0f84c97acbe15e.html>; 2009.9
- [7]<http://baike.baidu.com/view/246207.htm>; 2009.9
- [8]<http://www.baislo.com/bslhangkong/UploadFiles/20070905/%CE%C0%D0%C7%C0%E0/ppt/%B5%D8%C7%F2%CE%C0%D0%C7.ppt>; 2009.9
- [9]<http://www.chinavalue.net/wiki/showcontent.aspx?titleid=222337>; 2009.9
- [10] <http://hi.baidu.com/nzssz/blog/item/fc186e0e7b0f84c97acbe15e.html> 200.9

附 录

附录（一）：神舟七号的运行资料

神舟七号的详细轨道参数：

名称 SHENZHOU-7

NORAD # 33386

COSPAR 标示 2008-047-A

历时 (UTC) 2008-09-25 20:37:22

轨道编号 (历时) 5

倾斜角 42.401

赤经升交点 192.336

偏心率 0.0005144

近地点幅角 274.542

每日绕行次数 15.78931024

期间 1h 31m 12s (91.20 分)

半长轴 6 712 公里

近地点 x 远地点 330 x 337 公里

BStar (drag term) 0.000000000 1/ER

平均近点角 164.088

运转模式 SGP4

上述轨道数据的一些说明：

COSPAR 标示 2008-047-A

国际空间研究委员会 (Committee on Space Research, 简写: COSPAR)

国际空间研究委员会 (Committee for Space Research 简称 COSPAR) 是于 1958 年 10 月作为国际科学联合会理事会 (ICSU) 的跨学科成员在华盛顿建立的。其宗旨和原则是在国际范围内通过学术交流和组织实施国际研究项目促进以卫星、火箭、飞船、高空气球等为手段的各种科学研究。