

2010 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

承 诺 书

我们仔细阅读了中国大学生数学建模竞赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们参赛选择的题号是（从 A/B/C/D 中选择一项填写）： A

我们的参赛报名号为（如果赛区设置报名号的话）：

所属学校（请填写完整的全名）： 北京航空航天大学

参赛队员（打印并签名）： 1. 刘文佳

2. 覃贝贝

3. 于楠

指导教师或指导教师组负责人（打印并签名）：

日期： 2010 年 9 月 13 日

赛区评阅编号（由赛区组委会评阅前进行编号）：

2010 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

编 号 专 用 页

赛区评阅编号（由赛区组委会评阅前进行编号）：

赛区评阅记录（可供赛区评阅时使用）：

评 阅 人										
评 分										
备 注										

全国统一编号（由赛区组委会送交全国前编号）：

全国评阅编号（由全国组委会评阅前进行编号）：

储油罐的变位识别与罐容表标定

摘要

本文运用高等数学中积分的方法建立了小椭圆型储油罐容积与油位高度之间关系的模型。通过坐标系旋转方便地获得积分区域表达式和积分函数表达式，在问题一中求出了纵向偏转角为 $\alpha = 4.1^\circ$ 时小椭圆型储油罐内油的体积 V 与油位高度 h 之间的数值关系，然后通过计算值与实际测量数据的比较，得出了误差拟合二次曲线，对理论值进行修正，使绝对误差小于 $7 \times 10^{-3} m^3$ ，并由此给出了油位高度间隔为 1cm 的罐容表标定值，同时对于存在的误差给出了合理解释。问题二研究了存在两个变位参数（纵向倾斜角度 α 和横向偏转角度 β ）情况下罐内储油量与油位高度及变位参数之间的关系 $V = Vh(h, \alpha, \beta)$ 。由于罐内油体积的初值未知，我们结合测量读出的显示油量容积的初值，假设初始油量 V_0 的范围为 $58 \sim 60.5 m^3$ ，在这个范围内使用搜索的方法，并以进/出油量 ΔV 和油位高度 h 作出的拟合曲线 $V_0 + \Delta V = g(h)$ 与理论曲线 $V = Vh(h, \alpha, \beta)$ 的总绝对误差最小为准则求出了两个变位参数 $\alpha = 2.117^\circ$ ， $\beta = 4.2446^\circ$ 。在进行模型检验时，一方面，通过代入显示油量容积 V 与显示油高 h ，计算出 $[\alpha, \beta] = [0^\circ, 0.0977^\circ]$ ，近似为 0，验证了模型的正确性；另一方面，通过进油后的数据以及随机取得的一些数据对模型精确性进行了检验，得到总绝对误差 $E = 5.6290 \times 10^{-4}$ 非常小，验证了此模型的精确性。

求解模型时对油罐划分区域分别积分的方法可以推广到油罐封头为其他形状时的情况，方法适用范围较广；通过变换坐标系，简化积分域和积分函数，而且使用 MATLAB 进行复杂的二重积分运算，可操作性非常强，且具有较高的可靠性。

关键词：二重积分 拟合 误差分析 搜索 误差修正 旋转坐标系

一、问题分析

题目讨论的是油罐体变位后对罐容表的影响，就是要求出罐体变位后油位高度和油量容积之间的关系。又已知问题一中油罐是卧式椭圆柱，没有直接的公式求解任一高度处的容积，因此最好使用高等数学中二重积分的知识来建立模型。此外，坐标系的确定也是很重要的，它关系到积分域的划分以及积分的难易度。

对于问题二，在问题一建立模型的方法基础上，积分区域划分进一步复杂。可利用与问题一中相似的区域划分规则求解中间圆柱体中油的体积，两侧的球冠体可利用相同的微积分和区域边界思想，得到二重积分表达式，最终圆柱体与球冠体中油的体积和即为要求解的油罐中油量容积。

在建立模型之前，有些实际情况应该适当忽略，于是得出以下的模型假设。

二、模型假设

1. 忽略温度变化对油量容积的影响；
2. 忽略因温度变化而使油罐膨胀或收缩；
3. 忽略油的静压力作用引起罐体的膨胀和收缩；
4. 忽略油罐“蠕变”的影响；
5. 忽略油浮子上下浮动对浮顶油罐标定和计量的影响。

三、模型建立和求解

1、问题一

作为问题一的铺垫我们先考虑油罐平放时的情况。

1.1 油罐平放

1) 模型建立

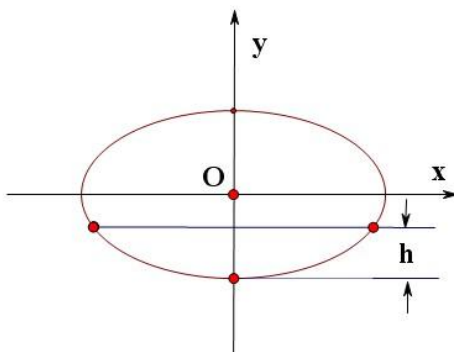


图1 小椭圆型储油罐平放横截面

设横截面椭圆的方程为：

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

椭圆弓形的高为 h ，图中带阴影部分为储油横截面，用定积分求储油体积。设椭圆弓形的面积为 $S(h)$ ，则：

$$S(h) = \frac{2a}{b} \int_{-b}^{h-b} \sqrt{b^2 - y^2} dy = \left[\frac{\pi}{2} + \frac{h-b}{b} \sqrt{1 - \left(\frac{h-b}{b} \right)^2} + \arcsin \frac{h-b}{b} \right] ab \quad (2)$$

设 $x = \frac{h-b}{b}$ ($0 \leq h \leq 2b, -1 \leq x \leq 1$)，油罐的长为 L ，储油的体积为 $V(x)$ 。可得：

$$V(x) = \left(\frac{\pi}{2} + x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x \right) abL \quad (3)$$

从上式能准确的算出储油的体积。

附件一给出了小椭圆型储油罐无变位进油时油量与油位高度的关系，与上述理论计算结果比较可得绝对误差，通过MATLAB编程求出具体数据，如下图2：

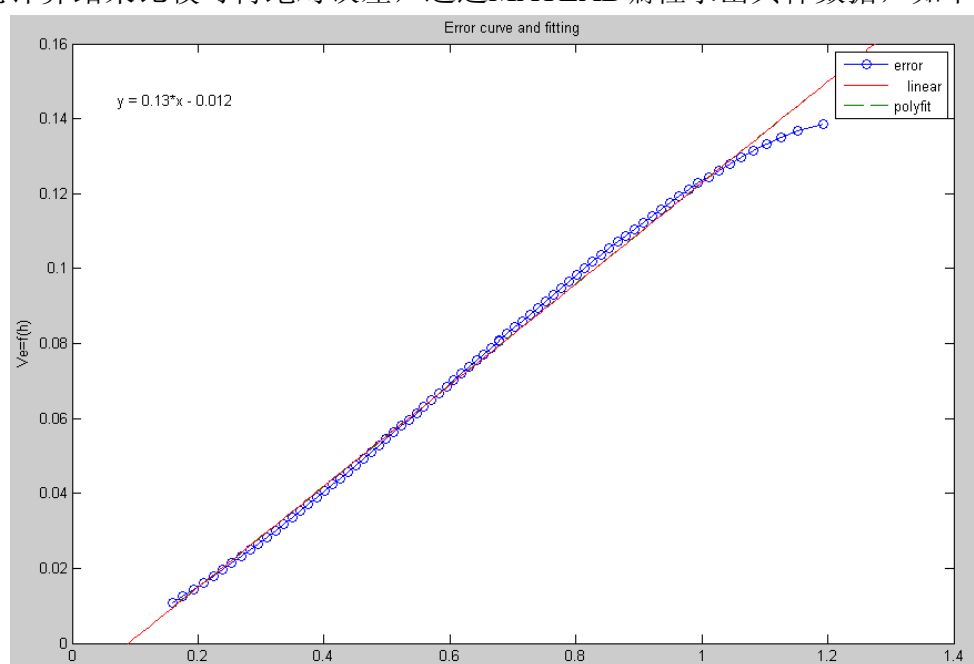


图2 理论油量与实际油量误差曲线及其拟合直线

由图2可以看出误差近似为直线，误差拟合直线为： $y = 0.13x - 0.012$ ，由此我们可得出理论值减去误差拟合直线后的修正值，其与测量值的比较如下图：

