Iterativne metode za linearne sustave – difuzijska jednadžba

Ermin Mustafić, 26. siječnja 2022.

Općenita *difuzijska jednadžba* ili *jednadžba provođenja (eng. heat equation)* ima oblik

$$u_t - \Delta u = f ,$$

gdje su $u, f : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R},\ d \in \mathbb{N}$. u je nepoznata funkcija, a f poznata. Mi ćemo promatrati jednostavniji slučaj, odnosno kada je $d = 1$, tj. $u : [0, T] \times [a, b] \to \mathbb{R}$, za neki $T \geq 0$ te $a, b \in \mathbb{R},\ a \leq b$. Također, uzet ćemo $f = 0$ pa imamo

$$u_t(t, x) = u_{xx}(t, x) .$$

Zadajemo rubne uvjete:

$$u(t, a) = u_a(t) ,$$
$$u(t, b) = u_b(t) ,$$

kao i početni

$$u(0, x) = u_0(x) .$$

Fizikalna pozadina je distribucija topline, od kuda i naziv *heat equation*. U našem slučaju imamo samo jednu prostornu dimenziju koja može npr. modelirati štap kojeg zagrijavamo neko vrijeme, gdje znamo početnu temperaturu, uz kontrolirane rubove. Cilj nam je odrediti temperaturu u trenutku T, tj. naći vrijednosti funkcije $u(T, x)$ u cijelom diskretiziranom štapu.

Za parcijalnu derivaciju po t koristimo sljedeće aproksimacije:
a) konačna razlika unaprijed

$$u_t(t, x) \approx \frac{u(t+\delta t, x) - u(t, x)}{\delta t} ,$$

b) konačna razlika unazad

$$u_t(t, x) \approx \frac{u(t, x) - u(t-\delta t, x)}{\delta t} ,$$

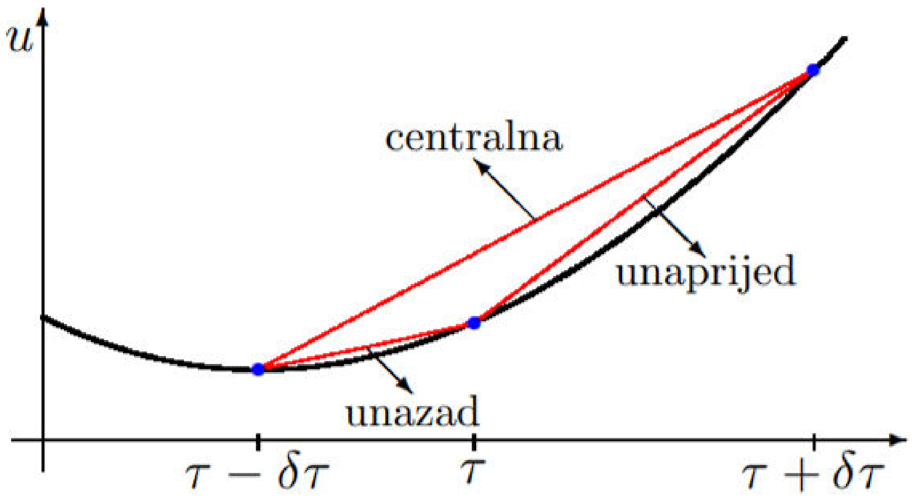
c) centralna konačna razlika

$$u_t(t, x) \approx \frac{u(t+\delta t, x) - u(t-\delta t, x)}{2\delta t} ,$$

no zbog stabilnosti se koristi

$$u_t(t, x) \approx \frac{u\left(t+\frac{\delta t}{2}, x\right) - u\left(t-\frac{\delta t}{2}, x\right)}{\delta t} .$$

Na sljedećoj skici se vidi razlika.



Naime, derivacija je najbolja lokalna linearna aproksimacija.

Za drugu parcijalnu derivaciju po x koristimo simetričnu centralnu konačnu razliku

$$u_{xx}(t,x) = \frac{u(t,x+\delta x) - 2u(t,x) + u(t,x-\delta x)}{(\delta x)^2},$$

koja se također može dobiti i iz Taylorovog teorema.

Rastavljamo segmente na ekvidistantne čvorove:

$$\delta t = \frac{T}{m}, \;\; \delta x = \frac{b-a}{n},$$

gdje su $m, n \in \mathbb{N}$ unaprijed zadani.

Eksplicitna metoda konačnih razlika:

- ne koristimo sustave, tj. matrice, jer nam metoda direktno daje rješenje,
- koristimo konačnu razliku unaprijed,
- radi stabilnosti uvodimo *Courantov broj*

$$\lambda = \frac{\delta t}{(\delta x)^2},$$

- metoda je stabilna pod uvjetom $\lambda \leq \frac{1}{2}$.

Potpuna implicitna metoda konačnih razlika:

- koristimo konačnu razliku unazad,
- matrica sustava je $(n-1) \times (n-1)$

$$A = \begin{bmatrix} 1+2\lambda & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ -\lambda & 1+2\lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\lambda \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda & 1+2\lambda \end{bmatrix},$$

• metoda je bezuvjetno stabilna.

Crank-Nicolsonova metoda:

• koristimo srednju vrijednost jednadžbi iz prethodne dvije metode,

• matrica sustava je $(n-1) \times (n-1)$

$$A = \begin{bmatrix} 1+\lambda & -\frac{\lambda}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\lambda}{2} & 1+\lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & & \ddots & -\frac{\lambda}{2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{\lambda}{2} & 1+\lambda \end{bmatrix},$$

• metoda je bezuvjetno stabilna.

Za zadnje dvije metode kod rješavanja sustava se koriste:

• faktorizacija Choleskog,

• Gauss-Seidel i SOR,

• konjugirani gradijenti.

Literatura:

[1] Bosner, Nela: *25. predavanje „Numerička analiza“ na doktorskom studiju 2011./2012.*

[2] Bosner, Nela: *Numeričko rješavanje diferencijalnih jednadžbi, 7. dio kolegija NMFM*