نکاتی در مورد متغیرهای تصادفی با توزیع خاص

متغیر تصادفی نمایی

اگر X یک متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت در بازه‌ی $[0, 1)$ باشد، آنگاه $Y = -\frac{1}{\lambda}\ln(X)$ دارای توزیع نمایی با پارامتر λ است.

متغیر تصادفی رایلی

اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع نمایی با پارامتر λ باشد، آنگاه $Y = \sqrt{X}$ دارای توزیع رایلی با پارامتر $\sigma^2 = \frac{1}{2\lambda}$ است.

متغیر تصادفی نرمال استاندارد

اگر U و V متغیرهای تصادفی یکنواخت در بازه $[0, 1)$ و مستقل باشند، آنگاه $Y = \sqrt{-2\ln(U)}\cos(2\pi V)$ و $Z = \sqrt{-2\ln(U)}\sin(2\pi V)$ دارای توزیع نرمال استاندارد هستند.

متغیر تصادفی ویبول

اگر X یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر λ باشد، آنگاه $Y = X^{\frac{1}{\beta}}$ دارای توزیع ویبول با پارامترهای $\alpha = \lambda$ و β است.

متغیر تصادفی مربع خی

اگر متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, ..., X_n$ دارای توزیع نرمال استاندارد و مستقل باشند، آنگاه $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ دارای توزیع مربع خی با درجه آزادی n است.

متغیر تصادفی ارلانگ

اگر متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, ..., X_n$ دارای توزیع نمایی با پارامتر λ و مستقل باشند، آنگاه $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ دارای توزیع ارلانگ با پارامترهای λ و n است.

متغیر تصادفی F

اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع مربع خی با درجه آزادی m و متغیر تصادفی Y دارای توزیع مربع خی با درجه آزادی n باشد و X و Y مستقل باشند آنگاه $F = \frac{\frac{X}{m}}{\frac{Y}{n}}$ دارای توزیع F با درجه آزادی‌های (m, n) است.

متغیر تصادفی t

اگر متغیرتصادفی X دارای توزیع نرمال استاندارد و متغیر تصادفی Y دارای توزیع مربع خی با درجه آزادی n باشد و X و Y مستقل باشند، آنگاه $Z = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$ دارای توزیع t با پارامتر n است.

متغیر تصادفی مثلثی

اگر U یک متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت در بازه $[۰, ۱]$ باشد، آنگاه

$$Y = \begin{cases} a + \sqrt{U(b-a)(c-a)} & \text{for } 0 \leq \mathrm{U} < \frac{\mathrm{(c-a)}}{\mathrm{(b-a)}} \\ \\ b - \sqrt{(۱-U)(b-a)(b-c)} & \text{for } \frac{\mathrm{(c-a)}}{\mathrm{(b-a)}} \leq \mathrm{U} \leq 1 \end{cases}$$

دارای توزیع مثلثی با تابع چگالی

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{۲(y-a)}{(b-a)(c-a)} & a \leq y \leq c \\ \\ \frac{۲(b-y)}{(b-a)(b-c)} & c < y \leq b \\ \\ ۰ & \text{otherwise} \end{cases}$$

است.

متغیر تصادفی لاپلاس

اگر U یک متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت در بازه $(-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲})$ باشد، آنگاه $X = -\frac{۱}{\lambda} \operatorname{sgn}(U) \ln(۱ - ۲|U|)$ دارای توزیع لاپلاس با پارامتر λ است.

متغیر تصادفی گاما

- اگر $U_۱, U_۲, ..., U_n$ متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکنواخت در بازه $[۰, ۱)$ باشند، آنگاه $X = -\sum_{i=۱}^{n} \ln(U_i) \sim \text{Gamma}(n, ۱)$ است.

- برای تولید متغیر تصادفی $X \sim \text{Gamma}(\delta, ۱)$ که $۰ < \delta < ۱$ می‌توان گام‌های زیر را طی نمود:

گام اول: متغیرهای تصادفی مستقل یکنواخت در بازه $[۰, ۱)$، U ، V و W را تولید نمایید.

گام دوم: اگر $U \leq \frac{e}{e+\delta}$ قرار دهید: $X = V^{\frac{۱}{\delta}}$ و $\eta = WX^{\delta-۱}$ ، در غیر این صورت قرار دهید : $X = ۱ - \ln V$ و $\eta = We^{-X}$.

گام سوم: اگر $\eta > X^{\delta-۱}e^{-X}$ برو به گام اول در غیر این صورت $X \sim \text{Gamma}(\delta, ۱)$ است.

- اگر برای $i = ۱, ۲, ..., n$ ، $X_i \sim \text{Gamma}(r_i, ۱)$ آنگاه $Y = \frac{۱}{\lambda} \sum_{i=۱}^{n} X_i \sim \text{Gamma}(\sum_{i=۱}^{n} r_i, \lambda)$ است.

- **نتیجه:** برای تولید متغیر تصادفی $Z \sim \text{Gamma}(n + \delta, \lambda)$ که n عدد صحیح مثبت و $۰ < \delta < ۱$ است، می‌توان ابتدا متغیرهای تصادفی $X \sim \text{Gamma}(n, ۱)$ و $Y \sim \text{Gamma}(\delta, ۱)$ را تولید نمود و سپس از رابطه‌ی زیر استفاده کرد:

$$Z = \frac{۱}{\lambda}(X + Y) \sim \text{Gamma}(n + \delta, \lambda)$$

متغیر تصادفی بتا

اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع گاما باشند و $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$ و $Y \sim \text{Gamma}(\beta, \lambda)$ ، آنگاه $Z = \frac{X}{X+Y}$ دارای توزیع $\beta(\alpha, \beta)$ است.