

## گزارش کار تمرین شماره ۶

ارمیا اعتمادی بروجنی

### مقدمه

در این سری تمرین تولید اعداد تصادفی و استفاده از آنها در انتگرال گیری را بررسی می کنیم. کد این سری تمرین با زبان زیبا و کاربردی Python زده شده.

### سوال اول

تولید آرایه ای از اعداد تصادفی با ماژول random از کتابخانه numpy بسیار ساده است. یک آرایه ۲۰۰۰۰۰ تایی از اعداد تصادفی بین ۱ تا ۱۰ را تولید می کنیم. سپس به کمک دستور hist از کتابخانه matplotlib هیستوگرام اعداد به دست آمده را می کشیم. مطابق انتظار داده ها از توزیع یکنواخت پیروی می کنند. همچنین انحراف معیار اعداد از توزیع یکنواخت قابل محاسبه است که انتظار داریم رفتاری معکوس جذر تعداد اعداد باشد.

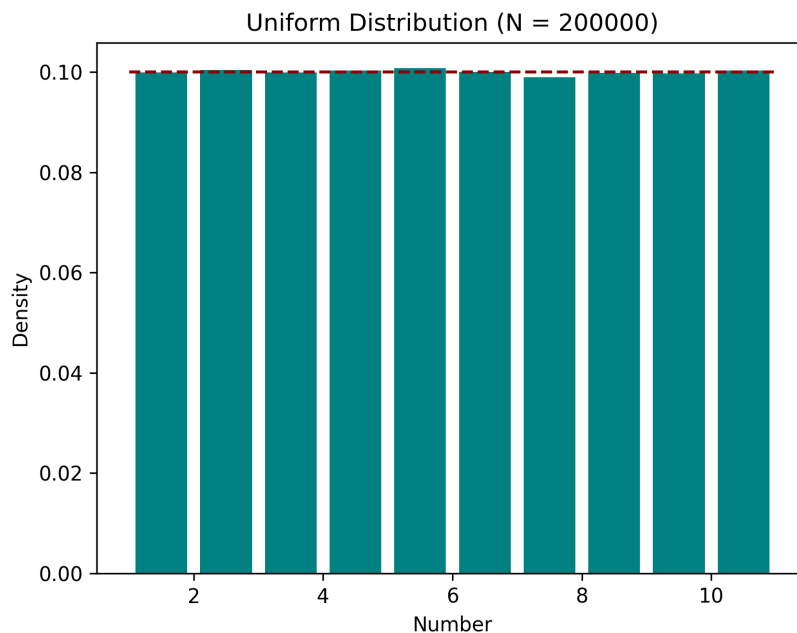
شباهت این تمرین با مسئله ولنشست در واقع این است که هیستوگرام رسم شده در واقع همان ارتفاع خانه ها در مسئله ولنشست ساده است. پس انحراف معیار در واقع همان ناهموازی است که طبق انتظار با نمای  $\frac{1}{2}$  رشد می کند.

### سوال دوم

در این سوال همبستگی میان اعداد در دنباله تصادفی تولید شده را بررسی می کنیم. برای این کار اعدادی که بعد از عدد ۴ می آیند را بررسی کرده و دنباله متفاوتی از آنها می سازیم. این کار به سادگی با قرار دادن شرط لازم درون براکت بعد از آرایه قابل انجام است و آرایه به اصطلاح توسط شرط داده شده mask می شود. حال توزیع این اعداد را بررسی می کنیم که طبق انتظار مجدداً یکنواخت است و همبستگی مشاهده نمی شود.

### سوال سوم

در این سوال قضیه حد مرکزی را بررسی می کنیم.

