

## 2012 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

### 承 诺 书

我们仔细阅读了中国大学生数学建模竞赛的竞赛规则.

我们完全明白, 在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式(包括电话、电子邮件、网上咨询等)与队外的任何人(包括指导教师)研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道, 抄袭别人的成果是违反竞赛规则的, 如果引用别人的成果或其他公开的资料(包括网上查到的资料), 必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺, 严格遵守竞赛规则, 以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为, 我们将受到严肃处理。

我们授权全国大学生数学建模竞赛组委会, 可将我们的论文以任何形式进行公开展示(包括进行网上公示, 在书籍、期刊和其他媒体进行正式或非正式发表等)。

我们参赛选择的题号是(从 A/B/C/D 中选择一项填写):  D 题

我们的参赛报名号为(如果赛区设置报名号的话): \_\_\_\_\_

所属学校(请填写完整的全名):  兰州工业学院

参赛队员(打印并签名): 1.  刘 信

2.  田满裕

3.  刘拴琴

指导教师或指导教师组负责人(打印并签名):  李彦刚 王晓燕

日期:  2012  年  9  月  10  日

---

赛区评阅编号(由赛区组委会评阅前进行编号):

2012 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

编 号 专 用 页

赛区评阅编号（由赛区组委会评阅前进行编号）：

赛区评阅记录（可供赛区评阅时使用）：

评 阅 人										
评 分										
备 注										

全国统一编号（由赛区组委会送交全国前编号）：

全国评阅编号（由全国组委会评阅前进行编号）：

# 机器人避障问题的数学模型

## 摘要

本文解决了机器人避障问题。根据要求在多个静态障碍场景中，实现机器人短时、短距地到达目标点，甚至完成回路过程，在处理躲避障碍物时，我们提出了障碍物顶点最小圆法，完全意义下实现了既安全躲障，又行驶路最短路线。对于最短时间路径的处理，我们在分析障碍物限制下，给出了顶点最小圆半径增大范围，并建立了非线性优化模型，实现了最短时间路径的计算。根据所给数据及场景，具体得到了以下数据基本结果：

### 1.最短线路数据：

最优路线及距离列表

名称	路线	最短距离
OA	$O-v_1-A$	471.26
OB	$O-v_5-v_6-v_8-v_9-v_{11}-B$	853.70
OC	$O-v_4-v_{21}-v_{33}-v_{31}-v_{30}-C$	1088.20
AB	$A-v_9-v_{11}-B$	838.63
BC	$B-v_{13}-v_{14}-v_{15}-v_{17}-v_{18}-C$	701.21
OABCO	$O-v_2-A-v_9-v_{11}-B-v_{13}-v_{14}-v_{15}-v_{17}-v_{18}-v_{30}-v_{31}-v_{34}-v_{23}-v_4-v_4-O$	2497.89

### 2. 从 O 到 A 到达的最短时间及路径数据：

最短到达时间：98.46280 秒

最大顶点圆半径：12.78175 （个单位）， 圆心坐标（80,210）

最短时间路径：O（0,0）— $P_1$ （91.67,204.78）— $P_2$ （75.80,222.07）—A（300,300）

关键词：顶点最小圆

最短路径

障碍

非线性最优

## 一、问题叙述

图1是一个800×800的平面场景图，在原点O(0, 0)点处有一个机器人，它只能在该平面场景范围内活动。图中有12个不同形状的区域是机器人不能与之发生碰撞的障碍物，障碍物的数学描述如下表：

编号	障碍物名称	左下顶点坐标	其它特性描述
1	正方形	(300, 400)	边长200
2	圆形		圆心坐标(550, 450)，半径70
3	平行四边形	(360, 240)	底边长140，左上顶点坐标(400, 330)
4	三角形	(280, 100)	上顶点坐标(345, 210)，右下顶点坐标(410, 100)
5	正方形	(80, 60)	边长150
6	三角形	(60, 300)	上顶点坐标(150, 435)，右下顶点坐标(235, 300)
7	长方形	(0, 470)	长220，宽60
8	平行四边形	(150, 600)	底边长90，左上顶点坐标(180, 680)
9	长方形	(370, 680)	长60，宽120
10	正方形	(540, 600)	边长130
11	正方形	(640, 520)	边长80
12	长方形	(500, 140)	长300，宽60

在图1的平面场景中，障碍物外指定一点为机器人要到达的目标点（要求目标点与障碍物的距离至少超过10个单位）。规定机器人的行走路径由直线段和圆弧组成，其中圆弧是机器人转弯路径。机器人不能折线转弯，转弯路径由与直线路径相切的一段圆弧组成，也可以由两个或多个相切的圆弧路径组成，但每个圆弧的半径最小为10个单位。为了不与障碍物发生碰撞，同时要求机器人行走线路与障碍物间的最近距离为10个单位，否则将发生碰撞，若碰撞发生，则机器人无法完成行走。

机器人直线行走的最大速度为  $v_0 = 5$  个单位/秒。机器人转弯时，最大转弯速度为  $v = v(\rho) = \frac{v_0}{1 + e^{10 - 0.1\rho^2}}$ ，其中  $\rho$  是转弯半径。如果超过该速度，机器人将发生侧

翻，无法完成行走。

请建立机器人从区域中一点到达另一点的避障最短路径和最短时间路径的数学模型。对场景图中4个点O(0, 0)，A(300, 300)，B(100, 700)，C(700, 640)，具体计算：

