

2011 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

承 诺 书

我们仔细阅读了中国大学生数学建模竞赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们参赛选择的题号是（从 A/B/C/D 中选择一项填写）： C 题

我们的参赛报名号为（如果赛区设置报名号的话）： 20111032

所属学校（请填写完整的全名）： 苏州经贸职业技术学院

参赛队员（打印并签名）： 1. 孙伟旭

2. 李 康

3. 何从如

指导教师或指导教师组负责人（打印并签名）： 曹文斌

日期： 2011 年 9 月 12 日

赛区评阅编号（由赛区组委会评阅前进行编号）：

2011 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

编 号 专 用 页

赛区评阅编号（由赛区组委会评阅前进行编号）：

赛区评阅记录（可供赛区评阅时使用）：

评 阅 人										
评 分										
备 注										

全国统一编号（由赛区组委会送交全国前编号）：

全国评阅编号（由全国组委会评阅前进行编号）：

企业退休职工养老金制度的改革

摘要

随着经济的发展,我国社会保障体系正不断修正和完善,当今我国的养老保险改革正处于重要的过渡时期。其中,养老保险基金的收支平衡是一项重要指标,关系到养老金制度的合理性和可执行性。它的顺利过渡是达到社会稳定的必要途径。这也是我们此次建模所需解决的主要问题和最终目标。

在这里,我们要解决的影响养老金收支平衡问题不同于企业账务中的收支平衡。从社会环境的角度来看,经济的高速发展使得职工的工资处于增长变化中,这导致了在职职工每年需交的养老金金额有所不同。从职工本身来看,又因为职工的在职、离职年龄不一,这样养老金收支在时间上也很难有一个统一的标准。综上所述,结合实际情况和国家相关政策,通过对四个问题的分析研究,采用适合的数学模型,我们最终做出了以下归纳:

针对问题一:我们查阅了 2000 年-2010 年全国经济增长率和在职职工工资的变化情况,并以此为条件,结合附件一,运用非线性回归分析的方法并结合实际情况预测了 2011 年至 2035 年的山东省职工的年平均工资。

针对问题二:以问题一的假设和预测为前提,根据附件二计算出在职职工缴费指数的参考值。由此,我们分六种情况进行讨论(30 岁—55 岁,30 岁—60 岁,30 岁—65 岁,40 岁—55 岁,40 岁—60 岁,40 岁—65 岁),并根据附件三分别计算出养老金替代率!

针对问题三:在完成了问题一、二的基础上,我们以手中的资料作出结论,将其分为三种情况来讨论(30 岁—55 岁—75 岁,30 岁—60 岁—75 岁,30 岁—65 岁—75 岁),分别计算出各个阶段养老保险基金的缺口。并以此计算达到收支平衡时该职工的年龄。

针对问题四:以前三个问题的解决为前提,在真实社会环境下,我们针对题目的要求,精心设计了可行的方案,提出了我组的最终解决措施。这是我们所希望达到的目标,也是实际需要解决的问题

关键词: 养老金 收支平衡 非线性回归分析 Excel 等比数列 数学模

型

一. 问题的重述

养老金也称退休金，是一种根据劳动者对社会所作贡献及其所具备享受养老保险的资格，以货币形式支付的保险待遇，用于保障职工退休后的基本生活需要。现在我国养老保险改革正处于过渡期。养老保险管理的一个重要的目标是养老保险基金的收支平衡，它关系到社会稳定和老龄化社会的顺利过渡。

附件 1 是山东省职工历年平均工资数据；附件 2 是 2009 年山东省某企业各年龄段职工的工资分布情况，附件 3 是养老金的计算办法。请建立数学模型，解决如下问题：

问题一：对未来中国经济发展和工资增长的形势做出你认为是简化、合理的假设，并参考附件 1，预测从 2011 年至 2035 年的山东省职工的年平均工资。

问题二：根据附件 2 计算 2009 年该企业各年龄段职工工资与该企业平均工资之比。如果把这些比值看作职工缴费指数的参考值，考虑该企业职工自 2000 年起分别从 30 岁、40 岁开始缴养老保险，一直缴费到退休（55 岁，60 岁，65 岁），计算各种情况下的养老金替代率。

