排队论模型

排队论又称随机服务系统，它应用于一切服务系统，包括生产管理系统、通信系统、交通系统、计算机存储系统。它通过建立一些数学模型，以对随机发生的需求提供服务的系统预测。现实生活中如排队买票、病人排队就诊、轮船进港、高速路上汽车排队通过收费站、机器等待修理等等都属于排队论问题。在历年数模竞赛中，排队论模型应用的全国数模竞赛中 2009B 的眼科病床的合理安排问题，美国数模竞赛中 2005B 收费站最佳配置问题。

本章内容分为三部分：排队论立本构成与指标，排队论的四种重要模型，排队论的计算机模拟。每部分内容都提供相应的计算程序，有的采用 LINGO 编制，有的采用 Matlab 编制。

1 排队论基本构成与指标

1.排队论的基本构成

1) 输入过程。

输入过程是描述顾客是按照怎样的规律到达排队系统的。包括①顾客总体：顾客的来源是有限的还是无限的。②到达的类型：顾客到达是单个到达还是成批到达。③相继顾客到达的时间间隔：通常假定是相互独立同分布，有的是等间隔到达，有的是服从负指数分布，有的是服从 k 阶 Erlang 分布。

2) 排队规则

排队规则指顾客按怎样的规定的次序接受服务。常见的有等待制，损失制，混合制，闭合制。当一个顾客到达时所有服务台都不空闲，则此顾客排队等待直到得到服务后离开，称为等待制。在等待制中，可以采用先到先服务，如排队买票；也有后到先服务，如天气预报；也有随机服务，如电话服务；也有有优先权的服务，如危重病人可优先看病。当一个顾客到来时，所有服务台都不空闲，则该顾客立即离开不等待，称为损失制。顾客排队等候的人数是有限长的，称为混合制度。当顾客对象和服务对象相同且固定时是闭合制。如几名维修工人固定维修某个工厂的机器就属于闭合制。

3) 服务机构

服务机构主要包括：服务台的数量；服务时间服从的分布。常见的有定长分布、负指数分布、几何分布等。

2、排队系统的数量指标

(1)队长与等待队长

队长（通常记为L_s）是指系统中的平均顾客数（包括正在接受服务的顾客）。等待队长（通常记为L_q）指系统中处于等待的顾客的数量。显然，队长等于等待队长加上正在服务的顾客数。

(2)等待时间

等待时间包括顾客的平均逗留时间（通常记为W_s）和平均等待时间（通常记为W_q）。顾客的平均逗留时间是指顾客进入系统到离开系统这段时间，包括等待时间和接受服务的时

间。顾客的平均等待时间是指顾客进入系统到接受服务这段时间。

(3)忙期

从顾客到达空闲的系统，服务立即开始，直到再次变为空闲，这段时间是系统连续繁忙的时期，称之为系统的忙期。它反映了系统中服务机构工作强度，是衡量服务系统利用效率的指标，即

服务强度=忙期/服务总时间=1—闲期/服务总时间

闲期与忙期对应的系统的空闲时间，也就是系统连续保持空闲的时间长度。

计算这些指标的基础是表达系统状态的概率。所谓系统的状态是指系统中的顾客数，如果系统中有 n 个顾客就说系统的状态是 n，它可能的数值是：

①队长没有限制时，n=0, 1, 2, . . . ,

②队长有限制，最大数为 N，则 n=0, 1, 2, . . . , N

③即时制，服务台个数为 c 时，n=0, 1, 2, . . . , c。该状态又表示正在工作的服务台数。

3、排队论中的符号表示

排队论中的记号是 20 世纪 50 年代初由 D.G.Kendall 引入的，通常由 3~5 个字母组成，形式为：

A/B/C/n

其中 A 表示输入过程，B 代表服务时间，C 代表服务台数量，n 表示系统容量。如

(1) M/M/S/∞表示输入过程是 Poisson 流，服务时间服从负指数分布，系统有 S 个服务台平行服务，系统容量为无穷大的等待制排队系统。

(2) M/G/S/∞表示输入过程是 Poisson 流，服务时间服从一般概率分布，系统有 S 个服务台平行服务，系统容量为无穷大的等待制排队系统。

（3）D/M/S/K 表示顾客相继到达时间间隔独立、服从定长分布，服务时间服从负指数分布，系统有 S 个服务台平行服务，系统容量为 K 个的混合制系统。

(4) M/M/S/S 表示输入过程是 Poisson 流，服务时间服从负指数分布，系统有 S 个服务台平行服务，顾客到达后不等待的损失制系统。

（5）M/M/S/K/K 表示输入过程是 Poisson 流，服务时间服从负指数分布，系统有 S 个服务台平行服务，系统容量和顾客容量都为 K 个的闭合制系统。

2　排队论中四种重要模型

1.等待制模型 M/M/S/∞

该模型中顾客到达规律服从参数为 λ 的 Poisson 分布，在 $[0,t]$ 时间内到达的顾客数 $X(t)$ 服从的的分布为：

$$P\{X(t)=k\}=\frac{(\lambda t)^k.e^{-\lambda t}}{k!} \qquad (1)$$

其单位时间到达的顾客平均数为 λ，$[0,t]$ 时间内到达的顾客平均数为 λt 。

顾客接受服务的时间服从负指数分布，单位时间服务的顾客平均数为 μ，服务时间的分布为：

$$f(t)=\begin{cases}\mu e^{-\mu t} & t>0\\ 0\end{cases} \quad (2)$$

每个顾客接受服务的平均时间为$\frac{1}{\mu}$。

下面分别给出 S=1 和 S>1 的一些主要结果。

1.1 只有一个服务台的 S=1 情形

当系设稳定状态下系统有i个顾客的概率为$p_i(i=0,1,2,\cdots)$。p_0表示系统空闲的概率。因此：

$$\sum_{i=0}^{\infty}p_i=1 \quad p_i\ge 0, i=1,2,\cdots,K \quad (3)$$

平衡方程为：

$$\begin{cases}\lambda P_0=\mu P_1\\ \lambda P_{k-1}+\mu P_{k+1}=(\lambda+\mu)P_k\end{cases} \quad k=1,2,3,.... \quad (6)$$

