NLNMAP - seminar 1
Prepoznavanje lica korištenjem tenzor-tenzor dekompozicija

Tri tenzora

May 21, 2023

1. Cirkularne matrice i diskretna Fourierova transformacija

Neka je $a = (a_1, \ldots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$ vektor. Promatramo njegovu cirkularnu matricu $\mathrm{circ}(a)$ koju definiramo kao

$$\mathrm{circ}(a) := \begin{bmatrix} a_1 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_n & \cdots & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & a_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \end{bmatrix}$$

odnosno, $(\mathrm{circ}(a))_{ij} = a_{i-j+1}$ pri čemu stavimo $a_{i\pm n} = a_i$. Ako je sada $x \in \mathbb{R}^n$ i $y = \mathrm{circ}(a)x$, tada je

$$y_k = \sum_{j=1}^{n} a_{k-j+1} x_j, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Primjetimo odmah da je $x^{(0)} = (1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$ svojstveni vektor od $\mathrm{circ}(a)$. Zaista, za $k = 1, \ldots, n$ je

$$(\mathrm{circ}(a)x^{(0)})_k = \sum_{j=1}^{n} a_{k-j+1} = \sum_{j=1}^{n} a_j =: \lambda_0 = \lambda_0 x_k^{(0)},$$

pa je

$$\mathrm{circ}(a)x^{(0)} = \lambda_0 x^{(0)}.$$

Važno svojstvo cirkularnih matrica je da su im svojstveni vektori stupci IDFT matrice. Neka je

$$\omega_n = e^{-\frac{2\pi i}{n}}$$

n-ti primitivni korjen jedinice. Uočimo da je

- $\omega_n^n = 1$ i $\omega_n^k \neq 1$ za $k = 1, \ldots, n-1$,
- $\omega_n^{k\pm n} = \omega_n^k$ za $k \in \mathbb{Z}$,
- $\overline{\omega_n} = \omega_n^{-1}$.

Definiramo matricu

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} \omega_n^{0\cdot 0} & \omega_n^{0\cdot 1} & \dots & \omega_n^{0\cdot(n-1)} \\ \omega_n^{1\cdot 0} & \omega_n^{1\cdot 1} & \dots & \omega_n^{1\cdot(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_n^{(n-1)\cdot 0} & \omega_n^{(n-1)\cdot 1} & \dots & \omega_n^{(n-1)\cdot(n-1)} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

Matricu F_n nazivamo (normaliziranom) DFT matricom reda n, a $F_n^* = \overline{F_n}$ (normaliziranom) IDFT matricom reda n. Neka je $x^{(k)}$ k-ti stupac od $\overline{F}_n$, tj.

$$x^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{n}}(\omega_n^{-0k}, \omega_n^{-1k}, \dots, \omega_n^{-(n-1)k})^T.$$

Sada računamo

$$\begin{aligned} (\mathbf{circ}(a)x^{(k)})_l &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} a_{l-j+1}\omega_n^{-(j-1)k} = \frac{\omega_n^{-(l-1)k}}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} a_{l-j+1}\omega_n^{(l-j)k} \\ &= \frac{\omega_n^{-(l-1)k}}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} a_{n-j+1}\omega_n^{(n-j)k} = \frac{\omega_n^{-(l-1)k}}{\sqrt{n}} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_j\omega_n^{(j-1)k}}_{=:\lambda_k} \\ &= \lambda_k x_l^{(k)} \end{aligned}$$

pa je

$$\mathbf{circ}(a)x^{(k)} = \lambda_k x^{(k)},$$

tj. stupci od $\overline{F}_n$ su svojstveni vektori od $\mathbf{circ}(a)$.

Nadalje, promotrimo skalarne produkte stupaca od $\overline{F}_n$:

$$\left(x^{(k)}\right)^* x^{(l)} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \omega_n^{j(k-1)}\omega_n^{-j(l-1)} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\omega_n^{k-l}\right)^j = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$$

jer za $k \neq l$ je

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left(\omega_n^{k-l}\right)^j = \frac{1 - (\omega_n^n)^{k-l}}{1 - \omega_n^{k-l}} = \frac{1-1}{1 - \omega_n^{k-l}} = 0.$$

Dakle, $\overline{F}_n$ je unitarna matrica ($\overline{F}_n = F_n^{-1}$) koja dijagonalizira $\mathbf{circ}(a)$.

Iz definicije od λ_k slijedi da je

$$\sqrt{n}F_n a = \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Dakle, pokazali da je

$$\mathbf{circ}(a) = \overline{F}_n \mathbf{diag}(\sqrt{n}F_n a)F_n.$$

Ako je $x \in \mathbb{R}^n$, važno svojstvo matrice F_n je da se množenje $F_n x$ može obaviti sa $\mathcal{O}(n \log n)$ operacija umjesto uobičajenih $\mathcal{O}(n^2)$. Ovo poglavlje pokazuje da se i množenja sa cirkularnim matricama $C_a x$ mogu obaviti sa $\mathcal{O}(n \log n)$ operacija.

Navodimo još jedno bitno svojstvo diskretne Fourierove transformacije koja će nam biti korisna kasnije.