问题三：假设该企业某职工自 2000 年起从 30 岁开始缴养老保险，一直缴费到退休（55 岁，60 岁，65 岁），并从退休后一直领取养老金，至 75 岁死亡。计算养老保险基金的缺口情况，并计算该职工领取养老金到多少岁时，其缴存的养老保险基金与其领取的养老金之间达到收支平衡。

问题四：如果既要达到目标替代率，又要维持养老保险基金收支平衡，你认为可以采取什么措施。请给出你的理由。

二. 模型假设

假定一：在相对平稳的社会环境下，考虑到我国过去 10 年的经济增长率及近期相关的经济调控政策，我们假定在未来的 10 年，中国经济将按照 2000 年到 2010 年的平均增长率 9.47% 稳定增长，之后受各方面因素的影响，增长率逐渐降低，经济增长放缓。

假定二：以假定一为前提，并参照山东省职工历年平均工资统计表，我们同样假设职工工资在未来十年内将按照目前的形势呈非线性指数函数模型增长，接下来十五年内，受自然资源，环境，国家政策调整等因素的影响，职工工资的增长率将有所下降。

假定三：职工的养老基金缴纳、领取按时，不受意外情况影响，职工平均死亡年龄为 75 岁。

三. 符号说明

- a. 非线性回归方程（指数函数）参数
- b. 非线性回归方程（指数函数）参数
- x. 非线性回归方程（指数函数）的自变量
- y. 非线性回归方程（指数函数）的因变量
- A. 职工实际工资
- S. 本人指数化月平均缴费工资
- W. 总账户金额
- W_n . 第 n 年后总账户余额
- U. 养老金
- P. 个人账户余额
- Z. 缺口资金

四. 问题分析

问题一：以过去几年中国经济的形势为判断标准，结合近期国家的相关经济政策，及我国未来 25 年的经济发展形势。我们利用附件一的数据和非线性回归分析的方法，参照发达国家的经济发展历史，并结合实际情况，重新调整未来工资增长的比率，将其分两种指数函数，预测出 2011—2035 年的山东省职工年平均工资。

问题二：结合附件二的数据，我们运用 Excel 软件计算出各年龄段职工年平均工资和企业年平均工资，算出二者间的比率，并以此作为职工缴费指数的参考值。然后以问题一中解得的 2011 年—2035 年职工工资为数据基础，分别按照以下六种情况（30 岁—55 岁，30 岁—60 岁，30 岁—65 岁，40 岁—55 岁，40 岁—60 岁，40 岁—65 岁），计算出各个年龄段职工所得的养老金，从而进一步计算出各阶段的养老金替代率！

问题三：利用问题一、二所得到的结果分别计算（30 岁—55 岁，30 岁—60 岁，30 岁—65 岁）三种情况下所需缴纳养老保险基金的数额。根据“养老金的计算方法”，我组分别讨论职工从 55 岁，60 岁，65 岁开始领取养老金多少年后能够领完应得养老金，即达到缴与得之间的收支平衡。再将此时职工的年龄与 75 岁相比较，若尚不到 75 岁，则出现资金缺口；反之，则不然。