可以计算出稳定状态下系统有n个顾客的概率：

$$p_n=(1-\rho)\rho^n \quad n=0,1,2,3\cdots \quad (3)$$

其中$\rho=\frac{\lambda}{\mu}$称为系统的服务强度。

则系统没有顾客的概率为：

$$p_0=1-\rho=1-\frac{\lambda}{\mu}$$

系统中顾客的平均队长为：

$$L_s=\sum_{n=0}^{\infty}n.p_n=(1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty}n.\rho^n=\frac{\rho}{1-\rho}=\frac{\lambda}{\mu-\lambda} \quad (4)$$

系统中顾客的平均等待队长为：

$$L_q=\sum_{n=1}^{\infty}(n-1).p_n=(1-\rho)\sum_{n=1}^{\infty}(n-1).\rho^n=\frac{\rho^2}{1-\rho}=\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} \quad (5)$$

系统中顾客的平均逗留时间为：

$$W_s=\frac{1}{\mu-\lambda} \quad (6)$$

系统中顾客的平均等待时间为：

$$W_q=\frac{1}{\mu-\lambda}-\frac{1}{\mu}=\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \quad (7)$$

从(4)~(6)式可以看出：

$$L_s = \lambda W_s \ , \quad L_q = \lambda W_q \tag{8}$$

或 $$W_s = \frac{L_s}{\lambda} \ , \quad W_q = \frac{L_q}{\lambda} \tag{9}$$

该公式称为 Little 公式。在其它排队论模型中依然适用。

Little 公式的直观意义：

$L_s = \lambda W_s$ 表明排队系统的队长等于一个顾客平均逗留时间内到达的顾客数。

$L_q = \lambda W_q$ 表明排队系统的等待队长等于一个顾客平均等待时间内到达的顾客数。

1.2 系统有多个服务台 $s > 1$ 情形

当系设稳定状态下系统有 i 个顾客的概率为 $p_i (i = 0,1,2,\cdots)$ 。p_0 表示系统空闲的概率。因此：

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1 \quad p_i \geq 0, i = 1,2,\cdots,K \tag{10}$$

平衡方程为:

$$\begin{cases} \mu P_1 = \lambda P_0 \\ (k+1)\mu P_{k+1} + \lambda P_{k-1} = (\lambda + k\mu) P_k \quad 1 \leq k \leq s-1 \\ s\mu P_{k+1} + \lambda P_{k-1} = (\lambda + s\mu) P_k \quad k \geq s \end{cases} \tag{11}$$

统中有 s 个服务台，系统服务能力为 $s\mu$，服务强度为 $\rho = \dfrac{\lambda}{s\mu}$ 。

系统中顾客的平均队长为：

$$L_s = s\rho + \frac{(s\rho)^s \rho}{s!(1-\rho)^2} . p_0 \tag{12}$$

其中 $p_0 = \left[\sum_{k=0}^{s-1} \dfrac{(s\rho)^k}{k!} + \dfrac{(s\rho)^s}{s!(1-\rho)} \right]^{-1}$，表示所有服务台都空闲的概率。

系统中顾客的逗留时间为：

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} \tag{11}$$

系统中顾客的平均等待时间为：

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu} \tag{12}$$

系统中顾客的平均等待队长为：

$$L_q = \lambda W_q \tag{13}$$

1.3 LINGO 中的相关函数及相关参数计算公式

（1）顾客等待概率的公式：

$$\mathrm{P_{wait}}\text{=@peb(load,S)} \tag{14}$$

其中 S 为服务台服务台个数，load 为系统到达的载荷，即 $\mathrm{load} = \frac{\lambda}{\mu}$。

（2）顾客的平均等待时间公式：

$$\mathrm{W_q}=\mathrm{P_{wait}}\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{S-load}} \tag{15}$$

其中 T 为顾客接受服务的平均时间，有 $T = \frac{1}{\mu}$。

当 load>s 时无意义，表示当系统负荷超过服务台个数时，排队系统达到不稳定状态，队伍将越排越长。

（3）系统中顾客的平均逗留时间 $W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$ （16）

(4) 系统中顾客的的平均队长 $L_s = \lambda W_s$ （17）

(5) 系统中顾客的的平均等待队长 $L_q = \lambda W_q$ （18）

问题 1 某机关接待室只有 1 名对外接待人员，每天工作 10 小时，来访人员和接待时间都是随机的。设来访人员按照 Poisson 流到达，到达速率为 $\lambda = 8$ 人/小时，接待人员的服务速率为 $\mu = 9$ 人/小时，接待时间服从负指数分布。

