

گزارش کار تمرین شماره ۷

ارمیا اعتمادی بروجنی

مقدمه

در این سری تمرین الگوریتم متروپلیس را برای تولید نمونه از توزیع نرمال بررسی می‌کنیم. کد این سری تمرین با زبان زیبا و کاربردی Lisp زده شده.

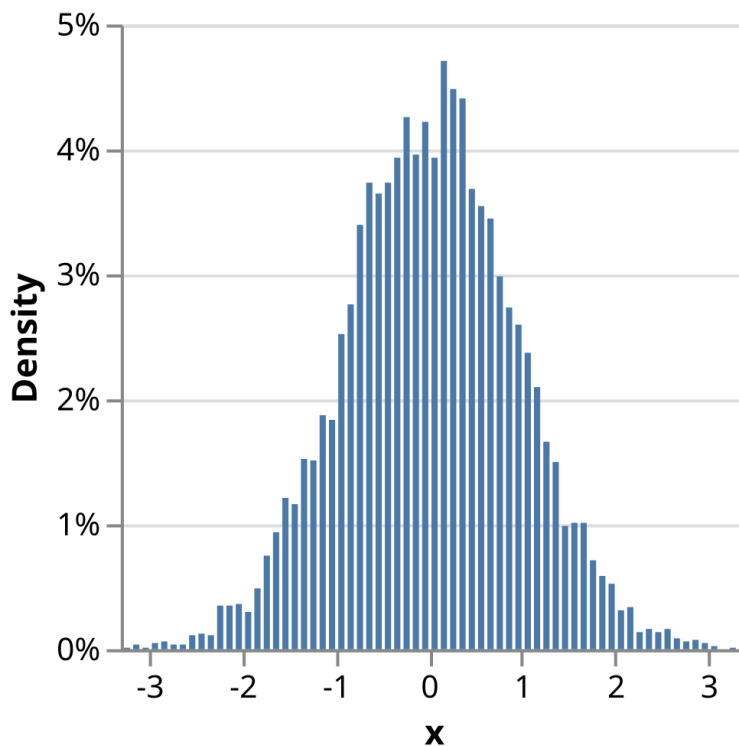
اعداد رندوم و الگوریتم متروپلیس

برای الگوریتم متروپلیس نیاز به اعداد تصادفی خوب داریم. برای اینکار ابتدا تابع `make-random-state` را صدا می‌زنیم تا بذر اولیه جدیدی به دست آوریم و سپس آن را برای کاتوره گر تنظیم می‌کنیم. همچنین از ابتدا تابع چگالی احتمال مربوط به توزیع نرمال را درون شی `normal-dist` میریزیم تا در ادامه بتوانیم آن را فراخوانی کنیم. این تابع توزیع درون کتابخانه `LispStat` موجود است که پیشتر فراخوانده شده. حال تابع متروپلیس را تعریف می‌کنیم. این تابع به عنوان آرگومان تابع توزیع، حداکثر طول قدم (دلتا) و تعداد تلاش‌ها برای قدم زدن را دریافت می‌کند. سپس فرایند قدم زدن درون یک حلقه آغاز می‌شود که مشابه الگوریتم ارائه شده در کتاب است. قدم‌های تصادفی به طول حداکثر دلتا برداشته شده و به احتمال نسبی تابع توزیع قبول می‌شوند. در نهایت آرایه مکان‌های قدم‌زن و تعداد قدم‌ها به عنوان خروجی پس داده می‌شود.

نتیجه الگوریتم متروپلیس

درون کد پس از تعریف تابع خودهمبستگی (که جلوتر به آن می‌پردازیم)، الگوریتم متروپلیس با طول دلتای ۱ اجرا شده و هیستوگرام آرایه مکان قدم‌زن در شکل ۱ به نمایش درآمده است.

