Prepoznavanje lica korištenjem tenzor-tenzor dekompozicija

Tri tenzora
Bruno Ljubičić
Hrvoje Olić
Ermin Mustafić

May 21, 2023

Sadržaj

Cirkularne matrice

Za $a = (a_0, \ldots, a_{n-1})^T \in \mathbb{R}^n$ promatramo njenu cirkularnu matricu kao

$$\mathrm{circ}(a) = \begin{bmatrix} a_0 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_0 \end{bmatrix}$$

Važno svojstvo cirkularnih matrica je da ih se može dijagonalizirati pomoću DFT matrica.

DFT matrica

Za $n \in \mathbb{N}$, neka je $\omega_n = e^{-\frac{2\pi i}{n}}$. Matricu

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} \omega_n^{0\cdot 0} & \omega_n^{0\cdot 1} & \dots & \omega_n^{0\cdot(n-1)} \\ \omega_n^{1\cdot 0} & \omega_n^{1\cdot 1} & \dots & \omega_n^{1\cdot(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_n^{(n-1)\cdot 0} & \omega_n^{(n-1)\cdot 1} & \dots & \omega_n^{(n-1)\cdot(n-1)} \end{bmatrix}$$

zovemo (normaliziranom) DFT matricom reda n, a matricu $F_n^* = \overline{F}_n$ (normaliziranom) IDFT matricom reda n.

$\mathrm{circ}(a)$ i DFT matrica

Može se pokazati da su F_n i $\overline{F}_n$ unitarne matrice, te da su stupci od $\overline{F}_n$ svojstveni vektori od $\mathrm{circ}(a)$. Nadalje, svojstvene vrijednosti od $\mathrm{circ}(a)$ su vrijednosti vektora $\sqrt{n}F_n a$. Dakle vrijedi

$$\mathrm{circ}(a) = \overline{F}_n \mathrm{diag}(\sqrt{n}F_n a)F_n.$$

Za $x \in \mathbb{R}^n$, obično nam za množenje $F_n x$ treba $\mathcal{O}(n^2)$ operacija. Međutim, važno svojstvo DFT matrica je da se to množenje može obaviti u $\mathcal{O}(n \log n)$ operacija. Gornja jednakost pokazuje da isto vrijedi i za cirkularne matrice.

Ključna lema

Lema A. Neka je $v = (v_1, \dots, v_n)^T \in \mathbb{R}^n$ te $\hat{v} = \sqrt{n} F_n v$ njegova diskretna Fourierova transformacija. Tada je

$$\hat{v}_1 \in \mathbb{R}, \quad \overline{\hat{v}_k} = \hat{v}_{n-k+2}, \quad k = 2, \dots, \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil .$$

Obratno, ako vektor $\hat{v} \in \mathbb{C}^n$ zadovoljava

$$\hat{v}_1 \in \mathbb{R}, \quad \overline{\hat{v}_k} = \hat{v}_{n-k+2}, \quad k = 2, \dots, \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil .$$

tada je $v = \sqrt{n} \overline{F}_n \hat{v}$ realan.

Osnovni pojmovi

Neka je $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{l \times m \times n}$ tenzor te $\mathcal{A}_{(1)}, \dots, \mathcal{A}_{(n)}$ njegovi frontalni slicevi tada je

$$\operatorname{unfold}(\mathcal{A}) := \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{(1)} \\ \mathcal{A}_{(2)} \\ \vdots \\ \mathcal{A}_{(n)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{ln \times m}$$

i $\operatorname{fold}(\operatorname{unfold}(\mathcal{A})) = \mathcal{A}$.