（1）计算来访人员的平均等待时间，等候的平均人数。

（2）若到达速率增大为 $\lambda = 20$ 人/小时，每个接待人员的服务速率不变，为使来访问人员平均等待时间不超过半小时，最少应该配置几名接待人员。

解答：

（1）该问题属于 M/M/1/∞排队模型。

S=1，$\lambda = 8$，$\mu = 9$ 需要计算来访人员的平均等待时间 W_q，等候的平均人数 L_q。

LINGO 程序为：

```
model:
lp=8;
u=9;
T=1/u;
load=lp/u;
S=1;
Pwait=@PEB(load,S);!等待概率;
```

```
W_q=Pwait*T/(S-load);!平均等待时间;
L_q=lp*W_q;!顾客的平均等待队长;
end
```

计算结果：

来访人员的平均等待时间 $W_q = 0.89$ 小时=53 分钟，等待队长 $L_q = 7.1$ 人。

（2）该问题属于 M/M/S/∞排队模型的优化问题。

求最小的 S 使，来访人员的平均等待时间 $W_q \le 0.5$ 。

建立模型为：

$$\min S$$

$$s.t.\begin{cases} \mathrm{P_{wait}}=\mathrm{@peb(load,S)} \\ \mathrm{load} = \dfrac{\lambda}{\mu} \\ T = \dfrac{1}{\mu} \\ \mathrm{W_q}=\mathrm{P_{wait}}\dfrac{\mathrm{T}}{\mathrm{S-load}} \\ L_q = \lambda W_q \\ W_q \le 0.5 \\ S \in N \end{cases}$$

实现的 LINGO 程序为：

```
model:
min=S;
lp=20;
u=9;  !服务率;
T=1/u;
load=lp/u;
Pwait=@PEB(load,S);!接待人员的等待概率;
W_q=Pwait*T/(S-load);!平均等待时间;
W_q<=0.5;
L_q=lp*W_q;!顾客的平均等待队长;
TT=W_q*60;
!S>=3;
@gin(S);
end
```

计算结果为：最少需要接待人员S=3人。

来访人员等待概率为0.55，平均等待时间为W_q=4.7分钟，

平均等待队长为L_q 1.58人。

2. 损失制模型 M/M/S/S

M/M/S/S 模型表示顾客到达人数服从 Poisson 分布，单位时间到达率为λ，服务台服务时间服从负指数分布，单位时间服务平均人数为μ。当 S 个服务台被占用后，顾客自动离开，不再等待。

这里我们给出 LINGO 中的有关函数及相关参数的计算公式

(1) 系统损失概率

$$P_{lost}=@pel(load,S) \tag{19}$$

其中 S 为服务台服务台个数，load 为系统到达的载荷，即$\mathrm{load}=\dfrac{\lambda}{\mu}$。

损失概率表示损失的顾客所占的比率。

(2) 单位时间内进入系统的平均顾客数

$$\lambda_e=\lambda(1-P_{lost}) \tag{20}$$

(3)系统中顾客的平均队长（系统在单位时间内占用服务台的均值）

$$L_s=\frac{\lambda_e}{\mu} \tag{21}$$

(4) 系统中顾客的平均逗留时间(服务时间)

$$W_s=\frac{1}{\mu}=T \tag{22}$$

(5)系统服务台的效率

$$\eta=\frac{L_s}{s} \tag{23}$$

在损失制排队模型中，顾客平均等待时间$W_q=0$，平均等待队长$L_q=0$，因为没有顾客等待。

问题 2　某单位电话交换台有一部 300 门内线电话的总机，已知上班时间有 30%的内线分机平均每 30 分钟要一次外线电话，70%的分机每隔 70 分钟时要一次外线电话。又知从外单位打来的电话的呼唤率平均 30 秒一次，设与外线的平均通话时间为 3 分钟，以上时间都服从负指数分布。如果要求外线电话接通率为 95%以上，问电话交换台应设置多少外线？

解：该问题属于损失制排队的优化建模。

电话交换台的服务分为两部分，一类是内线打外线，一类是外线打内线。

内线打外线的服务强度（每小时通话平均次数）（到达率）

$$\lambda_1=(\frac{60}{30}\times 30\%+\frac{60}{70}\times 70\%)\times 300=1.2\times 300=360$$

外线打内线的服务强度(到达率)

$$\lambda_2=\frac{60}{0.5}=120$$

总强度为 $\lambda=\lambda_1+\lambda_2=360+120=480$

电话平均服务时间为 $T=\frac{3}{60}=0.05$ 小时，服务率 $\mu=\frac{60}{3}=20$ 个

对该问题，目标是求最小的电话交换台数 S，使顾客（外线电话）损失率不超过 5%，即：

$$P_{lost}\le 5\%$$

建立的优化模型为：

$$\min S$$

$$s.t.\begin{cases}\mathrm{P_{lost}}=\text{@pel(load,S)}\\ \mathrm{load}=\dfrac{\lambda}{\mu}\\ \mathrm{P_{lost}}\le 0.05\\ \lambda_e=\lambda(1-\mathrm{P_{lost}})\\ L_s=\dfrac{\lambda_e}{\mu}\\ \eta=\dfrac{L_s}{s}\\ S\in N\end{cases}$$

LINGO 程序为：

```
model:
min=S;
lp=480;!每小时平均到达电话数;
u=20;  !服务率;
load=lp/u;
Plost=@PEL(load,S);!损失率;
Plost<=0.05;
lpe=lp*(1-Plost);
L_s=lpe/u;!顾客的平均队长;
eta=L_s/S; !系统服务台的效率;
@gin(S);
end
```