(1) 机器人从O(0, 0)出发，O→A、O→B、O→C和O→A→B→C→O的最短路径。

(2) 机器人从O(0, 0)出发，到达A的最短时间路径。

注：要给出路径中每段直线段或圆弧的起点和终点坐标、圆弧的圆心坐标以

及机器人行走的总距离和总时间。

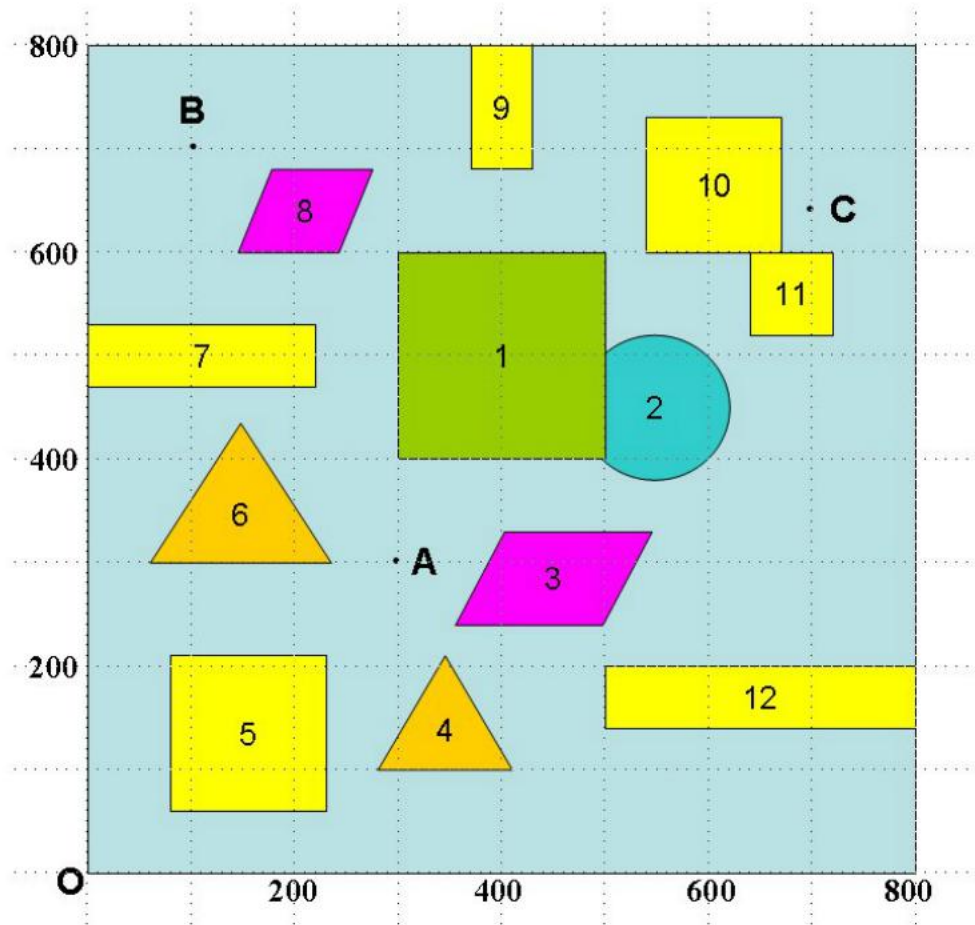


图1 800×800平面场景图

## 二、模型假设与符号说明

### 1、模型假设

- (1) .把机器人看作一个质点，机器人移动相当于质点的运动。
- (2) .机器人在路线行驶过程中，运动速度为匀速运动。即不考虑机器人的启动加速和转弯减速，整个运行速度按转弯最大速度移动。
- (3) .寻找运动路线时对于明显耗时、距离远的路线不再考虑，以便减少计算。
- (4) .计算精度保留小数后两位，结果系程序计算所得，可获得更高精度。

### 2、符号说明

$v_i$ ：表示障碍物形状各顶点 ( $i=1,2,3...n$ )。

$P_i(x_i, y_i)$ ：表示运动路线点顶点处的切点坐标 ( $i=1,2,3...n$ )。

$r_i$ :表示顶点  $i$  处各圆的半径。 $k_i$ ：表示某些直线的斜率。 $\theta$ ：表示圆弧所对应的圆心角。 $S$ ：表示机器人所走路程。 $t$ ：表示机器人经过某段路程所用的时间。



### 三、建立模型

移动机器人路径规划问题是指在有障碍物的工作环境中寻找一条恰当的从给定起点到终点的运动路径，使机器人在运动过程中能安全、无碰撞地绕过所有的障碍物而到达目标点。由问题所给场景图，结合机器人的运动规则：（1）行走路线：机器人的行走路径由直线段和圆弧组成，其中圆弧是机器人转弯路径。机器人不能折线转弯，转弯路径由与直线路径相切的一段圆弧组成，也可以由两个或多个相切的圆弧路径组成，但每个圆弧的半径最小为 10 个单位。（2）碰撞距离：为了不与障碍物发生碰撞，同时要求机器人行走线路与障碍物间的最近距离为 10 个单位，否则将发生碰撞，若碰撞发生，则机器人无法完成行走。

在路线行驶中，要使运动距离最短，最基本的思维规则是：任何两点之间的直线距离最短。因此，若出发点与目标点连线周围 10 个单位内无障碍物，则直接走直线到达目标点距离最短。记机器人出发点坐标  $(x_R, y_R)$ ，目标点坐标为  $(x_T, y_T)$ ，则行走的直线方程为：

$$y = y_R + k(x - x_R) \Leftrightarrow ax + by + c = 0, \quad (1)$$

其中  $a = k, b = -1, c = y_R - kx_R$ ，这里  $k = \frac{y_T - y_R}{x_T - x_R}$  为直线的斜率。若设障碍物上点

$P(x_p, y_p)$ ，则 P 到上述直线的距离由下述公式给出：

$$d = \frac{|ax_p + by_p + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (2)$$

从而，若  $d < 10$ ，机器人走直线可能碰上物体 P，此时 P 点所对应物体应被视为障碍物。一般地，若一个障碍物是某个几何体，通过作出几何体的外接圆半径加 10 的圆，再判定直线与该圆是否有交点来确定几何体是否障碍物。

对于如图 1 所示的场景，障碍物分布密集，如果每个障碍物都做外接圆势必很难寻找到适合的行走路径，即可行路线都几乎找不到，因此需要寻求其它的避障方法。

按图 1 所示场景，为躲避障碍，获得可行路线，我们在处理问题时采用每个障碍物几何体顶点做圆法：即通过对几何体障碍物顶点做最小符合条件的圆（这里为半径 10 单位的圆周）来光滑地由一个路径连接点点过渡到下一个路径连接点。如下图 2 所示。

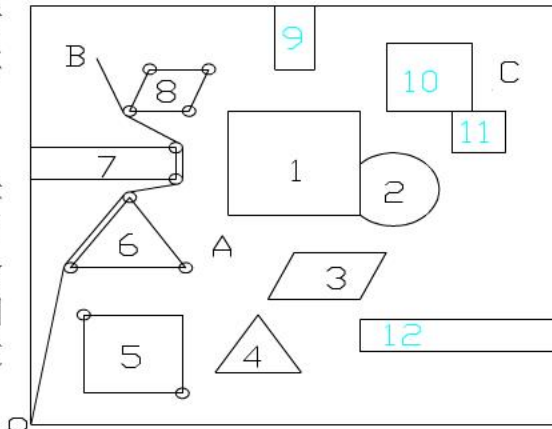


图 2 机器人从 O 到 B 的一条光滑可行路径  
其它可行路线处理方法相同。于是，得到机器人行走路线 O-A，O-B，O-C，O-A-B-C-O 的可行路径由如下图 3，图 4，图 5，图 6 所示。