Osnovni pojmovi

Definiramo operaciju cirkulante na tenzoru $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{l \times m \times n}$ kao:

$$\mathrm{bcirc}(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{(1)} & \mathcal{A}_{(n)} & \cdots & \mathcal{A}_{(2)} \\ \mathcal{A}_{(2)} & \mathcal{A}_{(1)} & \cdots & \mathcal{A}_{(3)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{A}_{(n)} & \mathcal{A}_{(n-1)} & \cdots & \mathcal{A}_{(1)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{ln \times mn}$$

Osnovni pojmovi

Definiramo operaciju $\mathrm{bdiag}\ \mathcal{A} \in \mathbb{R}^{l \times m \times n}$ kao:

$$\mathrm{bdiag}(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{(1)} & & & \\ & \mathcal{A}_{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathcal{A}_{(n)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{nl \times nm}.$$

Osnovni pojmovi

Definiramo produkt dvaju tenzora $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{l \times p \times n}$ i $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{p \times m \times n}$ kao:

$$\mathcal{A} * \mathcal{B} = \mathrm{fold}(\mathrm{bcirc}(\mathcal{A})\mathrm{unfold}(\mathcal{B})) \in \mathbb{R}^{l \times m \times n}$$

Osnovni pojmovi

U prostoru tenzora s kvadratnim frontalnim slicevima $\mathbb{R}^{l \times l \times n}$ postoji neutralni element za množenje - jedinični tenzor $\mathcal{I}_{lln}$ koji se može dobiti kao:

$$\mathcal{I}_{lln} = \mathrm{fold}\left(\begin{bmatrix} I_{ll} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}\right).$$

Primijetimo da je $\mathrm{bcirc}(\mathcal{I}_{lln}) = I_{ln}$.
Nadalje, uvodimo pojam f-dijagonalnosti. Kažemo da je tenzor f-dijagonalan ako mu je svaki frontalni slice dijagonalna matrica.

Osnovni pojmovi

Transponiranje tenzora $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{l \times m \times n}$ se realizira kao:

$$\mathcal{A}^T = \text{fold}\left(\begin{bmatrix} (\mathcal{A}_{(1)})^T \\ (\mathcal{A}_{(n)})^T \\ (\mathcal{A}_{(n-1)})^T \\ \vdots \\ (\mathcal{A}_{(2)})^T \end{bmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{l \times m \times n}$$

Vrijedi $\text{bcirc}(\mathcal{A}^T) = \text{bcirc}(\mathcal{A})^T$.
Također definiramo i pojam ortogonalnog tenzora. Kažemo da je tenzor $\mathcal{O}$ ortogonalan ako vrijedi:

$$\mathcal{O} * \mathcal{O}^T = \mathcal{O}^T * \mathcal{O} = \mathcal{I}$$

Fourierova transformacija u trećem modu

Neka je $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{l \times m \times n}$ tenzor. Tenzor $\hat{\mathcal{A}} \in \mathbb{C}^{l \times m \times n}$ definiramo tako da svaku nit u modu 3 tenzora $\mathcal{A}$ zamjenimo njenom diskretnom Fourierovom transformacijom.

To možemo zapisati preko frontalnih sliceva kao

$$\hat{\mathcal{A}}_{(k)} = \sum_{j=1}^{n} \omega_n^{(j-1)(k-1)} \mathcal{A}_{(j)}.$$

Koristeći lemu A., možemo zaključiti da vrijedi

$$\hat{\mathcal{A}}_{(1)} \in \mathbb{R}^{l \times m}, \quad \overline{\hat{\mathcal{A}}_{(k)}} = \hat{\mathcal{A}}_{(n-k+2)}, \quad k = 2, \ldots, \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil.$$

Lema B.

Neka je $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{l \times m \times n}$. Ako sa $\hat{\mathcal{A}}$ označimo Fourierovu transformaciju tenzora $\mathcal{A}$ u trećem modu. Tada vrijedi

(i)
$$\mathrm{unfold}(\hat{\mathcal{A}}) = (\sqrt{n} F_n \otimes I_l)\mathrm{unfold}(\mathcal{A}),$$

(ii)
$$(F_n \otimes I_l)\mathrm{bcirc}(\mathcal{A})(\overline{F}_n \otimes I_m) = \mathrm{bdiag}(\hat{\mathcal{A}})$$