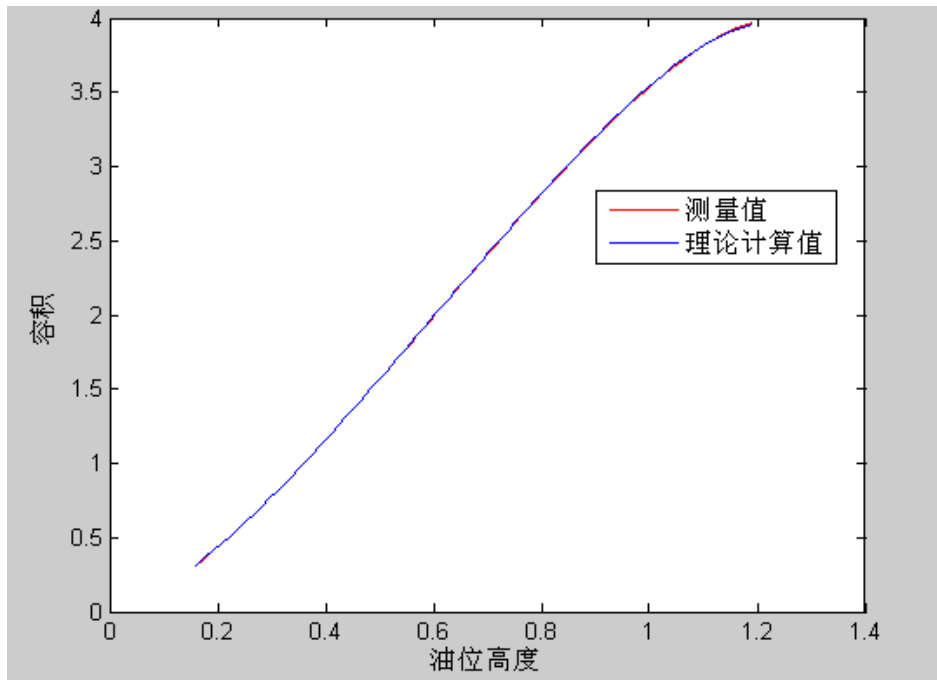


图3 测量值与修正后理论值曲线比较

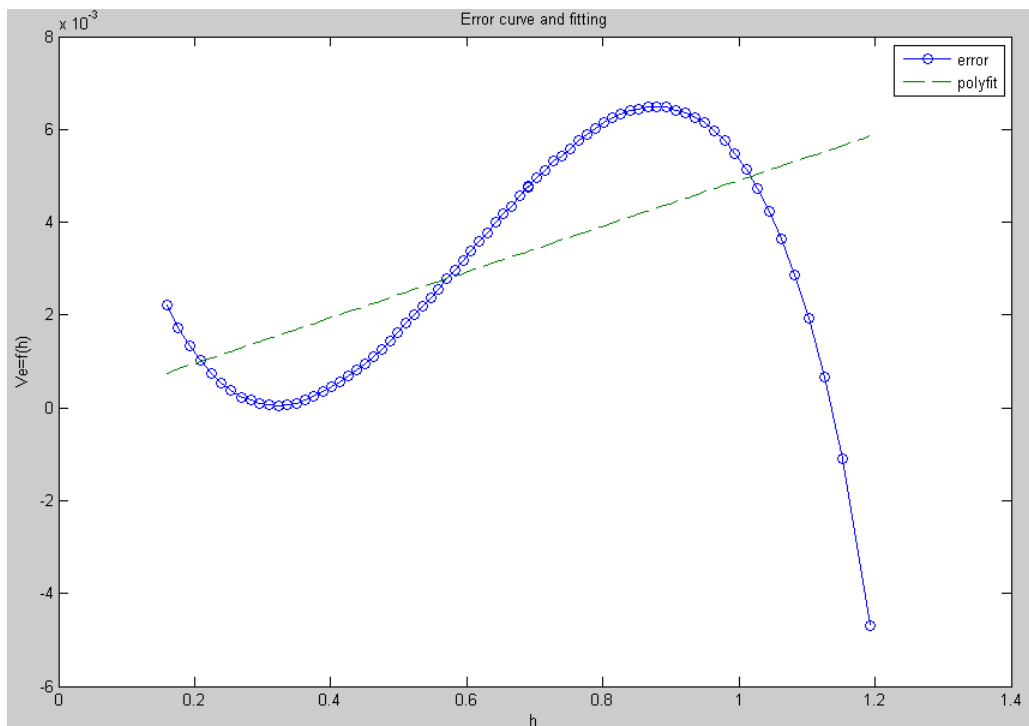


图4 修正后理论值与测量值的误差曲线

由图3、图4可见，修正后的理论值和测量值拟合很好，误差小于 $7 \times 10^{-3} m^3$ ，达到令人满意的结果。

2) 模型误差分析：

从修正前的误差曲线来看，误差与油位高度近似成正比，原因是在油罐内有进油管，出油管和探针等物占用了油料空间，从而使实际测量值较理论值偏小，而油罐平放，油管所占用体积与其处于油体中的长度成正比，这就解释了为何误

差曲线呈线性。

1.2 油罐倾斜角度 θ

1) 模型分析

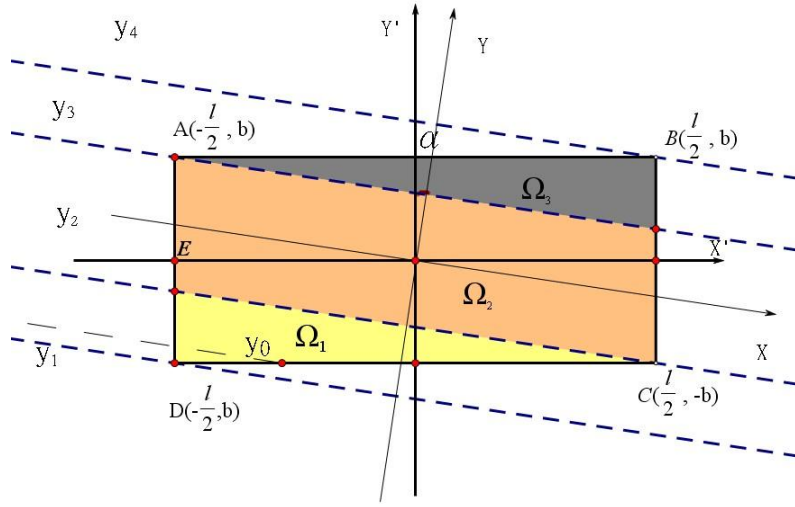


图5 储油罐纵向倾斜变位后示意图

在 $O-X'Y'Z$ 坐标系中，椭圆正截面柱体ABCD的正截面椭圆的方程为：

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \quad (4)$$

由(4)式得

$$z = \pm \sqrt{a^2 \left(1 - \frac{y'^2}{b^2} \right)} \quad (5)$$

令 $O-X'Y'Z$ 坐标系绕Z轴旋转 θ 角，则有新坐标系 $O-XYZ$ (X轴为水平方向)，坐标变换公式如下：

$$\begin{cases} x = x' \cos \theta + y' \sin \theta \\ y = -x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases} \quad (7)$$

下面求椭圆正截面柱体ABCD体积的积分公式。

首先求 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ 积分区域的积分公式。

由于正截面椭圆是在Z轴方向以 $z = 0$ 平面为对称，那么Z值取正值。积分时乘2即可。

(7)式代入(5)式，得：

$$z = \pm \frac{a}{b} \sqrt{-(x \sin \theta + y \cos \theta)^2 + b^2} \quad (8)$$

那么在新坐标系 $O-XYZ$ 下的柱体ABCD体积积分公式为：

$$V = 2 \iint z dx dy = 2 \iint \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - (x \sin \theta + y \cos \theta)^2} dx dy \quad (9)$$

(9)式在X轴上积分，得：

$$\begin{aligned} V &= \frac{a}{b \sin \theta} \int (x \sin \theta + y \cos \theta) \sqrt{b^2 - (x \sin \theta + y \cos \theta)^2} + b^2 \arcsin \frac{x \sin \theta + y \cos \theta}{b} \Big|_x dy \\ &= \frac{ab}{\sin \theta} \int \frac{x \sin \theta + y \cos \theta}{b} \sqrt{1 - \left(\frac{x \sin \theta + y \cos \theta}{b} \right)^2} + \arcsin \frac{x \sin \theta + y \cos \theta}{b} \Big|_x dy \end{aligned} \quad (10)$$