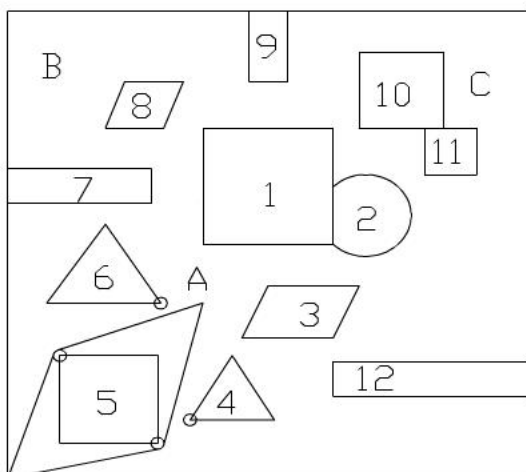


图 3 从 O 到 A 的两条可行路径

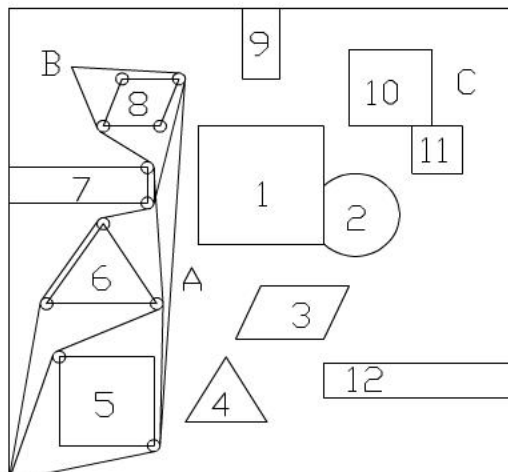


图 4 从 O 到 B 的几条较优化路径

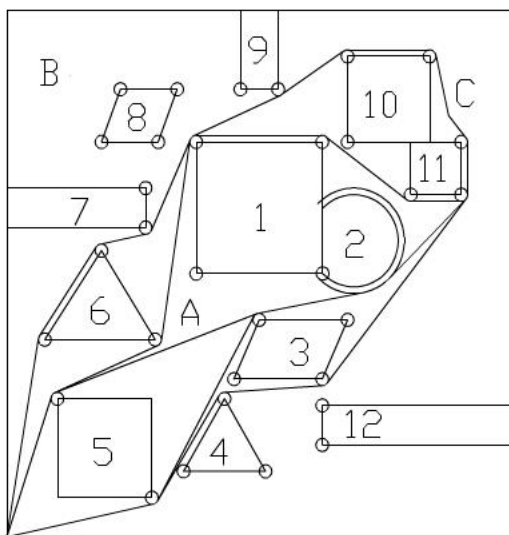


图 6 从 B 到 C 的运动路径

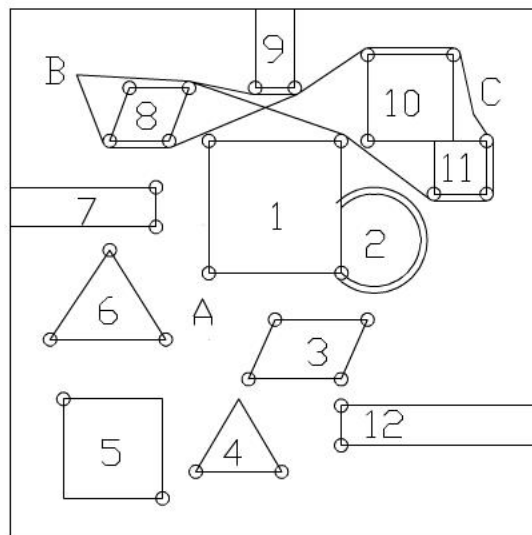


图 5 从 O 到 C 的运动路径

### 1、运动最短路径计算：

注意到两点之间直线距离最短，所以用顶点最小圆处理时既可躲避障碍，又可使转弯行驶路径最短。下面在计算中需要处理几个环节：

1) 点-圆切点计算。如下图 7 所示，记  $O(x_R, y_R)$  为机器人出发点坐标， $P_1(x_1, y_1)$  为障碍物 5 左上角圆周左上切点坐标，则  $x_1, y_1$  应满足：

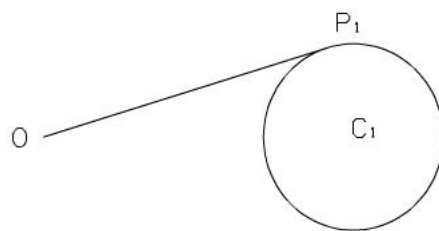


图 7 点圆切

线图

$$\text{在 } P_1 \text{ 直线 } OP_1 \text{ 上: } y_1 - y_R = k(x_1 - x_R) \quad (1)$$

$$P_1 \text{ 在顶点圆上: } (x_1 - x_{c1})^2 + (y_1 - y_{c1})^2 = 10^2 \quad (2)$$

其中  $O_c(x_{c1}, y_{c1})$  为顶点圆坐标。

$P_1$  为圆的切点, 故

$$(x_1 - x_R)(x_1 - x_{c1}) + (y_1 - y_R)(y_1 - y_{c1}) = 0 \quad (3)$$

即向量  $\overrightarrow{OP_1}$  与向量  $\overrightarrow{O_cP_1}$  垂直, 数量积为 0。

联立① ② ③ 可求出未知变量:  $x_1, y_1, k$ 。此方法可用于求出发点 and 到达目标点一端顶点圆的切点坐标。记  $P_2(x_2, y_2)$  为目标点  $A(x_a, y_a)$  向障碍物 5 左上角顶点圆引出切点坐标, 代入已知数据, 得到:

$$\text{出发点: } x_R = y_R = 0, \quad x_{c1} = 80, \quad y_{c1} = 210 \Rightarrow x_1 = 70.05, \quad y_1 = 213.14。$$

$$\text{终点: } x_a = y_a = 300, \quad x_{c1} = 80, \quad y_{c1} = 210 \Rightarrow x_2 = 76.61, \quad y_2 = 219.41。$$

从而由 O 到 A 左上移动路径所经过线路及特定点坐标如下:

路线 1:  $O - P_1 - P_2 - A$

各点坐标依次为:  $O(0, 0), P_1(70.05, 213.14), P_2(76.61, 219.41), A(300, 300)$ 。

同理算得由 O 到 A 右下移动路径所经过线路及特定点坐标如下:

路线 2:  $O - P_3 - P_4 - A$

各点坐标依次为:  $O(0, 0), P_3(70.05, 213.14), P_4(76.61, 219.41), A(300, 300)$ 。

2) 圆-圆切点的计算。若在路径中出现下图 8 所示切线情形, 仍记  $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$  分别为顶点圆  $C_1, C_2$  上的切点坐标, 则切点坐标可由下列关系式联立求得:

$$P_1, P_2 \text{ 共线: } \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k \quad (k \text{ 为 } P_1, P_2 \text{ 直线斜率, 待定}) \quad (1)$$

$$P_1 \text{ 在 } C_1 \text{ 上: } (x_1 - x_{c1})^2 + (y_1 - y_{c1})^2 = r_1^2 \quad (2)$$

$$P_2 \text{ 在 } C_2 \text{ 上: } (x_2 - x_{c2})^2 + (y_2 - y_{c2})^2 = r_2^2 \quad (3)$$



$P_1$  是  $C_1$  的切点，故  $\overrightarrow{O_1P_1} \perp \overrightarrow{P_1P_2}$ ，从而：

$$(x_1 - x_{c1})(x_2 - x_1) + (y_1 - y_{c1})(y_2 - y_1) = 0 \quad (4)$$

$P_2$  是  $C_2$  的切点，故  $\overrightarrow{O_2P_2} \perp \overrightarrow{P_1P_2}$ ，从而：