Lema B. - Dokaz (i)

$$\mathrm{unfold}(\hat{\mathcal{A}}) = \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{A}}_{(1)} \\ \hat{\mathcal{A}}_{(2)} \\ \vdots \\ \hat{\mathcal{A}}_{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} \omega_n^{(j-1)0} \mathcal{A}_{(j)} \\ \sum_{j=1}^{n} \omega_n^{(j-1)1} \mathcal{A}_{(j)} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \omega_n^{(j-1)(n-1)} \mathcal{A}_{(j)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \omega_n^{00} I_l & \omega_n^{01} I_l & \dots & \omega_n^{0(n-1)} I_l \\ \omega_n^{10} I_l & \omega_n^{11} I_l & \dots & \omega_n^{1(n-1)} I_l \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_n^{(n-1)0} I_l & \omega_n^{(n-1)1} I_l & \dots & \omega_n^{(n-1)(n-1)} I_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{(1)} \\ \mathcal{A}_{(2)} \\ \vdots \\ \mathcal{A}_{(n)} \end{bmatrix}$$

$$= (\sqrt{n} F_n \otimes I_l) \mathrm{unfold}(\mathcal{A}).$$

Lema B. - Dokaz (ii)

Zapišimo lijevu stranu u blok trokutastom formatu.

$$(F_n \otimes I_l)\mathrm{bcirc}(\mathcal{A})(\overline{F}_n \otimes I_m) = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix}$$

pri čemu su matrice $K_{ij} \in \mathbb{R}^{l \times m}$. Treba pokazati da je

$$K_{ij} = \delta_{ij} \hat{\mathcal{A}}_{(i)}, \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Lema B. - Dokaz (ii)

Ako stavimo $\mathcal{A}_{(n\pm i)} = \mathcal{A}_{(i)}$, tada se koristeći isti rastav kao ranije, blok K_{ij} može zapisati kao

$$
\begin{aligned}
K_{ij} &= \frac{1}{n}\sum_{k_2=1}^{n}\sum_{k_1=1}^{n} \omega_n^{(i-1)(k_1-1)}\omega_n^{-(j-1)(k_2-1)}\mathcal{A}_{(k_1-k_2+1)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k_2=1}^{n}\sum_{k_1=1}^{n} \omega_n^{(i-1)(k_1-1)-(i-1)(k_2-1)+(i-1)(k_2-1)-(j-1)(k_2-1)}\mathcal{A}_{(k_1-k_2+1)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k_2=1}^{n}\sum_{k_1=1}^{n} \omega_n^{(i-1)(k_1-k_2)+(i-j)(k_2-1)}\mathcal{A}_{(k_1-k_2+1)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k_2=1}^{n} \omega_n^{(i-j)(k_2-1)} \sum_{k_1=1}^{n} \omega_n^{(i-1)(k_1-k2)}\mathcal{A}_{(k_1-k2+1)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k_2=1}^{n} \omega_n^{(i-j)(k_2-1)} \sum_{k_1=1}^{n} \omega_n^{(i-1)(k_1-1)}\mathcal{A}_{(k_1)} \\
&= \delta_{ij}\hat{\mathcal{A}}_{(i)}
\end{aligned}
$$

Lema C.

Lema C. Neka su $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{l \times p \times n}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{p \times m \times n}$ i $\mathcal{C} \in \mathbb{R}^{l \times m \times n}$ ulančani tenzori. Tada vrijedi niz ekvivalencija

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} = \mathcal{A} * \mathcal{B} &\iff \mathrm{unfold}(\mathcal{C}) = \mathrm{bcirc}(\mathcal{A})\mathrm{unfold}(\mathcal{B}) \\
&\iff \mathrm{unfold}(\hat{\mathcal{C}}) = \mathrm{bdiag}(\hat{\mathcal{A}})\mathrm{unfold}(\hat{\mathcal{B}}) \\
&\iff \mathrm{bdiag}(\hat{\mathcal{C}}) = \mathrm{bdiag}(\hat{\mathcal{A}})\mathrm{bdiag}(\hat{\mathcal{B}}) \\
&\iff \mathrm{bcirc}(\mathcal{C}) = \mathrm{bcirc}(\mathcal{A})\mathrm{bcirc}(\mathcal{B}).
\end{aligned}$$

Druga ekvivalencija nam daje efikasan način kako računati produkt tenzora.

$$\mathcal{A} * \mathcal{B} = \mathrm{fold}\left((\sqrt{n} F_n \otimes I_l) \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{A}}_{(1)} \hat{\mathcal{B}}_{(1)} \\ \vdots \\ \hat{\mathcal{A}}_{(n)} \hat{\mathcal{B}}_{(n)} \end{bmatrix} \right).$$