Lema A. Neka je $v = (v_1, \ldots, v_n)^T \in \mathbb{R}^n$ te $\hat{v} = \sqrt{n} F_n v$ njegova diskretna Fourierova transformacija. Tada je

$$\hat{v}_1 \in \mathbb{R}, \quad \overline{\hat{v}_k} = \hat{v}_{n-k+2}, \quad k = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil + 1, \ldots, n.$$

Obratno, ako vektor $\hat{v} \in \mathbb{C}^n$ zadovoljava

$$\hat{v}_1 \in \mathbb{R}, \quad \overline{\hat{v}_k} = \hat{v}_{n-k+2}, \quad k = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil + 1, \ldots, n.$$

tada je $v = \sqrt{n} \overline{F}_n \hat{v} \in \mathbb{R}^n$.

Dokaz. Iz definicije je jasno da je $\hat{v}_1 = \sum_{j=1}^n v_j \in \mathbb{R}$. Za $k = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil + 1, \ldots, n$ računamo

$$\overline{\hat{v}_k} = \sum_{j=1}^n \omega_n^{-(j-1)(k-1)} v_j = \sum_{j=1}^n \omega_n^{n(j-1)-(k-1)(j-1)} v_j = \sum_{j=1}^n \omega_n^{((n-k+2)-1)(j-1)} v_j = \hat{v}_{n-k+2}.$$

Obratno, ako je $n = 2p$ paran, tada je $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil = p+1$, $\omega_n^p = \omega_n^{-p} = -1$ i $\overline{\hat{v}_{p+1}} = \hat{v}_{(2p-(p+1)+2)} = \hat{v}_{p+1}$, tj $\hat{v}_{p+1} \in \mathbb{R}$. Računamo

$$\begin{aligned}
v_k &= \sum_{j=1}^n \omega_n^{-(j-1)(k-1)} \hat{v}_j \\
&= \hat{v}_1 + \sum_{j=2}^p \omega_n^{-(j-1)(k-1)} \hat{v}_j + \omega_n^{-p(k-1)} \hat{v}_{p+1} + \sum_{j=p+2}^n \omega_n^{-(j-1)(k-1)} \hat{v}_j \\
&= \hat{v}_1 + (-1)^{k+1} \hat{v}_{p+1} + \sum_{j=2}^p \omega_n^{-(j-1)(k-1)} \hat{v}_j + \sum_{j=2}^p \omega_n^{-(n-j+2-1)(k-1)} \hat{v}_{n-j+2} \\
&= \hat{v}_1 + (-1)^{k+1} \hat{v}_{p+1} + \sum_{j=2}^p \Big(\omega_n^{-(j-1)(k-1)} \hat{v}_j + \omega_n^{(j-1)(k-1)} \overline{\hat{v}_j} \Big) \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Ako je $n = 2p+1$ neparan, tada je $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil = p+1$. Računamo

$$\begin{aligned}
v_k &= \sum_{j=1}^n \omega_n^{-(j-1)(k-1)} \hat{v}_j \\
&= \hat{v}_1 + \sum_{j=2}^{p+1} \omega_n^{-(j-1)(k-1)} \hat{v}_j + \sum_{j=p+2}^n \omega_n^{-(j-1)(k-1)} \hat{v}_j \\
&= \hat{v}_1 + \sum_{j=2}^{p+1} \Big(\omega_n^{-(j-1)(k-1)} \hat{v}_j + \omega_n^{(j-1)(k-1)} \overline{\hat{v}_j} \Big) \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

$\square$

2. Matrični pojmovi u tenzorskom okviru

2.1. Definicije

U ovom poglavlju, cilj nam je uvesti analogone uobičajenih matričnih pojmova, ali primijenjenih na tenzore reda tri. Ako je $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{l \times m \times n}$ tenzor reda tri, sa $\mathcal{A}(k,:,:)$, $\mathcal{A}(:,k,:)$, $\mathcal{A}(:,:,k)$ označavamo redom k-ti horizontalni, lateralni i frontalni slice. Radi lakše notacije, uvodimo oznaku $\mathcal{A}_{(k)} := \mathcal{A}(:,:,k)$ za k-ti frontalni slice od $\mathcal{A}$. Nadalje uvodimo nekoliko operatora na tenzorima.

Definicija. Ako je $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{l \times m \times n}$, definiramo funkcije $\mathsf{unfold} : \mathbb{R}^{l \times m \times n} \to \mathbb{R}^{l \cdot n \times m}$

$$\mathsf{unfold}(\mathcal{A}) := \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{(1)} \\ \mathcal{A}_{(2)} \\ \vdots \\ \mathcal{A}_{(n)} \end{bmatrix},$$

te $\mathsf{bcirc} : \mathbb{R}^{l \times m \times n} \to \mathbb{R}^{l \cdot n \times m \cdot n}$

$$\mathsf{bcirc}(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{(1)} & \mathcal{A}_{(n)} & \cdots & \mathcal{A}_{(2)} \\ \mathcal{A}_{(2)} & \mathcal{A}_{(1)} & \cdots & \mathcal{A}_{(3)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{A}_{(n)} & \mathcal{A}_{(n-1)} & \cdots & \mathcal{A}_{(1)} \end{bmatrix}.$$

Definiramo i $\mathsf{bdiag} : \mathbb{R}^{l \times m \times n} \to \mathbb{R}^{nl \times nm}$ kao blok dijagonalnu matricu

$$\mathsf{bdiag}(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{(1)} & & & \\ & \mathcal{A}_{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathcal{A}_{(n)} \end{bmatrix}.$$

Nadalje, definiramo matričnu operaciju fold tako da je

$$\mathsf{fold}(\mathsf{unfold}(\mathcal{A})) = \mathcal{A}.$$

Definiramo Frobeniusovu tenzorsku normu

$$\|\mathcal{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i,j,k} a_{ijk}^2},$$

pri čemu je $a_{ijk} = \mathcal{A}(i,j,k)$.