(10)式积分区域如下：

在新坐标系 $O-XYZ$ 下，设：

$$y_1 \text{ 为D点在Y轴上的坐标, } y_1 = -\frac{l}{2} \sin \theta - b \cos \theta ;$$

$$y_2 \text{ 为C点在Y轴上的坐标, } y_2 = \frac{l}{2} \sin \theta - b \cos \theta ;$$

$$y_3 \text{ 为A点在Y轴上的坐标, } y_3 = -y_2 = -\frac{l}{2} \sin \theta + b \cos \theta ;$$

$$y_4 \text{ 为B点在Y轴上的坐标, } y_4 = -y_1 = \frac{l}{2} \sin \theta + b \cos \theta ;$$

下面分别讨论各部分区间体积计算：

区域 Ω_1 ($y_1 \leq y \leq y_2$ 罐内体积)：

$$\Omega_1 : \begin{cases} x \geq \frac{-b - y \cos \theta}{\sin \theta} (y' > -b) \\ x \leq \frac{\frac{l}{2} + y \sin \theta}{\cos \theta} (x' < \frac{l}{2}) \end{cases}$$

将 Ω_1 中x的上限 $x_2 = \frac{\frac{l}{2} + y \sin \theta}{\cos \theta}$ ，下限 $x_1 = \frac{-b - y \cos \theta}{\sin \theta}$ 带入到 (10) 式中得：

$$V = \frac{ab}{\sin \theta} \cdot \int_{\Omega_1} \frac{\frac{l}{2} \sin \theta + y}{b \cos \theta} \sqrt{1 - \left(\frac{\frac{l}{2} \sin \theta + y}{b \cos \theta} \right)^2} + \arcsin \frac{\frac{l}{2} \sin \theta + y}{b \cos \theta} + \frac{\pi}{2} dy \quad (11)$$

$$\text{设 } t_1(y) = \frac{\frac{l}{2} \sin \theta + y}{b \cos \theta} \text{ 则 } dt_1(y) = \frac{dy}{b \cos \theta} \Rightarrow dy = b \cos \theta dt_1(y) \quad (12)$$

$$V(y) = \frac{ab}{\sin \theta} \int (t_1(y) \sqrt{1 - t_1^2(y)} + \arcsin t_1(y) + \frac{\pi}{2}) b \cos \theta dt_1(y) \quad (13)$$

$$V_{\Omega_1} = \frac{ab^2 \cos \theta}{\sin \theta} \left[-\frac{(1 - t_1(y))^{\frac{3}{2}}}{3} + t_1(y) \arcsin t_1(y) + \sqrt{1 - t_1^2(y)} + \frac{\pi}{2} t_1(y) \right] \Big|_{y_1}^{y_2}, \quad y_1 \leq y \leq y_2 \quad (14)$$

区域 Ω_2 ($y_2 \leq y \leq y_3$ 罐内体积):

$$\Omega_2: \begin{cases} x \geq \frac{-\frac{l}{2} + y \sin \theta}{\cos \theta} (x' > -\frac{l}{2}) \\ x \leq \frac{\frac{l}{2} + y \sin \theta}{\cos \theta} (x' < \frac{l}{2}) \end{cases}$$

将 Ω_2 中x的上限 $x_2 = \frac{\frac{l}{2} + y \sin \theta}{\cos \theta}$, 下限 $x_1 = \frac{-\frac{l}{2} + y \sin \theta}{\cos \theta}$ 带入到(10)式中得:

$$V(y) = \frac{ab}{\sin \theta} \int (t_2(y) \sqrt{1-t_2^2(y)} + \arcsin t_2(y)) b \cos \theta dt_2(y)$$

$$-(t_3(y) \sqrt{1-t_3^2(y)} + \arcsin t_3(y)) b \cos \theta dt_3(y) \quad (15)$$

$$\text{其中, } t_2(y) = \frac{\frac{l}{2} \sin \theta + y}{b \cos \theta}, \quad t_3(y) = \frac{-\frac{l}{2} \sin \theta + y}{b \cos \theta} \quad (16)$$

$$V_{\Omega_2} = \frac{ab^2 \cos \theta}{\sin \theta} \left\{ \begin{aligned} & -\frac{(1-t_2(y))^{\frac{3}{2}}}{3} + t_2(y) \arcsin t_2(y) + \sqrt{1-t_2^2(y)} \\ & - \left[-\frac{(1-t_3(y))^{\frac{3}{2}}}{3} + t_3(y) \arcsin t_3(y) + \sqrt{1-t_3^2(y)} \right] \end{aligned} \right\} \Big|_{y_2}^{y_3}, \quad y_2 \leq y \leq y_3 \quad (17)$$

区域 Ω_3 ($y_3 \leq y \leq y_4$ 罐内体积):

$$\Omega_3: \begin{cases} x \geq \frac{-\frac{l}{2} + y \sin \theta}{\cos \theta} (x' > -\frac{l}{2}) \\ x \leq \frac{b - y \cos \theta}{\sin \theta} (y' < b) \end{cases}$$

将 Ω_3 中x的上限 $x_2 = \frac{b - y \cos \theta}{\sin \theta}$, 下限 $x_1 = \frac{-\frac{l}{2} + y \sin \theta}{\cos \theta}$ 带入到(10)式中得:

$$V = \frac{ab}{\sin \theta} \cdot \int_{\Omega_3} \frac{\pi}{2} - \frac{-\frac{l}{2} \sin \theta + y}{b \cos \theta} \sqrt{1 - \left(\frac{-\frac{l}{2} \sin \theta + y}{b^2 \cos^2 \theta} \right)^2} - \arcsin \frac{-\frac{l}{2} \sin \theta + y}{b \cos \theta} dy \quad (18)$$

$$\text{设 } t_3(y) = \frac{-\frac{l}{2} \sin \theta + y}{b \cos \theta} \text{ 则}$$

$$V(y) = \frac{ab}{\sin \theta} \int \left(\frac{\pi}{2} - t_3(y) \sqrt{1 - t_3^2(y)} - \arcsin t_3(y) \right) b \cos \theta dt_3(y) \quad (19)$$

$$V_{\Omega_3} = \frac{ab^2 \cos \theta}{\sin \theta} \left[\frac{\pi}{2} t_3(y) + \frac{(1 - t_3^2(y))^{\frac{3}{2}}}{3} - t_3(y) \arcsin t_3(y) - \sqrt{1 - t_3^2(y)} \right] \Big|_{y_3}^y, \quad y_3 \leq y \leq y_4 \quad (20)$$

2) 模型建立

综合以上三个部分，由式 (14)、(17)、(20) 有：

$$\text{当 } y_1 \leq y \leq y_2, \text{ 即 } V(y) = V_{\Omega_1}(y) \quad (21)$$

$$\text{当 } y_2 \leq y \leq y_3, \text{ 即 } V(y) = V_{\Omega_1}(y_2) + V_{\Omega_2}(y) \quad (22)$$

$$\text{当 } y_3 \leq y \leq y_4, \text{ 即 } V(y) = V_{\Omega_1}(y_2) + V_{\Omega_2}(y_3) + V_{\Omega_3}(y) \quad (23)$$

题目已知小椭圆型储油罐相关参数， $a = 0.89m, b = 0.6m, l = 2.45m, \theta = 4.1^\circ$

通过几何关系可得，油位高度 h 与上面图示液面高度 y 之间的关系：

$$y = g(h) = (h - 0.825 \tan 4.1^\circ - 0.6) \cos 4.1^\circ \quad (24)$$

至此可建立理论储油量 V 与油位高度 h 的关系： $Vh(h) = V(g(h))$

通过MATLAB编程可得油罐内油体积 Vh 与油位高度 h 之间的数值关系（程序见附录），在附件一中给出了小椭圆型储油罐倾斜变位进油时，油量与油位高度的关系，与上述理论计算结果相比较可得绝对误差，如下图6所示：

