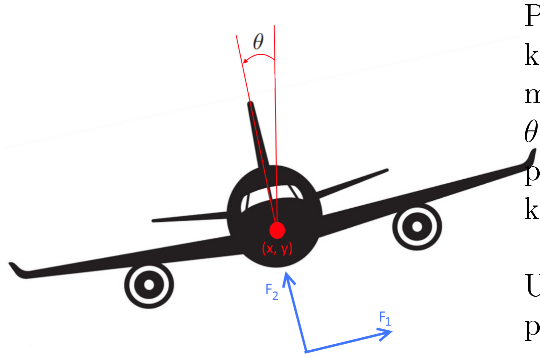
Uvod u teoriju upravljanja

Druga zadaća – 24. siječnja 2022.

1. Izračunajte $L_2(\mathrm{i}\mathbb{R})$-normu sustava

$$\hat{G}(s) = \left[\begin{array}{ccc|cc} -1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Nastojte izbjeći korištenje Pythona, osim za rješavanje Lyapunovljeve jednadžbe pomoću funkcije `lyap`.

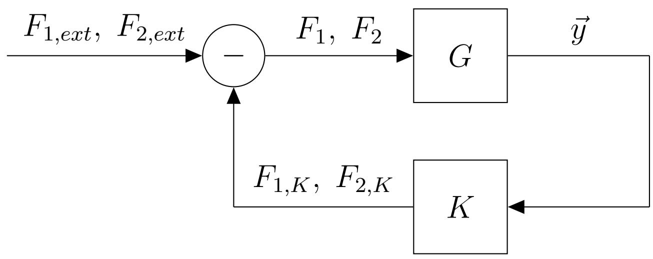
2. 

Promotrimo model malenog aviona sa slike: varijable koje sudjeluju su masa aviona m, koordinate centra mase aviona (x, y), kut otklona aviona od okomice θ, udaljenost motora od centra mase r, koeficijent prigušenja c, moment inercije J, razlike vanjskih sila i sila koje generira motor F_1, F_2 (to je ulaz u dinamički sustav).

U ovom zadatku trebate koristiti Python. Uz rješenje priložite i Jupyter notebook (odgovore možete napisati i samo u notebooku).

Jednadžbe sustava nakon linearizacije (uz pretpostavku da avion cijelo vrijeme generira vertikalnu silu koja poništava silu teže) dane su sa:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -mg\theta - c\dot{x} + F_1, \\ m\ddot{y} &= -c\dot{y} + F_2, \\ J\ddot{\theta} &= rF_1. \end{aligned}$$



(a) Napišite jednadžbe pripadnog LTI sustava $G \ldots \dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B\vec{u}$, $\vec{y} = C\vec{x} + D\vec{u}$ (bit će $A \in \mathbb{R}^{6\times 6}$, $B \in \mathbb{R}^{6\times 2}$). Pretpostavite zasad $\vec{y} = \vec{x}$, tj. izlaz iz sustava su sva njegova stanja. U preostalim zadacima uzimamo sljedeće vrijednosti parametara: $m = 4$, $J = 0.0475$, $r = 0.25$, $g = 9.8$, $c = 0.05$.

(b) Napravite simulaciju aviona (tj. na grafu prikažite ovisnost $x(t)$, $y(t)$, $\theta(t)$ kroz vrijeme t) ako se avion na početku nalazi na koordinatama $(x_0, y_0) = (1, 2)$, vodoravan je $(\theta_0 = 0)$, a na njega djeluje konstantna vanjska sila $F_{2,ext} = -mg$ dok njegovi motori miruju (tj. kontroler nije spojen). Interpretirajte što se dogodilo.

(c) Pretpostavimo sada da je avion na početku na koordinatama $(x_0, y_0) = (1, 2)$, te pod kutem $\theta_0 = -0.5$, te da na njega ne djeluje nikakva vanjska sila. Avion želimo stabilizirati pomoću LQR kontrole—to će ga dovesti na poziciju $(0, 0)$ (tj. u stanje ravnoteže). Uz pretpostavku da su kontroleru dostupna sva stanja $\vec{x} \in \mathbb{R}^6$, te da želimo minimizirati funkcional

$$J(u) = \int_0^\infty \left(\vec{x}(t)^T\vec{x}(t) + \rho\vec{u}(t)^T\vec{u}(t)\right)dt,$$

odredite optimalne kontrolere te napravite simulacije za $\rho = 1$, $\rho = 40^2$, $\rho = 200^2$. Interpretirajte nastale razlike u grafovima za različite odabire parametra ρ.

(d) Pretpostavimo sada da kontroleru nisu dostupna sva stanja, nego možemo mjeriti samo njegovu poziciju, tj. $\vec{y}(t) = [x(t), y(t)]^T$, te da prilikom modeliranja i mjerenja imamo šum koji vodi na sustav oblika

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t) + 0.05\vec{w}(t), \quad \vec{y}(t) = C\vec{x} + D\vec{u}(t) + 0.05\vec{v}(t),$$

gdje su $\vec{w}(t)$ i $\vec{v}(t)$ jedinični normalni multivarijatni slučajni vektori (bijeli šum). U sustav iz (c) dodajte Kalmanov filtar za procjenu stanja sustava (uz $\rho = 0.01$). Napravite novu simulaciju, sada uz pretpostavku da na sustav djeluje konstantna vanjska sila $F_{1,ext} = -1$, $F_{2,ext} = 1$. Uspijeva li Kalmanov filtar dobro procjenjivati stanja sustava?

(e) Za dodatna 3 boda, napravite animaciju koja kroz vrijeme prikazuje pozicije i nagib aviona u koordinatnoj ravnini, za svaki od gore navedenih slučajeva.

3. Koristeći tehniku supstitucije napravljenu na predavanjima, u Pythonu napišite funkciju `K = lqr_gen( sys_t, Q, S, R )` koja rješava općenitiji problem LQR kontrole, tj. minimizacije funkcionala

$$J(u) = \int_0^\infty \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt,$$

uz uvjet $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, gdje su A i B matrice sustava `sys_t`. Ovdje (radi jednostavnosti) pretpostavljamo da su Q, R i $\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix}$ pozitivno definitne matrice. Funkcija vraća matricu K takvu da $u(t) = K \cdot x(t)$ minimizira funkcional. Možete pozivati funkcije `lqr` ili `care`.

4. Neka su $A, Q, G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ takve da je $Q \geq 0$ i $G \geq 0$.

(a) Pretpostavimo da stupci matrice $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times n}$ razapinju neki n-dimenzionalni invarijantni potprostor Hamiltonove matrice $\begin{bmatrix} A & G \\ Q & -A^T \end{bmatrix}$, te da je $X_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regularna. Dokažite da je tada $X = -X_2X_1^{-1}$ jedno rješenje Riccatijeve jednadžbe $A^TX + XA + Q - XGX = 0$.

(b) Neka je X_s simetrično rješenje iste Riccatijeve jednadžbe za koje vrijedi da je matrica $A - GX_s$ Hurwitzova. Pretpostavimo da je matrica X iz podzadatka (a) također simetrična. Dokažite da tada vrijedi $X \leq X_s$.
Uputa: Oduzimanjem Riccatijevih jednadžbi pokažite da je matrica $X_s - X$ rješenje jedne Lyapunovljeve jednadžbe kojoj je linearni član Hurwitzova matrica, a slobodni član pozitivno semidefinitna matrica.