Konačno, definiramo tenzorsko množenje čiji je rezultat tenzor. Neka su $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{l \times p \times n}$ i $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{p \times m \times n}$, tada definiramo

$$\mathcal{A} * \mathcal{B} := \mathsf{fold}(\mathsf{bcirc}(\mathcal{A}) \cdot \mathsf{unfold}(\mathcal{B})) \in \mathbb{R}^{l \times m \times n}.$$

Definicija. Ako je $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{l \times m \times n}$, definiramo $\mathcal{A}^T \in \mathbb{R}^{m \times l \times n}$ kao tenzor kojemu transponiramo sve frontalne sliceve te posložimo sliceve od drugog do posljednjeg u invertiranom poretku.

Dakle, ako je $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{l \times m \times n}$, tada se $\mathcal{A}^T$ dobije kao:

$$\mathcal{A}^T = \text{fold}\left(\begin{bmatrix} (\mathcal{A}_{(1)})^T \\ (\mathcal{A}_{(n)})^T \\ (\mathcal{A}_{(n-1)})^T \\ \vdots \\ (\mathcal{A}_{(2)})^T \end{bmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{l \times m \times n}$$

Jedno opravdanje za ovu definiciju je da vrijedi relacija:

$$\text{bcirc}(\mathcal{A}^T) = \text{bcirc}(\mathcal{A})^T$$

koja povezuje transponiranje tenzora i matrica.

Definicija. Tenzor $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{l \times m \times n}$ je f-dijagonalan ako mu je svaki frontalni slice dijagonalna matrica.

Definicija. $l \times l \times n$ tenzor $\mathcal{I}_{lln}$ je jedinični tenzor ako mu je frontalni slice jedinična $l \times l$ matrica, a ostali frontalni slicevi nul-matrice.
Primijetimo da je $\text{bcirc}(\mathcal{I}) = I$

Definicija. $l \times l \times n$ tenzor $\mathcal{Q}$ je ortogonalan ako vrijedi

$$\mathcal{Q}^T * \mathcal{Q} = \mathcal{Q} * \mathcal{Q}^T = \mathcal{I}$$

.

2.2. Svojstva množenja tenzora

Neka je $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{l \times m \times n}$. Tenzor $\hat{\mathcal{A}} \in \mathbb{C}^{l \times m \times n}$ definiramo tako da svaku nit u modu 3 tenzora $\mathcal{A}$ zamjenimo njenom diskretnom Fourierovom transformacijom.

To možemo zapisati preko frontalnih sliceva kao

$$\hat{\mathcal{A}}_{(k)} = \sum_{j=1}^{n} \omega_n^{(j-1)(k-1)} \mathcal{A}_{(j)}.$$

Koristeći lemu A., možemo zaključiti da vrijedi

$$\hat{\mathcal{A}}_{(1)} \in \mathbb{R}^{l \times m}, \quad \overline{\hat{\mathcal{A}}_{(k)}} = \hat{\mathcal{A}}_{(n-k+2)}, \quad k = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil + 1, \dots, n.$$

Lema B. Neka je $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{l \times m \times n}$. Ako sa $\hat{\mathcal{A}}$ označimo Fourierovu transformaciju tenzora $\mathcal{A}$ po trećem modu. Tada vrijedi

(i)
$$\text{unfold}(\hat{\mathcal{A}}) = (\sqrt{n} F_n \otimes I_l)\text{unfold}(\mathcal{A}),$$

(ii)
$$(F_n \otimes I_l)\text{bcirc}(\mathcal{A})(\overline{F}_n \otimes I_m) = \text{bdiag}(\hat{\mathcal{A}})$$

Dokaz.
(i)

$$\operatorname{unfold}(\hat{\mathcal{A}}) = \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{A}}_{(1)} \\ \hat{\mathcal{A}}_{(2)} \\ \vdots \\ \hat{\mathcal{A}}_{(n)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} \omega_n^{(j-1)0} \mathcal{A}_{(j)} \\ \\ \sum_{j=1}^{n} \omega_n^{(j-1)1} \mathcal{A}_{(j)} \\ \\ \vdots \\ \\ \sum_{j=1}^{n} \omega_n^{(j-1)(n-1)} \mathcal{A}_{(j)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \omega_n^{00} I_l & \omega_n^{01} I_l & \dots & \omega_n^{0(n-1)} I_l \\ \omega_n^{10} I_l & \omega_n^{11} I_l & \dots & \omega_n^{1(n-1)} I_l \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_n^{(n-1)0} I_l & \omega_n^{(n-1)1} I_l & \dots & \omega_n^{(n-1)(n-1)} I_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{(1)} \\ \mathcal{A}_{(2)} \\ \vdots \\ \mathcal{A}_{(n)} \end{bmatrix} = (\sqrt{n} F_n \otimes I_l) \operatorname{unfold}(\mathcal{A}).$$