$$(x_2 - x_{c2})(x_2 - x_1) + (y_2 - y_{c2})(y_2 - y_1) = 0 \quad (5)$$

联立①②③④⑤可解出： $X_1, Y_1, X_2, Y_2, k$ 。

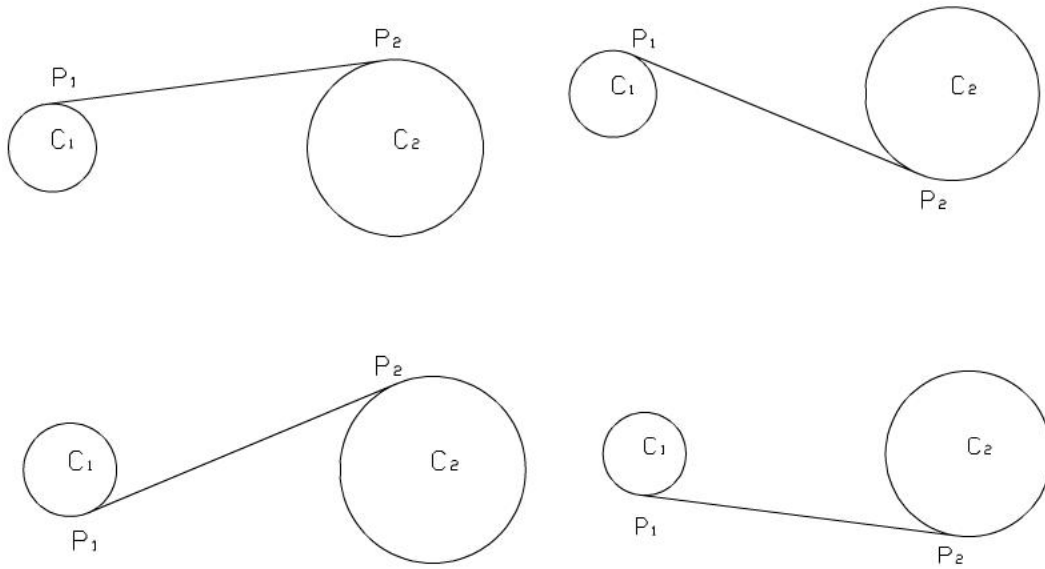


图 8 圆-圆切线图

注：（1）上述公式②③中，对几何体的顶点圆而言， $r_1 = r_2 = 10$ ，但在处理如图 1 中障碍物 2 时，可取其中某一半径为  $r = 80 + 10$ ，计算切点同此方法。

（2）机器人移动路径中  $OB$ ， $OC$ ， $AB$ ， $BC$  等中间连接点两圆切点统一都按此法计算。

**3）距离的计算。**问题要求整个移动的最短路径，而行驶路线只有一些线段和一些圆弧线组成，因而在曲线的计算中分情况逐段计算，求和，可最终求得某一可行路径的总距离。

直线段距离的计算：设  $P_1(x_1, y_1)$ ， $P_2(x_2, y_2)$  为线段上两点，则  $P_1P_2$  的距离为：

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (3)$$

圆弧线段的计算：设  $P_1(x_1, y_1)$ ， $P_2(x_2, y_2)$  为同一圆周一段弧的两个端点，若已知圆的圆心  $O_c(x_{c1}, y_{c1})$ ，半径为  $r$ ，则

$$l = r \cdot \theta \quad (4)$$

其中 $\theta$ 为圆弧所对应的圆心角，由以下公式计算：

$$\cos\theta = \frac{|O_c P_1|^2 + |O_c P_2|^2 - |P_1 P_2|^2}{2|O_c P_1| \cdot |O_c P_2|} = \frac{2r^2 - c^2}{2r^2} \quad (5)$$

这里 $\theta$ 按余弦公式获得， $c = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ 。

## 2、最短移动时间的计算

注意到：时间=路程/速度，由于机器人直线行走的最大速度为 $v_0 = 5$ 个单位/秒。机器人转弯时，最大转弯速度为

$$v = v(\rho) = \frac{v_0}{1 + e^{10 - 0.1\rho^2}}, \text{ 其中 } \rho \text{ 是转弯半径。} \quad (6)$$

如果超过该速度，机器人将发生侧翻，无法完成行走。若假设机器人在运动过程中匀速运动，这样不再考虑运动加减速过程，由于 $v < v_0$ ，因此要获得最短移动时间，则应让 $v$ 尽可能大，接近于 $v_0$ ，由公式（6）可知，运动过程中经过圆弧的转弯半径越大，速度越大，于是为节省时间，需要增大转弯半径 $\rho$ ，然而，按常规： $v < v_0$ ，若在精度要求下，近似达到 $v = v_0$ ，则认为速度不在增大，此时应考虑获得最短路程，因为圆弧越大，可能会使得行走路程变大。综合考虑上述因素，建立下列非线性优化模型：

$$\begin{aligned} \min t &= \frac{s}{v} \\ \begin{cases} s = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + r \cdot \theta + \sqrt{(x_2 - x_a)^2 + (y_2 - y_a)^2} \\ \cos\theta = \frac{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0) + (y_1 - y_0)(y_2 - y_0)}{r^2} \\ (x_1 - x_{c1})^2 + (y_1 - y_{c1})^2 = r^2 \\ (x_2 - x_{c1})^2 + (y_2 - y_{c1})^2 = r^2 \\ v = \frac{v_0}{1 + e^{10 - 0.1r^2}} \\ y_1 = k_1 x, \quad y_2 = y_a + k_2(x_2 - x_a) \\ 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 10 \leq r \leq 55 \\ x_1, y_1, x_2, y_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

上述模型中， $10 \leq r \leq 55$ ，下限 10 为了躲避障碍物应满足的最低要求，那么最大值 55 如何获得呢？其基本原理如下图所示：（右图只要三点 $P_2$ ， $P_3$ ， $A$ 共线，不难理解）

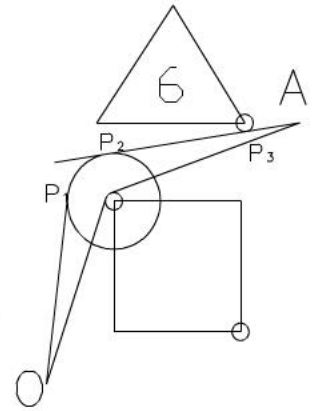


图9

## 四、模型求解

按模型建立过程中所列举计算方法，结合软件编程，对各种情形下的目标点路径进行计算，即可得到各线路行驶最短路径及最短距离。

### 1. 障碍物基本数据汇总：

$v_1(80,60)$  ,  $v_2(80,210)$  ,  $v_3(230,210)$  ,  $v_4(230,60)$  ,  $v_5(60,300)$  ,  $v_6(150,435)$  ,  $v_7(235,300)$  ,  
 $v_8(220,470)$  ,  $v_9(220,530)$  ,  $v_{10}(240,600)$  ,  $v_{11}(150,600)$  ,  $v_{12}(180,680)$  ,  $v_{13}(270,680)$  ,  
 $v_{14}(370,680)$  ,  $v_{15}(430,680)$  ,  $v_{16}(540,600)$  ,  $v_{17}(540,730)$  ,  $v_{18}(670,730)$  ,  $v_{19}(280,100)$  ,  
 $v_{20}(345,210)$  ,  $v_{21}(410,100)$  ,  $v_{22}(360,240)$  ,  $v_{23}(400,330)$  ,  $v_{24}(540,330)$  ,  
 $v_{25}(500,240)$  ,  $v_{26}(300,400)$  ,  $v_{27}(300,600)$  ,  $v_{28}(500,600)$  ,  $v_{29}(640,520)$  ,  
 $v_{30}(720,600)$  ,  $v_{31}(720,520)$  ,  $v_{32}(500,140)$  ,  $v_{33}(500,200)$  ,  $v_{34}(550,450)$  ,