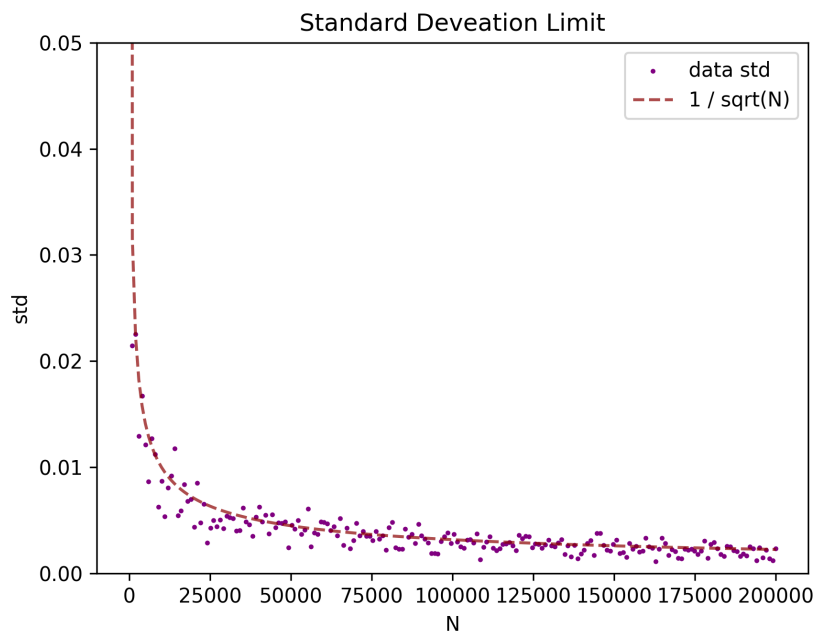


شکل ۱: توزیع اعداد تصادفی بین ۱ تا ۱۰

طبق این قضیه، توزیع جمع چندین متغیر تصادفی هم توزیع مستقل به توزیع نرمال میل می کند. این کار برای ۵، ۱۰، ۱۰۰ و ۱۰۰۰ متغیر تصادفی به دفعات متعدد تکرار شده و نتایج به دست آمده در هیستوگرام به نمایش گذاشته شده اند. همچنین یک توزیع نرمال به میانگین و انحراف معیار مورد انتظار رسم شده تا صحت قضیه قابل بررسی باشد. درواقع این همان ولگشت ساده در یک بعد است زیرا متغیر یکنواخت همان قدم قدم زن است و جمع آن همان مکان نهایی قدم زن.

## سوال چهارم

در این قسمت سعی داریم از مولد اعداد تصادفی یکنواخت به اعداد تصادفی از توزیع دلخواهی برسیم. این کار به کمک واریانس تابع توزیع تجمعی قابل وصول است. در اینجا توزیع هدف توزیع نرمال است که محاسبات مربوطه آن در درسنامه انجام شده است. در واقع در این روش، دو عدد تصادفی نرمال به کمک مختصات قطبی به دست می آیند. یکی از این دو توزیع در ادامه رسم شده اند.



شکل ۲: انحراف معیار توزیع قسمت ۱ بر حسب تعداد اعداد

## سوال پنجم

در این قسمت قصد داریم انتگرال یک تابع را به کمک نمونه گیری تصادفی محاسبه کنیم. این کار را به دو روش ساده و هوشمند انجام می‌دهیم. برای روش هوشمند نیاز به مولد اعداد تصادفی با توزیع نمایی داریم پس ابتدا باید به روش سوال قبل این مولد را بسازیم. محاسبه واریانس تابع توزیع تجمعی در ادامه آورده شده.

