Problem triju tijela (satelit, Mjesec, Zemlja)

Ermin Mustafić

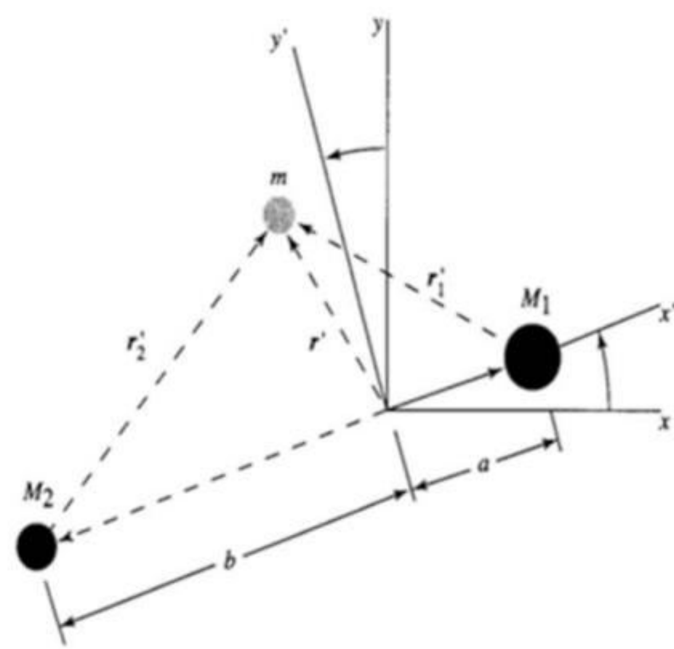
5. lipnja 2022.

Općenito, problem triju tijela se bavi pitanjem kako će se tri objekta, različitih masa, početnih položaja i brzina, gibati pod utjecajem nekih sila, kao što su gravitacija, Coulombova te elastična sila.

Veličine nebeskih tijela u Sunčevom sustavu su toliko male da mogu biti zanemarene. Stoga se ta tijela mogu promatrati kao materijalne točke, tj. bezdimenzionalni objekti koji imaju masu. Ne uzimajući u obzir ostale objekte, satelit, Mjesec i Zemlja se mogu promatrati kao problem triju tijela.

Restrikcija zadanog problema pretpostavlja da je masa jednog tijela neznatna, kao i sile međudjelovanja između ostala dva tijela. Nadalje, pretpostavljamo da se tijela gibaju kružno, umjesto eliptično, te da su u istoj ravnini. Mjesec i Zemlja, u ovom problemu, će biti stacionarna, a satelit će imati pet ravnotežnih, tzv. Lagrangeovih točaka.

Ukratko, imamo sljedeću skicu:



M_1 – Zemlja, M_2 – Mjesec, m – satelit

Dobivamo tri obične diferencijalne jednadžbe drugog reda:

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}_1}{dt^2} = -Gm_2 \frac{\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|^3} - Gm_3 \frac{\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_3}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_3|^3},$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}_2}{dt^2} = -Gm_3 \frac{\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_3}{|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_3|^3} - Gm_1 \frac{\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|^3},$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}_3}{dt^2} = -Gm_1 \frac{\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1|^3} - Gm_2 \frac{\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_2|^3},$$

gdje je G gravitacijska konstanta.

Pojednostavljujemo gornju jednadžbu tako da će duljina između Mjeseca i Zemlje biti 1, a vrijeme će biti u jedinicama inverzne kutne brzine kružnog gibanja. Uz $m_3 = 0$, imamo sljedeći niz jednakosti:

$$|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2| = 1, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{G(m_1+m_2)}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^3}} = 1, \qquad G(m_1+m_2) = 1,$$

$$\alpha \equiv \frac{m_2}{m_1+m_2}, \qquad Gm_2 = \frac{Gm_2}{G(m_1+m_2)} = \alpha, \qquad Gm_1 = 1-\alpha.$$

Nakon uvrštavanja gornjih izraza u jednadžbe, dobije se sljedeći sustav:

$$\ddot{x}' = -\frac{(1-\alpha)(x'-\alpha)}{\left((x'-\alpha)^2+y'^2\right)^{3/2}} - \frac{\alpha(x'+1-\alpha)}{\left((x'+1-\alpha)^2+y'^2\right)^{3/2}} + x' + 2\dot{y}',$$

$$\ddot{y}' = -\frac{(1-\alpha)y'}{\left((x'-\alpha)^2+y'^2\right)^{3/2}} - \frac{\alpha y'}{\left((x'+1-\alpha)^2+y'^2\right)^{3/2}} + y' - 2\dot{x}'.$$

Prva dva izraza na desnim stranama su gravitacijska ubrzanja uzrokovana masivnijim tijelima, treći izrazi su centripetalna, dok su četvrti Coriolisova ubrzanja.

Kao što je i prije spomenuto, imamo pet Lagrangeovih točaka koje predstavljaju pet partikularnih rješenja problema. Pozadina toga je Lagrangeova mehanika u kojoj se koristi varijacijski račun. Naime, cilj je minimizirati funkcional

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt,$$

gdje je L Lagrangian. Vrijedi $L = T - V$, gdje je T kinetička, a V potencijalna energija.

Lagrangeove točke:

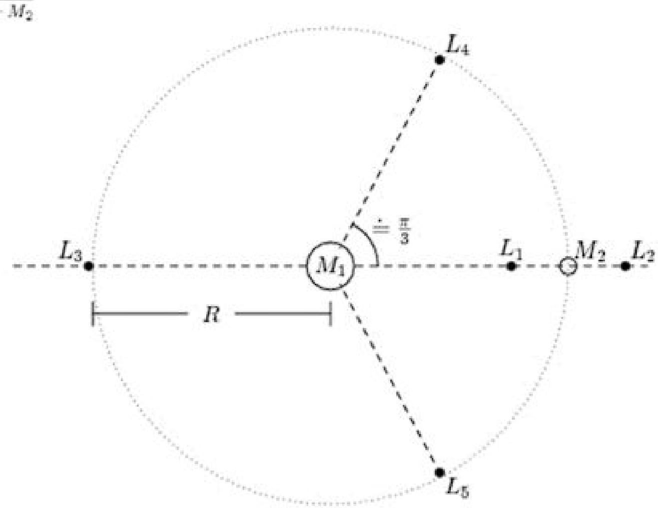
$$L_1 = \left(R \cdot \left(1 - \sqrt[3]{\frac{\alpha}{3}}\right), 0\right) \qquad \alpha = \frac{M_2}{M_1 + M_2}$$

$$L_2 = \left(R \cdot \left(1 + \sqrt[3]{\frac{\alpha}{3}}\right), 0\right)$$

$$L_3 = \left(-R \cdot \left(1 + \frac{5\alpha}{12}\right), 0\right)$$

$$L_4 = \left(\frac{R}{2} \cdot \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}, \ \frac{\sqrt{3}}{2}R\right)$$

$$L_5 = \left(\frac{R}{2} \cdot \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)$$



L_1, L_2, L_3 su sedlaste, a L_4 i L_5 su točke maksimuma

Problem se svodi na četiri jednadžbe prvog reda, tj. definiramo vektor:

$$z = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}.$$

Zadajemo početni položaj te početne brzine u trenutku $t_0 = 0$. Konačno vrijeme će varirati ovisno o primjeru.

Problem riješavamo numerički, koristeći funkcije `rk4()` te *Matlab-ovu* `ode45()`.

Literatura:

[1] Guan, Tianyuan: *Special cases of the three body problem*
[2] Trim, Nkosi Nathan: *Visualizing solutions of the circular restricted three-body problem*