Algoritam za tenzorsko množenje

Algorithm 1 Algoritam za tenzorsko množenje

Inputs: $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{l \times p \times n}, \mathcal{B} \in \mathbb{R}^{p \times m \times n}$.
Output: $\mathcal{C} = \mathcal{A} * \mathcal{B}$.
$\hat{\mathcal{A}} = \mathrm{fft}(\mathcal{A}, [], 3)$
$\hat{\mathcal{B}} = \mathrm{fft}(\mathcal{B}, [], 3)$
for $i = 1$ **to** n **do**
    $\hat{\mathcal{C}}(:,:,i) = \hat{\mathcal{A}}(:,:,i)\hat{\mathcal{B}}(:,:,i)$
end for
$\mathcal{C} = \mathrm{ifft}(\hat{\mathcal{C}}, [], 3)$

Iz leme A. slijedi da za $i = 2, \dots, \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ vrijedi

$$\hat{\mathcal{C}}_{(i)} = \overline{\hat{\mathcal{C}}}_{(n-i+2)}.$$

Kada bismo množenje vršili po definiciji, imali bismo $\mathcal{O}(lpmn^2)$ operacija. Korištenjem brze Fourierove transformacije, kompleksnost ovog algoritma je $\approx \mathcal{O}(lpmn)$.

Posljedica leme C

Iz ekvivalencije

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} * \mathcal{B} \iff \mathrm{bcirc}(\mathcal{C}) = \mathrm{bcirc}(\mathcal{A})\mathrm{bcirc}(\mathcal{B})$$

i asocijativnosti množenja matrica, odmah slijedi da je množenje tenzora isto asocijativno.

Nadalje, primijetimo da je $\mathcal{Q}$ ortogonalan tenzor ako i samo kao je $\mathrm{bcirc}(Q)$ ortogonalna matrica. Zaista,

$$\begin{aligned} &\mathcal{Q}^T * \mathcal{Q} = \mathcal{Q} * \mathcal{Q}^T = \mathcal{I} \\ \iff &\mathrm{bcirc}(\mathcal{Q}^T * \mathcal{Q}) = \mathrm{bcirc}(\mathcal{Q} * \mathcal{Q}^T) = \mathrm{bcirc}(\mathcal{I}) \\ \iff &\mathrm{bcirc}(\mathcal{Q})^T \mathrm{bcirc}(\mathcal{Q}) = \mathrm{bcirc}(\mathcal{Q})\mathrm{bcirc}(\mathcal{Q})^T = I. \end{aligned}$$

T-SVD

Teorem. Neka je $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{l \times m \times n}$. Tada se $\mathcal{A}$ može faktorizirati kao:

$$\mathcal{A} = \mathcal{U} * \mathcal{S} * \mathcal{V}^T,$$

pri čemu je $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^{l \times l \times n}$ ortogonalan, $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^{m \times m \times n}$ ortogonalan, i $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^{l \times m \times n}$ f-dijagonalan tenzor.

T-SVD dokaz

Dokaz. Više puta ćemo koristiti Lemu A.
Po lemi A., $\hat{\mathcal{A}}_{(1)} \in \mathbb{R}^{l \times m}$, pa postoji njena realna SVD dekompozicija

$$\hat{\mathcal{A}}_{(1)} = \hat{\mathcal{U}}_{(1)} \hat{\mathcal{S}}_{(1)} \hat{\mathcal{V}}_{(1)}^T.$$

Za $k = 2, \ldots, \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ izračunamo (kompleksnu!) SVD dekompoziciju slicea $\hat{\mathcal{A}}_{(k)} = \hat{\mathcal{U}}_{(k)} \hat{\mathcal{S}}_{(k)} \hat{\mathcal{V}}_{(k)}^*$.
Za $k = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil + 1, \ldots, n$ stavimo da je

$$\hat{\mathcal{U}}_{(k)} = \overline{\hat{\mathcal{U}}_{(n-k+2)}}, \quad \hat{\mathcal{S}}_{(k)} = \overline{\hat{\mathcal{S}}_{(n-k+2)}}, \quad \hat{\mathcal{V}}_{(k)} = \overline{\hat{\mathcal{V}}_{(n-k+2)}}.$$