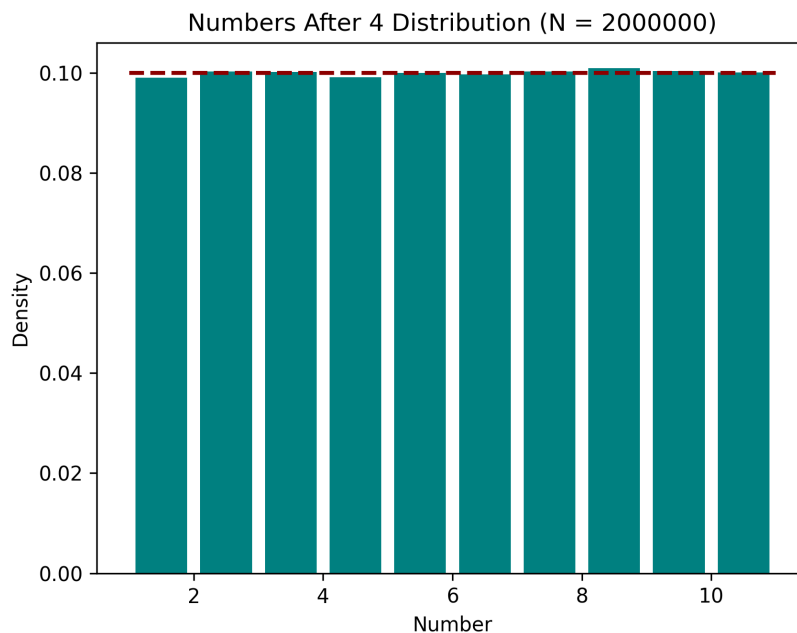
$$g(y) = e^{-y} \quad (۱)$$

$$G(y) = \int_0^y e^{-t} dt = 1 - e^{-y} = x \quad (۲)$$

$$y = -\ln(1 - x) \quad (۳)$$

می‌توانیم با این مولد اعداد تصادفی تولید کنیم و توزیع نمایی را روی هیستوگرام بررسی کنیم. حال می‌توانیم به کمک نمونه گیری ساده و هوشمند انتگرال مورد نظر را محاسبه کنیم. مقدار حقیقی انتگرال طبق برنامه WolframAlpha برابر با  $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(2) \approx 0.882081390762421\dots$  است.

نتیجه الگوریتم های ساده و هوشمند به ازای تعداد نمونه گیری های متفاوت رسم شده. می‌بینیم که در حد های بالا



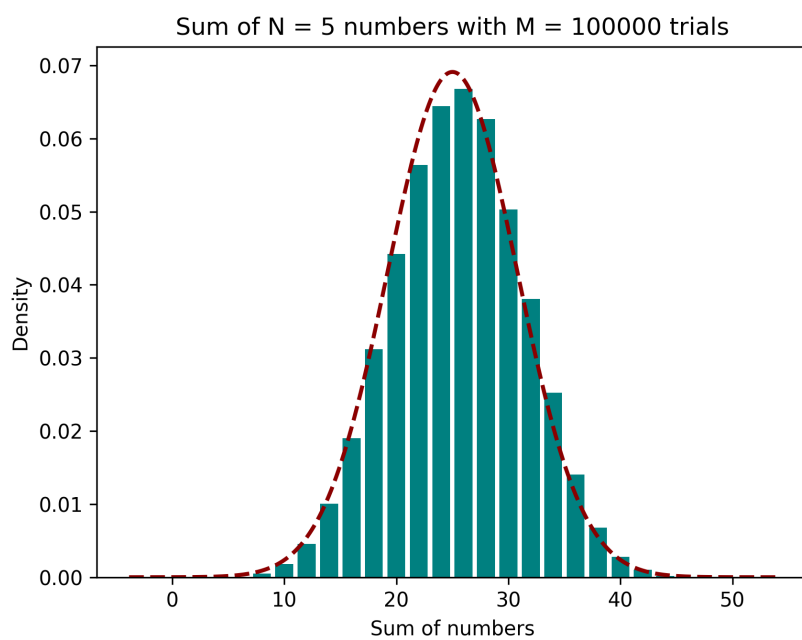
شکل ۳: توزیع اعداد بعد از ۴

نتیجه بسیار به عدد حقیقی نزدیک است اما دو نکته بسیار مشهود است. یکی اینکه سرعت نزدیک شدن الگوریتم هوشمند بسیار بیشتر است و دوم اینکه بنظر می‌رسد مقدار به دست آمده نمی‌تواند بیشتر از مقداری به مقدار واقعی نزدیک شود که بنظر ریشه در ارورهای گرد کردن در محاسبات کامپیوتری است. البته این خطاها با میانگین‌گیری تا حدی قابل رفع هستند.

