Алгоритм Прюфера

Ермилов И.М.

23.05.2017

Теорема 1. *(Прюфера) Каждому дереву с* $n \geq 3$ *помеченными вершинами первичной спецификации* $[a_1^{\alpha_1}, ..., a_n^{\alpha_n}]$ *и матрицей смежности* A *можно поставить во взаимно однозначное соответствие* $(n-2)$*-выборку в* $\overline{KC}n$*-базисе первичной спецификации* $[a_1^{\alpha_1}, ..., a_n^{\alpha_n}]$ *или, что то же самое, размещение* $n-2$ *различных предметов в* n *различных ячейках, где* α_i *- число предметов в* i*-ой ячейке,* $i = 1, 2, ..., n$*.*

Доказательство. Для доказательства теоремы опишем алгоритм, позволяющий построить нам по дереву, заданным матрицей смежности, строить размещение предметов в ячейки и обратно.

Дано: Матрица смежности дерева с n помеченными вершинами с заданной первичной спецификацией. Требуется построить $(n-2)$-выборку в $\overline{KC}n$-базисе первичной спецификации $[a_1^{\alpha_1}, ..., a_n^{\alpha_n}]$.

Шаг 1. Ищем в матрице A строку с минимальным номером a_{i_0} такую, что в строке a_{i_0} ровно одна единица(это означает, что вершина концевая). Значит, a_{i_0} соединена с единственной вершиной a_{i_1}(номер столбца, в котором стоит единица в строке a_{i_0}). Элемент с номером 1 добавляем в ячейку a_{i_1}, а из матрицы A "удаляем"единицу с позиций (a_{i_0,i_1}) и (a_{i_1,i_0}).

Шаг j. Рекурсивно, аналогично *шагу 1*, пока в матрице не останутся две строки, в которых содержится ровно по одной единице.

И так, ячейки, метки которых совпадали с метками концевых вершина в исходном дереве(все строки с одной единицей в матрице смежности A), оказываются пустыми. Каждая неконцевая вершина a_i используется ровно α_i раз (количество единиц в строке a_i минус один). Следовательно, первичная спецификация размещения совпадает с первичной спецификацией дерева.

Иначе говоря, у нас существует отображение из множества деревьев с n помеченными вершинами в $(n-2)$-выборки в $\overline{KC}n$-базисе.

Докажем инъективность данного отображения. Пусть у нас даны два различных дерева с матрицами смежности A_1 и A_2 соответственно. Доказательство разобьем на два случая.

Случай 1. Если в матрице A_1 и A_2 в каждой строке число единиц совпадает, но стоят на разных позициях, тогда мы получим различные выборки.

Пусть в k-ой строке в матрице A_1 единица стоит на i_1-ом месте, а в матрице A_2 на i_2-ом месте. Соответственно, в матрице A_1 нуль стоит на i_2-ом месте, а в A_2 на i_1-ом месте. Если мы на каком-то j-ом шаге работы алгоритма из k-ой строки матрицы A_1 хотим удалить единицу с позиции i_1, то это означает, что либо в k-ой строке на данном шаге стоит ровно одна единица, либо в строке i_1 на данном шаге стоит ровно одна единица(концевая). Аналогичный факт верен для матрицы A_2.

Пусть вершина a_k на j-ом шаге работы алгоритма является концевой, то есть в матрицах A_1 и A_2 в k-ой строке стоит ровно одна единица, на местах i_1 и i_2 соответственно. Тогда предмет с номером j попадет в ячейку с номером i_1 в случае с первой матрицей или в ячейку с номером i_2 в случае со второй матрицей.

Если же a_k не является концевой вершиной, тогда для матрицы A_1 вершина a_{i_1} является концевой на j-ом шаге работы алгоритма. Это означает, что предмет с номером j в первой выборке будет лежать в ячейке с номером k, в то время как в матрице A_2 на j-ом шаге работы алгоритма в строке i_1 на k-ой позиции стоит нуль, что означает, что предмет с номером j не попадет в ячейку с номером k.

Случай 2. Если в матрице в столбцах стоят различное число единиц, то мы, очевидно, получим различные первичные спецификации.

Таким образом, мы показали, что для разных деревьев мы получаем различные выборки.

<u>Дано:</u>$(n-2)$-выборка в $\overline{KC}n$-базисе первичной спецификации $[a_1^{\alpha_1}, ..., a_n^{\alpha_n}]$. Требуется построить матрицу смежности A дерева с n помеченными вершинами с первичной спецификацией $[a_1^{\alpha_1}, ..., a_n^{\alpha_n}]$.

Шаг 1. Выбираем пустую ячейку с минимальным номером a_{i_0} и выбираем ячейку с номером a_{i_1}, в которой лежит предмет с минимальным номером, то есть для данного шага - с номером 1. Добавляем в матрицу A единицы на позиции (a_{i_0,i_1}) и (a_{i_1,i_0}).

Шаг j. Рекурсивно, аналогично *шагу 1.* В конце, остается две пустых ячейки a_i и a_j, добавляем единицы в матрицу A на позиции $(a_{i,j})$ и $(a_{j,i})$.

И так, ячейка с меткой a_i используется в алгоритма ровно α_i раз, пока не станет пустой. Затем, в ходе работы алгоритма будет построено еще одно ребро, инцидентное вершине a_i(добавление единиц в матрицу(α_i=(число единиц в строке a_i)+1)). Значит, первичные спецификации исходного размещения и построенного графа совпадают.

Иначе говоря, у нас существует отображение из множества $n-2$ выборок в множество деревьев с n помеченными вершина. Докажем инъективность данного отображения. Доказательство разобьем на два случая:

Случай 1. Пусть нам даны выборки с различными первичными спецификациями $[a_1^{\alpha_1}, ..., a_i^{\alpha_i}, ..., a_n^{\alpha_n}]$ и $[a_1^{\alpha_1}, ..., a_i^{\alpha_i'}, ..., a_n^{\alpha_n}]$. Тогда в матрицах A_1 и A_2 в i-ой строке будет различное число единиц, а значит и деревья разные.

Случай 2. Пусть теперь нам даны две разные $n-2$ выборки, но первичные спецификации совпадают.

Не ограничивая общности, пусть в первой выборке предмет с номером k лежит в ячейке a_{i_1}, а во второй выборке предмет с номером k лежит в ячейке с номером a_{i_2}. Тогда, допустим, на k-ом шаге работы алгоритма a_k — пустая ячейка с минимальным текущим номером. Тогда, в строке, соответствующей ячейке a_k будут стоять единицы в матрице A_1 на позиции a_{i_1}, а в матрице A_2 на позиции a_{i_2}, причем в первой матрице на позиции a_{i_2} стоит нуль, а во второй матрице на позиции a_{i_1} стоит нуль, так как a_k была пустой ячейкой. И, в дальнейшем, в ходе работы алгоритма k-ая строка заполняться не будет, а на предыдущих шагах, очевидно, в матрице A_1 и A_2 в k-ой строке на позициях a_{i_2} и a_{i_1} соответственно единица появиться не могла(это означает, что в ячейке a_k лежал предмет с номером $l < k$, тогда, очевидно, единица на соответствующие позиции попасть не могла). Таким образом, мы получили, что матрицы A_1 и A_2 разные.

Следовательно, мы получим разные деревья.

Таким образом, мы показали, что из разных выборок мы можем получить различные деревья. Остается заметить, что мощность множества деревьев с n помеченными вершинами совпадает с мощностью множества $(n-2)$-выборок в $\overline{KC}n$-базисе, что и завершает доказательство теоремы.