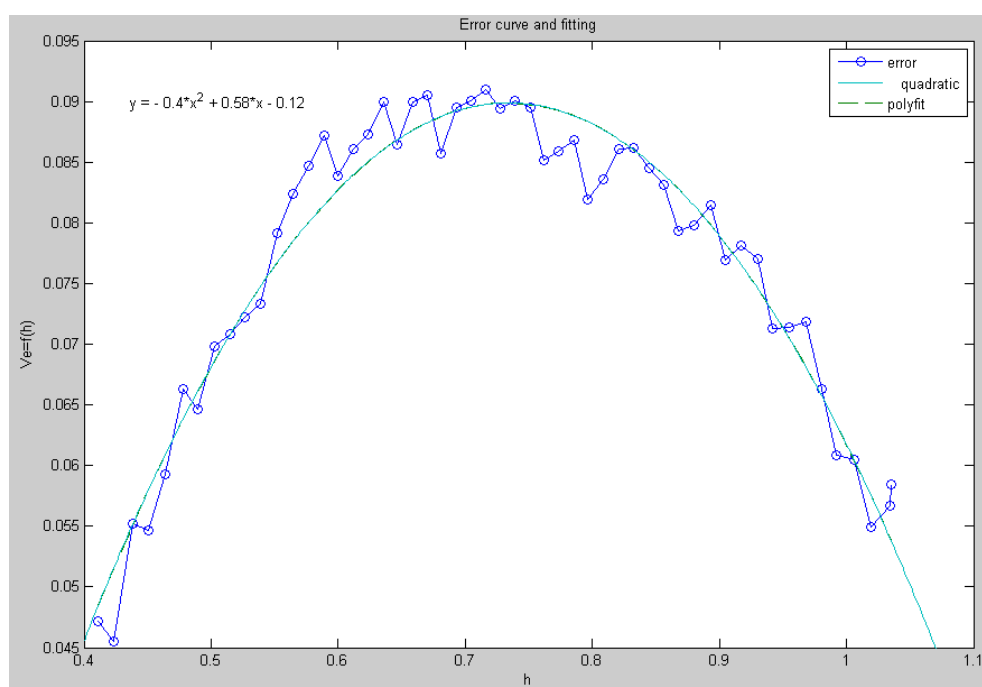


图6 误差曲线与误差的二次拟合曲线

由图6可以看出误差近似为抛物线，误差拟合二次曲线 $y = -0.4x^2 + 0.58x - 0.12$ ，由此可得出理论值减去误差拟合二次曲线后的修正值，其与测量值的比较如图7：

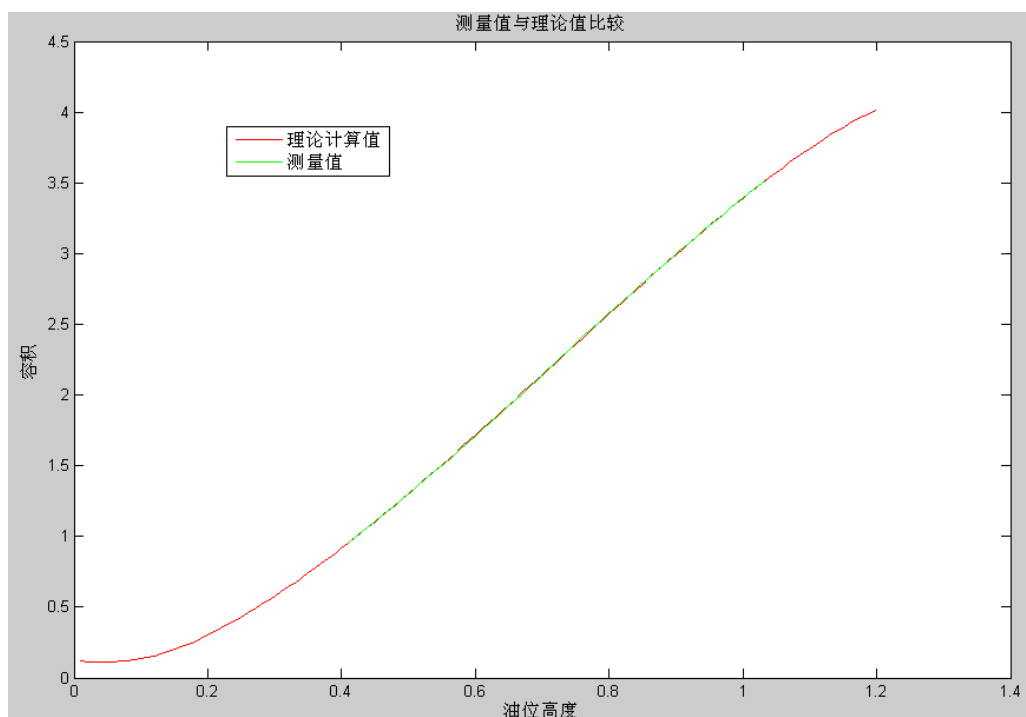


图7 测量值与修正后理论值随油位高度变化曲线

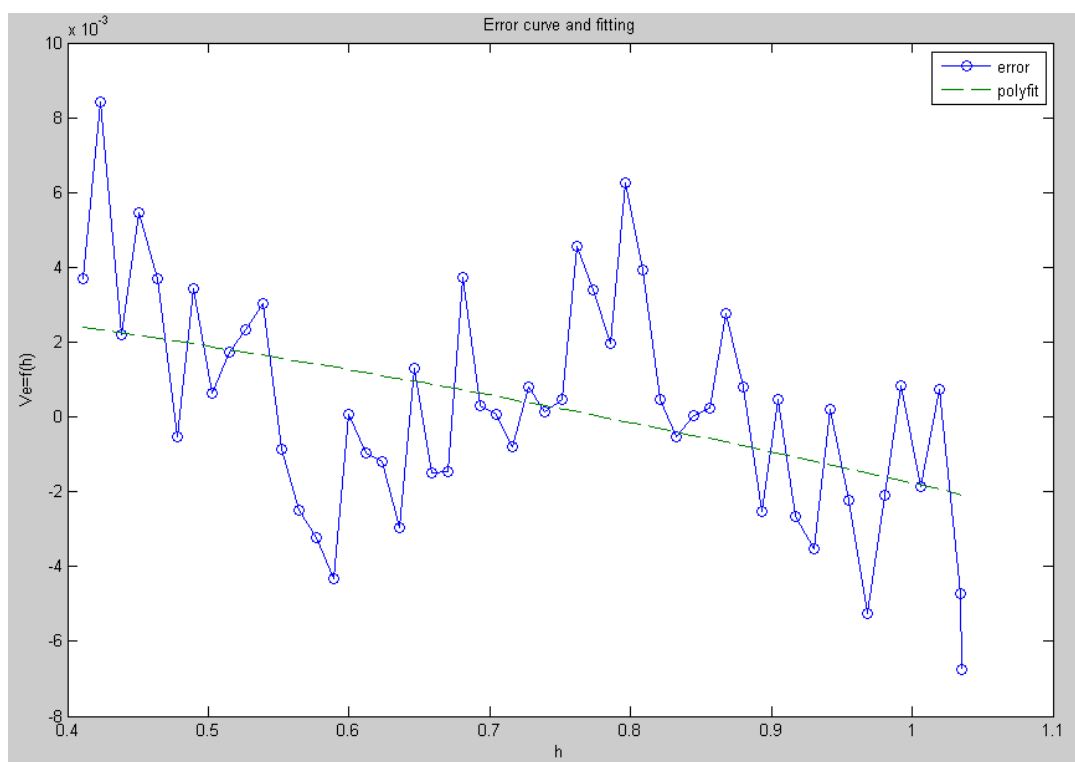


图8 修正后理论值与测量值的误差曲线

3) 误差分析

由以上数据可以看出，误差的来源主要是油罐内油管浸入油中的体积，这将会导致油量理论值会略高于油量测量值，并且随着油面高度的变化，油管浸入油中的体积也会发生改变，误差也随之变化，但由于油罐倾斜放置，因此误差与油位高度不再是线性关系。

