# Varijacijski račun i primjene

## Viseći kabel

Ermin Mustafić

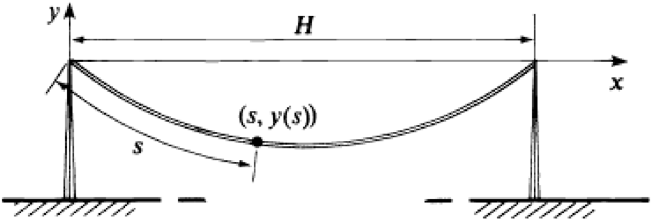
PMF-MO, Zagreb

12. svibnja 2023.

# Sadržaj

# Uvod

Problem: Odrediti oblik, odnosno položaj kojeg će neproduljivi kabel poprimiti pod utjecajem vlastite težine nakon što je slobodno pušten i pričvršćen u oba kraja na istoj visini.




**Slika 1**: Skica visećeg kabla

# Uvod

Bernoullijev princip: Traženi oblik kabla će minimizirati funkcional potencijalne energije

$$F(y) = W \int_0^L y(s)\, ds,$$

gdje je $W = const.$ težina po jedinici duljine.

Preciznije, za kabel duljine $L$, oblik je zadan funkcijom $y \in C^1[0, L]$, uz $y(0) = y(L) = 0$.

# Uvjet neproduljivosti

Uvjet neproduljivosti je dan izrazom

$$x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1,$$

gdje je $x$ horizontalna komponenta produljenja. Kako je ukupna horizontalna duljina jednaka $H$, dobivamo funkcional

$$G(y) = \int_0^L \sqrt{1 - y'(s)^2}\, ds = \int_0^L dx(s) = H. \qquad (1)$$

# E-L jednadžbe

**Teorem**

Neka je $D \subset \mathbb{R}^2$ neprazan, povezan i otvoren takav da su, za neke konstante $\lambda_j$, $j = 1, ..., N$, $f(x, y, z)$ i $\lambda_j g_j(x, y, z)$ konveksne na $[a, b] \times D$ (te barem jedna strogo konveksna). Neka je

$$\tilde{f} = f + \sum_{j=1}^{N} \lambda_j g_j.$$

Tada svako rješenje $y_0$ diferencijalne jednadžbe

$$\frac{d}{dx}\tilde{f}_z(y(x)) = \tilde{f}_y(y(x)) \quad na\,(a, b)$$

minimizira

$$F(y) = \int_a^b f(y(x))\,dx$$

# E-L jednadžbe

(jedinstveno) na

$$\mathcal{D} = \{y \in C^1[a,b] : y(a) = y_0(a), y(b) = y_0(b), (y(x), y'(x)) \in D\}$$

pod uvjetima

$$G_j(y) := \int_a^b g_j(y(x))\,dx = G_j(y_0), \quad j = 1, \ldots, N.$$

U našem slučaju je $f(s,y,z) = Wy$ konveksna na $[0,L] \times \mathbb{R}^2$, a $g(s,y,z) = -\sqrt{1-z^2}$ strogo konveksna na $[0,L] \times \mathbb{R} \times (-1,1)$. Stoga je modificirana funkcija $\tilde{f}(s,y,z) = Wy - \lambda\sqrt{1-z^2}$ strogo konveksna za $\lambda > 0$.

# E-L jednadžbe

Rješavamo E-L jednadžbu u skupu

$$\mathcal{D} = \{y \in C^1[0, L] : y(0) = y(L) = 0, |y'(s)| < 1, \forall s \in (0, L)\}.$$

Dobijemo

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\lambda y'(s)}{\sqrt{1 - y'(s)^2}}\right) = W,$$

iz čega slijedi

$$\frac{\lambda y'(s)}{\sqrt{1 - y'(s)^2}} = s + c, \tag{2}$$

gdje je konstanta $\lambda$ zamijenjena s $W\lambda$, a $c$ je nova konstanta.

# E-L jednadžbe

Iz uvjeta simetričnosti oko $l = L/2$, $y(l-s) = y(l+s)$, deriviranjem i uvrštavanjem $s = l$ se dobije $y'(l) = 0$. Slijedi da je $c = -l$ te iz (2) dobivamo ODJ:

$$\begin{cases} y'(s)^2 = \frac{(s-l)^2}{\lambda^2+(s-l)^2}, \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Lako se vidi da je rješenje

$$y(s) = \int_0^s \frac{t-l}{\sqrt{\lambda^2+(t-l)^2}}\,dt = \sqrt{\lambda^2+(t-l)^2}\Big|_0^s,$$

odnosno,

$$y(s) = \sqrt{\lambda^2+(l-s)^2} - \sqrt{\lambda^2+l^2} \quad na\,[0,l].$$

# E-L jednadžbe

Uvrštavanjem $(3)_1$ u $(1)$ dobivamo

$$\int_0^l \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + (l-s)^2}}\, ds = \frac{H}{2}.$$

Supstitucijom $l - s = \lambda \sinh\theta$ dobijemo da je

$$\lambda \sinh^{-1}\left(\frac{l}{\lambda}\right) = \frac{H}{2}.$$

Slijedi da je

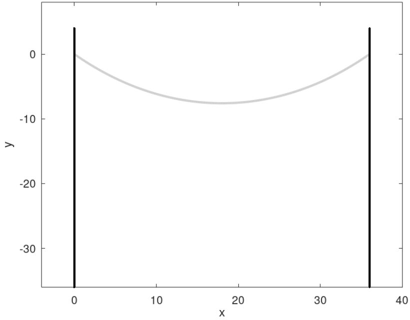
$$\lambda = \frac{l}{\sinh\alpha},$$

gdje je $\alpha$ izabrana na način da je $(\sinh\alpha)/\alpha = L/H$.

# Parametarski zapis i primjer

Konačno, za $s \in [0, l]$, traženi oblik kabla je dan s

$$x(s) = \int_0^s \sqrt{1 - y'(t)^2}\, dt = \frac{H}{2} - \lambda \sinh^{-1}\left(\frac{l-s}{\lambda}\right),$$
$$y(s) = \sqrt{\lambda^2 + (l-s)^2} - \sqrt{\lambda^2 + l^2}.$$




**Slika 2**: Primjer kabla duljine $L = 40$ i horizontalnog raspona $H = 36$

# Literatura


1. J. L. Troutman: *Variational Calculus and Optimal Control: Optimisation with Elementary Convexity, Second Edition*. Springer, 1991.
2. I. A. Griva, J. R. Vanderbei: *Case Studies in Optimisation: Catenary Problem*. Princeton, 2003.