Mehanika fluida

Toplinski tok u tankim (ili dugim) domenama

Ermin Mustafić

PMF-MO, Zagreb

2. lipnja 2023.

Sadržaj

Aproksimacije: uske geometrije

- Ime dolazi iz klasične teorije lubrikacije ili podmazivanja u strojarstvu, povezane s Reynoldsom.
- Fizikalna domena je duga, te tanka bar u jednoj dimenziji, poput cijevi ili ploče.
- Koordinate različito skaliramo, iz čega proizlazi mali *parametar tankoće*

$$\epsilon = \frac{\textit{karakteristicna debljina}}{\textit{karakteristicna duljina}}.$$

- Općenito, originalni problem je vrlo težak ili nemoguć za riješiti egzaktno, ili čak numerički. Nije jednostavno ni dokazati da aproksimacijsko rješenje konvergira.

Toplinski tok u štapu varijabilnog poprečnog presjeka (1)

Promatramo stacionarni toplinski tok u domeni $0 < x < L$, $-h(x) < y < h(x)$. Definirajmo

$$\epsilon = \frac{H_0}{L} \ll 1,$$

gdje je H_0 karakteristična debljina. Tada postoji funkcija H takva da je

$$h(x) = H_0 H\left(\frac{x}{L}\right).$$

Pretpostavimo još i pad temperature s $T = T_i$, na $x = 0$, do $T = 0$ na $x = L$. Nadalje, temperatura T zadovoljava

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < L, \quad -h(x) < y < h(x),$$

zajedno s Dirichletovim rubnim uvjetima

$$T(0, y) = T_i, \quad T(L, y) = 0$$

te Neumannovim

$$\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{n}} = 0, \quad y = \pm h(x).$$

Fizikalni argumenti

- Fluks je aproksimativno jednodimenzionalan i nema gubitka topline na stranama. Stoga je temperatura T neovisna o varijabli y. Pišemo $T(x, y) \approx T_0(x)$.

Toplinski tok u štapu varijabilnog poprečnog presjeka (3)

- Toplinski fluks je dan s

$$Q(x) = \int_{-h(x)}^{h(x)} -k\frac{\partial T}{\partial x}\, dy.$$

Zato što je $\partial T/\partial y \approx 0$, imamo

$$Q(x) \approx -2kh(x)\frac{dT_0}{dx}.$$

- Toplina je sačuvana, odnosno $dQ/dx = 0$, stoga je

$$\frac{d}{dx}\left(h(x)\frac{dT_0}{dx}\right) \approx 0.$$

Rješenje gornjeg ODJ-a, zajedno s rubnim uvjetima, daje ponašanje temperature T vodećeg reda.

Gore opisana fizikalna intuicija je u redu, no želimo ju malo bolje opravdati matematički. Želimo znati koliku grešku radimo, što zapravo i je srž asimptotičke analize. Drugim riječima, želimo iskoristiti tankoću domene.

Skaliramo varijable

$$x = LX, \quad y = H_0 Y.$$

Nakon skaliranja T s T_i dobijemo

$$\epsilon^2 \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} = 0, \quad 0 < X < 1, \quad -H(X) < Y < H(X), \tag{1}$$

$$T(0, Y) = 1, \quad T(1, Y) = 0. \tag{2}$$

Toplinski tok u štapu varijabilnog poprečnog presjeka (5)

Za $y = \pm h(x)$ imamo

$$\boldsymbol{n} = \frac{(-h'(x), \pm 1)}{\sqrt{1 + (h'(x))^2}}$$

pa je $\nabla T \cdot \boldsymbol{n} = -h'(x)\partial T/\partial x \pm \partial T/\partial y = 0$. U novim varijablama je taj izraz jednak

$$\pm \frac{\partial T}{\partial Y} - \epsilon^2 H'(X)\frac{\partial T}{\partial X} = 0 \quad na \quad Y = \pm H(X). \qquad (3)$$

Primjetimo da je sada domena $O(1) \times O(1)$ te da je mali parametar ϵ pomaknut u jednadžbu.