最后，参考《中华人民共和国国家计量检定规程 JJG 266-1996 卧式金属罐容积检定规程》的附录3，我们绘制了卧式金属罐容积表，如下：

卧式金属罐容积表

罐号 1

共 1 页 第 1 页

高度 /m	容积 /m ³	高度 /m	容积 /m ³	高度 /m	容积 /m ³	高度 /m	容积 /m ³	高度 /m	容积 /m ³
0.01	0.1178	0.25	0.4297	0.49	1.2620	0.73	2.2720	0.97	3.2755
0.02	0.1148	0.26	0.4577	0.5	1.3019	0.74	2.3152	0.98	3.3143
0.03	0.1129	0.27	0.4866	0.51	1.3421	0.75	2.3584	0.99	3.3527
0.04	0.1122	0.28	0.5161	0.52	1.3826	0.76	2.4015	1	3.3907
0.05	0.1127	0.29	0.5463	0.53	1.4233	0.77	2.4446	1.01	3.4283
0.06	0.1145	0.3	0.5772	0.54	1.4643	0.78	2.4876	1.02	3.4654
0.07	0.1177	0.31	0.6088	0.55	1.5055	0.79	2.5306	1.03	3.5021
0.08	0.1223	0.32	0.6409	0.56	1.5469	0.8	2.5734	1.04	3.5382
0.09	0.1284	0.33	0.6737	0.57	1.5886	0.81	2.6162	1.05	3.5738
0.1	0.1361	0.34	0.7070	0.58	1.6304	0.82	2.6589	1.06	3.6088
0.11	0.1454	0.35	0.7409	0.59	1.6724	0.83	2.7014	1.07	3.6433
0.12	0.1564	0.36	0.7752	0.6	1.7145	0.84	2.7438	1.08	3.6771
0.13	0.1691	0.37	0.8101	0.61	1.7568	0.85	2.7860	1.09	3.7102
0.14	0.1836	0.38	0.8455	0.62	1.7993	0.86	2.8281	1.1	3.7426
0.15	0.1998	0.39	0.8814	0.63	1.8419	0.87	2.8700	1.11	3.7743
0.16	0.2177	0.4	0.9177	0.64	1.8846	0.88	2.9117	1.12	3.8052
0.17	0.2370	0.41	0.9544	0.65	1.9274	0.89	2.9532	1.13	3.8352
0.18	0.2575	0.42	0.9915	0.66	1.9703	0.9	2.9944	1.14	3.8643
0.19	0.2791	0.43	1.0291	0.67	2.0132	0.91	3.0354	1.15	3.8923
0.2	0.3019	0.44	1.0670	0.68	2.0563	0.92	3.0762	1.16	3.9193
0.21	0.3256	0.45	1.1053	0.69	2.0994	0.93	3.1167	1.17	3.9450
0.22	0.3503	0.46	1.1440	0.7	2.1425	0.94	3.1569	1.18	3.9692
0.23	0.3759	0.47	1.1830	0.71	2.1857	0.95	3.1967	1.19	3.9918
0.24	0.4024	0.48	1.2223	0.72	2.2288	0.96	3.2363	1.2	4.0127

注：由于附件所给测量数据油位高度集中在0.4m-1.1m之间，上面计算误差拟合时对于区间外的数据误差相对较大，尤其上表中前5组数据，但实际中这部分数值使用较少，不影响整表的使用。

2、问题二

2.1 模型分析

球冠半径为 $r=1.625m$ ，圆柱体的底面半径为 $R=1.5m$ ， $O-X'Y'Z$ 坐标系中，球冠中心为 $(\pm 3.375, 0, 0)$

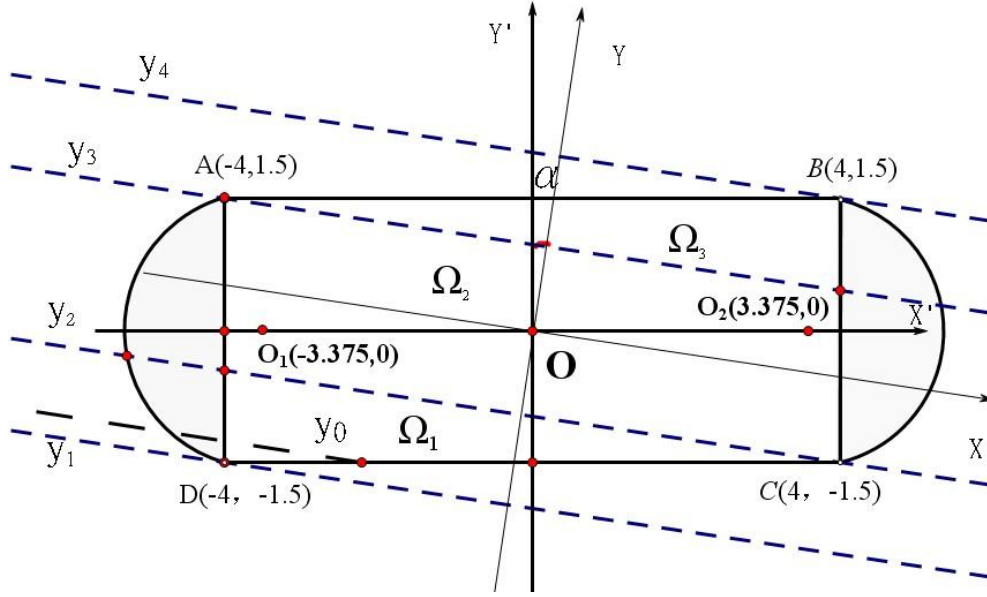


图9 储油罐纵向倾斜变位后示意图

实际储油罐内油容积计算主要分为两大部分：圆柱体内与球冠体内的容积。

1) 圆柱体内油容积计算的讨论

这部分的讨论与问题一的小椭圆型油罐倾斜情况基本一致，故过程简述。

在 $O-X'Y'Z$ 坐标系中，圆柱体ABCD的正截面圆的方程为：

$$z^2 + y'^2 = R^2 \quad (25)$$

化简得 $z = \pm \sqrt{R^2 - y'^2} = \pm \sqrt{R^2 - (x \sin \alpha + y \cos \alpha)^2}$ ，从而可得积分方程：

$$V = 2 \iint z dx dy = 2 \iint \sqrt{R^2 - (x \sin \alpha + y \cos \alpha)^2} dx dy \quad (26)$$

在新坐标系O-XYZ下，设：

y_1 为D点在Y轴上的坐标， $y_1 = -\frac{l}{2} \sin \alpha - R \cos \alpha$ ；

y_2 为C点在Y轴上的坐标， $y_2 = -\frac{l}{2} \sin \alpha + R \cos \alpha$ ；

y_3 为A点在Y轴上的坐标， $y_3 = -y_2 = \frac{l}{2} \sin \alpha - R \cos \alpha$ ；

y_4 为B点在Y轴上的坐标， $y_4 = -y_1 = \frac{l}{2} \sin \alpha + R \cos \alpha$ ；

根据不同积分域可将圆柱体划分为三个区域，如图9所示，具体如下所述：

区域 Ω_1 ($y_1 \leq y \leq y_2$ 圆柱体内体积)：

$$\Omega_1: \begin{cases} x \geq \frac{-R - y \cos \alpha}{\sin \alpha} (y' > -R) \\ x \leq \frac{\frac{l}{2} + y \sin \alpha}{\cos \alpha} (x' < \frac{l}{2}) \end{cases} \quad (27)$$

区域 Ω_2 ($y_2 \leq y \leq y_3$ 圆柱体内体积):

$$\Omega_2: \begin{cases} x \geq \frac{-\frac{l}{2} + y \sin \alpha}{\cos \alpha} (x' > -\frac{l}{2}) \\ x \leq \frac{\frac{l}{2} + y \sin \alpha}{\cos \alpha} (x' < \frac{l}{2}) \end{cases} \quad (28)$$

区域 Ω_3 ($y_3 \leq y \leq y_4$ 圆柱体内体积):

$$\Omega_3: \begin{cases} x \geq \frac{-\frac{l}{2} + y \sin \alpha}{\cos \alpha} (x' > -\frac{l}{2}) \\ x \leq \frac{R - y \cos \alpha}{\sin \alpha} (y' < R) \end{cases} \quad (29)$$

2) 球冠内油容积计算的讨论

对于左球冠, 球心为 $(-3.375, 0, 0)$, 设 $r_0 = 3.375$, 则有左球冠方程为:

$$(x' + r_0)^2 + y'^2 + z'^2 = r^2 \quad (30)$$

$$z = \sqrt{r^2 - (x' + r_0)^2 - y'^2}$$

$$\begin{aligned} \text{化简得: } &= \sqrt{r^2 - (x \sin \alpha + y \cos \alpha + r_0)^2 - (-x \sin \alpha + y \cos \alpha)^2} \\ &= \sqrt{r^2 - r_0^2 - 2r_0(x \sin \alpha + y \cos \alpha) - (x^2 + y^2)} \end{aligned} \quad (31)$$

根据图9可知左球冠的积分域 Ω_4 为:

$$\Omega_4: \begin{cases} (x' + r_0)^2 + y'^2 \leq r^2 \\ x' \leq -\frac{l}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x + r_0 \cos \alpha)^2 \leq r^2 - r_0^2 - 2r_0 \sin \alpha y - y^2 + r_0^2 \cos^2 \alpha \\ x \cos \alpha + y \sin \alpha \leq -\frac{l}{2} \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} -r_0 \cos \alpha - \sqrt{r^2 - r_0^2 - 2r_0 \sin \alpha y - y^2 + r_0^2 \cos^2 \alpha} \leq x \leq -r_0 \cos \alpha + \sqrt{r^2 - r_0^2 - 2r_0 \sin \alpha y - y^2 + r_0^2 \cos^2 \alpha} \\ x \leq \frac{-\frac{l}{2} - y \sin \alpha}{\cos \alpha} \end{cases}$$