(ii) Zapišimo lijevu stranu u blok trokutastom formatu.

$$(F_n \otimes I_l) \operatorname{bcirc}(\mathcal{A}) (\overline{F}_n \otimes I_m) = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix}$$

pri čemu su matrice $K_{ij} \in \mathbb{R}^{l \times m}$. Ako stavimo $\mathcal{A}_{(n \pm i)} = \mathcal{A}_{(i)}$, tada se koristeći isti rastav kao ranije, blok K_{ij} može zapisati kao

$$\begin{aligned}
K_{ij} &= \frac{1}{n} \sum_{k_2=1}^{n} \sum_{k_1=1}^{n} \omega_n^{(i-1)(k_1-1)} \omega_n^{-(j-1)(k_2-1)} \mathcal{A}_{(k_1-k_2+1)} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k_2=1}^{n} \sum_{k_1=1}^{n} \omega_n^{(i-1)(k_1-1)-(i-1)(k_2-1)+(i-1)(k_2-1)-(j-1)(k_2-1)} \mathcal{A}_{(k_1-k_2+1)} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k_2=1}^{n} \sum_{k_1=1}^{n} \omega_n^{(i-1)(k_1-k_2)+(i-j)(k_2-1)} \mathcal{A}_{(k_1-k_2+1)} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k_2=1}^{n} \omega_n^{(i-j)(k_2-1)} \sum_{k_1=1}^{n} \omega_n^{(i-1)(k_1-k2)} \mathcal{A}_{(k_1-k2+1)} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k_2=1}^{n} \omega_n^{(i-j)(k_2-1)} \sum_{k_1=1}^{n} \omega_n^{(i-1)(k_1-1)} \mathcal{A}_{(k_1)} \\
&= \delta_{ij} \hat{\mathcal{A}}_{(i)}
\end{aligned}$$

□

Lema C. Neka su $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{l\times p\times n}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{p\times m\times n}$ i $\mathcal{C} \in \mathbb{R}^{l\times m\times n}$ ulančani tenzori, tada vrijedi niz ekvivalencija

$$\begin{aligned}\mathcal{C} = \mathcal{A} * \mathcal{B} &\iff \textbf{unfold}(\mathcal{C}) = \textbf{bcirc}(\mathcal{A})\textbf{unfold}(\mathcal{B})\\ &\iff \textbf{unfold}(\hat{\mathcal{C}}) = \textbf{bdiag}(\hat{\mathcal{A}})\textbf{unfold}(\hat{\mathcal{B}})\\ &\iff \textbf{bdiag}(\hat{\mathcal{C}}) = \textbf{bdiag}(\hat{\mathcal{A}})\textbf{bdiag}(\hat{\mathcal{B}})\\ &\iff \textbf{bcirc}(\mathcal{C}) = \textbf{bcirc}(\mathcal{A})\textbf{bcirc}(\mathcal{B}).\end{aligned}$$

Dokaz. Prva ekvivalencija slijedi iz definicije tenzora primjenom operacija **fold** i **unfold**.

$$\begin{aligned}&\textbf{unfold}(\mathcal{C}) = \textbf{bcirc}(\mathcal{A})\textbf{unfold}(\mathcal{B})\\ &\iff (\sqrt{n}F_n \otimes I_l)\textbf{unfold}(\hat{\mathcal{C}}) = (\overline{F}_n \otimes I_l)\textbf{bdiag}(\hat{\mathcal{A}})(F_n \otimes I_p)(\sqrt{n}F_n \otimes I_p)\textbf{unfold}(\hat{\mathcal{B}})\\ &\iff \textbf{unfold}(\hat{\mathcal{C}}) = \textbf{bdiag}(\hat{\mathcal{A}})\textbf{unfold}(\hat{\mathcal{B}})\\ &\iff \textbf{bdiag}(\hat{\mathcal{C}}) = \textbf{bdiag}(\hat{\mathcal{A}})\textbf{bdiag}(\hat{\mathcal{B}})\\ &\iff (F_n \otimes I_l)\textbf{bcirc}(\mathcal{C})(\overline{F}_n \otimes I_m) = (F_n \otimes I_l)\textbf{bcirc}(\mathcal{A})(\overline{F}_n \otimes I_p)(F_n \otimes I_p)\textbf{bcirc}(\mathcal{B})(\overline{F}_n \otimes I_m)\\ &\iff \textbf{bcirc}(\mathcal{C}) = \textbf{bcirc}(\mathcal{A})\textbf{bcirc}(\mathcal{B})\end{aligned}$$

□

Druga ekvivalencija nam daje efikasan način kako računati produkt tenzora.