Metropolis Algorithm for Normal Distribution



شکل ۱: هیستوگرام توزیع مکان قدم زن متروپلیس پس از ۱۰۰۰۰ قدم

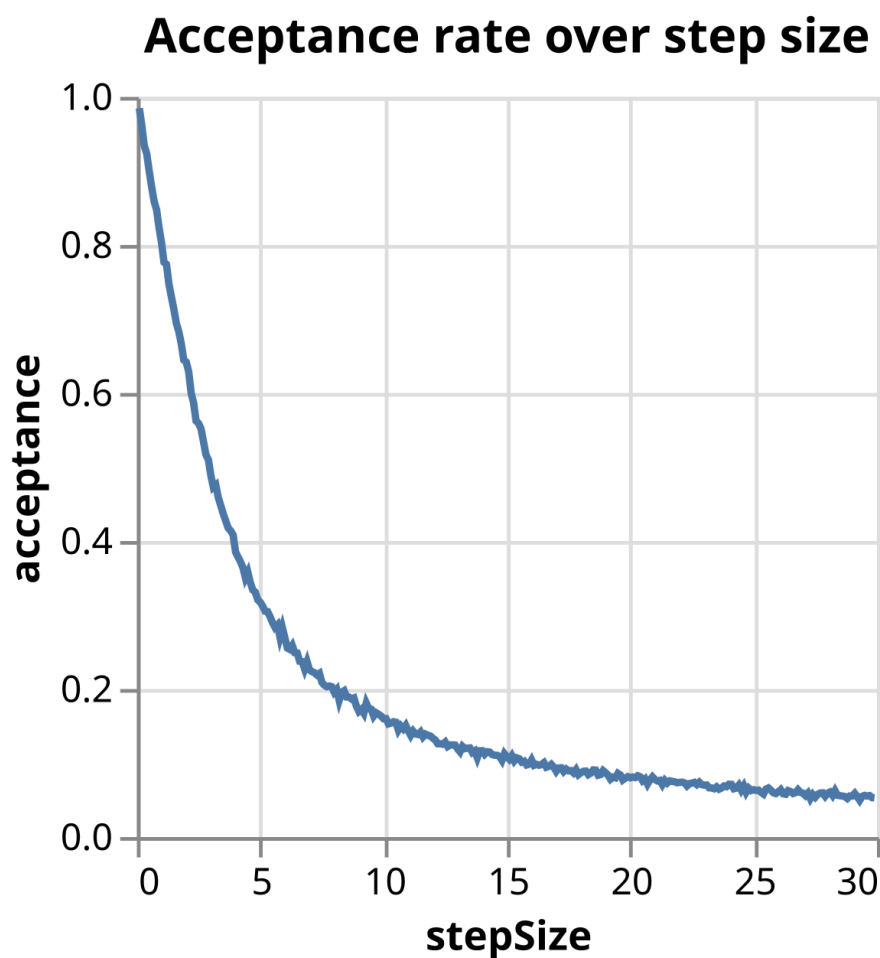
توزیع به دست آمده شکل مشابه توزیع نرمال دارد که مطابق انتظار است.

نرخ قبولی و طول قدم

در این بخش ارتباط نرخ قبولی و طول قدم را بررسی می‌کنیم. برای این کار با اجرای یک حلقه روی مقادیر مختلف طول قدم، الگوریتم متروپلیس را اجرا کرده و نرخ قبولی را محاسبه می‌کنیم. نمودار به دست آمده برای نرخ قبولی برحسب طول قدم در شکل ۲ به نمایش درآمده. طبق انتظار فرم نمایی قابل مشاهده است. همچنین درون حلقه مقادیر مناسب نرخ قبولی را برحسب طول قدم پرینت می‌کنیم. این مقادیر در جدولی آورده شده‌اند.

Step Length	0.5	1.0	1.6	2.2	2.9	3.9	5.2	7.8	15.5
Acceptance Rate	0.9025	0.8052	0.7024	0.598	0.5031	0.403	0.2992	0.1995	0.1069