### 2. 列举各种较短的一些行走路线及节点坐标：

(按图 10 所示顶点标注路线，中间每个顶点包含顶点圆的两个切点)：

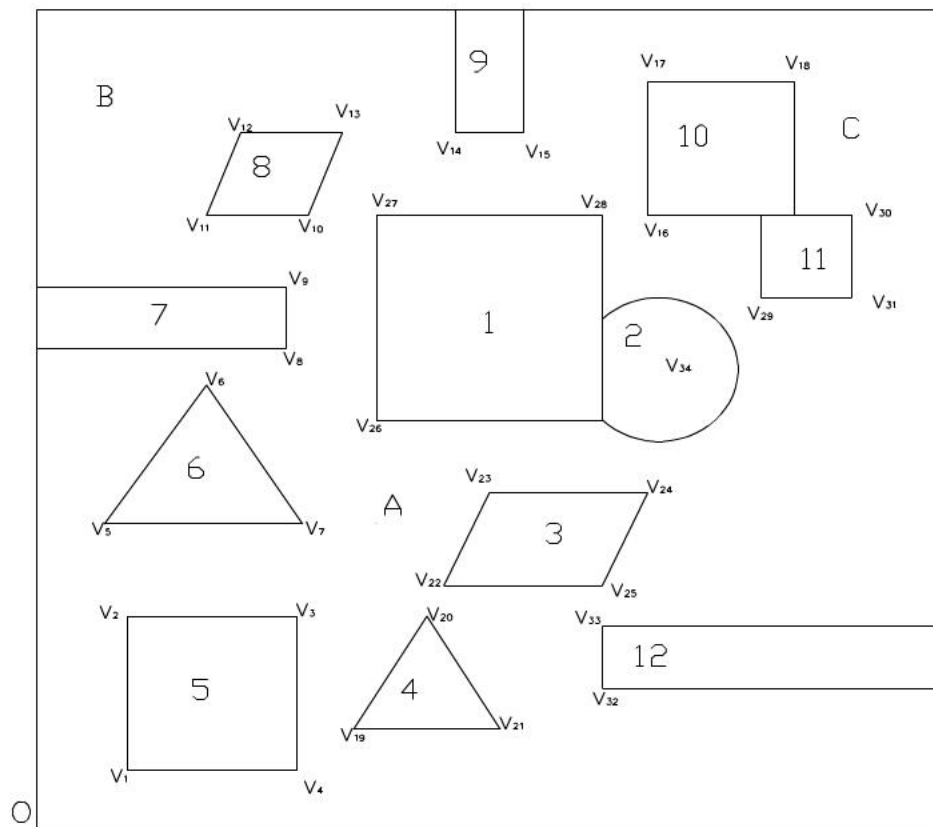


图 10

**OA 路线:**

路线 1:  $O-v_1-A$

坐标为:  $O(0, 0)$ ,  $P_1(70.05, 213.14)$ ,  $P_2(76.61, 219.41)$ ,  $A(300, 300)$ .

总距离 L: 471.26 (个单位)

路线 2:  $O-v_4-A$

坐标为:  $O(0, 0)$ ,  $P_1(232.11, 50.23)$ ,  $P_2(239.70, 57.59)$ ,  $A(300, 300)$ .

总距离 L: 498.64 (个单位)

最短路径为:  $O-v_1-A$ , 最短路径:  $L=471.26$  (个单位)

**OB 路线:**

路线 1:  $O-v_5-v_6-v_8-v_9-v_{11}-B$

坐标为:

$O(0, 0)$ ,  $P_1(50.14, 301.64)$ ,  $P_2(51.68, 305.55)$ ,  $P_3(141.68, 440.55)$ ,

$P_4(147.96, 444.79)$ ,  $P_5(222.04, 460.21)$ ,  $P_6(230, 470)$ ,  $P_7(230, 530)$ ,

$P_8(225.50, 538.33)$ ,  $P_9(144.50, 591.65)$ ,  $P_{10}(140.69, 596.35)$ ,  $B(100, 700)$ 。

总距离 L: 853.70 (个单位)

路线 2:  $O-v_5-v_6-v_8-v_{13}-B$

坐标为:

$O(0, 0)$ ,  $P_1(50.14, 301.64)$ ,  $P_2(51.68, 305.55)$ ,  $P_3(141.68, 440.55)$ ,

$P_4(147.96, 444.79)$ ,  $P_5(222.04, 460.21)$ ,  $P_6(229.73, 467.68)$ ,

$P_7(279.73, 677.68)$ ,  $P_8(270.59, 689.98)$ ,  $B(100, 700)$ .

总距离 L: 971.23 (个单位)

路线 3:  $O-v_2-v_7-v_9-v_{11}-B$

坐标为:

$O(0, 0)$ ,  $P_1(70.51, 213.14)$ ,  $P_2(75.97, 219.15)$ ,  $P_3(239.03, 290.85)$ ,

$P_4$  (244.98, 300.65),  $P_5$  (229.98, 530.65),  $P_6$  (225.50, 538.35),

$P_7$  (144.50, 591.65),  $P_8$  (140.69, 596.35), B(100, 700).

总距离 L: 877.38 (个单位)

路线 4:  $O-v_4-v_7-v_9-v_{11}-B$

坐标为:

O(0, 0),  $P_1$  (232.11, 50.23),  $P_2$  (240.00, 59.79),  $P_3$  (245.00, 299.79),

$P_4$  (244.98, 300.65),  $P_5$  (229.98, 530.65),  $P_6$  (225.50, 538.35),

$P_7$  (144.50, 591.65),  $P_8$  (140.69, 596.35), B(100, 700).

总距离 L: 945.95 (个单位)

路线 5:  $O-v_4-v_{13}-B$

坐标为:

O(0, 0),  $P_1$  (232.11, 50.23),  $P_2$  (239.98, 59.36),  $P_3$  (299.98, 679.36),

$P_4$  (270.59, 689.98), B(100, 700).

总距离 L: 1058.35 (个单位)

最短路径为:  $O-v_5-v_6-v_8-v_9-v_{11}-B$ , 最短路径: L=853.70 (个单位)

### OC 路线:

路线 1:  $O-v_5-v_6-v_8-v_{27}-v_{15}-v_{17}-v_{18}-C$

坐标为:

O(0, 0),  $P_1$  (50.14, 301.64),  $P_2$  (51.68, 305.55),  $P_3$  (141.68, 440.55),

$P_4$  (147.96, 444.79),  $P_5$  (222.04, 460.21),  $P_6$  (229.13, 465.92),

$P_7$  (290.87, 604.08),  $P_8$  (295.92, 609.13),  $P_9$  (434.08, 670.87),

$P_{10}$  (435.59, 671.71),  $P_{11}$  (534.41, 738.29),  $P_{12}$  (540, 740),

$P_{13}$  (670, 740),  $P_{11}$  (679.77, 732.14), C(700, 640).

总距离 L: 1239.82 (个单位)

路线 2:  $O-v_5-v_6-v_{26}-v_{33}-v_{31}-v_{30}-C$

坐标为:

$O(0, 0)$ ,  $P_1(50.14, 301.64)$ ,  $P_2(51.68, 305.55)$ ,  $P_3(141.68, 440.55)$ ,  
 $P_4(153.52, 444.36)$ ,  $P_5(296.48, 390.64)$ ,  $P_6(299.19, 390.03)$ ,  
 $P_7(543.55, 370.26)$ ,  $P_8(660.33, 393.20)$ ,  $P_9(727.04, 512.90)$ ,  
 $P_{10}(730.00, 520.00)$ ,  $P_{11}(730.00, 600.00)$ ,  $P_{12}(727.72, 606.36)$ ,  $C(700, 640)$ .