$$\mathcal{A} * \mathcal{B} = \textbf{fold}\Big((\sqrt{n}F_n \otimes I_l)\textbf{bdiag}(\hat{\mathcal{A}})\textbf{unfold}(\hat{\mathcal{B}})\Big) = \textbf{fold}\left((\sqrt{n}F_n \otimes I_l)\begin{bmatrix}\hat{\mathcal{A}}_{(1)}\hat{\mathcal{B}}_{(1)}\\ \vdots\\ \hat{\mathcal{A}}_{(n)}\hat{\mathcal{B}}_{(n)}\end{bmatrix}\right).$$

Dakle, algoritam za tenzorsko množenje je:

Algorithm 1 Algoritam za tenzorsko množenje

Inputs: $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{l\times p\times n}, \mathcal{B} \in \mathbb{R}^{p\times m\times n}$.
Output: $\mathcal{C} = \mathcal{A} * \mathcal{B}$.
$\hat{\mathcal{A}} = \text{fft}(\mathcal{A}, [], 3)$
$\hat{\mathcal{B}} = \text{fft}(\mathcal{B}, [], 3)$
for $i = 1$ **to** n **do**
    $\hat{\mathcal{C}}(:,:,i) = \hat{\mathcal{A}}(:,:,i)\hat{\mathcal{B}}(:,:,i)$
end for
$\mathcal{C} = \text{ifft}(\hat{\mathcal{C}}, [], 3)$

Iz Leme A., za $i = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil + 1, \ldots, n$ slijedi da je

$$\hat{\mathcal{C}}_{(i)} = \overline{\hat{\mathcal{C}}_{(n-i+2)}}$$

pa možemo uštedjeti još gotovo pola matričnih množenja. Kada bismo množenje vršili po definiciji, imali bismo $\mathcal{O}(lpmn^2)$ operacija. Korištenjem brze Fourierove transformacije, kompleksnost ovog algoritma je $\mathcal{O}(lpmn + (lp + pm)nlog(n)) \approx \mathcal{O}(lpmn)$ jer je u našem slučaju često $\log(n) \ll l, m$. DFT će nam se javljati i kasnije za efikasno računanje dekompozicija tenzora.

Iz ekvivalencije

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} * \mathcal{B} \iff \mathsf{bcirc}(\mathcal{C}) = \mathsf{bcirc}(\mathcal{A})\mathsf{bcirc}(\mathcal{B})$$

i asocijativnosti množenja matrica, odmah slijedi da je množenje tenzora isto asocijativno.

Nadalje, primijetimo da je $\mathcal{Q}$ ortogonalan tenzor ako i samo kao je **bcirc**(Q) ortogonalna matrica. Zaista

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}^T * \mathcal{Q} = \mathcal{Q} * \mathcal{Q}^T = \mathcal{I} &\iff \mathsf{bcirc}(\mathcal{Q}^T * \mathcal{Q}) = \mathsf{bcirc}(\mathcal{Q} * \mathcal{Q}^T) = \mathsf{bcirc}(\mathcal{I}) \\ &\iff \mathsf{bcirc}(\mathcal{Q})^T \mathsf{bcirc}(\mathcal{Q}) = \mathsf{bcirc}(\mathcal{Q})\mathsf{bcirc}(\mathcal{Q})^T = I.\end{aligned}$$

3. Važni teoremi

Teorem. Neka je $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{l \times m \times n}$. Tada se $\mathcal{A}$ može faktorizirati kao:

$$\mathcal{A} = \mathcal{U} * \mathcal{S} * \mathcal{V}^T,$$

pri čemu je $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^{l \times l \times n}$ ortogonalan, $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^{m \times m \times n}$ ortogonalan, i $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^{l \times m \times n}$ f-dijagonalan tenzor.

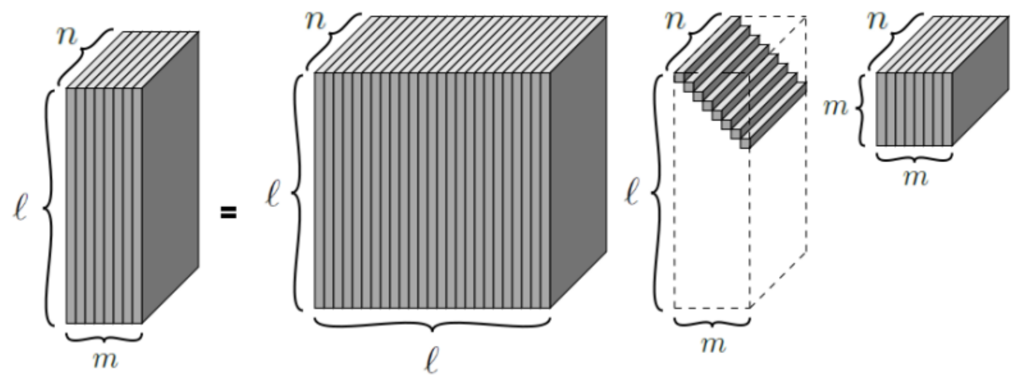

Figure 1: SVD dekompozicija tenzora

Dokaz. Iz leme B., znamo da je

$$(F_n \otimes I_l)\mathsf{bcirc}(\mathcal{A})(F_n^* \otimes I_m) = \mathsf{bdiag}(\hat{\mathcal{A}}).$$