计算结果为：

最小的电话交换台为S=30。

电话损失率为 P_{lost}=0.04，实际进入系统的电话平均为 $\lambda_e = 460.7$，

平均队长 $L_s = 23.037$，系统服务台的效率 $\eta = 0.768$。

3.混合制模型 M/M/S/K

混合制模型 M/M/S/K，表示顾客到达人数服从 Poisson 分布，单位时间到达率为 λ，服务台服务时间服从负指数分布，单位时间服务平均人数为 μ，系统有 S 个服务台，系统对顾客的容量为 K。当 K 个位置被顾客占用时，新到的顾客自动离去。当系统中有空位置时，新到的顾客进入系统排队等候。

对混合制模型，LINGO 没有相关函数计算参数。需要自己编程计算。

（1）混合制模型基本公式：

设稳定状态下系统有 $i(i=0,1,2,\cdots,K)$ 个顾客的概率为 $p_i(i=0,1,2,\cdots,K)$。p_0 表示系统空闲的概率。因此：

$$\sum_{i=0}^{K} p_i = 1 \qquad p_i \geq 0, i=1,2,\cdots,K \tag{24}$$

设 $\lambda_i(i=0,1,2,\cdots,K)$ 表示系统中有 i 个顾客时的输入强度，$\mu_i(i=0,1,2,\cdots,K)$ 表示系统中有 i 个顾客时的服务强度。在稳定状态下，可建立平衡方程：

$$\begin{cases} \lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1 \\ \lambda_0 p_0 + \mu_2 p_2 = (\lambda_1 + \mu_1) p_1 \\ \lambda_{i-1} p_{i-1} + \mu_{i+1} p_{i+1} = (\lambda_i + \mu_i) p_i \qquad (i = 2,\cdots,K-1) \\ \lambda_{K-1} p_{K-1} = \mu_K . p_K \end{cases} \tag{25}$$

对于混合制系统 M/M/S/K，有：

$$\lambda_i = \lambda \qquad (i=0,1,2,\cdots,K) \tag{26}$$

$$\mu_i = \begin{cases} i\mu & i \leq S \\ S\mu & i > S \end{cases} \qquad (i=1,2,\cdots,K) \tag{27}$$

（2）混合制模型基本参数计算

由于当系统有 K 个人时，到达的顾客就会流失，因此有系统损失概率：

$$P_{lost} = P_K \tag{28}$$

单位时间内进入系统的平均顾客数

$$\lambda_e = \lambda(1 - \mathrm{P_{lost}}) = \lambda(1 - \mathrm{P_K}) \tag{29}$$

系统中顾客的平均队长

$$L_s = \sum_{i=0}^{K} i.p_i \tag{30}$$

系统中顾客的平均等待队长

$$L_q = \sum_{i=S}^{K} (i-S).p_i = L_s - \frac{\lambda_e}{\mu} \tag{31}$$

系统中顾客的平均逗留时间

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_e} \tag{32}$$

系统中顾客的平均等待时间

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu} = W_s - T \tag{33}$$

问题 3　某理发店有 4 名理发师，因场地所限，店里做多容纳 12 名顾客，假设来理发的顾客按 Poisson 分布到达，平均到达率为 18 人/小时，理发时间服从负指数分布，平均每人 12 分钟。求该系统的各项指标。

解：该模型是 M/M/4/12 混合制模型。S=4，K=12，$\lambda = 18$，$\mu = 60/12 = 5$。

各项指标的计算采用上面的公式。

该程序的编制可采用 LINGO 实现。程序为：

```
!混合制排队论模型;
model:
sets:
state/1..12/:P;
endsets
lp=18;!顾客到达率;
u=5; !服务率;
S=4; !服务员人数;
K=12; !系统容量;
P0+@sum(state(i):P(i))=1; !概率和;
u*P(1)=lp*P0; !平衡点0;
lp*P0+2*u*P(2)=(lp+u)*P(1); !平衡点1;
@for(state(i)|i#GT#1#and#i#LT#S:lp*P(i-1)+(i+1)*u*P(i+1)=(lp+i*u)*P(i)
); !平衡点i[2,S-1];
@for(state(i)|i#GE#S#and#i#LT#K:lp*P(i-1)+S*u*P(i+1)=(lp+S*u)*P(i)); !
平衡点i[S,K-1];

lp*P(K-1)=S*u*P(K); !平衡点K;
```

```
Plost=P(K);  !损失率;
lpe=lp*(1-P(K)); !实际到达率;

L_s=@sum(state(i):i*P(i));!平均队长;
L_q=L_s-lpe/u;  !平均等待队长;

W_s=L_s/lpe; !平均逗留时间;
W_q=L_q/lpe; !平均等待时间;

end
```

计算结果为：

理发师空闲率为 P0=0.16，损失顾客率 0.049，每小时实际进入理发店人数为 λ_e=17.12 人，平均队长 L_s=5.72 人，平均等待队长 L_q=2.3 人，平均逗留时间 W_s=0.334 小时，平均等待时间 W_q=0.134 小时。

4.闭合制模型 M/M/S/K/K

M/M/S/K 模型表示系统有 S 个服务台，顾客到达人数服从 Poisson 分布，单位时间到达率为 λ，服务台服务时间服从负指数分布，单位时间服务平均人数为 μ。系统容量和潜在的顾客数都为 K。

基本参数计算：

（1）平均队长(LINGO 计算公式)

$$L_s\text{=@pfs(load,S,K)} \tag{34}$$

其中 S 为服务台服务台个数，load 为系统到达的载荷，这里 load $= K.\dfrac{\lambda}{\mu}$。

(2) 单位时间平均进入系统的顾客数

$$\lambda_e = \lambda(K - L_s) \tag{35}$$

(3) 顾客处于正常情况的概率

$$P = \frac{K - L_s}{K} \tag{36}$$

(4) 系统中顾客的平均等待队长 L_q，平均逗留时间 W_s，平均等待时间 W_q 为：

$$L_q = L_s - \frac{\lambda_e}{\mu} \qquad W_s = \frac{L_s}{\lambda_e} \qquad W_q = \frac{L_q}{\lambda_e} \tag{37}$$