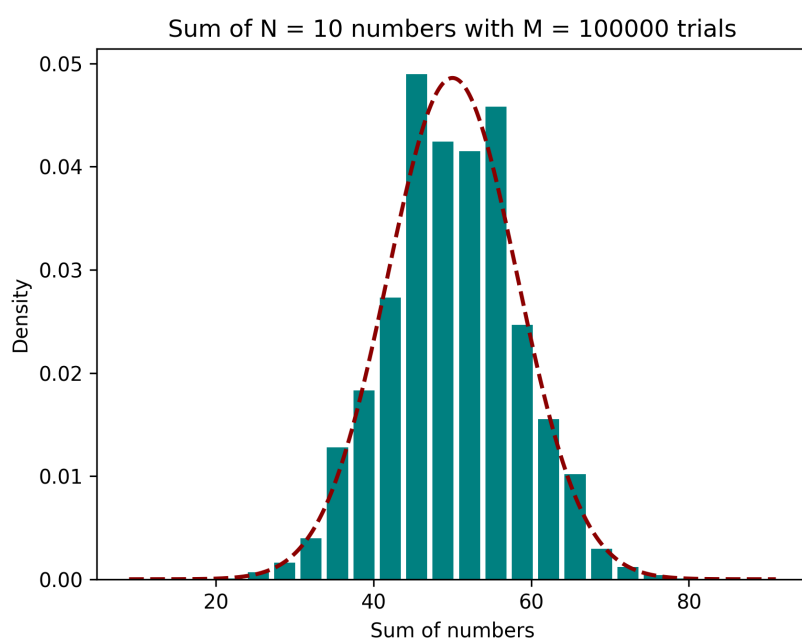
## سوال ششم

در این قسمت با نمونه‌گیری تصادفی، انتگرال مربوط به مرکز جرم یک کره نایکناخت را بررسی می‌کنیم. نمونه‌گیری یکنواخت از کره به روش Sample Rejection انجام می‌شود. در این روش ابتدا از مکعب محاط بر کره به صورت یکنواخت نمونه برداری کرده و نمونه‌های خارج کره را مجدداً با قابلیت mask حذف می‌کنیم. تصویر دو بعدی نمونه‌های به دست آمده از کره در ادامه آورده شده است.

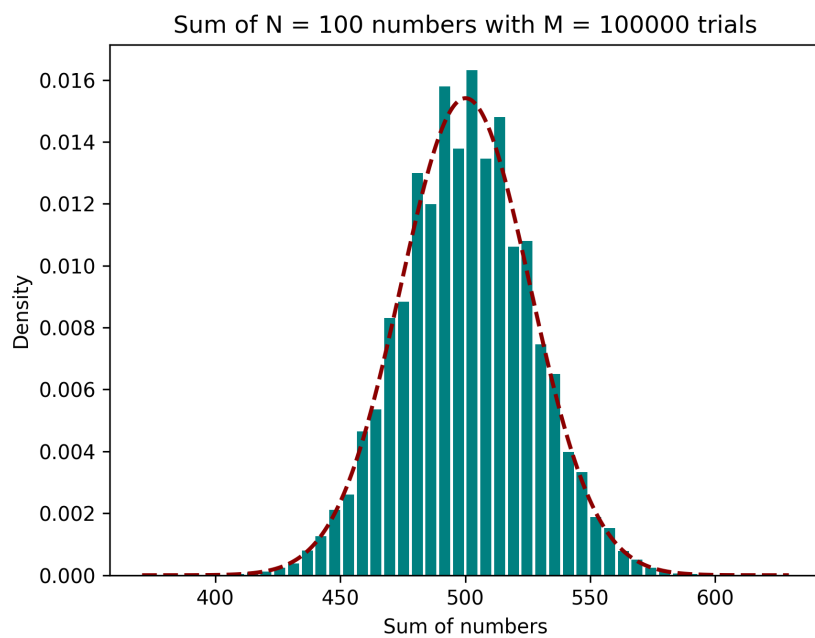
حال انتگرال‌گیری بسیار ساده قابل انجام است. با میانگین‌گیری از ۱۰۰۰۰۰۰ نمونه، مکان مرکز جرم در راستای  $x$  برابر با ۰.۲۰۸ است.