Zapišimo temperaturu u obliku

$$T(X,Y) = T_0(X,Y) + \epsilon^2 T_1(X,Y) + \ldots, \tag{4}$$

iz čega, koristeći (1), dobijemo da je uz

$$\epsilon^0: \quad \frac{\partial^2 T_0}{\partial Y^2} = 0. \tag{5}$$

Iz (4), dobijemo da je uz vodeći član rubni uvjet jednak

$$\epsilon^0: \quad \frac{\partial T_0}{\partial Y} = 0 \quad na \quad Y = \pm H(X). \tag{6}$$

Lako se vidi da iz (5) i (6) slijedi

$$T_0 = T_0(X).$$

Još ne znamo T_0. U tu svrhu, trebamo odrediti T_1. Iz (4) uočavamo da je

$$\frac{\partial^2 T_0}{\partial Y^2} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 T_0}{\partial X^2} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 T_1}{\partial Y^2} + ... = 0,$$

iz čega slijedi

$$\epsilon^2 : \quad \frac{\partial^2 T_1}{\partial Y^2} = -\frac{\partial^2 T_0}{\partial X^2}.$$

Rješenje je očito

$$T_1(X,Y) = -\frac{1}{2}Y^2\frac{\partial^2 T_0}{\partial X^2} + C(X), \tag{7}$$

gdje je C proizvoljna C^1 funkcija. Iz (3) slijedi da je

$$\pm\left(\frac{\partial^2 T_0}{\partial Y^2} + \epsilon^2\frac{\partial^2 T_1}{\partial Y^2}\right) - \epsilon^2 H'(X)\frac{\partial^2 T_0}{\partial X^2} + \ldots = 0 \quad na \quad Y = \pm H(X),$$

odnosno

$$\epsilon^2: \quad \pm\frac{\partial^2 T_1}{\partial Y^2} - H'(X)\frac{d^2 T_0}{dX^2} = 0 \quad na \quad Y = \pm H(X).$$

Toplinski tok u štapu varijabilnog poprečnog presjeka (9)

Deriviranjem izraza (7) te uvrštavanjem u gornju jednadžbu imamo

$$-H(X)\frac{d^2T_0}{dX^2} - H'(X)\frac{dT_0}{dX} = \frac{d}{dX}\left(H(X)\frac{dT_0}{dX}\right) = 0,$$

što je ista stvar koju smo dobili iz fizikalne intuicije, no sada znamo da radimo grešku $O(\epsilon^2)$.

Napomena

Zadani problem je zapravo Laplaceova jednadžba s rubnim uvjetima za koju znamo da postoji egzaktno rješenje. Može se riješiti preko Greenove funkcije, što je nešto zahtjevnije.

Toplinski tok u dugoj i tankoj domeni s hlađenjem (1)

Promatramo stacionaran toplinski tok u pravokutnoj domeni $0 < x < L$, $-H_0 < y < H_0$, gdje je

$$\frac{H_0}{L} = \epsilon \ll 1.$$

Ponovno imamo pad temperature s T_i, na $x = 0$, do 0 na $x = L$, ali s Newtonovim zakonom hlađenjem na stranama i koeficijentom izmjene topline Γ. Temperatura zadovoljava istu diferencijalnu jednadžbu i Dirichletov rubni uvjet, no sada umjesto Neumannovog, imamo Robinov rubni uvjet

$$\pm k \frac{\partial T}{\partial y} + \Gamma T = 0 \quad na \quad y = \pm H_0.$$

Toplinski tok u dugoj i tankoj domeni s hlađenjem (2)

Fizikalni argument

Ako je toplinski fluks ponajviše u x-smjeru (što nije toliko očito kao prije) takav da možemo raditi s prosjekom temperature po poprečnom presjeku cijevi i ako je gubitak topline proporcionalan tom prosjeku, onda je

$$\text{gradijent toplinskog fluksa} = \text{stopa hladjenja}$$

ili, ako označimo temperaturu s $T_0(x)$,

$$-k\frac{d^2T}{dx^2} \approx \Gamma T.$$

Toplinski tok u dugoj i tankoj domeni s hlađenjem (3)

Kao i ranije, skaliranjem dobivamo

$$\epsilon^2 \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} = 0, \quad 0 < X < 1, \quad -1 < Y < 1,$$
$$T(0, Y) = 1, \quad T(1, Y) = 0$$

te

$$\frac{\partial T}{\partial Y} \pm \gamma T = 0 \quad \textit{na} \quad Y = \pm 1, \tag{8}$$

gdje je $\gamma = \epsilon L \Gamma / k$ bezdimenzionalni koeficijent izmjene topline, tzv. *Biotov (Nussretov) broj*.
Najzanimljiviji slučaj je kada je $\gamma = O(\epsilon^2)$ pa označimo $\gamma = \epsilon^2 \alpha^2$, gdje je $\alpha^2 = O(1)$.