由实际图形中的范围可得 x 的上下限为：

$$\Omega_4: \begin{cases} x \geq -r_0 \cos \alpha - \sqrt{r^2 - r_0^2 - 2r_0 \sin \alpha y - y^2 + r_0^2 \cos^2 \alpha} \\ x \leq \frac{-\frac{l}{2} - y \sin \alpha}{\cos \alpha} \end{cases}, \text{ 其中 } y_1 \leq y \leq y_3$$

对于右半球冠体的分析与上相似，只需将球心定为 $(3.375, 0, 0)$ ，便可得积分域 Ω_5 的表达式，此处不再详述。

2.2 模型建立

$$V(y, \alpha, \beta) = V_{cylinder}(y, \alpha, \beta) + V_{leftsphere}(y, \alpha, \beta) + V_{rightsphere}(y, \alpha, \beta)$$

其中 $V_{cylinder}(y, \alpha, \beta)$ 的公式与问题一中 (21)、(22)、(23) 式相同

$$V_{leftsphere}(y, \alpha, \beta) = 2 \iint_{\Omega_4} \sqrt{r^2 - r_0^2 - 2r_0(x \sin \alpha + y \cos \alpha) - (x^2 + y^2)} dx dy$$

$$V_{rightsphere}(y, \alpha, \beta) = 2 \iint_{\Omega_5} \sqrt{r^2 - r_0^2 - 2r_0(x \sin \alpha + y \cos \alpha) - (x^2 + y^2)} dx dy$$

纵坐标 y 与油浮子高度 h 的关系分析

只考虑垂直偏转角度 α ，不考虑水平偏转角度 β 时，纵坐标 y 与油浮子高度 H 的关系式为：

$$y = (H - 2 \tan \alpha - R) \cos \alpha \quad (32)$$

此处与问题一中分析同理，不再详述。

只考虑水平偏转角度 β ，不考虑垂直偏转角度 α 时：

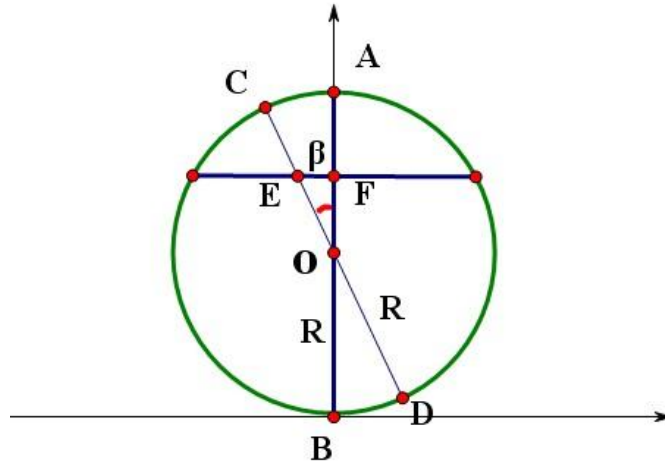


图10 横向偏转倾斜后正截面图

如图10所示， $h \geq R$ 时，横向偏转角度 β 的影响相当于在无横向偏转角（ $H = BF$ ）与有横向偏转角（ $h = ED$ ）的油位高度间建立了一个线性关系：

$$H = R + (h - R) \cos \beta = R(1 - \cos \beta) + h \cos \beta \quad (33)$$

当 $h < R$ 时，可推得关系式同上。

将式(33)代入式(32)可得水平偏转 α 和垂直偏转 β 时，纵坐标 y 与油位高度 h 有关系式：

$$y = g(h, \alpha, \beta) = h \cos \beta \cos \alpha - (R \cos \beta + 2 \tan \alpha) \cos \alpha \quad (34)$$

通过理论分析后得出含有纵向倾斜角度 α 和横向偏转角度 β 两个参数的油容积 V 与油位高度 h 的函数关系：

$$V = Vh(h, \alpha, \beta) = V(g(h, \alpha, \beta), \alpha, \beta)$$

题目附件二中给出了进/出油量 ΔV 与油位高度 h 的关系，但油容积初始值未知。由于油罐变位，我们可知显示油量容积总是比油罐内实际油容积偏大，流水号201显示油容量为 60.44888m^3 ，因此此时油罐内真实含油量 V_0 一定比这个值小，

我们在 $58 \sim 60.4 \text{ m}^3$ 的范围内搜索并计算出不同油容积初始值 V_0 下纵向倾斜角度 α 和横向偏转角度 β 的值（由此可确定 V 与 f 的确切关系），同时可确定出理论曲线 $V = f(h, \alpha, \beta)$ 与进/出油量 ΔV 和油位高度 h 的关系 $V_0 + \Delta V = g(h)$ 曲线的绝对误差随油容积初始值 V_0 的变化曲线，此误差曲线如图11所示：

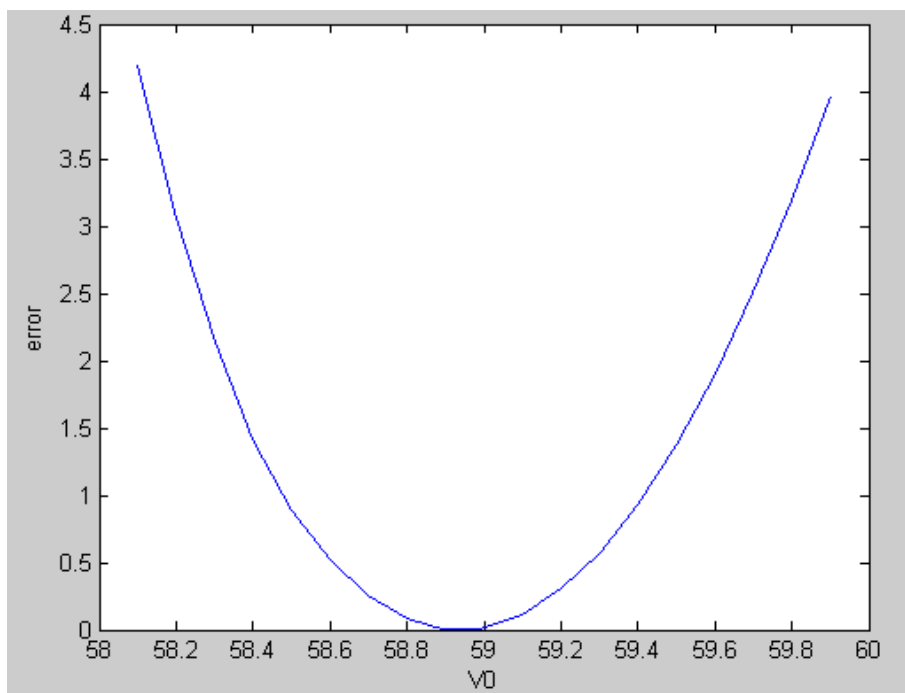


图11 绝对误差随油容积初始值 V_0 的变化关系图

表1 绝对误差随油容积初始值 V_0 的变化

初始值 V_0	alpha	beta	误差 e	初始值 V_0	alpha	beta	误差 e
58.1	3.0817	-0.0005	4.1967	58.94	2.117	4.2446	0.000164
58.2	2.9678	0.0001	3.0645	58.95	2.1056	4.2915	0.00082
58.3	2.851	0	2.1379	58.96	2.0942	4.3376	0.0024
58.4	2.7362	-0.0004	1.4205	58.97	2.0827	4.3829	0.0048
58.5	2.6212	0.0001	0.8902	58.98	2.0713	4.4275	0.0081
58.6	2.5063	1.7043	0.5223	58.99	2.0599	4.4713	0.0124
58.7	2.3915	2.7668	0.257	59	2.0485	4.5145	0.0175
58.8	2.277	3.4856	0.0857	59.1	1.9346	4.9114	0.1169
58.86	2.2084	3.8373	0.0273	59.2	1.8208	5.255	0.3035
58.87	2.1969	3.8916	0.0207	59.3	1.7072	5.5556	0.5758
58.88	2.1855	3.9449	0.0151	59.4	1.5937	5.8199	0.9329
58.89	2.1741	3.9972	0.0103	59.5	1.4804	6.0528	1.3737
58.9	2.1627	4.0485	0.0065	59.6	1.3672	6.2579	1.8976
58.91	2.1512	4.0989	0.0036	59.7	1.2542	6.438	2.5039
58.92	2.1398	4.1483	0.0015	59.8	1.1412	6.5953	3.1923
58.93	2.1284	4.1969	0.000404	59.9	1.0284	6.7315	3.9623