总距离 L: 1243.67 (个单位)

路线 3:  $O-v_2-v_{23}-v_{34}-v_{31}-v_{30}-C$

坐标为:

$O(0, 0)$ ,  $P_1(70.51, 213.14)$ ,  $P_2(76.49, 219.36)$ ,  $P_3(396.49, 339.36)$ ,  
 $P_4(398.14, 339.83)$ ,  $P_5(564.88, 371.40)$ ,  $P_6(606.33, 393.20)$ ,  
 $P_7(727.04, 512.90)$ ,  $P_8(730.00, 520.00)$ ,  $P_9(730.00, 600)$ ,  
 $P_{10}(727.72, 606.36)$ ,  $C(700, 640)$ .

总距离 L: 1098.35 (个单位)

路线 4:  $O-v_4-v_{23}-v_{34}-v_{31}-v_{30}-C$

坐标为:

$O(0, 0)$ ,  $P_1(232.11, 50.23)$ ,  $P_2(238.78, 55.21)$ ,  $P_3(391.22, 334.79)$ ,  
 $P_4(398.14, 339.83)$ ,  $P_5(564.88, 371.40)$ ,  $P_6(606.33, 393.20)$ ,  
 $P_7(727.04, 512.90)$ ,  $P_8(730.00, 520.00)$ ,  $P_9(730.00, 600.00)$ ,  
 $P_{10}(727.72, 606.37)$ ,  $C(700, 640)$ .

总距离 L: 1094.80 (个单位)

路线 5:  $O-v_4-v_{20}-v_{25}-v_{31}-v_{30}-C$

坐标为:

$O(0, 0)$ ,  $P_1(232.11, 50.23)$ ,  $P_2(238.54, 54.79)$ ,  $P_3(336.46, 215.21)$ ,  
 $P_4(344.36, 219.98)$ ,  $P_5(500.64, 230.02)$ ,  $P_6(507.86, 233.82)$ ,



$P_7$  (727.86, 513.82),  $P_8$  (730, 520),  $P_9$  (730, 600),

$P_{10}$  (727.72, 606.36), C(700, 640).

总距离 L: 1101.36 (个单位)

路线 6: O- $v_4$ - $v_{21}$ - $v_{33}$ - $v_{31}$ - $v_{30}$ -C

坐标为:

O(0, 0),  $P_1$  (232.11, 50.23),  $P_2$  (232.17, 50.24),  $P_3$  (412.17, 90.24),

$P_4$  (418.34, 94.49),  $P_5$  (491.66, 205.51),  $P_6$  (492.06, 206.08),

$P_7$  (727.94, 513.92),  $P_8$  (730.00, 520.00),  $P_9$  (730.00, 660.00),

$P_{10}$  (727.72, 606.36), C (700, 640).

总距离 L: 1088.20

最短路线为: O- $v_4$ - $v_{21}$ - $v_{33}$ - $v_{31}$ - $v_{30}$ -C; 最短距离为: L=1088.20 (个单位)

### AB 路线:

路线 1: A- $v_9$ - $v_{11}$ -B

经过点的坐标依次为: A(300, 300),  $P_1$  (229.57, 532.89),  $P_2$  (225.50, 538.35),

$P_3$  (144.50, 591.65),  $P_4$  (140.69, 596.35),  $P_5$  (222.04, 460.21), B (100, 700).

总距离 L: 838.63 (个单位)

路线 2: A- $v_{26}$ - $v_{13}$ -B

经过点的坐标依次为: A(300, 300),  $P_1$  (290.05, 399.00),  $P_2$  (290.01, 399.64),

$P_3$  (279.99, 680.36),  $P_4$  (270.59, 689.98), B (100, 700).

总距离 L: 871.05

最短路径为: A- $v_9$ - $v_{11}$ -B, L=838.63 (个单位)

### BC 路线:

路线 1: B- $v_{13}$ - $v_{14}$ - $v_{15}$ - $v_{17}$ - $v_{18}$ -C

经过点的坐标依次为: B (100, 700),  $P_1$  (270.59, 689.98),  $P_2$  (272.00, 689.80),

$P_3$  (368, 670.20),  $P_4$  (370, 670, ),  $P_5$  (430, 670),  $P_6$  (435.59, 671.71),  $P_7$  (534.41, 738.29),  $P_8$  (540, 740),  $P_9$  (640, 740),  $P_{10}$  (679.77, 732.14), C (700, 640).

总距离 L: 701.21 (个单位)

路线 2: B- $v_{11}$ -- $v_{10}$   $v_{15}$ - $v_{17}$ - $v_{18}$ -C

经过点的坐标依次为: B (100, 700),  $P_1$  (140.69, 596.35),  $P_2$  (150, 590),  $P_3$  (240, 590),  $P_4$  (243.88, 590.78),  $P_5$  (433.88, 670.78),  $P_6$  (435.59, 671.71),  $P_7$  (534.41, 738.29),  $P_8$  (540, 740),  $P_9$  (670, 740),  $P_{10}$  (679.77, 732.14), C (700, 640).

总距离 L: 788.39 (个单位)

路线 3: B- $v_{13}$ -- $v_{28}$   $v_{29}$ - $v_{31}$ - $v_{30}$ -C

经过点的坐标依次为: B (100, 700),  $P_1$  (270.59, 689.98),  $P_2$  (273.29, 689.44),  $P_3$  (503.29, 609.44),  $P_4$  (506, 608),  $P_5$  (634, 512),  $P_6$  (640, 510),  $P_7$  (720, 510),  $P_8$  (730, 520),  $P_9$  (730, 600),  $P_{10}$  (727.72, 597.64), C (700, 640).

总距离 L: 816.31

最短路径为: B- $v_{13}$ - $v_{14}$ - $v_{15}$ - $v_{17}$ - $v_{18}$ -C, L=701.21 (个单位)

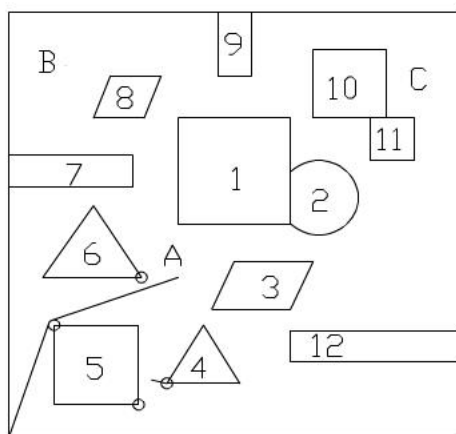
### **OABCO 路线:**

经过的点坐标依次为: O (0,0),  $P_1$  (70.51,213.14),  $P_2$  (76.88, 219.50),  $P_3$  (293.12,290.50),  $P_4$  (299.57,302.91),  $P_5$  (229.57,532.91),  $P_6$  (225.50,538.35),  $P_7$  (144.50,591.65),  $P_8$  (140.72,596.29),  $P_9$  (100.72,696.29.),  $P_{10}$  (111.24,709.92),  $P_{11}$  (271.24,689.92),  $P_{12}$  (272.00,689.80),  $P_{13}$  (368.00,670.20),  $P_{14}$  (370.00,670.00),  $P_{15}$  (430.00, 670.00),  $P_{16}$  (435.59,671.71),  $P_{17}$  (534.41, 738.29),  $P_{18}$  (540.00,740.00),  $P_{19}$  (670,740),  $P_{20}$  (679.14,734.06),  $P_{21}$  (700,637),  $P_{22}$  (719.70,642.43),  $P_{23}$  (729.70,602.43),  $P_{24}$  (730,600),  $P_{25}$  (730,520),  $P_{26}$  (727.94,513.92),  $P_{27}$

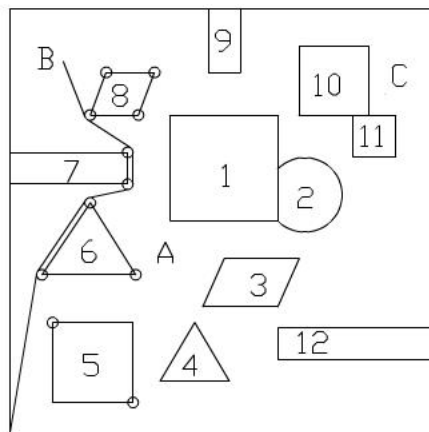
$(492.06, 206.08)$ ,  $P_{28} (491.66, 205.51)$ ,  $P_{29} (418.34, 94.49)$ ,  $P_{30} (412.17, 90.24)$ ,

$P_{31} (232.17, 50.24)$ ,  $P_{32} (232.11, 50.23)$ ,  $O (0,0)$  .