问题四：运用倒推法，假设养老保险基金收支平衡且已达到目标替代率，以此反推出我组得出的最终结论。

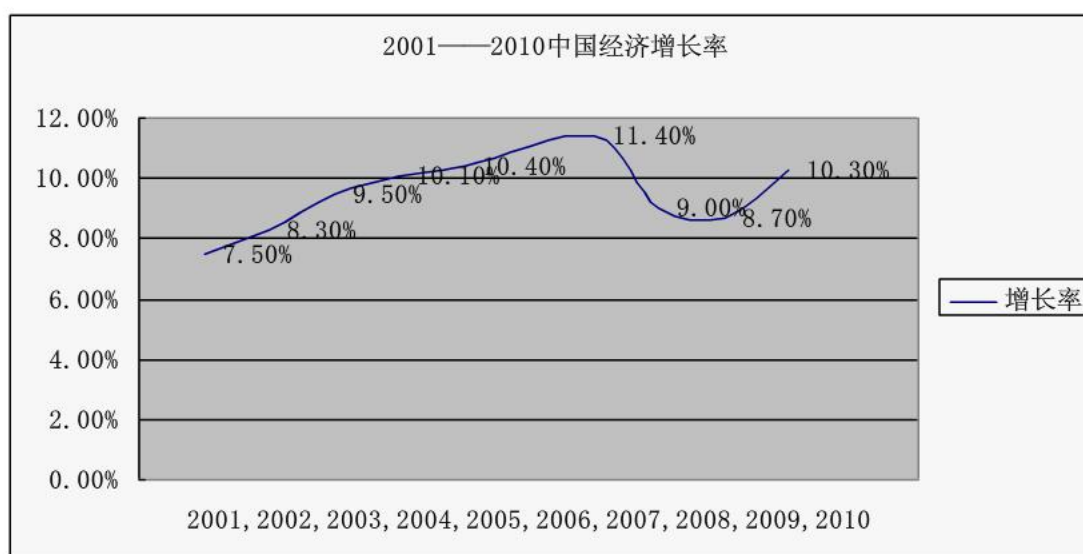
五. 模型的建立与求解

5.1 关于问题 1 的模型建立与求解

对未来中国经济发展和工资增长的形势的假设：

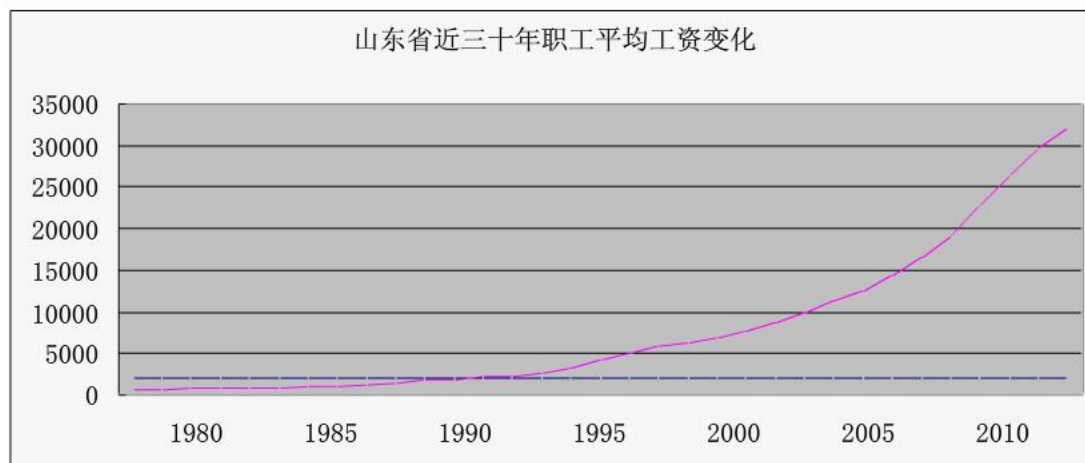
1. 未来中国经济的发展，我们根据过去十年经济的增长率，制作图表，并结合现实情况，国家政策作出假设。

2001 年——2010 年经济增长率										
年份	2001	2002	2003	2004	2005	2007	2008	2009	2010	平均值
增长率	7.50%	8.30%	9.50%	10.10%	10.40%	11.40%	9.00%	8.70%	10.30%	9.47%



由以上图表，我们假设：未来十年中国经济按过去十年平均增长率 9.47% 继续增长。之后，受到资源、环境的影响，国家经济政策的调整，经济增速放缓，逐步接近我国经济发展的战略目标。

2. 根据附件一我们作出山东省近 30 年工资变化情况曲线图，分析中国目前经济发展前景我们可以预测未来十年经济将会以这样的指数形势增长。



由此分析我们利用一元非线性回归方程设计模型指数函数 $y=ae^{bx}$. 令 $y'=\ln y$, $a'=\ln a$, y 表示职工平均工资, x 表示年份。带入上述数据解出结果 $\ln a=-254.6317029$, $b=0.131852048$ 。结果带回过去年代相比较误差比较小, 所以可以认为该模型比较合理。根据函数推测出 2011 到 2020 年的职工工资情况如下:

2011	2012	2013	2014	2015
37151.73	42387.88	48362.01	55178.13	62954.90
2016	2017	2018	2019	2020
71827.74	81951.10	93501.25	106679.27	121714.59

由此计算出近几十年的职工工资增长率大致为 14%, 而我国接下来的经济发展战略目标是在 21 世纪中叶国名生产总值达到中等发达国家水平, 这样职工工资会在一定程度上减缓增长速率。通过资料分析以及我国经济发展要求职工工资增长率将会在十年后保持在 10% 的速度增长。推算得出 2021 年到 2035 年职工年平均工资如下表:

2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028
133886	147274	162002	178202	196022	215624	237187	260906
2029	2030	2031	2032	2033	2034	2035	
286996	315696	347265	381992	420191	462210	508432	

5.2 关于问题二的模型建立与求解

由题目给出的附件 2 可以计算出职工缴费指数的参考值如下:
(根据 30 岁到 59 岁职工缴费指数的参考值变化情况可以假设 60 岁到 65 岁时的参考值为 1.105013306)

年龄段	职工缴费指数的参考值
30-34 岁职工	0.982519247
35-39 岁职工	1.066654602
40-44 岁职工	1.172683772
45-49 岁职工	1.266570573
50-54 岁职工	1.208621159
55-59 岁职工	1.155013306
60-65 岁职工	1.105013306

然后依据职工缴费指数的参考值我们可以解出 30 岁到 65 岁职工的实际工资,
按照问题 2 的要求可以分 6 种情况进行讨论.

下面举一例说明 30 岁到 65 岁替代率计算方法。

年龄	年份	平均工资	实际工资
30	2000	8772	8618.66
31	2001	10007	9832.07
32	2002	11374	11175.17
33	2003	12567	12347.32
34	2004	14332	14081.46
35	2005	16614	17721.40
36	2006	19228	20509.63
37	2007	22844	24366.65
38	2008	26404	28163.95
39	2009	29688	31666.84
40	2010	32074	37612.66
41	2011	37151.73	43567.23
42	2012	42387.88	49707.58
43	2013	48362.01	56713.34
44	2014	55178.13	64706.49
45	2015	62954.90	79736.82
46	2016	71827.73	90974.89
47	2017	81951.10	103796.85
48	2018	93501.24	118425.93
49	2019	106679.26	135116.82
50	2020	121714.59	147106.82
51	2021	133886.05	161817.51
52	2022	147274.65	177999.21
53	2023	162002.12	195799.19
54	2024	178202.33	215379.11
55	2025	196022.56	226408.67
56	2026	215624.82	249049.54
57	2027	237187.30	273954.49
58	2028	260906.03	301349.94
59	2029	286996.64	331484.94
60	2030	315696.30	348848.62
61	2031	347265.93	383733.48
62	2032	381992.53	422106.83
63	2033	420191.78	464317.51
64	2034	462210.96	510749.26
65	2035	508432.06	561824.19

根据题中所给养老金计算方法，首先计算个人账户养老金（P）
个人账户存储额从30岁时的工资进行复利累加计算

$$A_{30} \times (1+3\%)^{35} + A_{31} \times 8\% \times (1+3\%)^{34} + \dots + A_{65} \times 8\% \times (1+3\%)^0$$

计算得出结果为619708.69

基础养老金 (Q) = (全省上年度在岗职工月平均工资+本人指数化月平均缴费工资) ÷ 2 × 缴费年限 × 1%

本人指数化月平均缴费工资=全省上年度在岗职工月平均工资 × 本人平均缴费指数

能够正确反映“本人指数化月平均缴费工资 (Average Indexed Monthly Earnings)” 指标的计算公式为:

$$S = \frac{x_1 \times \frac{c_1}{c_1} + x_2 \times \frac{c_1}{c_2} + \dots + x_m \times \frac{c_1}{c_m}}{n}$$