由上表可以看出，当油容积初始值 $V_0 = 58.94m^3$ 时，理论曲线 $V = f(h, \alpha, \beta)$ 与实际油量变化曲线吻合最好，而此时 $\alpha = 2.117^\circ$, $\beta = 4.2446^\circ$ ，至此确定了此油罐的两个变位参数。（注：问题2以上部分均是使用流水号为201~502的数据计算所得）

2.2模型验证

1) 模型正确性验证

将 $\alpha = 0^\circ$ ， $\beta = 0^\circ$ 和油高数组 h 代入所建立的数学模型中，可以得到平放时的理论油量容积 V ，对 V 和附件表2中的显示油量容积数组 V_0 作曲线如图12所示，并可以计算得出 V 与 V_0 的差的平方和为 $E = 2.3382 \times 10^{-4}$ 非常小，因此可知 V 与 V_0 非常接近。

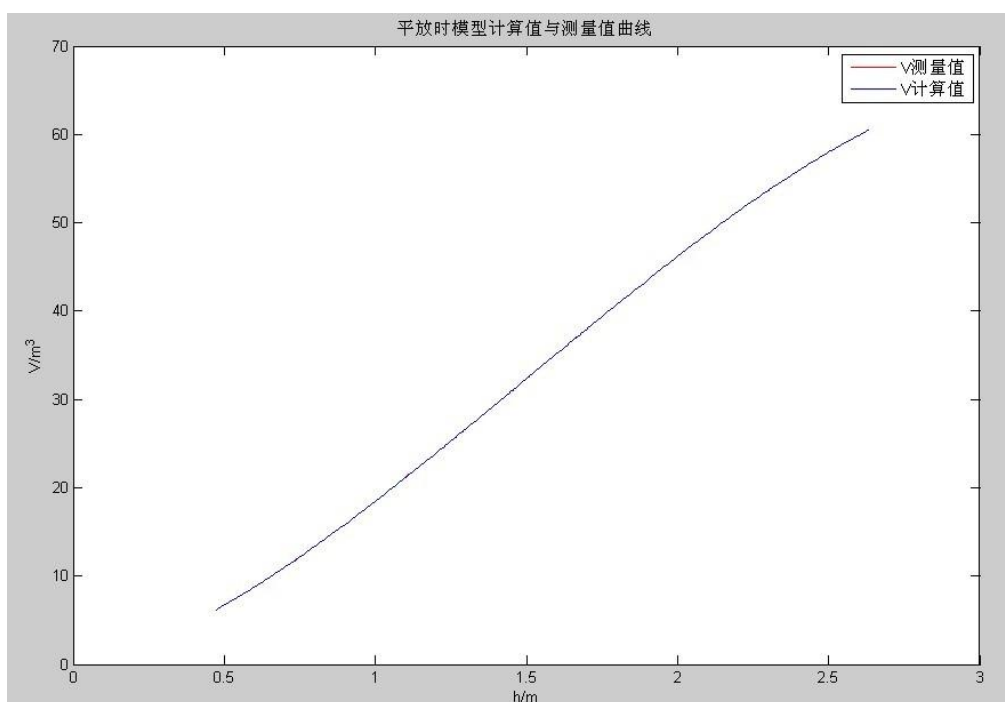


图12 平放时模型测量值与计算值曲线

同理，可将 V_0 和 h 作为原始数据，对模型进行参数估计可得最佳估计值为

$[\alpha, \beta] = [0^\circ, 0.0977^\circ]$ ，与理论值 $[\alpha, \beta] = [0^\circ, 0^\circ]$ 相差不大。以上两方面同时验证了在平放时该模型的正确性。

2) 变位参数正确性验证

模型求解过程中，使用流水号201~502的数据进行拟合求解出 α 和 β 的最佳估计值，下图为使用流水号503~803的数据验证得到的曲线：

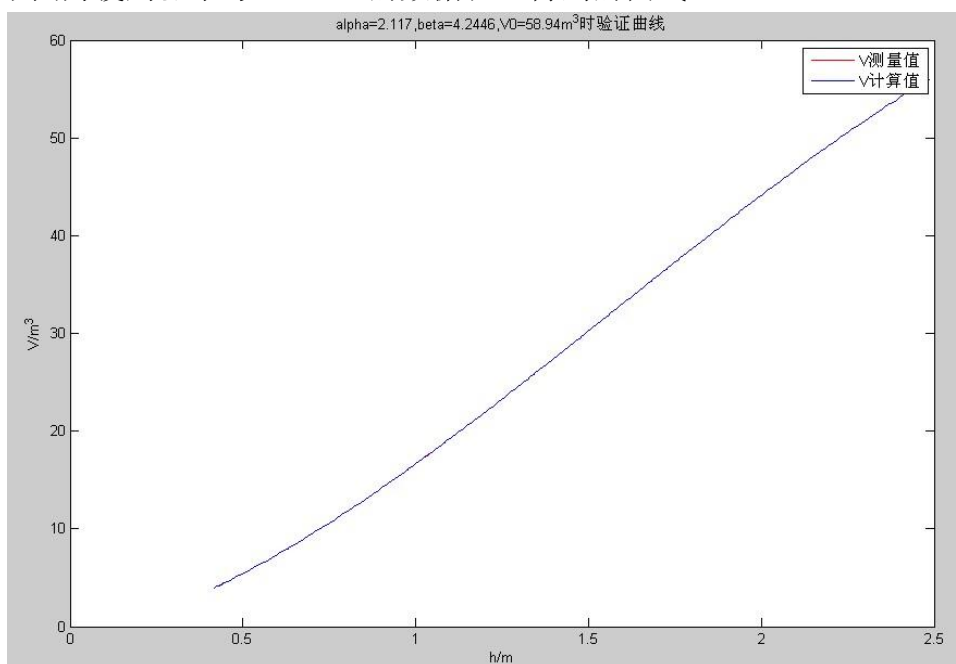


图13 503-803流水号测量数据验证曲线

在所给数据中随机取出一部分数据重复上述操作,可得理论值与测量值差的平方和为 $E = 2.3240 \times 10^{-4}$ 。由上述两部分验证得到的 E 都非常小,接近于0,由此可知,对于该模型对表中取得的任何一组数据都可以有比较好的近似,且误差非常小,从而验证了模型的正确性和可靠性。

本模型的核心思想是微积分，通过已知的油罐形状以及规格，将其划分为不同的积分区域，并依次按照相应的积分域进行积分，由于积分式与积分限比较复杂，本模型使用MATLAB中的二重积分函数quad2d代替人工进行积分运算，避免了积分过程中错误的出现，而且积分式严格按照数学原理进行，因此保证了模型最终结果的正确性以及方法的可靠性。

卧式金属罐容积表

共 1 页 第 1 页

高度 /m	容积 /m ³	高度 /m	容积 /m ³	高度 /m	容积 /m ³	高度 /m	容积 /m ³	高度 /m	容积 /m ³
0.1	0.3706	0.7	9.4816	1.3	24.6678	1.9	41.4171	2.5	56.2981
0.2	1.0638	0.8	11.75	1.4	27.4438	2	44.1227	2.6	58.3256
0.3	2.2194	0.9	14.1487	1.5	30.2464	2.1	46.7618	2.7	60.1601
0.4	3.698	1	16.6576	1.6	33.0603	2.2	49.3173	2.8	61.766
0.5	5.4273	1.1	19.2585	1.7	35.8703	2.3	51.7716	2.9	63.091
0.6	7.3655	1.2	21.9341	1.8	38.661	2.4	54.1055	3	64.0239

我们的模型利用高等数学中微积分的知识, 推导出来的公式具有充分的理论依据, 而且充分考虑了区域划分的各种可能, 可以解出任意高度的卧式油罐内油量容积, 且结果都非常准备。对油罐划分区域分别积分的方法可以推广到封头为其他形状的情况, 因此模型具有广泛的应用价值; 通过坐标系的旋转, 方便地将现坐标系中非常复杂的曲线, 转换到有固定表达式或比较容易得出表达式的坐标系中, 同时使得被积分函数和积分域的表达式简化, 从而使问题简化; 同时具体的积分过程可运用MATLAB编程解决, 运算效率高, 准确率高, 避免某些人为计算误差, 使该模型的可靠性非常高。