（5）每个服务台的工作强度

$$\mathrm{P_{work}} = \frac{\lambda_e}{S\mu} \tag{38}$$

问题 4　现有某工厂有 30 台自动车床，由 4 名工人负责维修管理。当机床需要加料、发生故障或刀具磨损时就自动停车，等待工人照管。设平均每台机床两次停车时间间隔为 1 小时，停车时需要工人照管的平均时间为 5 分钟，并服从负指数分布。求该排队系统的各项指标。

解：该排队系统是闭合制排队模型 M/M/4/30/30。参数 S=4，K=30，$\lambda = 1$，$T = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$，$\mu = 12$。根据上面公式可计算出各项指标。

LINGO 程序为：

```
model:
lp=1;!每小时故障到达数;
u=12;  !服务率;
K=30;  !机器数;
S=4;   !维修工人数;
load=K*lp/u;
L_s=@pfs(load,S,K);!等待队长;
lpe=lp*(K-L_s); !进入维修的平均机器数;
Prob=(K-L_s)/K; !机器工作概率;
L_q=L_s-lpe/u;  !平均等待队长;
W_q=L_q/lpe;  !平均等待时间;
W_s=L_s/lpe;  !平均逗留时间;
Pwork=lpe/(S*u); !维修工人的工作强度;
end
```

计算结果为：

实际进入系统的机器平均为 $\lambda_e = 27.5$，平均队长 $L_s = 2.5$，平均等待队长 $L_q = 0.24$，平均逗留时间 $W_s = 0.09$，平均等待时间 $W_q = 0.087$，机器工作概率 $\mathrm{Prob} = 0.92$，维修工人的工作强度 $\mathrm{P_{work}} = 0.57$。

问题 5　某修理厂为设备检修服务。已知检验的设备（顾客）到达服从 Poisson 分布，每天到达率 $\lambda = 42$ 台，当需要等待时，每台造成的损失为 400 元。服务（检修）时间服从负指数分布，平均每天服务率 $\mu = 20$ 台。每设置一个检修人员每天的服务成本为 160 元。问设立几个检修人员才能使平均总费用最小？

解：该排队系统为 M/M/S/∞系统。系统参数中 $\lambda = 42$， $\mu = 20$ 。

费用包括等待费用和人员费用。目标函数为：

$$\min z = 160S + 400L_s$$

其中 S 为维修人员数， L_s 为平均队长。

优化模型为：

$$\min z = 160S + 400L_s$$

$$s.t.\begin{cases} P_{wait} = \text{@peb(load,S)} \\ \text{load} = \dfrac{\lambda}{\mu} \\ W_q = P_{wait}\dfrac{T}{S - load} \\ L_q = \lambda W_q \\ L_s = L_q + \dfrac{\lambda}{\mu} \\ S \in N \end{cases}$$

实现的 LINGO 程序为：

```
model:
min=160*S+400*L_s;
lp=42;!每天到达顾客数;
u=20;  !每天服务人数;
load=lp/u;!载荷;
T=1/u;
Pwait=@PEB(load,S);!顾客的等待概率;
W_q=Pwait*T/(S-load);!平均等待时间;
L_q=lp*W_q;!顾客的平均等待队长;
L_s=L_q+lp/u; !平均队长;
s>=2;
@gin(S);
end
```

注：程序中加上 $s \ge 2$ 是为了便于LINGO求解。因为当 $s = 1$ 时， $s - load < 0$ 不符合要求，LINGO无法求解答，而实际中也需要满足 $s \ge 2$ ，故加上该条件。

计算结果为：
最小平均费用为1568.17元。
最优人员数S=4，平均队长L_s=2.32。

3　排队论的计算机模拟与实例

排队论中的问题有的可以通过理论计算解决，有的则需要通过计算机模拟计算得到。当理论计算难以解决时，则可以考虑采用计算机模拟计算的方法来解决。

问题 1　　收款台服务问题

考虑一个收款台的排队系统。某商店只有一个收款台，顾客到达收款台的时间间隔服从平均时间为 10 秒钟的负指数分布。负指数分布为：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

每个顾客的服务时间服从均值为 6.5 秒，标准差为 1.2 秒的正态分布。利用计算机仿真计算顾客在收款台的平均逗留时间，系统的服务强度（服务占所有时间之比）。

分析：该问题中顾客服务时间服从正态分布，不再是负指数分布，不能直接采用前面的模型计算，因此我们可以考虑采用计算机模拟计算得到需要的结果。

该问题可以从开始时刻计，当有人到达产生一个事件，当有人离开产生一个事件。当有人到达时，记录其开始接受服务时刻和离开服务台的时刻，从而可以计算出每个人在系统逗留的时间，以及每个人在系统接受服务的时间，从而统计出每个人在收款台的平均逗留时间和系统的服务强度。

这里我们可以依次考虑每一个人，考察其到达时刻，开始接受服务时刻和离开时刻使仿真变得更方便。

设第 i 个人到达时间为 a_i，开始接受服务的时间为 b_i，离开时间为 c_i。设总共考虑 n 个人。

程序首先产生服从均值为 10 秒的负指数分布序列 $\{dt(n)\}$，每个人接受服务时间服从正态分布 $N(6.5,1.2^2)$ 的序列 $\{st(n)\}$。便于为后面计算方便。