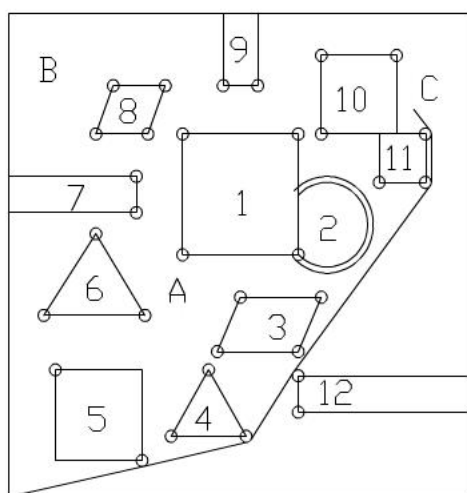
最短路径行驶路线在场景图中具体如下各图所示。



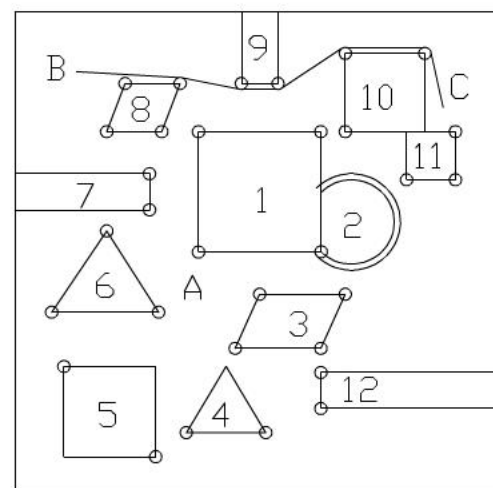
从 O 到 A 的可行路线



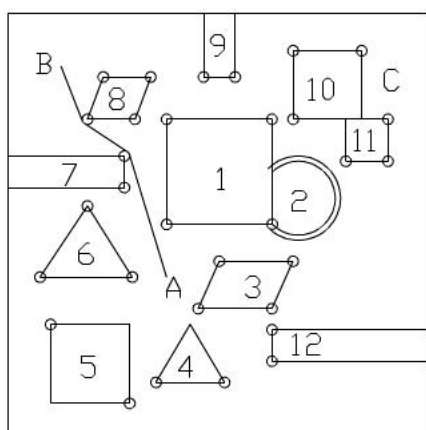
从 O 到 B 的可行路线



从 B 到 C 的可行路线



从 O 到 C 的可行路线



### 3. 最短移动速度求解。

利用非线性规划求解 Lingo 软件计算非线性优化模型，得到获得最大转弯半径为 **12.78** (个单位)，从 O 到 A 沿左上角路线最短移动时间为

**98.46 秒**

具体行驶路线节点为：

$O(0,0) \rightarrow P_1(91.67, 204.78) \rightarrow P_2(75.80, 222.07) \rightarrow A(300, 300)$

行驶转弯速度  $v = 4.99$  个单位/秒。

#### 4. 最优路线汇总：

最优路线表

名称	路线	最短距离
OA	$O-v_1-A$	471.26
OB	$O-v_5-v_6-v_8-v_9-v_{11}-B$	853.70
OC	$O-v_4-v_{21}-v_{33}-v_{31}-v_{30}-C$	1088.20
AB	$A-v_9-v_{11}-B$	838.63
BC	$B-v_{13}-v_{14}-v_{15}-v_{17}-v_{18}-C$	701.21
OABCO	$O-v_2-A-v_9-v_{11}-B-v_{13}-v_{14}-v_{15}-v_{17}-v_{18}-v_{30}-v_{31}-v_{34}-v_{23}-v_4-v_4-O$	2497.89

### 五、模型分析及推广

对机器人路径规划的研究,世界各国的专家学者们提出了许多不同的路径规划方法,主要可分为全局路径和局部路径规划方法。全局路径规划方法有位形空间法、广义锥方法、顶点图像法、栅格划归法;局部路径规划方法主要有人工势场法。这些方法都各有优缺点。

本文针对多障碍问题提出了顶点最小圆法,优点:(1)实现了静态障碍下机器人的安全移动。(2)找到了到各目标点全局最短路径。(3)基本理论涉及简单的几何问题及其计算,可操作性强,容易实现。缺点:整个过程我们按匀速运动处理运动速度,对机器人的启动加速,减速停止都没有详尽的考虑。

实际应用上,可考虑以下问题:

厂房间机器人搬运。对于移动搬运机器人,顶点最小圆方法是一种可行而且实用的方法。首先,机器人及障碍物的位置可以实时测得,且障碍物一般为固定不动;其次,障碍物数量固定,形状大小可预知;再次,搬运的效率要求机器人的行走路径为最短,而且走直线比走曲线更能讲究效率。当然,其它方面的应用还待深入的开发,我们拭目以待!

#### 参考文献

- 【1】 周杏鹏.传感器与检测技术.北京:清华大学出版社,2010.
- 【2】 (美) 理查德.摩雷. (中) 李泽湘. (美) 夏恩卡. 萨思特里机器人操作的数学导论.北京:机械工业出版社,2007.
- 【3】 吴翔,吴孟达,成礼智.数学建模的理论与实践.长沙:国防科技大学出版社,1999.
- 【4】 殷剑宏,吴开亚.图论及其算法.合肥:中国科学技术大学出版社,2003.
- 【5】 李胡锡.Matlab 循序渐进.上海:上海交通大学出版社,1997.
- 【6】 王家文.MATLAB7.0 图形图像处理.北京:国防工业出版社,2006.
- 【7】 叶湘滨 熊飞丽 张文娜 罗武胜. 传感器与测试技术. 国防工业出版社, 2007.