Po lemi A., $\hat{\mathcal{A}}_{(1)} \in \mathbb{R}^{l \times m}$, pa postoji njena realna SVD dekompozicija $\hat{\mathcal{A}}_{(1)} = \hat{\mathcal{U}}_{(1)} \hat{\mathcal{S}}_{(1)} \hat{\mathcal{V}}_{(1)}^T$. Za $k = 2, \ldots, \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ izračunamo (kompleksnu!) SVD dekompoziciju slicea $\hat{\mathcal{A}}_{(k)} = \hat{\mathcal{U}}_{(k)} \hat{\mathcal{S}}_{(k)} \hat{\mathcal{V}}_{(k)}^*$. Za $k = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil + 1, \ldots, n$ stavimo da je

$$\hat{\mathcal{U}}_{(k)} = \overline{\hat{\mathcal{U}}_{(n-k+2)}}, \quad \hat{\mathcal{S}}_{(k)} = \overline{\hat{\mathcal{S}}_{(n-k+2)}}, \quad \hat{\mathcal{V}}_{(k)} = \overline{\hat{\mathcal{V}}_{(n-k+2)}}.$$

Po lemi A., za $k = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil + 1, \ldots, n$ vrijedi:

$$\hat{\mathcal{A}}_{(k)} = \overline{\hat{\mathcal{A}}}_{(n-k+2)} = \overline{\hat{\mathcal{U}}_{(n-k+2)} \hat{\mathcal{S}}_{(n-k+2)} \hat{\mathcal{V}}_{(n-k+2)}^*} = \hat{\mathcal{U}}_{(k)} \hat{\mathcal{S}}_{(k)} \hat{\mathcal{V}}_{(k)}^*.$$

Tenzore $\hat{\mathcal{U}}$, $\hat{\mathcal{S}}$ i $\hat{\mathcal{V}}$ definiramo tako da su im k-ti frontalni slicevi redom $\hat{\mathcal{U}}_{(k)}$, $\hat{\mathcal{S}}_{(k)}$, $\hat{\mathcal{V}}_{(k)}$, $k = 1, \dots, n$, a tenzore $\mathcal{U}$, $\mathcal{S}$ i $\mathcal{V}$ kao njihove inverzne Fourierove transformacije po trećem modu. Po obratu leme A., slijedi da su $\mathcal{U}$, $\mathcal{S}$ i $\mathcal{V}$ realni tenzori. Iz gornjih relacija slijedi

$$\textbf{bdiag}(\hat{\mathcal{A}}) = \textbf{bdiag}(\hat{\mathcal{U}})\textbf{bdiag}(\hat{\mathcal{S}})\textbf{bdiag}(\hat{\mathcal{V}}^*)$$

Množenjem s odgovarajućim $(F_n \otimes I)$ i $(\overline{F}_n \otimes I)$ dobivamo

$$\textbf{bcirc}(\mathcal{A}) = \textbf{bcirc}(\mathcal{U})\textbf{bcirc}(\mathcal{S})\textbf{bcirc}(\mathcal{V}^T)$$

što smo već pokazali da je ekvivalentno $\mathcal{A} = \mathcal{U} * \mathcal{S} * \mathcal{V}^T$. $\hat{\mathcal{S}}$ je f-dijagonalni tenzor, a k-ti frontalni slice od $\mathcal{S}$ vrijedi

$$\mathcal{S}_{(k)} = \sum_{j=1}^{n} \omega_n^{-(j-1)(k-1)} \hat{\mathcal{S}}_{(j)}$$

pa je $\mathcal{S}_{(k)}$ dijagonalna matrica, odnosno $\mathcal{S}$ je f-dijagonalni tenzor. Nadalje, $\textbf{bdiag}(\hat{\mathcal{U}})$ je unitarna matrica te

$$\textbf{bcirc}(\mathcal{U}) = (\overline{F}_n \otimes I_l)\textbf{bdiag}(\hat{\mathcal{U}})(F_n \otimes I_l),$$

pa je i $\textbf{bcirc}(\mathcal{U})$ unitarna matrica koja je realna, pa je orotogonalna. Analogno vrijedi za $\mathcal{V}$. □

O SVD dekompoziciji matrica znamo i puno više - jedna od tvrdnji je i o najboljoj aproksimaciji matrice onom nižeg ranga. Uz naš tenzorski produkt i prethodni teorem, vrijedi analogon:

Teorem. Neka je T-SVD dekompozicija tenzora $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{l \times m \times n}$ dana s $\mathcal{A} = \mathcal{U} * \mathcal{S} * \mathcal{V}^T$. Nadalje, za $k < \min\{l, m\}$ definirajmo:

$$\mathcal{A}_k = \sum_{i=1}^{k} \mathcal{U}(:, i, :) * S(i, i, :) * \mathcal{V}(:, i, :)^T$$

Tada je

$$\mathcal{A}_k = \operatorname*{argmin}_{\tilde{\mathcal{A}} \in M} ||\mathcal{A} - \tilde{\mathcal{A}}||_{\mathcal{F}},$$

pri čemu je

$$M = \{\mathcal{C} = \mathcal{X} * \mathcal{Y} \ | \ \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{l \times k \times n}, Y \in \mathbb{R}^{k \times m \times n}\}.$$