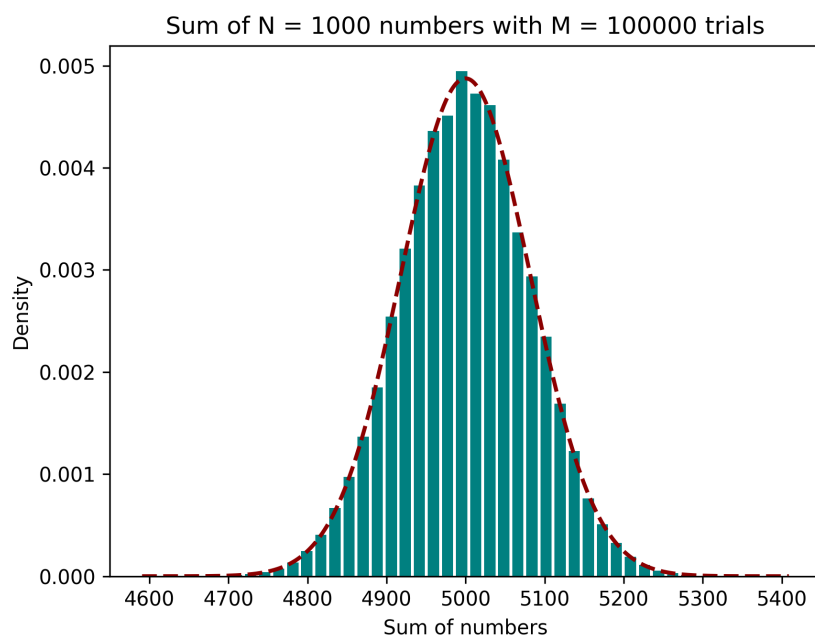
شکل ۴: جمع ۵ متغیر تصادفی یکنواخت



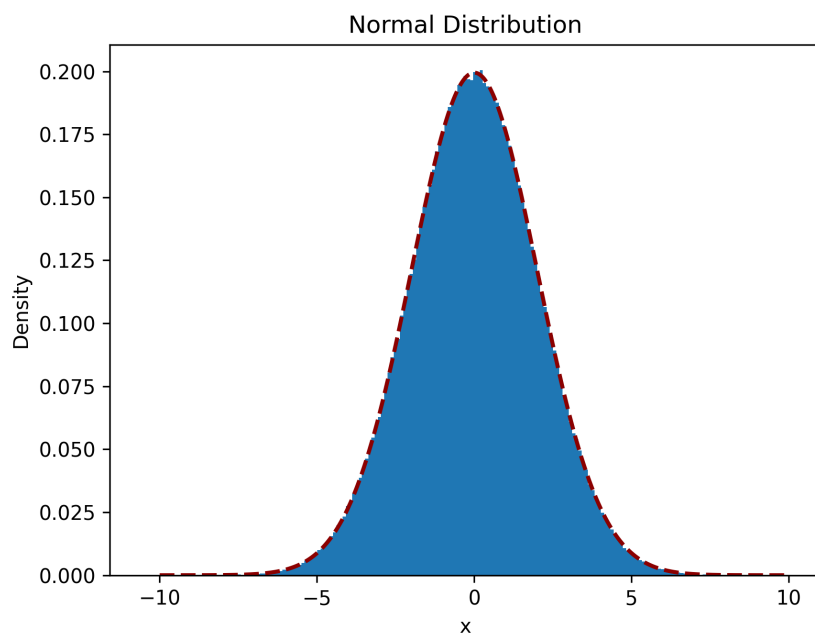
شکل ۵: جمع ۱۰ متغیر تصادفی یکنواخت



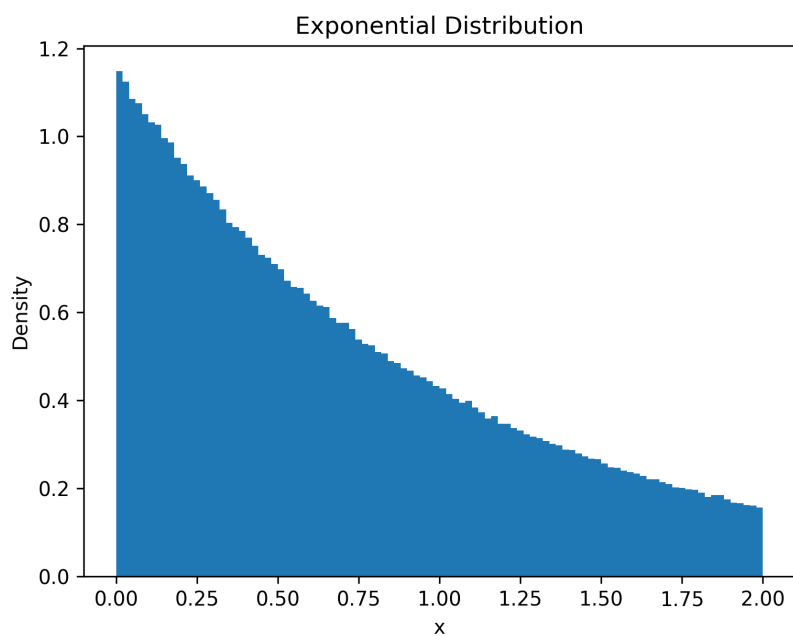
شکل ۶: جمع ۱۰۰ متغیر تصادفی یکنواخت