17

寻找出理论与实际油量容积曲线间总绝对误差最小值的办法确定了油罐的两个变位参数，这是本模型的一大特点，其精度非常高，不足之处是搜索速度较慢，可以通过完善此部分程序，寻找速度更快的参数估计函数，或者随机寻找拟合数组，尽量在包含每一部分数据的基础上减少数据个数，提高运行效率，增加搜索速度，来解决或者减轻这个不足，但是这种方法对于制定罐容表切实可行，具有非常高的准确性和可靠性。

参考文献

- [1] 姜启源，谢金星，俊楠，数学模型（第三版）[M] 北京：高等教育出版社，2003
- [2] 西北工业大学数学建模指导委员会 编，数学建模简明教程 [M] 北京：高等教育出版社，2008
- [3] 周建兴，岂兴明，矫津毅，常春藤等，MATLAB从入门到精通 [M] 北京：人民邮电出版社，2008
- [4] 河北农业大学理学院，微积分及其应用（第二版） [M] 北京：高等教育出版社，2006
- [5] 任玉杰，高等数学多元微积分及其实验（MATLAB版） [M] 北京：机械工业出版社，2005
- [6] 中华人民共和国国家计量检定规程 JJG 266-1996 卧式金属罐容积检定规程
- [7] 孙宏达，关进波，用逼近法计算横截面为椭圆形储油罐的储油体积 [J] 管件与设备 2001.4 : P29
- [8] 程继元，浅谈影响油罐标定与计量的因素及其修正方法 [J] 石油商技 2004.4: P33-35
- [9] 战景林，王春平，王喜忠，倾斜椭平顶卧式罐容积的计算 [J] 中国计量 2006.4 : P73-74

附录

M文件

```
function Ve1=Ve1(y,alpha)
%计算y坐标,垂直偏转alpha角度时的圆柱体中区域1部分的油量容积
%初始化
theta=alpha/180*pi;
s=sin(theta);
c=cos(theta);
y1=-1.5*c-4*s; %OXY坐标系中D点对应y1坐标
y2=-1.5*c+4*s; %OXY坐标系中C点对应y2坐标
y3=1.5*c-4*s; %OXY坐标系中B点对应y3坐标
y4=1.5*c+4*s; %OXY坐标系中A点对应y4坐标
%程序
zrect=@(y,x)(1.5^2-(y*c-x*s).^2).^0.5;
xmin=@(y)((-4-y*s)/c);
xmax=@(y)((y*c+1.5)/s);
ymin=y1;
for i=1:length(y)
    ymax=y(i);
    Ve1(i)=2*quad2d(zrect,ymin,ymax,xmin,xmax);
End
function Ve2=Ve2(y,alpha)
%计算y坐标,垂直偏转alpha角度时的圆柱体中区域2部分的油量容积
%初始化
theta=alpha/180*pi;
s=sin(theta);
c=cos(theta);
y1=-1.5*c-4*s; %OXY坐标系中D点对应y1坐标
y2=-1.5*c+4*s; %OXY坐标系中C点对应y2坐标
y3=1.5*c-4*s; %OXY坐标系中B点对应y3坐标
y4=1.5*c+4*s; %OXY坐标系中A点对应y4坐标
%程序
zrect=@(y,x)(1.5^2-(y*c-x*s).^2).^0.5;
xmin=@(y)((-4-y*s)/c);
xmax=@(y)((4-y*s)/c);
ymin=y2;
for i=1:length(y)
    ymax=y(i);
    Ve2(i)=2*quad2d(zrect,ymin,ymax,xmin,xmax);
End
function Ve3=Ve3(y,alpha)
%计算y坐标,垂直偏转alpha角度时的圆柱体中区域3部分的油量容积
%初始化
```

```

theta=alpha/180*pi;
s=sin(theta);
c=cos(theta);
y1=-1.5*c-4*s; %OXY坐标系中D点对应y1坐标
y2=-1.5*c+4*s; %OXY坐标系中C点对应y2坐标
y3=1.5*c-4*s; %OXY坐标系中B点对应y3坐标
y4=1.5*c+4*s; %OXY坐标系中A点对应y4坐标
%程序
zrect=@(y,x)(1.5^2-(y*c-x*s).^2).^0.5;
xmax=@(y)((4-y*s)/c);
xmin=@(y)((y*c-1.5)/s);
ymin=y3;
for i=1:length(y)
    ymax=y(i);
    Ve3(i)=2*quad2d(zrect,ymin,ymax,xmin,xmax);
End
function Ve=Ve(y,alpha)
%计算y坐标,垂直偏转alpha角度时的圆柱体中的油量容积
%初始化
theta=alpha/180*pi;
s=sin(theta);
c=cos(theta);
y1=-1.5*c-4*s; %OXY坐标系中D点对应y1坐标
y2=-1.5*c+4*s; %OXY坐标系中C点对应y2坐标
y3=1.5*c-4*s; %OXY坐标系中B点对应y3坐标
y4=1.5*c+4*s; %OXY坐标系中A点对应y4坐标
%程序
if y<y1
    Ve=0;
elseif y<=y2
    Ve=Ve1(y,alpha);
elseif y<=y3
    Ve=Ve1(y2,alpha)+Ve2(y,alpha);
elseif y<=y4
    Ve=Ve1(y2,alpha)+Ve2(y3,alpha)+Ve3(y,alpha);
else
    Ve=Ve1(y2,alpha)+Ve2(y3,alpha)+Ve3(y4,alpha);
End
function Vel=Vel(y,alpha)
%计算y坐标,垂直偏转alpha角度时的左球冠体中的油量容积
%初始化
theta=alpha/180*pi;%转换成本弧度
s=sin(theta);
c=cos(theta);

```

```

y1=-1.5*c-4*s;
y2=-1.5*c+4*s;
y3=1.5*c-4*s;
y4=1.5*c+4*s;
r=1.625;
r0=3.375;
%程序
zcircle=@(y,x)((r^2-r0^2-2*r0*(x*c+y*s)-(x.^2+y.^2)).^0.5);
xmax=@(y)((-4-y*s)/c);
xmin=@(y)(-r0*c-(r^2-r0^2-2*r0*s*y-y.^2+r0^2*c^2).^0.5);
ymin=y1;
for i=1:length(y)
    ymax=y(i);
    if ymax<=y3
        Vel(i)=2*quad2d(zcircle,ymin,ymax,xmin,xmax);
    else
        Vel(i)=2*quad2d(zcircle,ymin,y3,xmin,xmax);
    end
end
function Ver=Ver(y,alpha)
%计算y坐标,垂直偏转alpha角度时的右球冠体中的油量容积
%初始化
theta=alpha/180*pi;
s=sin(theta);
c=cos(theta);
y1=-1.5*c-4*s;
y2=-1.5*c+4*s;
y3=1.5*c-4*s;
y4=1.5*c+4*s;
r=1.625;%球冠体对应球的半径
r0=3.375;
%程序
zcircle=@(y,x)((r^2-r0^2+2*r0*(x*c+y*s)-(x.^2+y.^2)).^0.5);
xmax=@(y)(r0*c+(r^2-r0^2-y.^2+2*r0*s*y+r0^2*c^2).^0.5);
xmin=@(y)((4-y*s)/c);
ymin=y2;
for i=1:length(y)
    ymax=y(i);
    if ymax<=y4
        Ver(i)=2*quad2d(zcircle,ymin,ymax,xmin,xmax);
    else
        Ver(i)=2*quad2d(zcircle,ymin,y4,xmin,xmax);
    end
end
end

```

```

function Vh=Vh(t,h)
%已知油浮子测量的油面高度h和倾斜角t(1)、t(2),求油量容积vh
alpha=t(1);
beta=t(2);
if alpha==0
    alpha=0.001;
end
c=cos(alpha/180*pi);
s=sin(alpha/180*pi);
y=(h*cos(beta/180*pi)+(1-cos(beta/180*pi))*1.5)*c-2*s-1.5*c;%将油浮子
高度h转换为y坐标值
Vh=Ve(y,alpha)+Vel(y,alpha)+Ver(y,alpha);%总体积=圆柱体中体积+左球冠体内体
积+右球冠体内体积
Vh=abs(Vh);
function [t,e]=findab(h,V)
%h为油浮子高度矩阵
%V为对应h处的油量容积矩阵
%返回值t=[alpha beta],e为理论值和测量值之间差值的平方和
t=nlinfit(h,V,@Vh,[1,1]);
V1=Vh(t,h);
e=sum((V1-V).^2);

```