T-SVD nastavak dokaza

Po lemi A., za $k = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil + 1, \ldots, n$ vrijedi:

$$\hat{\mathcal{A}}_{(k)} = \overline{\hat{\mathcal{A}}}_{(n-k+2)} = \overline{\hat{\mathcal{U}}_{(n-k+2)} \hat{\mathcal{S}}_{(n-k+2)} \hat{\mathcal{V}}^*_{(n-k+2)}} = \hat{\mathcal{U}}_{(k)} \hat{\mathcal{S}}_{(k)} \hat{\mathcal{V}}^*_{(k)}.$$

Tenzore $\hat{\mathcal{U}}$, $\hat{\mathcal{S}}$ i $\hat{\mathcal{V}}$ definiramo tako da su im k-ti frontalni slicevi redom $\hat{\mathcal{U}}_{(k)}$, $\hat{\mathcal{S}}_{(k)}$, $\hat{\mathcal{V}}_{(k)}$, $k = 1, \ldots, n$, a tenzore $\mathcal{U}$, $\mathcal{S}$ i $\mathcal{V}$ kao njihove inverzne Fourierove transformacije po trećem modu. Po obratu leme A., slijedi da su $\mathcal{U}$, $\mathcal{S}$ i $\mathcal{V}$ realni! Iz gornjih relacija slijedi

$$\mathrm{bdiag}(\hat{\mathcal{A}}) = \mathrm{bdiag}(\hat{\mathcal{U}})\mathrm{bdiag}(\hat{\mathcal{S}})\mathrm{bdiag}(\hat{\mathcal{V}}^*).$$

Množenjem s odgovarajućim $(F_n \otimes I)$ i $(\overline{F}_n \otimes I)$ dobivamo

$$\mathrm{bcirc}(\mathcal{A}) = \mathrm{bcirc}(\mathcal{U})\mathrm{bcirc}(\mathcal{S})\mathrm{bcirc}(\mathcal{V}^T)$$

što smo već pokazali da je ekvivalentno $\mathcal{A} = \mathcal{U} * \mathcal{S} * \mathcal{V}^T$.

$\hat{\mathcal{S}}$ je f-dijagonalni tenzor, a za k-ti frontalni slice od $\mathcal{S}$ vrijedi

$$\mathcal{S}_{(k)} = \sum_{j=1}^{n} \omega_n^{-(j-1)(k-1)} \hat{\mathcal{S}}_{(j)}$$

pa je $\mathcal{S}_{(k)}$ dijagonalna matrica, odnosno $\mathcal{S}$ je f-dijagonalna tenzor. Nadalje, $\mathrm{bdiag}(\hat{\mathcal{U}})$ je unitarna matrica te

$$\mathrm{bcirc}(\mathcal{U}) = (\overline{F}_n \otimes I_l)\mathrm{bdiag}(\hat{\mathcal{U}})(F_n \otimes I_l),$$

pa je i $\mathrm{bcirc}(\mathcal{U})$ unitarna matrica koja je realna, pa je orotogonalna. Analogno vrijedi za $\mathcal{V}$. $\square$

Teorem aproksimacije

O SVD dekompoziciji matrica znamo i puno više - jedna od tvrdnji je i o najboljoj aproksimaciji matrice onom nižeg ranga. Uz naš tenzorski produkt i prethodni teorem, vrijedi analogon:

Teorem. Neka je T-SVD dekompozicija tenzora $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{l \times m \times n}$ dana s $\mathcal{A} = \mathcal{U} * \mathcal{S} * \mathcal{V}^T$. Nadalje, za $k < \min\{l, m\}$ definirajmo:

$$\mathcal{A}_k = \sum_{i=1}^{k} \mathcal{U}(:, i, :) * S(i, i, :) * \mathcal{V}(:, i, :)^T$$

Tada je

$$\mathcal{A}_k = \operatorname*{argmin}_{\tilde{\mathcal{A}} \in M} ||\mathcal{A} - \tilde{\mathcal{A}}||_{\mathcal{F}},$$

pri čemu je

$$M = \left\{ \mathcal{C} = \mathcal{X} * \mathcal{Y} \ \middle|\ \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{l \times k \times n}, Y \in \mathbb{R}^{k \times m \times n} \right\}.$$

