Teorija elastičnosti

Ravnoteža štapa uz prepreku (Euler–Bernoulli)

Ermin Mustafić

PMF-MO, Zagreb

25. siječnja 2023.

Sadržaj

Jednadžba štapa i prepreka

Euler-Bernoullijeva jednadžba štapa je oblika

$$(EIu'')'' = f,$$

gdje je

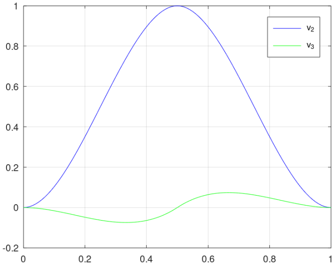
- E Youngov modul elastičnosti,
- I drugi moment površine te
- f gustoća vanjske sile.

Prepreka je neka funkcija c, zadana na $[0, l]$, koja postavlja neki dodatni uvjet na rješenje u, npr. $u(x) \geq c(x)$ za svaki $x \in [0, l]$. Taj uvjet se unosi u funkcijski prostor slabe formulacije u kojem se traži rješenje.

Za $V \leq H^2(0,l)$, slaba formulacija glasi

$$\begin{cases} Naci\ u \in V \\ (\forall\, v \in V) \qquad \int_0^l EIu''v'' = \int_0^l fv. \end{cases}$$

U aproksimacijsku zadaću stavljamo $2n+2$ polinoma oblika:



Slika 1: Grafovi funkcija v_2 i v_3 na $[0,1]$ s korakom $\frac{1}{2}$

Funkcional energije

Kod problema s preprekom, rješenje tražimo u podskupu od V, tj. u $W := \{v \in V : v \geq c\}$, što više nije ni vektorski prostor pa moramo minimizirati funkcional $J : V \to \mathbb{R}$ dan s

$$J(v) = \frac{1}{2} Kv \cdot v - F \cdot v,$$

gdje je $K = (B(v_i, v_j))_{i,j=0}^{2n+1}$ te $F = (L(v_j))_{j=0}^{2n+1}$. Za $h > 0$, imamo

$$\overline{K} = \frac{EI}{h^3} \begin{bmatrix} 12 & 6h & -12 & 6h \\ 6h & 4h^2 & -6h & 2h^2 \\ -12 & -6h & 12 & -6h \\ 6h & 2h^2 & -6h & 4h^2 \end{bmatrix}, \quad \overline{F} = f \begin{bmatrix} \frac{2h}{3} \\ 0 \\ \frac{2h}{3} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Algoritam

Algoritam se bazira na generaliziranoj Newtonovoj metodi za rješavanje nelinearnih jednadžbi.

Algoritam

Ulaz: $u_0 \in \mathbb{R}^{2n+2}$, $\varepsilon > 0$, $k = 0$.

Iteriraj:

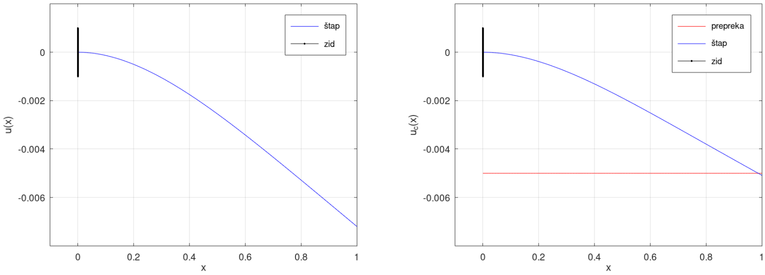
1. riješi sustav $(K + \frac{1}{\varepsilon} M(u_k))z = Ku_k + j'_\varepsilon(u_k) - F$,
2. $u_{k+1} = u_k - z$,
3. $k = k + 1$.

Izlaz: $u \approx u_k$.

Primjer 1

Čelični štap s konstantnim kvadratičnim poprečnim presjekom učvršćen u lijevom kraju te u desnom slobodan.