## 附录

附录一：模型一的 maple 部分程序如下：

```
> restart:
> with(plots):
Warning, the name changecoords has been redefined

>
xR:=0:yR:=0:xA:=300:yA:=300:xB:=100:yB:=700:xC:=700:yC:=640:r:=10:
> btanpoint:=proc(x0,y0,xc,yc)
    global X,Y,K,Q;
    local P;

    P:=solve({Y=y0+K*(X-x0), (X-xc)^2+(Y-yc)^2=r^2, (X-xc)+K*(Y-yc)=0},{K,X,Y});
    Q:=evalf(allvalues(P));
    return Q;
end proc:
mtanpoint:=proc(xc1,yc1,xc2,yc2)
    global X1,Y1,X2,Y2,K,Q;
    local P;
    if xc1<>xc2 then

        P:=solve({Y2-Y1=K*(X2-X1), (X1-xc1)^2+(Y1-yc1)^2=r^2,
        (X2-xc2)^2+(Y2-yc2)^2=r^2, (X1-xc1)+K*(Y1-yc1)=0, (X2-xc2)+K*(Y2-yc2)=0},{K,X1,Y1,X2,Y2});
        Q:=map(evalf@allvalues,[P]);
        return Q;
    else
        P:=solve({X1=X2, (X1-xc1)^2+(Y1-yc1)^2=r^2,
        (X2-xc2)^2+(Y2-yc2)^2=r^2, (X1-xc1)*(X2-X1)+(Y1-yc1)*(Y2-Y1)=0, (X2-xc2)*(X2-X1)+(Y2-yc2)*(Y2-Y1)=0},{K,X1,Y1,X2,Y2});
        Q:=map(evalf@allvalues,[P]);
        return Q;
    fi:
end proc:
ctanpoint:=proc(xc1,yc1,xc2,yc2,a,b)
    global X1,Y1,X2,Y2,K,Q;
    local P;
    if xc1<>xc2 then
```



```

P:=solve({Y2-Y1=K*(X2-X1), (X1-xc1)^2+(Y1-yc1)^2=a^2,
(X2-xc2)^2+(Y2-yc2)^2=b^2, (X1-xc1)+K*(Y1-yc1)=0, (X2-xc2)+
K*(Y2-yc2)=0},{K,X1,Y1,X2,Y2});
    Q:=map(evalf@allvalues,[P]);
    return Q;
else
    P:=solve({X1=X2, (X1-xc1)^2+(Y1-yc1)^2=a^2,
(X2-xc2)^2+(Y2-yc2)^2=b^2, (X1-xc1)*(X2-X1)+(Y1-yc1)*(Y2-Y
1)=0, (X2-xc2)*(X2-X1)+(Y2-yc2)*(Y2-Y1)=0},{K,X1,Y1,X2,Y2}
);
    Q:=map(evalf@allvalues,[P]);
    return Q;
fi:
end proc:
line_dist:=proc(x0,y0,xt,yt)
    local d;
    d:=sqrt((x0-xt)^2+(y0-yt)^2);
    return evalf(d);
end proc:
arc_dist:=proc(x0,y0,xt,yt)
    local a,b,c,cth,th,d;
    a:=10;b:=10;
    c:=sqrt((x0-xt)^2+(y0-yt)^2);
    cth:=(a^2+b^2-c^2)/(2*a*b);
    th:=evalf(abs(arccos(cth)));
    d:=10*th;
    return d;
end proc:

pline:=proc(x0,y0,xt,yt)
    plot([[x0,y0],[xt,yt]]);
end proc:
parc:=proc(xc,yc)

implicitplot((x-xc)^2+(y-yc)^2=100,x=xc-10..xc+10,y=yc-10
..yc+10):
    end proc:

```

OC 的一路线程序:

```

>
xx1:=80:yy1:=210:xx2:=400:yy2:=330:xx3:=550:yy3:=450:xx4:
=720:yy4:=520:xx5:=720:yy5:=600:
btanpoint(xR,yR,xx1,yy1):Q;
x1:=subs(Q[1],X);y1:=subs(Q[1],Y);

```

```

L1:=line_dist(xR,yR,x1,y1):

mtanpoint(xx1,yy1,xx2,yy2):Q;
x2:=subs(Q[3],X1);y2:=subs(Q[3],Y1);x3:=subs(Q[3],X2);y3:=
=subs(Q[3],Y2);
L2:=arc_dist(x1,y1,x2,y2):L3:=line_dist(x2,y2,x3,y3):

ctanpoint(xx2,yy2,xx3,yy3,10,80):Q;
x4:=subs(Q[2],X1);y4:=subs(Q[2],Y1);x5:=subs(Q[2],X2);y5:=
=subs(Q[2],Y2);
L4:=arc_dist(x3,y3,x4,y4):L5:=line_dist(x4,y4,x5,y5):

ctanpoint(xx3,yy3,xx4,yy4,80,10):Q;
x6:=subs(Q[2],X1);y6:=subs(Q[2],Y1);x7:=subs(Q[2],X2);y7:=
=subs(Q[2],Y2);
L6:=arc_dist(x5,y5,x6,y6):L7:=line_dist(x6,y6,x7,y7):

mtanpoint(xx4,yy4,xx5,yy5):Q;
x8:=subs(Q[2],X1);y8:=subs(Q[2],Y1);x9:=subs(Q[2],X2);y9:=
=subs(Q[2],Y2);
L8:=arc_dist(x7,y7,x8,y8):L9:=line_dist(x8,y8,x9,y9):

btanpoint(xC,yC,xx5,yy5):Q;
x10:=subs(Q[1],X);y10:=subs(Q[1],Y);
L10:=arc_dist(x9,y9,x10,y10):L11:=line_dist(x10,y10,xC,yC
):
L:=evalf(L1+L2+L3+L4+L5+L6+L7+L8+L9+L10+L11);
f1:=plot([[xR,yR],[x1,y1]]):
f2:=implicitplot((x-xx1)^2+(y-yy1)^2=100,x=xx1-10..xx1+10
,y=yy1-10..yy1+10):
f3:=plot([[x2,y2],[x3,y3]]):
f4:=implicitplot((x-xx2)^2+(y-yy2)^2=100,x=xx2-10..xx2+10
,y=yy2-10..yy2+10):
f5:=plot([[x4,y4],[x5,y5]]):
f6:=implicitplot((x-xx3)^2+(y-yy3)^2=6400,x=xx3-80..xx3+8
0,y=yy3-80..yy3+80):
f7:=plot([[x6,y6],[x7,y7]]):
f8:=implicitplot((x-xx4)^2+(y-yy4)^2=100,x=xx4-10..xx4+10
,y=yy4-10..yy4+10):
f9:=plot([[x8,y8],[x9,y9]]):
f10:=implicitplot((x-xx5)^2+(y-yy5)^2=100,x=xx5-10..xx5+1
0,y=yy5-10..yy5+10):
f11:=plot([[x10,y10],[xC,yC]]):

```

```
display({f1,f2,f3,f4,f5,f6,f7,f8,f9,f10,f11});
```

模型二的 lingo 程序如下:

```
model:
```

```
data:
```

```
    x0=80;y0=210;v0=5;
```

```
enddata
```

```
min=(L1+L2+L3)/v;
```

```
y1=k1*x1;(x1-x0)^2+(y1-y0)^2=p^2;(x1-x0)+k1*(y1-y0)=0;
```

```
y2=300+k2*(x2-300);(x2-x0)^2+(y2-y0)^2=p^2;(x2-x0)+k2*(y2-y0)=0;
```

```
L1=(x1^2+y1^2)^(1/2);L2=p*theta;L3=((x2-300)^2+(y2-300)^2)^(1/2);
```

```
@cos(theta)=(x1-x0)*(x2-x0)+(y1-y0)*(y2-y0)/p^2;
```

```
!@free(k1);!@free(k2);
```

```
!L=L1+L2+L3;
```

```
v=v0/(1+@exp(10-0.1*p^2));
```

```
@bnd(10,p,55);
```

```
@bnd(0,theta,3.142);
```

```
end
```