Решение промежуточного экзамена по теории вероятностей 2019-2020, вариант ρ

Ответы: CEAAC BBDAC CACEA AECBD AABAD EDBAE

1. Из условия известно, что вероятность того, что Месси забьёт гол при ударе по воротам:
$$\mathbb{P}(\text{гола}) = 0.95$$
Посчитаем вероятность того, что Месси забьёт ровно три мяча за пять ударов. Вероятность того, что Месси промахнётся при ударе:
$$\mathbb{P}(\text{промаха}) = 1 - \mathbb{P}(\text{гола}) = 1 - 0.95 = 0.05$$
В случае, если Месси забивает ровно три гола, то в оставшихся двух случаях он промахнётся. Тогда искомая вероятность события A (ровно три гола из пяти ударов):
$$\mathbb{P}(A) = C_5^3 0.95^3 \cdot 0.05^2$$
Ответ: C.

2. Ковариационная матрица вектора $X = (X_1, X_2)$ по определению имеет вид:
$$\begin{pmatrix} \operatorname{Var}(X_1) & \operatorname{Cov}(X_1, X_2) \\ \operatorname{Cov}(X_1, X_2) & \operatorname{Var}(X_2) \end{pmatrix}$$
Из условия известна следующая матрица ковариации:
$$\begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$
Дисперсия разности элементов вектора X может быть найдена по формуле:
$$\operatorname{Var}(X_1 - X_2) = \operatorname{Var}(X_1) + \operatorname{Var}(X_2) - 2\operatorname{Cov}(X_1, Y_2) = 10 + 8 - 2 \cdot 3 = 12$$
Ответ: E.

3. Ковариация двух случайных величин может быть рассчитана по следующей формуле:
$$\operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$$

Так как случайная величина X (сумма очков, выпавших на первых семи кубиках) и Y (сумма очков, выпавших на следующих восьми кубиках) — независимые случайные величины, то $\mathbb{E}(X)(Y) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$. Следовательно, получаем следующее:

$$\mathrm{Cov}(X{,}Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) = 0$$

Ответ: A.

4. Так как из четырёх монет две — с «орлами» на обеих сторонах, то вероятность того, что такая монета будет взята, равняется $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. В случае, если это произошло, из двух бросков гарантированно оба будут соответствовать исходу «выпал орёл». Вероятность того, что взятая монета будет «правильной», равняется $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. В таком случае вероятность того, что оба раза выпадет «орёл», равняется $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$. Тогда искомая вероятность события A (после двух бросков случайной монеты оба раза выпал «орёл») равна:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$$

Ответ: A.

5. Из сходимости последовательности случайных величин ξ_1, $\xi + 2$, ... к невырожденной случайной величине ξ по вероятности всегда следует сходимость этой последовательности к ξ и по распределению.

Ответ: C.

6. Известно, что функция плотности для случайной величины ξ, распределённой равномерно на отрезке $[a; b]$ имеет вид:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a; b], \\ 0, & x \notin [a; b]. \end{cases}$$

Найдём значение функции плотности для случайной величины ξ, распределённой равномерно на отрезке $[0; 2]$, в точке $x = 0.25$:

$$f_\xi(0.25) = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}$$

Ответ: B.

7. Из условия известно, что случайные величины X и Y распределены одинаково и равновероятно принимают только два значения: -1 и 1. При этом известно:

$$\mathbb{P}(Y = 1 \mid X = x) = 0.4 + 0.3x$$

Тогда вероятность $\mathbb{P}(Y = -1 \mid X = x)$ может быть рассчитана как:

$$\mathbb{P}(Y = -1 \mid X = x) = 1 - \mathbb{P}(Y = 1 \mid X = x) = 1 - (0.4 + 0.3x) = 0.6 - 0.3x$$

Чтобы найти математическое ожидание $\mathbb{E}(Y \mid X = 1)$, нам понадобятся значения вероятностей $\mathbb{P}(Y = 1 \mid X = 1)$ и $\mathbb{P}(Y = -1 \mid X = 1)$:

$$\mathbb{P}(Y = 1 \mid X = x) = 0.4 + 0.3 \cdot 1 = 0.7$$

$$\mathbb{P}(Y = -1 \mid X = x) = 0.6 - 0.3 \cdot 1 = 0.3$$

Тогда значение математического ожидания можно посчитать как:

$$\mathbb{E}(Y \mid X = 1) = 1 \cdot 0.7 - 1 \cdot 0.3 = 0.4$$

Ответ: B.