Toplinski tok u dugoj i tankoj domeni s hlađenjem (4)

Kao i prije, imamo

$$T(X,Y) = T_0(X,Y) + \epsilon^2 T_1(X,Y) + ...,$$
$$\epsilon^0 : \quad T_0 = T_0(X),$$
$$\epsilon^2 : \quad \frac{\partial^2 T_1}{\partial Y^2} = -\frac{d^2 T_0}{dX^2},$$

što daje rješenje za T_1:

$$T_1(X,Y) = -\frac{1}{2} Y^2 \frac{d^2 T_0}{dX^2} + C(X). \tag{9}$$

Iz rubnog uvjeta (8) slijedi da je

$$\epsilon^2 : \quad \frac{\partial T_1}{\partial Y} \pm \alpha^2 T_0(X) = 0 \quad na \quad Y = \pm 1.$$

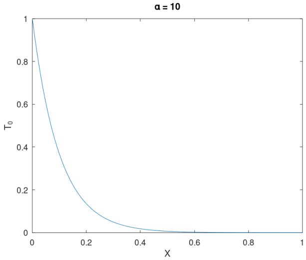
Toplinski tok u dugoj i tankoj domeni s hlađenjem (5)

Deriviranjem izraza (9) i uvrštavanjem u gornju jednadžbu slijedi:

$$-\frac{d^2 T_0}{dX^2} + \alpha^2 T_0 = 0.$$

Dobili smo istu stvar kao i kod fizikalnog argumenta, do na skaliranje. Uz rubne uvjete na $X = 0$ i $X = 1$ rješenje je

$$T_0(X) = \frac{\sinh(\alpha(1 - X))}{\sinh \alpha}.$$



Advekcija-difuzija u dugoj i tankoj domeni (1)

Domena je ista kao u prethodnom primjeru, no sada se fluid u toj domeni giba zadanom brzinom U u x-smjeru. Model je dan jednadžbom

$$\rho c U \frac{\partial T}{\partial x} = k \triangle T \tag{10}$$

s rubnim uvjetima

$$T = T_i \quad na \quad x = 0, \quad T = 0 \quad na \quad y = \pm H_0,$$
$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad na \quad x = L.$$

Zadnji uvjet nije baš realan, više je neko nagađanje. Naime, teško je znati što se događa na tom rubu, no zapravo nam ni neće biti bitno. Možemo čak staviti i $T = 0$, što je fizikalno nemoguće ostvariti.

Advekcija-difuzija u dugoj i tankoj domeni (2)

Kao i ranije, skaliranjem iz (10) dobivamo

$$\frac{\rho c U H_0^2}{kL}\frac{\partial T}{\partial X} = \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 T}{\partial X^2}$$

te rubne uvjete

$$T(0, Y) = 1, \quad T(X, \pm 1) = 0, \quad T(1, Y) = 0.$$

Bezdimenzionalni broj

$$Pe = \frac{\rho c U H_0^2}{kL}$$

se zove *Pecletov broj*. Mjeri relativni odnos advekcije u x-smjeru i kondukcije u y-smjeru. Pretpostavimo da je $O(1)$.

Advekcija-difuzija u dugoj i tankoj domeni (3)

Ponovno imamo

$$T(X,Y) = T_0(X,Y) + \epsilon^2 T_1(X,Y) + ...$$

Slijedi:

$$\frac{\partial T_0}{\partial X} = \frac{\partial^2 T_0}{\partial Y^2}, \quad 0 < X < 1,$$
$$T_0 = 0, \quad na \quad Y = \pm 1.$$

Kako je gornja jednadžba parabolička, u kojoj bi X predstavljao vrijeme, uzimamo uvjet u $X = 0$.

Advekcija-difuzija u dugoj i tankoj domeni (4)

Rješenje je dano u obliku

$$T_0(X,Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n+\frac{1}{2}} \cos((n+\frac{1}{2})\pi Y) e^{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2 X}$$

koje ne zadovoljava uvjet u $X = 1$. To se može riješiti uvođenjem graničnog (rubnog) sloja.