S 计算结果为 48124.97

所以 养老金 (U) = 基础养老金 + 个人账户养老金 = 22424.71

再根据养老金替代率的计算公式不难解出替代率约为 52.93%

依照同样的方法我们计算出 6 种替代率分别为:

	A	B	C	D	E
1	年龄段	个人账户储存额	养老金	替代率	
2	30-55	217938.6382	5636.334658	34.50%	
3	30-60	358744.0298	10665.09821	40.54%	
4	30-65	619708.6924	22424.70504	52.93%	
5	40-55	49154.24528	1201.016608	19.52%	
6	40-60	104737.3635	3092.427453	27.59%	
7	40-65	197714.7286	6584.07369	36.48%	
8					

5.3 关于问题 3 的模型建立与求解

问题 3 需要分 3 种情况进行讨论这里举 30 岁到 55 岁进行详细说明

问题 2 中已经解出个人账户养老金为 P=217938.64, 其中个人账户养老金占职工工资的 8%, 社会统筹账户占工资 20%,

所以职工的总账户金额 (W) 为 :

$$W = (28\%/8\%)P \quad 30 \text{ 岁到 } 55 \text{ 岁缴纳的总账户金额为 } 762785.23$$

推算可得:

$$\text{第一年后总账户余额 为 } W_1 = (W - 12 \times U) \times 1.03,$$

$$\text{第二年后总账户余额 为 } W_2 = (W_1 - 12 \times U) \times 1.03,$$

·
·
·

$$\text{第 } N \text{ 年后总账户金额 为 } W_n = (W_{n-1} - 12 \times U) \times 1.03$$

依次推算可得到等比数列：

代入 13 年得到余额为 $W_{13}=439643.10$ 则 W_{13} 除以养老金 U 得到月数 6 个月，一般按照我国人均死亡年龄为 75 岁，那么到 68.5 岁后的养老金属于缺口部分。

缺口金额 $Z=(75-68.5) \times 12U=439634$

达到收支平衡时间为 68 岁 6 月份。

按照上述方面可求出另外两种缺口情况：

年龄段	总账户金额	达到收支平衡时间	缺口金额
30-55	762785.23	68 岁 6 月份	439634
30-60	1255604.10	71 岁 5 月份	458595
30-65	2168980.42	74 岁 6 月份	134548

5.4 关于问题 4 的模型建立与求解

若既要达到目标替代率，又要维持养老保险基金收支平衡，根据问题一，二的结论可以看出：需要缴纳养老保险基金的年数较长，即：早缴养老保险或较晚退休。

我们可以从问题二的数据结果绘制出表格进行比较：

年龄段	养老金	替代率
30-55	5636.33	34.50%
30-60	10665.09	40.54%
30-65	22424.70	52.93%
40-55	1201.02	19.52%
40-60	3092.43	27.59%
40-65	6584.07	36.48%

从上表可以看出：30 岁——65 岁是缴纳基金时间最长的，替代率也是最高的。而 40 岁——55 岁是缴纳时间最短的，替代率也是最低的，随着缴费时间的增长替代率也在增高。因此，替代率与缴费时间长短呈正相关的关系。若统一规定企业职工自 2000 年起从 30 岁开始缴养老保险，则退休越晚越易达到目标替代率。

接下来我们看看问题三的数据显示：

年龄段	总账户金额	达到收支平衡时间	缺口金额
30-55	762785.23	68 岁 6 月份	439634
30-60	1255604.10	71 岁 5 月份	458595
30-65	2168980.42	74 岁 6 月份	134548