则每个人的到达时刻可以采用下式计算：

$a_1 = 0$ ， $a_i = a_{i-1} + dt_{i-1} \quad i = 2, 3, \cdots, n$

第一个人开始接受服务时刻 $b_1 = 0$

第一个人离开时刻刻 $c_1 = st_1$

第 i 个人开始接受服务的时刻为：

$$b_i = \begin{cases} a_i & a_i > c_{i-1} \\ c_{i-1} & a_i \le c_{i-1} \end{cases} \quad i = 2, 3, \cdots, n$$

上式的意义是当后一个人到达时刻比前一个人离开时刻晚，则其开始接受服务时间就是其到达时间；当后一个人到达时刻比前一个人离开时刻早，则其开始接受服务时间就是前一个人的离开时刻。

第 i 个人离开时刻为：

$c_i = b_i + st_i \quad i = 2, 3, \cdots, n$

根据上面的递推关系式就可以计算出每个人到达时刻、

开始接受服务时刻和离开时刻。

每个人在系统都留时间为

$wt_i = c_i - a_i \quad i = 1, 2, \cdots, n$

到第 n 个人离开的时刻为 $T = c_n$

则系统工作的强度及工作时间占总时间比值为：

$$p = \sum_{i=1}^{n} st_i / T$$

以下为 Matlab 模拟计算程序：

```
    n=10000; %模拟顾客数
dt=exprnd(10,1,n); %到达时间间隔
st=normrnd(6.5,1.2,1,n); %服务台服务时间
%st=exprnd(2.5,1,n); %服务台服务时间
a=zeros(1,n); %每个人到达时间
b=zeros(1,n); %每个人开始接受服务时间
c=zeros(1,n);%每个人离开时间

a(1)=0;
for i=2:n
   a(i)=a(i-1)+dt(i-1);%第 i 个人到达时间
end

b(1)=0;%第 1 个人开始服务时间为到达时间
```

```
c(1)=b(1)+st(1); %第 1 个人离开时间为服务时间

for i=2:n

  if(a(i)<=c(i-1)) b(i)=c(i-1);%如果第 i 个人到达时间比前一个人离开时间早,则其开始服务时间为前一人离开时间
     else b(i)=a(i); %如果第 i 个人到达时间比前一个人离开时间晚,则其开始服务时间为到达时间.
  end

  c(i)=b(i)+st(i);    %第 i 个人离开时间为其开始服务时间+接受服务时间

end

cost=zeros(1,n); %记录每个人在系统逗留时间
for i=1:n
   cost(i)=c(i)-a(i); %第 i 个人在系统逗留时间
end

T=c(n);%总时间
p=sum(st)/T;    %服务率
avert=sum(cost)/n; %每个人系统平均逗留时间
fprintf('顾客平均逗留时间%6.2f 秒\n',avert);
fprintf('系统工作强度%6.3f\n',p);
```

某次仿真结果为：

顾客平均逗留时间 13.32 秒

系统工作强度 0.659

问题 2　卸货问题

某码头有一卸货场，轮船一般夜间到达，白天卸货。每天只能卸货 4 艘船，若一天内到达数超过 4 艘，那么推迟到第二天卸货。根据过去经验，码头每天船达到数服从表 1 的概率分布。求每天推迟卸货的平均船数。

表 1　船每天到达数的概率分布

到达船数	0	1	2	3	4	5	6	7	≥8
概率	0.05	0.1	0.1	0.25	0.2	0.15	0.1	0.05	0

解答：该问题可以看作单服务台的排队系统。到达时间不服从负指数分布，服从的是给定的离散分布，服务时间也不服从负指数分布，是定长时间服务。不能直接利用理论公式求解，可采用计算机模拟求解。

1 随机到达船数的产生

首先我们需要产生每天随机到达的船数，该随机数服从离散分布，可以先产生一个 0~1 之间的均匀随机数，其落在不同区间则寿命取不同值，具体见表 2。程序实现函数见 BoatNumber.m，每调用一次该函数，则返回一个服从该分布的船数。

表 2　每天到达船数的机数

到达船数	均匀随机数区间
0	[0,0.05)
1	[0.05,0.15)
2	[0.15,0.25)
3	[0.25,0.5)
4	[0.5,0.7)
5	[0.7,0.85)
6	[0.85,0.95)
7	[0.95,1]

2. 计算机仿真分析：

设第 i 天到达的船数为 x_i 艘，需要卸货的船数为 a_i 艘，实际卸货的船数为 b_i 艘，推迟卸货的船数为 d_i 艘。

设总共模拟 n 天，首先模拟 n 天的到达船数 $x_1,x_2,...,x_n$ 。根据该问题要求，各个量之间有如下关系：

初始第 1 天，第 1 天需要卸货的船数 $a_1=x_1$，实际卸船数为 $b_1=\begin{cases}4 & a_1>4\\ a_i & a_1\le 4\end{cases}$，推迟卸货的船数为 $d_1=a_1-b_1$。

第 i 天需要卸货的船数 a_i 满足：$a_i=x_i+d_{i-1}\qquad i=2,3,...,n$

第 i 天实际卸货的船数 b_i 满足：$b_i=\begin{cases}4 & a_i>4\\ a_i & a\le 4\end{cases}\quad i=1,2,...,n$