Napomena. Ako slijedimo dokaz teorema o T-SVD dekompoziciji, pri čemu svaku SVD dekompoziciju frontalnih sliceva zamjenimo QR dekompozicijom

$$\hat{\mathcal{A}}_{(k)} = \hat{\mathcal{Q}}_{(k)} \hat{\mathcal{R}}_{(k)}, \quad k = 1, \dots, \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil,$$

dobivamo rastav $\mathcal{A} = \mathcal{Q} * \mathcal{R}$ pri čemu su $\mathcal{Q}$ i $\mathcal{R}$ realni tenzori takvi da je $\mathcal{Q}$ ortogonalan tenzor, a $\mathcal{R}$ f-gornjetrokutasti tenzor (tenzor kojemu je svaki frontalni slice gornjetrokutasta matrica).

4. Primjene u prepoznavanju lica

4.1. Algoritmi

Primjena je motivirana tradicionalnom analizom glavnih komponenti matrice (PCA). Algoritam radi sljedeće:

Algorithm 2 Matrični PCA

Inputs: Trening slike $\mathbf{I_i}, i = 1, ..., N$, Testna slika $\mathbf{J}$, Indeks rezanja k
Output: Najbliža klasa (po nekoj mjeri) testnoj slici
$L(:, i) = \mathsf{vektoriziraj}(\mathbf{I}_i)$
$\mathbf{A} = \mathsf{kovarijacija}(L)$
$U =$ lijevi singularni vektori od $\mathbf{A}$
$\mathbf{G} = U(:, 1 : k)^T \mathbf{A}$
$\mathbf{t} = \mathsf{vektoriziraj}(\mathbf{J})$
$\mathbf{c} = U(:, 1 : k)^T \mathbf{t}$
for $i = 1$ **to** N **do**
    Izračunaj udaljenost $||c - \mathbf{G}(:, j)||_F$
end for
Vrati indeks na kojem se izračunata udaljenost minimizira

Ideja je da primijenimo analognu metodu u našem slučaju kada su objekti koje promatramo tenzori. Naravno, možemo primijeniti analognu metodu i tražiti testnoj slici najsličniju u trening datasetu, ali time ne iskorištavamo činjenicu da za istu osobu imamo slike potencijalno različitih izraza lica, osvijetljenja, kutova slikanja i slično. Dakle, prikaz osoba kao tenzora je vrlo prirodan pristup problemu.

U tu svrhu, imamo 2 osnovna pristupa. Jer poznajemo nekoliko dekompozicija tenzora, razumno je da različite pristupe možemo koristiti u algoritmu te procijeniti koji nam je u danoj situaciji najpogodniji.

Prvi pristup, koji smo obradili na predavanjima, je pomoću množenja tenzora matricom u pojedinom modu, te njemu srodna dekompozicija tenzora je HOSVD. On se zasniva na rastavu tenzora $\mathcal{T}$ kao:

$$\mathcal{T} = \mathcal{S} \times_1 U_1 \times_2 U_2 \times_3 U_3,$$

gdje su $U_i, i = 1, 2, 3$ ortogonalne matrice odgovarajućeg tipa, a $\mathcal{S}$ potpuno ortogonalan (različiti slicevi istog tipa okomiti uz Frobenijusov skalarni produkt) tenzor istog tipa kao i $\mathcal{T}$.
Pripadni algoritam za prepoznavanje lica je dakle:

Algorithm 3 HOSVD metoda

Inputs: Trening slike $\mathbf{I_{i,j}}, i = 1, ..., N, j = 1, ..., M$, Testna slika $\mathbf{J}$
Output: Najbliža klasa (po nekoj mjeri) testnoj slici
$L(:,:,i) = \mathsf{vektoriziraj}(\mathbf{I}_i)$
HOSVD $\mathcal{L} = \mathcal{S} \times_1 U_1 \times_2 U_2 \times_3 U_3$
$\mathcal{B} = \mathcal{S} \times_2 U_2 \times_3 U_3$
$\mathcal{T} = \mathsf{vektoriziraj}(\mathbf{J})$
for $e = 1$ **to** N_e **do**
    $\mathbf{C_e} = \mathcal{C}(:, e, :)$
    $\mathbf{x_e} = \mathbf{C_e}\mathcal{T}$
    for $p = 1$ **to** N_p **do**
        Izračunaj udaljenost $||c - U_1(:, p)||_F$
    end for
end for
Vrati indeks na kojem se izračunata udaljenost minimizira

Drugi algoritam se zasniva na našem produktu tenzora i njegovoj SVD dekompoziciji. Algoritam je sljedeći:

Algorithm 4 Tenzorski SVD algoritam

Inputs: Trening slike $\mathbf{I_i}, i = 1, ..., N$, Testna slika $\mathbf{J}$
Output: Najbliža klasa (po nekoj mjeri) testnoj slici
for $i = 1$ **to** N **do**
    $L(:,:,i) = \mathsf{vektoriziraj}(\mathbf{I}_i)$
end for
$\mathcal{M} = \mathsf{mean}(\mathbf{I})$
$\mathcal{A} = \mathsf{kovarijacija}(L)$
$\mathcal{U}$ = lijevi singularni tenzor od $\mathcal{A}$
$\mathcal{C} = \mathcal{U}(:, 1 : k, :)^T * \mathcal{A}$
$\mathcal{T} = \mathsf{twst}(\mathbf{J} - \mathcal{M})$
$\mathcal{B} = \mathcal{U}(:, 1 : k, :)^T * \mathcal{T}$
for $i = 1$ **to** N **do**
    Izračunaj udaljenost $||\mathcal{B} - \mathbf{C}(:, j)||_F$
end for
Vrati indeks na kojem se izračunata udaljenost minimizira