从上表我们可以看出：缴养老保险的时间越长缺口金额越少，即维持养老保险基金收支平衡越长。

因此：既要达到目标替代率，又要维持养老保险基金收支平衡，我们要采取增加缴纳养老保险年限的措施。

验证：自 2000 年从 30 岁开始缴纳养老保险，一直缴到 68 岁退休，则养老金替代率的 EXCEL 的计算结果达到目标要求，养老金收支平衡。

年龄	年份	平均工资	实际工资	指数缴费工资
30	2000	8772.00	8618.66	628902.86
31	2001	10007.00	9832.07	628902.86
32	2002	11374.00	11175.17	628902.86
33	2003	12567.00	12347.32	628902.86
34	2004	14332.00	14081.46	628902.86
35	2005	16614.00	17721.4	682757.24
36	2006	19228.00	20509.63	682757.24
37	2007	22844.00	24366.66	682757.24
38	2008	26404.00	28163.95	682757.24
39	2009	29688.00	31666.84	682757.24
40	2010	32074.00	37612.66	750625.68
41	2011	37151.73	43567.24	750625.68
42	2012	42387.88	49707.58	750625.68
43	2013	48362.01	56713.34	750625.68
44	2014	55178.13	64706.49	750625.68
45	2015	62954.90	79736.83	810721.88
46	2016	71827.74	90974.89	810721.88
47	2017	81951.10	103796.85	810721.88
48	2018	93501.25	118425.93	810721.88
49	2019	106679.27	135116.82	810721.88
50	2020	121714.59	147106.83	773628.91
51	2021	133886.05	161817.51	773628.91
52	2022	147274.66	177999.26	773628.91
53	2023	162002.12	195799.19	773628.91
54	2024	178202.34	215379.11	773628.91
55	2025	196022.57	226408.67	739314.95
56	2026	215624.83	249049.54	739314.95
57	2027	237187.31	273954.49	739314.95
58	2028	260906.04	301349.94	739314.95
59	2029	286996.64	331484.94	739314.95
60	2030	315696.31	348848.62	707310.34
61	2031	347265.94	383733.48	707310.34
62	2032	381992.53	422106.83	707310.34
63	2033	420191.79	464317.51	707310.34
64	2034	462210.96	510749.26	707310.34
65	2035	508432.06	561824.19	707310.34
66	2036	551851.88	609803.66	707310.34
67	2037	595972.02	658557.01	707310.34
68	2038	640092.15	707310.34	707310.34

到 68 岁时养老金替代率约为 65%，因此说明上述结论正确。

若以人的平均死亡年龄为 75 岁来计算养老金收支平衡，运用问题三的计算方法，68 岁退休后，到将养老金领完的年龄远远超过 75 岁。所以 65 岁到 68 岁之间退休比较合理，进一步计算验证我们发现 30 岁开始缴纳养老金，到 66 岁时退休符合国家养老金替代率，又能使得养老金达到收支平衡。为了达到目标替代率，又要维持养老金收支平衡可以采取从 30 岁缴纳养老保险，职工到 66 岁开始退休。

六. 模型的评价与推广

1. 优点:

1) 综合考虑各方面因素,我们分析得出,在未来 25 年内,我国可能的经济发展形势和职工工资的增长趋势,并以此为基础建立数学模型,考虑相对周全。此外,此模型简单实用便于实行和推广。

2) 以上假设多依据我国现阶段经济发展水平,并且结合未来的发展目标作出的合理假设,所以上述假设具有代表性。

2. 缺点:

1) 以上假设中的结论是在未来几十年中,我国经济状态无重大变动和人的平均死亡年龄与现今相差无多的前提下。因此,在动态的经济条件下,此模型尚有不完善之处。

2) 影响经济发展的因素繁杂,难以充分考虑,故该模型在实际应用中还需要据实作必要的调整。

3. 推广:

1) 由于计算养老金的收支与目前计算商业保险的投保时限有重多相似之处,故此模型也可在保险类行业中得到应用推广。

2) 由大及小,同样,在公司职工福利费管理方面,该模型也可有所涉及运用。

3) 对于近年来出现的按期付款消费有一定相似之处,同时对于理财方面有一定帮助。

七. 参考文献

1. 蔡奎生 曹文斌 潘新 《经济数学》第二册, 苏州: 苏州大学出版社, 2007 年 2 月
2. 唐小毅 吴立青 杨钰琳 《EXCEL 在经济管理中的应用》第一版, 北京: 中国人民大学出版社, 2010 年 6 月
3. 李志林 欧宜贵 《数学建模及典型案例分析》北京: 化学工业出版社, 2006 年 12 月