8. Известно, что корреляция случайных величин X и Y может быть найдена по формуле:

$$\mathrm{Corr}(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\delta(X) \cdot \delta(Y)}}$$

Тогда корреляция случайных величин $3 - X$ и $4Y - 5$ равна:

$$\mathrm{Corr}(3 - X, 4Y - 5) = \frac{\mathrm{Cov}(3 - X, 4Y - 5)}{\sqrt{\delta(3 - X) \cdot \delta(4Y - 5)}} =$$
$$= \frac{\mathrm{Cov}(3, 4Y) + \mathrm{Cov}(3, -5) + \mathrm{Cov}(-X, 4Y) + \mathrm{Cov}(-X, -5)}{\sqrt{\delta(X) \cdot 16 \cdot \delta(Y)}} =$$
$$= \frac{\mathrm{Cov}(-X, 4Y)}{\sqrt{1 \cdot 16 \cdot 9}} = \frac{\mathrm{Cov}(-X, 4Y)}{12} = \frac{-4\,\mathrm{Cov}(X, Y)}{12} = \frac{-3}{-3} = 1$$

Ответ: D.

9. $$\mathbb{E}(\xi(\xi + \lambda)) = \mathbb{E}(\xi^2) + \lambda\,\mathbb{E}(\xi) = \mathrm{Var}(\xi) + \mathbb{E}^2(\xi) + \lambda\,\mathbb{E}(\xi)$$

Тогда при $\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{\lambda}$ и $\mathrm{Var}(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}$ по свойству экспоненциального распределения получается:

$$\mathbb{E}(\xi(\xi + \lambda)) = \frac{1}{\lambda^2} + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \lambda \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{\lambda}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2} + 1$$

Ответ: A.

10. Если функция плотности случайной величины X равна $f(x) = \begin{cases} 4x^3, & \text{при} 0 < x < 1, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$, то плотность величины $Y = \ln\left(\frac{1}{X}\right)$ может быть найдена следующим образом:

$$g_Y(y) = \begin{cases} 4\exp(-4y), & \text{если} y > 0, \\ 0, \text{иначе.} \end{cases}$$

Ответ: C.

11. Вероятность того, что на кубике при броске выпадет «5» равна:

$$\mathbb{P}(\text{выпало «5»}) = \frac{1}{6}$$

Тогда наиболее вероятное количество выпадений «5»:

$$2020 \cdot \frac{1}{6} \approx 336$$

Ответ: C.

12. Так как из четырёх монет две — с «орлами» на обеих сторонах, то вероятность того, что такая монета будет взята, равняется $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. В случае, если это произошло, из двух бросков гарантированно оба будут соответствовать исходу «выпал орёл». Вероятность того, что взятая монета будет «правильной», равняется $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. В таком случае вероятность того, что оба раза выпадет «орёл», равняется $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$. Тогда искомая вероятность события A, что при выпадении «орла» была выбрана «неправильная» монетка:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathbb{P}(\text{«неправильная» монетка})}{\mathbb{P}(\text{выпал «орёл»})} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

Ответ: A.

13. Из условия известно, что $\mathbb{P}(A) = 0.5$ и $\mathbb{P}(B \mid A) = 0.8$. То есть:

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(A)} = 0.8$$

Тогда из этого следует, что:

$$\mathbb{P}(AB) = 0.8 \cdot \mathbb{P}(A) = 0.8 \cdot 0.5 = 0.4$$

Также найдём:

$$\mathbb{P}(AB + A\bar{B}) = \mathbb{P}(A(B + \bar{B})) = \mathbb{P}(A \cdot 1) = \mathbb{P}(A) = 0.5$$

Тогда получаем:

$$P(A\bar{B}) = \mathbb{P}(AB + A\bar{B}) - \mathbb{P}(AB) = 0.5 - 0.4 = 0.1$$

Ответ: C.

14. Обозначим годы ожидания письма как случайную величину ξ, распределённую экспоненциально с параметром $\lambda = \frac{1}{3}$. Известно, что функция распределения имеет вид:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 1 - \exp^{-\lambda x}, & \text{если} x \geqslant 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда найдём искомую вероятность как:

$$F_\xi(18 - 6 - 9) = 1 - \exp^{-\frac{1}{3} \cdot (18-6-9)} = - \exp(-1)$$

Ответ: E.