第 i 天推迟卸货的船数 d_i 满足：$d_i=a_i-b_i\qquad i=2,...,n$

则总共推迟卸货的船数为：

$$Total = \sum_{i=1}^{n} d_i$$

每天推迟卸货的平均船数 $Aver = Total / n$

下面是 Matlab 实现程序

1) 产生元件寿命的随机值函数 BoatNumber.m

```
function X=BoatNumber
%产生一个到达船数的随机数

  Boat=0:7; %到达船数取值范围
  %到达船数概率分布
  Prob=[0.05,0.1,0.1,0.25,0.20,0.15,0.1,0.05];
  n=length(Prob);
  Qu=zeros(1,n+1);
  Qu(1)=0;
  for i=1:n
     Qu(i+1)=Qu(i)+Prob(i); %产生概率区间
  end
   Qu(n+1)=1.01; %将最后一个数值超过 1,便于后面的随机数 r 取到 1

  %产生一次到达船数
  r=rand(1); %产生一个[0,1]随机变量
  for i=1:n
   if(r>=Qu(i)&&r<Qu(i+1)) X=Boat(i); %获得到达船数
   end
  end
return
```

2) 模拟计算的主程序 Boat.m

```
n=10000; %模拟总天数
x=zeros(n,1); %存储每天到达船数
a=zeros(n,1); %存储每天需要卸货的船数
b=zeros(n,1); %存储每天实际卸货的船数
d=zeros(n,1); %存储每天推迟卸货的船数

for i=1:n
    x(i)=BoatNumber; %模拟 n 天到达船数
end
```

```
a(1)=x(1);
if a(1)>4 b(1)=4; %计算每天实际卸货船数
 else b(1)=a(1);
end
d(1)=a(1)-b(1);


for i=2:n
    a(i)=x(i)+d(i-1); %计算每天需要卸货的船数
    if a(i)>4 b(i)=4; %计算每天实际卸货船数
     else b(i)=a(i);   end
   d(i)=a(i)-b(i);
 %计算每天推迟卸货的船数
end

Total=sum(d); %计算总共推迟卸货船数
Aver=Total/n; %计算每天推迟卸货的平均船数
fprintf('每天推迟卸货的平均船数%6.2f\n',Aver);
```

某次模拟结果为：
每天推迟卸货的平均船数 2.68
多次模拟计算，每天推迟卸货的平均船数大约在 2.75 艘左右。

问题 3 眼科病床的合理安排(CUMCM2009B)

医院就医排队是大家都非常熟悉的现象，它以这样或那样的形式出现在我们面前，例如，患者到门诊就诊、到收费处划价、到药房取药、到注射室打针、等待住院等，往往需要排队等待接受某种服务。

我们考虑某医院眼科病床的合理安排的数学建模问题。

该医院眼科门诊每天开放，住院部共有病床 79 张。该医院眼科手术主要分四大类：白内障、视网膜疾病、青光眼和外伤。附录中给出了 2008 年 7 月 13 日至 2008 年 9 月 11 日这段时间里各类病人的情况。

白内障手术较简单，而且没有急症。目前该院是每周一、三做白内障手术，此类病人的术前准备时间只需 1、2 天。做两只眼的病人比做一只眼的要多一些，大约占到 60%。如果要做双眼是周一先做一只，周三再做另一只。

外伤疾病通常属于急症，病床有空时立即安排住院，住院后第二天便会安排手术。

其他眼科疾病比较复杂，有各种不同情况，但大致住院以后 2-3 天内就可以接受手术，主要是术后的观察时间较长。这类疾病手术时间可根据需要安排，一般不安排在周一、周三。由于急症数量较少，建模时这些眼科疾病可不考虑急症。

该医院眼科手术条件比较充分，在考虑病床安排时可不考虑手术条件的限制，但考虑到手术医生的安排问题，通常情况下白内障手术与其他眼科手术（急症除外）不安排在同一天做。当前该住院部对全体非急症病人是按照 FCFS（First come, First serve）规则安排住院，但等待住院病人队列却越来越长，医院方面希望你们能通过数学建模来帮助解决该住院部的病床合理安排问题，以提高对医院资源的有效利用。

问题一：试分析确定合理的评价指标体系，用以评价该问题的病床安排模型的优劣。

问题二：试就该住院部当前的情况，建立合理的病床安排模型，以根据已知的第二天拟出院病人数来确定第二天应该安排哪些病人住院。并对你们的模型利用问题一中的指标体系作出评价。

问题三：作为病人，自然希望尽早知道自己大约何时能住院。能否根据当时住院病人及等待住院病人的统计情况，在病人门诊时即告知其大致入住时间区间。

问题四：若该住院部周六、周日不安排手术，请你们重新回答问题二，医院的手术时间安排是否应作出相应调整?

问题五：有人从便于管理的角度提出建议，在一般情形下，医院病床安排可采取使各类病人占用病床的比例大致固定的方案，试就此方案，建立使得所有病人在系统内的平均逗留时间（含等待入院及住院时间）最短的病床比例分配模型。

附件数据可参见光盘附录。

该问题中问题 5 可用排队论模型求解。由于其他问题放在一起考虑太繁琐，这里只考虑用排队论方法求解第 5 问。

我们每张病床看作一个服务台，病人看作顾客，由此可采用排队论模型求解。

将服务台看作 5 种类型，每种类型对应一种疾病的病床。则每种类型的服务台数量就是我们需要优化的。对每种类型的服务台都可以看作 M/M/S/∞模型，然后将 5 种类型的服务台当并联处理。

由排队论知识可知，对 M/M/S/∞模型, 当第 i 种服务台有 y_i 台，服务能力为 $y_i\mu_i$，服务强度为 $\rho_i = \dfrac{\lambda_i}{y_i\mu_i} = \dfrac{\lambda_i.T_i}{y_i}$。这里 λ_i 表示第 i 种病人平均每天的到达人数，μ_i 表示第 i 种病床每天服务的病人数，T_i 代表第 i 种病人的平均住院时间。