Slično, umjesto tenzora $\mathcal{U}$ iz T-SVD-a, možemo koristiti $\mathcal{Q}$ iz T-QR faktorizacije:

Algorithm 5 Tenzorski QR algoritam

Inputs: Trening slike $\mathbf{I_i}, i = 1, ..., N$, Testna slika $\mathbf{J}$
Output: Najbliža klasa (po nekoj mjeri) testnoj slici
for $i = 1$ **to** N **do**
    $L(:,:,i) = \text{vektoriziraj}(\mathbf{I}_i)$
end for
$\mathcal{M} = \text{mean}(\mathbf{I})$
$\mathcal{A} = \text{kovarijacija}(L)$
$\mathcal{Q}$ = ortogonalni tenzor iz T-QR faktorizacije
$\mathcal{C} = \mathcal{Q}(:, 1 : k, :)^T * \mathcal{A}$
$\mathcal{T} = \text{twst}(\mathbf{J} - \mathcal{M})$
$\mathcal{B} = \mathcal{Q}(:, 1 : k, :)^T * \mathcal{T}$
for $i = 1$ **to** N **do**
    Izračunaj udaljenost $||\mathcal{B} - \mathbf{C}(:, j)||_F$
end for
Vrati indeks na kojem se izračunata udaljenost minimizira

4.2. Podaci

Koristili smo 3 različita skupa podataka. Prva dva su iz Yaleove baze podataka o licima. Jedan skup podataka se sastoji od slika veličine 32x32, dok drugi 64x64 piksela. Ukupno smo koristili 165 slika (15 različitih osoba i 11 različitih ekspresija).

Figure 2: YALE 32x32 faces

Figure 3: YALE 64x64 faces

Zadnji skup podataka je iz ORL baze podataka o licima. Slike su veličine 64x64 piksela i ukupno imamo 400 slika (40 različitih osoba i 10 različitih ekspresija).

Figure 4: ORL 64x64 faces

4.3. Rezultati

Metoda kojom smo testirali efikasnost algoritama je ta da smo iz dataseta u kojemu su dane slike osoba s različitim izrazima lica (ali za svaku osobu jednak broj izraza lica) je taj da smo za svaku ekspresiju izbacili sve pripadne slike iz dataseta te za svaku izbačenu sliku tražili u preostalim slikama iz dataseta njoj najsličniju pa ispitivali je li ispravno klasificirana.

Rezultati koje smo opazili su:

- Yale (32x32)
  - HOSVD - 120/165 (73 %)
  - TSVD - 114/165 (69 %)
  - PCA - 108/165 (65 %)
  - TQR - 113/165 (68 %)
- Yale (64x64)
  - HOSVD - 132/165 (80 %)
  - TSVD - 120/165 (73 %)
  - PCA - 115/165 (70 %)
  - TQR - 117/165 (71 %)
- ORL (64x64)
  - HOSVD - 368/400 (92 %)
  - TSVD - 347/400 (87 %)
  - PCA - 341/400 (85 %)
  - TQR -346/400 (87 %)

Druga metoda s kojom smo testirali efikasnost algoritma je izbacivanje slika jednu po jednu, te ih potom klasificiramo na ostatku skupa podataka. Ova metoda je pogodna za sve algoritme osim HOSVD-a. Također, Za sve metode navodimo točnost i najmanji pripadni indeks rezanja k za koji se pripadna točnost postiže.

Rezultati koje smo opazili su:

- Yale (32x32)
  - PCA - 107/165 (64.8 %), $k = 17$

  - TQR - 109/165 (66.0 %), $k = 16$
  - TSVD - 110/165 (66.6 %), $k = 8$

- Yale (64x64)
  - PCA - 121/165 (73.3 %), $k = 49$
  - TQR - 123/165 (74.5 %), $k = 31$
  - TSVD - 122/165 (73.9 %), $k = 16$

- ORL (64x64)
  - PCA - 373/400 (93.2 %), $k = 35$
  - TQR - 380/400 (95.0 %), $k = 20$
  - TSVD - 381/400 (95.3 %), $k = 14$

Literatura

[1] K. Braman, R. C. Hoover: *Facial Recognition Using Tensor-Tensor Decompositions.* SIAM, 2013.
[2] Z. Drmač: *Napredne linearne i nelinearne numeričke metode u analizi podataka.* PMF-MO Zagreb, 2023.
[3] C. Lu, J. Feng, Y. Chen, W. Liu: *Tensor Robust Principal Component Analysis with A New Tensor Nuclear Norm.* IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence, 2019.
[4] G. Strang *Circular-Matrices.* MIT linear algebra lecture notes, 2017.