15. Если случайным образом выбираются семьи с двумя детьми и обозначаются события: A — «в семье старший ребёнок — мальчик», B — «в семье только один из детей — мальчик» и C — «в семье хотя бы один из детей — мальчик», то события A и B независимы, A и C — зависимы, B и C — зависимы.

    Ответ: A.

16.
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X \mid Y=-2) = 3 \cdot \mathbb{P}(X=3 \mid Y=-2) + 6 \cdot \mathbb{P}(X=6 \mid Y=-2) = \\ = 3 \cdot \frac{0.1}{0.5} + 6 \cdot \frac{0.4}{0.5} = 0.6 + 4.8 = 5.4\end{aligned}$$

    Ответ: A.

17. Из условия известно, что совместная функция плотности пары X и Y имеет вид:
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x+y)}{3}, & \text{если} x \in [0;1], y \in [0;2], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$
    Тогда найдём вероятность $\mathbb{P}(X < 0.5, Y < 1.5)$:
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X < 0.5, Y < 1.5) = \\ = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{3}{2}} (x+y)\,dx\,dy = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{2}} xy + \frac{y^2}{2}\,dx \quad \Big|_0^{\frac{3}{2}} = \\ = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{2}} 1.5x + 1.125x\,dx = \frac{1}{3}\left(\frac{1.5x^2}{2} + 1.125x\right) \quad \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \\ = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

    Ответ: E.

18. Из условия известно, что совместная функция плотности пары X и Y имеет вид:
$$f(x,y) = \begin{cases} cx^3y^2, & \text{если} x \in [0;1], y \in [0;1], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$
    Найдём значение c. По определению:
$$\int_0^1\int_0^1 cx^3y^2\,dx\,dy = 1$$
    То есть:
$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1 cx^3y^2\,dx\,dy = \int_0^1 \frac{cx^4y^2}{4} \quad \Big|_0^1 dy = \\ = \int_0^1 \frac{cy^2}{4}\,dy = \frac{cy^3}{12} \quad \Big|_0^1 = \\ = \frac{c}{12}\end{aligned}$$

Тогда $c = 12$.

Ответ: C.

19. Обозначим энтропию, совместную энтропию и условную энтропию с помощью $H(X)$, $H(X,Y)$ и $H(X \mid Y)$ соответственно. Можно утверждать, что дискретные случайные величины X и Y независимы, если $H(X,Y) = H(X \mid Y) + H(Y \mid X)$.

    Ответ: B.

20. Из условия известно, что совместная функция плотности пары X и Y имеет вид:

$$f(x,y) = \begin{cases} cx^3y^2, & \text{если} x \in [0;1], y \in [0;1], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

    Тогда условная функция плотности $f_{X|Y=0.5}(x)$ равна:

$$f_{X|Y=0.5}(x) = \begin{cases} 4x^3, & \text{если} x \in [0;1], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

    Ответ: D.

21. По центральной предельной теореме $\frac{\xi_1^{2019}+\ldots+\xi_n^{2019}}{n}$ при n, стремящемся к бесконечности, стремится к математическому ожиданию $\mathbb{E}(\xi_i)$. Так как случайная величина ξ_i принимает значения от 0 до 1, а возведение в степень не меняет этих значений, то предел остаётся неизменным. Тогда найдём значение $\mathbb{E}(\xi_i)$:

$$\mathbb{E}(\xi_i) = 0.6 \cdot 1 + 0.4 \cdot 0 = 0.6$$

    Ответ: A.

22. Из условия известно, что случайная величина X имеет функцию плотности $f_X(x) = 2x$ на отрезке $[0;1]$. Тогда математическое ожидание $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right)$ можно найти как:

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) = \int_0^1 \frac{1}{x} \cdot 2x \, dx = 2x \quad \Big|_0^1 = 2$$

    Ответ: A.

23. Из условия известно, что случайные величины X и Z независимы, случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение, а случайная величина Z равномерно принимает значения -1 и 1. Тогда произведение $(X+1)Z$ имеет нечётное число скачков в функции распределения.

    Ответ: B.

24. Вероятность того, что произойдёт хотя бы один сбой, найдём как:

$$\mathbb{P}(x \geqslant 1) = 1 - \mathbb{P}(x = 0) = 1 - 1 \cdot \exp(-6) = 1 - \exp(-6)$$

    Ответ: A.