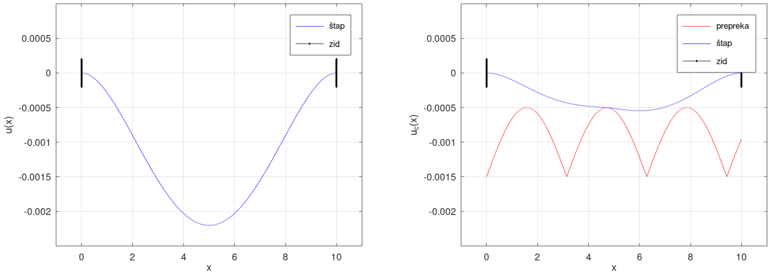
$l = 1$ m, $E = 2.1 \times 10^{11}$ Pa, $I = 8.33 \times 10^{-10}$ m^4, $f = -7.5537$ N/m, $c(x) = -0.005$.



Slika 2: Ravnoteža štapa bez prepreke (lijevo) te s preprekom (desno)

HDPE cijev s konstantnim kružnim poprečnim presjekom učvršćena u oba kraja.

$l = 10$ m, $E = 6.0 \times 10^8$ Pa, $I = 7.85398 \times 10^{-9}$ m^4,
$f = -2.98945$ N/m, $c(x) = 0.001|sinx| - 0.0015$.

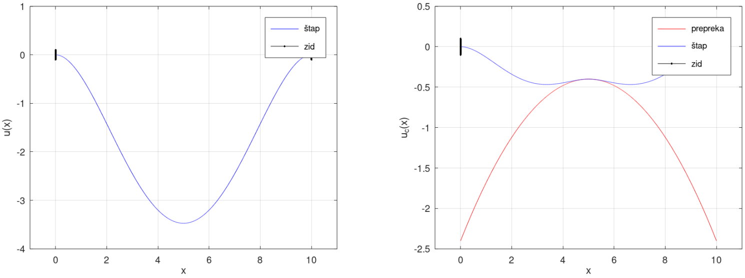


Slika 3: Ravnoteža štapa bez prepreke (lijevo) te s preprekom (desno)

Primjer 3

Neki materijal s konstantnim poprečnim presjekom učvršćen u oba kraja.

$l = 10$ m, $E = 0.1$ Pa, $I = 1$ m^4, $f = -100$ N/m,
$c(x) = -0.08(x-5)^2 - 0.4$.

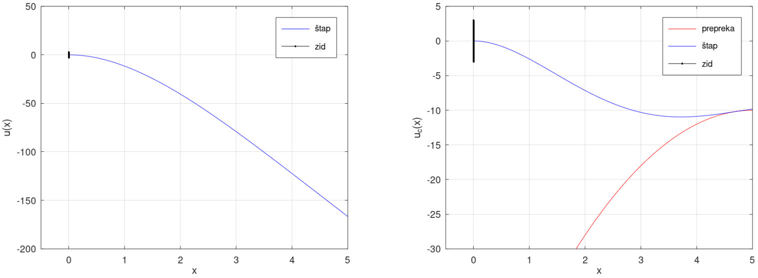


Slika 4: Ravnoteža štapa bez prepreke (lijevo) te s preprekom (desno)

Primjer 4

Neki materijal s konstantnim poprečnim presjekom učvršćen u lijevom kraju te u desnom slobodan.

$l = 5$ m, $E = 0.1$ Pa, $I = 1$ m^4, $f = -100$ N/m,
$c(x) = -2(x-5)^2 - 10$.



Slika 5: Ravnoteža štapa bez prepreke (lijevo) te s preprekom (desno)

Literatura

1. I. Aganović, K. Veselić: *Jednadžbe matematičke fizike*. Školska knjiga, 1985.
2. J. Tambača: *Teorija elastičnosti, materijali s predavanja*. PMF-MO Zagreb, 2016.
3. P. Sočo: *Numerička metoda za problem elastičnog štapa uz prepreku, diplomski rad*. PMF repozitorij, 2022.