جدول ۱: مقادیر نرخ قبولی بر حسب طول قدم

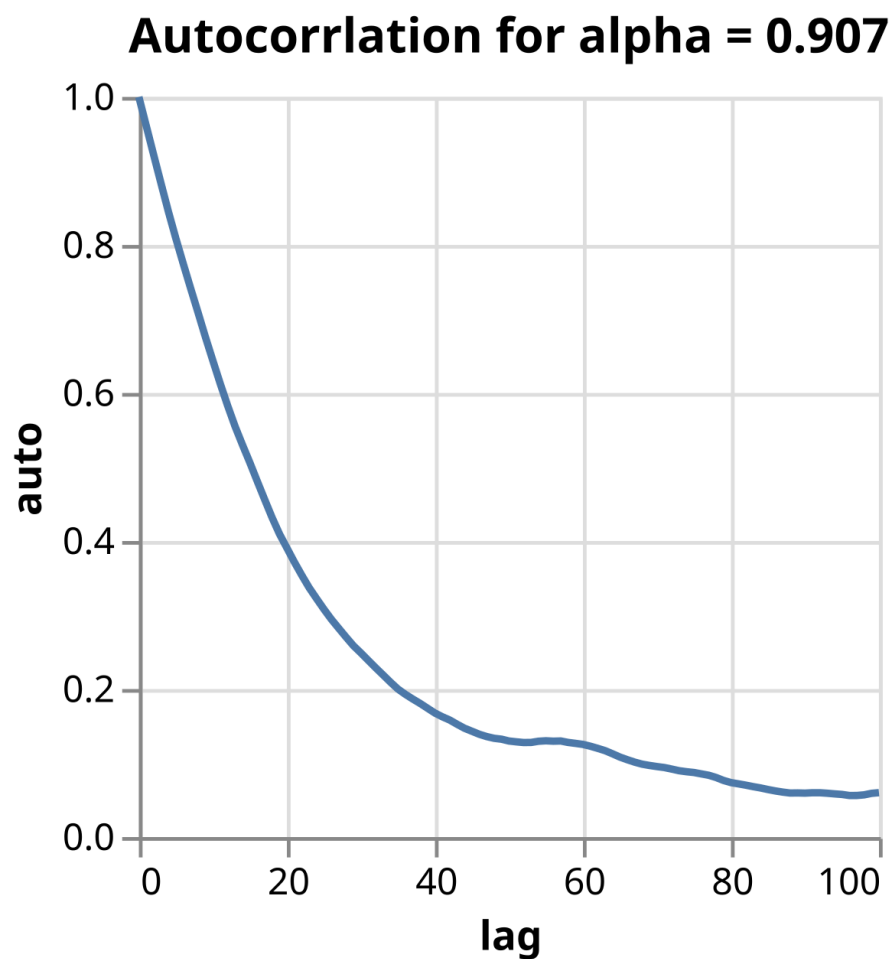


شکل ۲: نمودار نرخ قبولی بر حسب طول قدم

خودهمبستگی

یک معیار خوب عملکرد مولد اعداد تصادفی تابع خود همبستگی است. تابع همبستگی را به کمک تعریف تابع `auto-` `COF` محاسبه می‌کنیم. به این صورت که درون یک حلقه میانگین ضرب فاصله از میانگین اعضای آرایه و فاصله از

میانگین اعضای همان آرایه انتقال یافته را حساب می‌کنیم. سپس این عدد را بر واریانس آرایه تقسیم می‌کنیم که همان خودهمبستگی حاصل است. تابع خودهمبستگی برای یک نرخ قبولی خاص در شکل ۳ رسم شده است.



شکل ۳: نمودار خودهمبستگی بر حسب لگ برای نرخ قبولی حدود 0.9

طبق انتظار خودهمبستگی به صورت نمایی افت کرده و سپس حول صفر نوسان تصادفی دارد. برای به دست آوردن طول همبستگی، اولین نقطه‌ای که اندازه این تابع کمتر از $\frac{1}{e}$ می‌شود را پیدا می‌کنیم. مقادیر به دست آمده در جدول به نمایش در آمده‌اند.

طبق انتظار برای نرخ‌های قبولی کمتر افت نمایی خودهمبستگی شدیدتر است و در نتیجه طول همبستگی کمتر است.

Acceptance Rate	0.9025	0.8052	0.7024	0.598	0.5031	0.403	0.2992	0.1995	0.1069
Correlation Length	24	6	3	2	2	2	2	2	2

جدول ۲: مقادیر طول همبستگی بر حسب نرخ قبولی