25. Из условия известно, что математическое ожидание случайной величины X равняется нулю. Неравенство Чебышева имеет вид:

$$\mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}(Y)| \geqslant b) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(Y)}{b^2}$$

Тогда:

$$\mathbb{P}(|X| \leqslant 5\sqrt{\mathrm{Var}(X)}) = 1 - \mathbb{P}(|X| \geqslant 5\sqrt{\mathrm{Var}(X)}) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(X)}{5^2\sqrt{\mathrm{Var}(X)}^2} = \frac{1}{25}$$

Тогда вероятность лежит в интервале $[1 - 0.04; 1] = [0.96; 1]$.

Ответ: D.

26. Из условия известно, что функция распределения случайной величины X имеет вид

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} x < 0, \\ cx^2, & \text{если} x \in [0; 1], \\ 1, & \text{если} x > 1. \end{cases}$$

Найдём значение c:

$$f_X(x) = F_X^{'}(x) = 2x$$

Тогда:

$$\int_0^1 2x \cdot c\, dx = \frac{2x^2}{2}c = 1 = c$$

Тогда:

$$\mathbb{E}(x^2) = \int_0^1 x^2 \cdot 2x\, dx = \int_0^1 2x^3\, dx = 2\frac{x^4}{4} \Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Ответ: E.

27. Вероятность $\mathbb{P}(X^2 \leqslant 49)$ для случайной величины X с известным математическим ожиданием $\mathbb{E}(X) = 1$ обязательно попадёт в интервал $\left[0; \frac{1}{7}\right]$

Ответ: D.

28. Обозначим за X количество съедаемого Винни-Пухом мёда. Из условия известно, что функция распределения случайной величины X имеет вид

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} x < 0, \\ cx^2, & \text{если} x \in [0; 1], \\ 1, & \text{если} x > 1. \end{cases}$$

Найдём значение c:

$$f_X(x) = F_X^{'}(x) = 2x$$

Тогда:

$$\int_0^1 2x \cdot c\, dx = \frac{2x^2}{2} c = 1 = c$$

Теперь найдём искомую вероятность:

$$\int_{\frac{2}{3}}^1 x^2\, dx = x^2 \quad \Big|_{\frac{2}{3}}^{1} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

Ответ: B.

29. С помощью свойств дисперсии найдём:

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}(2X - Y) = 4\operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y) + 2\operatorname{Cov}(2X, -Y) = \\ = 4 \cdot 4 + 1 \cdot 9 + 2 \cdot (-2)\operatorname{Cov}(X, Y) = 16 + 9 - 4\operatorname{Cov}(X, Y) = \\ = 16 + 9 - 4 \cdot (-3) = 25 + 12 = 37 \end{aligned}$$

Ответ: A.

30. Найдём значение $\mathbb{E}(\bar{X}_{100})$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\bar{X}_{100}) = \mathbb{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right) = \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \\ = \frac{1}{n}\mathbb{E}(X_1 + \ldots + X_n) = \frac{1}{n}(\mathbb{E}(X_1) + \ldots + \mathbb{E}(X_n)) = \\ = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_1) = 1 \end{aligned}$$

Найдём значение $\operatorname{Var}(\bar{X}_{100})$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}(\bar{X}_{100}) = \operatorname{Var}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \\ = \frac{1}{n^2}(\operatorname{Var}(X_1) + \ldots + \operatorname{Var}(X_n)) = \frac{1}{n^2} \cdot n\operatorname{Var}(X_1) = \\ = \frac{\operatorname{Var}(X_1)}{n} = \frac{49}{100} = 0.49 \end{aligned}$$

Приведём случайную величину $\bar{X}_{100}$ к случайной величине $Z \sim \mathcal{N}(0; 1)$ и найдём искомую вероятность:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\bar{X}_{100} < 2) = \mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}_{100} - \mathbb{E}(\bar{X}_{100})}{\sqrt{\operatorname{Var}(\bar{X}_{100})}} < \frac{2 - \mathbb{E}(\bar{X}_{100})}{\sqrt{\operatorname{Var}(\bar{X}_{100})}}\right) = \\ = \mathbb{P}\left(Z < \frac{2-1}{\sqrt{0.49}}\right) = \mathbb{P}\left(Z < \frac{1}{0.7}\right) = \mathbb{P}\left(Z < \frac{10}{7}\right) = \\ = \mathbb{P}(Z < 1.429) = 0.92 \end{aligned}$$

Ответ: E.