T-QR dekompozicija

Ako slijedimo dokaz teorema o T-SVD dekompoziciji, pri čemu svaku SVD dekompoziciju frontalnih sliceva zamjenimo QR dekompozicijom

$$\hat{\mathcal{A}}_{(k)} = \hat{\mathcal{Q}}_{(k)}\hat{\mathcal{R}}_{(k)}, \quad k = 1, \ldots, \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil,$$

dobivamo rastav $\mathcal{A} = \mathcal{Q} * \mathcal{R}$ pri čemu su $\mathcal{Q}$ i $\mathcal{R}$ realni tenzori takvi da je $\mathcal{Q}$ ortogonalan tenzor, a $\mathcal{R}$ f-gornjetrokutasti tenzor (tenzor kojemu je svaki frontalni slice gornjetrokutasta matrica).

PCA algoritam

Algorithm 2 Matrični PCA

Inputs: Trening slike $\mathbf{I_i}, i = 1, ..., N$, Testna slika $\mathbf{J}$, Indeks rezanja k
Output: Najbliža klasa (po nekoj mjeri) testnoj slici
$L(:,:,i) = \text{vektoriziraj}(\mathbf{I}_i)$
$\mathbf{A} = \text{kovarijacija}(L)$
U = lijevi singularni vektori od $\mathbf{A}$
$\mathbf{G} = U(:,1:k)^T\mathbf{A}$
$\mathbf{t} = \text{vektoriziraj}(\mathbf{J})$
$\mathbf{c} = U(:,1:k)^T\mathbf{t}$
for $i = 1$ **to** N **do**
    Izračunaj udaljenost $||c - \mathbf{G}(:,j)||_F$
end for
Vrati indeks na kojem se izračunata udaljenost minimizira

HOSVD algoritam

Algorithm 3 HOSVD metoda

Inputs: Trening slike $\mathbf{I_{i,j}}, i = 1, ..., N, j = 1, ..., M$, Testna slika $\mathbf{J}$
Output: Najbliža klasa (po nekoj mjeri) testnoj slici
$L(:, :, i) = \text{vektoriziraj}(\mathbf{I}_i)$
HOSVD $\mathcal{L} = \mathcal{S} \times_1 U_1 \times_2 U_2 \times_3 U_3$
$\mathcal{B} = \mathcal{S} \times_2 U_2 \times_3 U_3$
$\mathcal{T} = \text{vektoriziraj}(\mathbf{J})$
for $e = 1$ **to** N_e **do**
    $\mathbf{C_e} = \mathcal{C}(:, e, :)$
    $\mathbf{x_e} = \mathbf{C_e}\mathcal{T}$
    for $p = 1$ **to** N_p **do**
        Izračunaj udaljenost $||c - U_1(:, p)||_F$
    end for
end for
Vrati indeks na kojem se izračunata udaljenost minimizira

T-SVD Algoritam

Algorithm 4 Tenzorski SVD algoritam

Inputs: Trening slike $\mathbf{I_i}, i = 1, ..., N$, Testna slika $\mathbf{J}$
Output: Najbliža klasa (po nekoj mjeri) testnoj slici
for $i = 1$ **to** N **do**
    $L(:, :, i) =$ **vektoriziraj**$(\mathbf{I}_i)$
end for
$\mathcal{M} =$ **mean**$(\mathbf{I})$
$\mathcal{A} =$ **kovarijacija**(L)
$\mathcal{U} =$ lijevi singularni tenzor od $\mathcal{A}$
$\mathcal{C} = \mathcal{U}(:, 1 : k, :)^T * \mathcal{A}$
$\mathcal{T} =$ **twst**$(\mathbf{J} - \mathcal{M})$
$\mathcal{B} = \mathcal{U}(:, 1 : k, :)^T * \mathcal{T}$
for $i = 1$ **to** N **do**
    Izračunaj udaljenost $||\mathcal{B} - \mathbf{C}(:, j)||_F$
end for
Vrati indeks na kojem se izračunata udaljenost minimizira