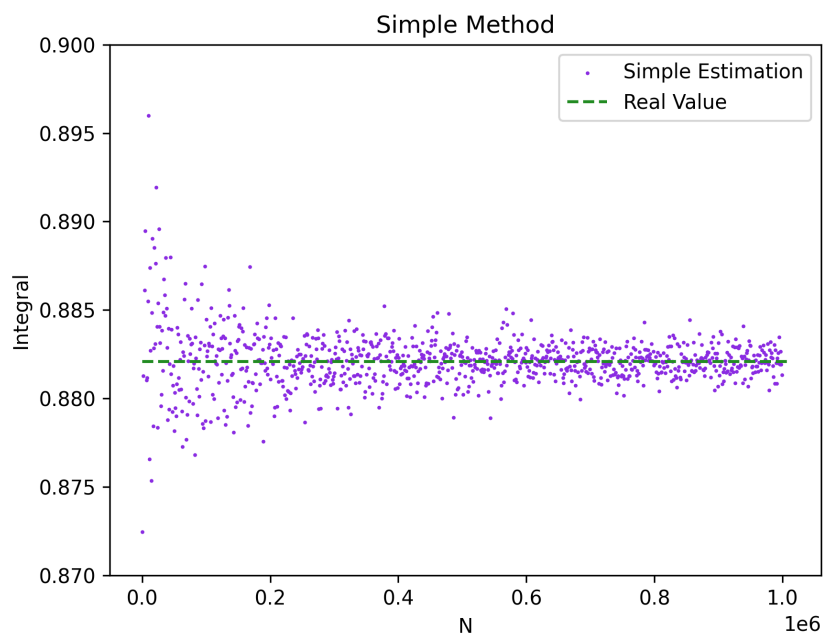
شکل ۷: جمع ۱۰۰۰ متغیر تصادفی یکنواخت



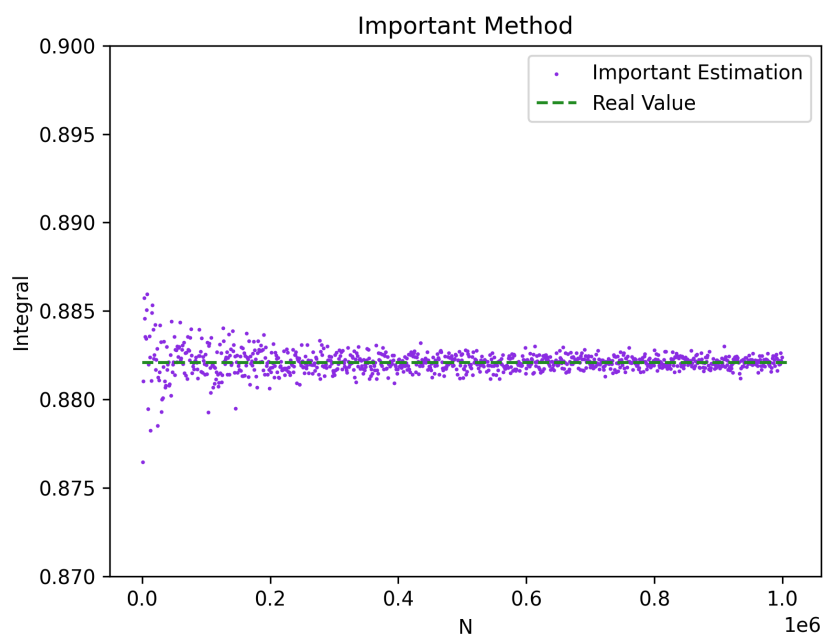
شکل ۸: تابع توزیع نرمال ایجاد شده به کمک واریانس تابع توزیع تجمعی



شکل ۹: تابع توزیع نمایی ایجاد شده از واریانس تابع توزیع تجمعی

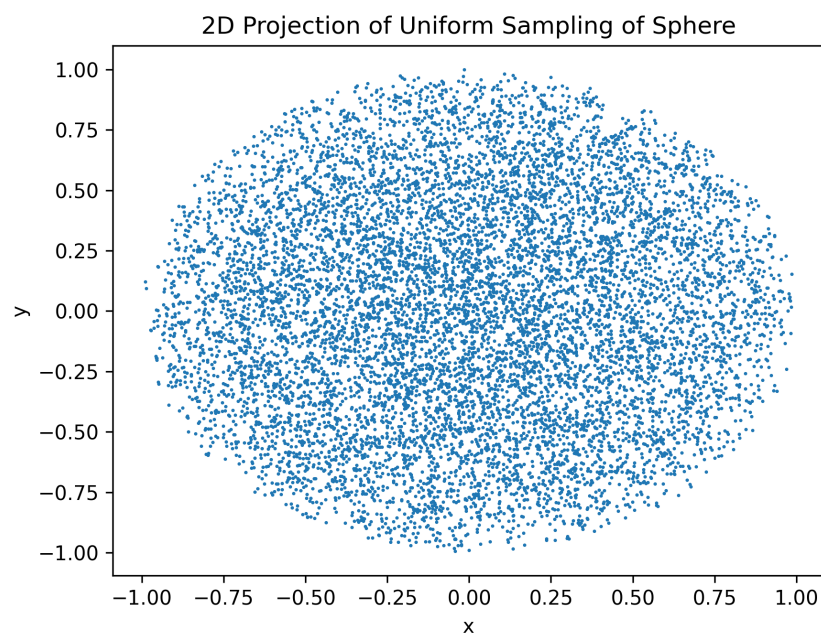


شکل ۱۰: مقدار محاسبه شده انتگرال در نمونه گیری ساده به ازای تعداد نمونه های متفاوت



شکل ۱۱: مقدار محاسبه شده انتگرال در نمونه گیری هوشمند به ازای تعداد نمونه های متفاوت





شکل ۱۲: تصویر نمونه گیری یکنواخت انجام شده در یک قطاع از کره