第 i 种病人的平均人数（含等待及住院人数）：

$$LS_i = y_i\rho_i + \frac{(y_i\rho_i)^{y_i}\rho_i}{y_i!(1-\rho_i)^2}.p_{i0} \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

其中 $p_{i0}=\dfrac{1}{\sum\limits_{k=0}^{y_i-1}\dfrac{(y_i\rho_i)^k}{k!}+\dfrac{(y_i\rho_i)^{s_i}}{y_i!(1-\rho_i)}}$，表示第 i 种病人的所有病床都空闲的概率。

由于对附录中数据进行检验，发现每种病人手术后住院时间并不服从负指数分布，因此应考虑为一般分布的模型 M/G/S/∞，其中 G 表示一般分布模型，只要求每个顾客接受服务的时间独立同分布就可以。此时排队长度有经验公式：

$$GS_i=LS_i.\frac{1+v^2}{2}\quad (i=1,2,3,4,5)$$

其中 LS_i 为根据 M/M/S/∞模型计算的排队长度。v 为系统服务时间的偏离系数，$v=\sigma\mu$，σ 为服务时间的标准差。

则 $$GS_i=LS_i.\frac{1+(\sigma\mu)^2}{2}\quad (i=1,2,3,4,5)$$

第 i 种病人的排队（等待住院）时间为：

$$WS_i=\frac{GS_i}{\lambda_i}$$

我们目标函数为所有病人的平均逗留时间最小。考虑 5 种病人到达的人数分布不同，因此需要考虑权重。设第 i 种病的权重为 $w_i\ (i=1,2,3,4,5)$。由于每种病的权重跟其到达人数有关，因此我们取 $w_i=\dfrac{\lambda_i}{\sum\limits_{i=1}^{5}\lambda_i}\quad (i=1,2,3,4,5)$。这样目标函数目标函数为病人平均时等待住院时间最小。即

$$\min Z=\sum_{i=1}^{5}WS_i.w_i$$

同时我们设决策变量为第 i 种病床 y_i 张。所有的病床数满足：

$$\sum_{i=1}^{5}y_i=79$$

因此我们得到总的非线性整数规划模型为：

$$\min Z=\sum_{i=1}^{5} WS_i.w_i$$

$$s.t.\begin{cases} LS_i=y_i\rho_i+\dfrac{(y_i\rho_i)^{y_i}\rho_i}{y_i!(1-\rho_i)^2}.p_{i0} \qquad (i=1,2,3,4,5) \\ GS_i=LS_i.\dfrac{1+(\sigma\mu)^2}{2} \qquad (i=1,2,3,4,5) \\ p_{i0}=\dfrac{1}{\sum\limits_{k=0}^{y_i-1}\dfrac{(y_i\rho_i)^k}{k!}+\dfrac{(y_i\rho_i)^{y_i}}{y_i!(1-\rho_i)}} \\ \rho_i=\dfrac{\lambda_i.T_i}{y_i} \\ WS_i=\dfrac{GS_i}{\lambda_i} \\ w_i=\dfrac{\lambda_i}{\sum\limits_{i=1}^{5}\lambda_i} \qquad i=1,2,3,4,5 \\ \sum\limits_{i=1}^{5} y_i=79 \\ y_i\text{取整} \end{cases}$$

该模型不容易求解，我们寻求近似解答。

我们的基本思想是当各类病人构成的排队系统服务系统强度相同时，系统服务效率最高。

设 5 类病人：视网膜疾病，白内障（单眼），白内障(双眼)，外伤，青光眼的到达率为 $\lambda_i\ (i=1,2,3,4,5)$，平均住院时间为 $T_i\ (i=1,2,3,4,5)$。

则第 i 种病床构成的服务系统的强度为：

$$\rho_i=\frac{\lambda_i}{y_i.\mu_i}=\frac{\lambda_i.T_i}{y_i} \qquad (i=1,2,3,4,5)$$

总床位满足 $\sum_{i=1}^{5} y_i=79$。

令 5 种病床构成的服务系统强度相等，则有：

$$\rho_i=\frac{\sum_{j=1}^{5}\rho_j.y_j}{79}=\frac{\sum_{j=1}^{5}\lambda_j.T_j}{79}$$

则 $y_i=\frac{\lambda_i.T_i}{\rho_i}=79.\frac{\lambda_i.T_i}{\sum_{j=1}^{5}\lambda_j.T_j} \qquad (i=1,2,3,4,5)$

对附件 1 中数据中 349 例 5 种病人的数据进行统计，可以得到到达率为 λ 分别为，2.7869,1.6393,2.1803,1.0492,1.0328；平均住院时间 T 分别 12.545,5.236, 8.561, 7.036, 10.487。(单位：天)：容易按照上式计算得到结果如下：

表 1 病床数的分配

类型	视网膜病	白内障(单眼)	白内障(双眼)	外伤	青光眼
病床数	33	9	18	8	11
百分比	42.77%	11.4%	22.78%	10.13%	13.92%

参考文献：

[1]陆凤山.排队论及其应用[M]].长沙：湖南科学技术出版社,1984.

[2]钱颂迪等.运筹学[M].北京：清华大学出版社,1991。

[3] 姜启源等，数学模型[M],第 4 版.北京：高等教育出版社,2011.

[4] 谢金星,薛毅,优化建模与 LINDO/LIBGO 软件[M],北京：清华大学出版社,2005.