T-QR Algoritam

Algorithm 5 Tenzorski QR algoritam

Inputs: Trening slike $\mathbf{I_i}, i = 1, ..., N$, Testna slika $\mathbf{J}$
Output: Najbliža klasa (po nekoj mjeri) testnoj slici
for $i = 1$ **to** N **do**
  $L(:, :, i) = \textsf{vektoriziraj}(\mathbf{I}_i)$
end for
$\mathcal{M} = \textsf{mean}(\mathbf{I})$
$\mathcal{A} = \textsf{kovarijacija}(L)$
$\mathcal{Q} =$ ortogonalni tenzor iz T-QR faktorizacije
$\mathcal{C} = \mathcal{Q}(:, 1 : k, :)^T * \mathcal{A}$
$\mathcal{T} = \textsf{twst}(\mathbf{J} - \mathcal{M})$
$\mathcal{B} = \mathcal{Q}(:, 1 : k, :)^T * \mathcal{T}$
for $i = 1$ **to** N **do**
  Izračunaj udaljenost $||\mathcal{B} - \mathbf{C}(:, j)||_F$
end for
Vrati indeks na kojem se izračunata udaljenost minimizira

Podaci

Koristili smo 3 različita skupa podataka. Prva dva su iz Yaleove baze podataka o licima. Jedan skup podataka se sastoji od slika veličine 32x32, dok drugi 64x64 piksela. Ukupno smo koristili 165 slika (15 različitih osoba i 11 različitih ekspresija).

Figure: YALE 32x32 faces

Figure: YALE 64x64 faces

Podaci

Zadnji skup podataka je iz ORL baze podataka o licima. Slike su veličine 64x64 piksela i ukupno imamo 400 slika (40 različitih osoba i 10 različitih ekspresija).

Figure: ORL 64x64 faces

Prva metoda

Uspoređujemo 2 algoritma za prepoznavanje:

- Algoritam baziran na T-SVD
- Algoritam baziran na HOSVD

Metoda kojom smo testirali efikasnost algoritama je ta da smo iz dataseta u kojemu su dane slike osoba s različitim izrazima lica (ali za svaku osobu jednak broj izraza lica) je taj da smo za svaku ekspresiju izbacili sve pripadne slike iz dataseta te za svaku izbačenu sliku tražili u preostalim slikama iz dataseta njoj najsličniju pa ispitivali je li ispravno klasificirana.

Prva metoda - rezultati

Točnosti metoda koje smo razmatrali su:

- Yale (32x32)
  - HOSVD - 120/165 (73 %)
  - TSVD - 114/165 (69 %)
  - PCA - 108/165 (65 %)
  - TQR - 113/165 (68 %)
- Yale (64x64)
  - HOSVD - 132/165 (80 %)
  - TSVD - 120/165 (73 %)
  - PCA - 115/165 (70 %)
  - TQR - 117/165 (71 %)
- ORL (64x64)
  - HOSVD - 368/400 (92 %)
  - TSVD - 347/400 (87 %)
  - PCA - 341/400 (85 %)
  - TQR -346/400 (87 %)

Druga metoda

Druga metoda s kojom smo testirali efikasnost algoritma je izbacivanje slika jednu po jednu, te ih potom klasificiramo na ostatku skupa podataka. Ova metoda je pogodna za sve algoritme osim HOSVD-a. Također, Za sve metode navodimo točnost i najmanji pripadni indeks rezanja k za koji se pripadna točnost postiže.

Druga metoda rezultati

Točnosti metoda koje smo razmatrali su:

- Yale (32x32)
  - PCA - 107/165 (64.8 %), $k = 17$
  - TQR - 109/165 (66.0 %), $k = 16$
  - TSVD - 110/165 (66.6 %), $k = 8$
- Yale (64x64)
  - PCA - 121/165 (73.3 %), $k = 49$
  - TQR - 123/165 (74.5 %), $k = 31$
  - TSVD - 122/165 (73.9 %), $k = 16$
- ORL (64x64)
  - PCA - 373/400 (93.2 %), $k = 35$
  - TQR - 380/400 (95.0 %), $k = 20$
  - TSVD - 381/400 (95.3 %), $k = 14$