8 октября 2025 г.

Орел Владислав Олегович Б82-ММ

1.1 а) Доказать: $A \subseteq B \cap C \Leftrightarrow A \subseteq B$ и $A \subseteq C$.

Док-во.

- ($\Rightarrow$) Пусть $x \in A$. следует $A \subseteq B \cap C$ следует $x \in B \cap C$, то есть $x \in B$ и $x \in C$. Следовательно, $A \subseteq B$ и $A \subseteq C$.
- ($\Leftarrow$) Если $A \subseteq B$ и $A \subseteq C$, то для любого $x \in A$ имеем $x \in B$ и $x \in C$, значит $x \in B \cap C$. Следовательно, $A \subseteq B \cap C$.

б) Доказать: А $\subseteq B \backslash C \Leftrightarrow A \subseteq B$ и $A \cap C = \varnothing$.

Док-во.

- ($\Rightarrow$) Пусть $x \in A => x \in B),$ т.к $A \subseteq B. A \cap C = \varnothing => x \notin C. => .x \in B \backslash C => A \subseteq B \backslash C$
- ($\Leftarrow$) Пусть $x \in A =>$ x $\in B$ и $x \notin C, => A \subseteq B$ и $x \notin A \cap C => A \subseteq B A \cap C = \varnothing. => .x \in B \backslash C => A \subseteq B \backslash C$

1.2 а) Доказать равенство: $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Док-во.

- ($\subseteq$) Пусть $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$. Тогда $X \subseteq A \cap B$, откуда $X \subseteq A$ и $X \subseteq B$. Следовательно, $X \in \mathcal{P}(A)$ и $X \in \mathcal{P}(B)$, то есть $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
- ($\supseteq$) Пусть $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. Тогда $X \subseteq A$ и $X \subseteq B$. Следовательно, $X \subseteq A \cap B$, то есть $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$.

б) Доказать: $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

Док-во: Пусть $X \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. Тогда $X \subseteq A$ или $X \subseteq B$. В любом случае $X \subseteq A \cup B$, следовательно, $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$.

Пример: A={1}, B={1,2}

=>P(A $\cup B) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

P(A)={∅,1}, P(B)={∅,2} =>P(A)$\cup \mathcal{P}(B) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}\}$

=>P(A)$\cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup$

в) Доказать: P(A $\backslash B) \subseteq (\mathcal{P}(A) \backslash \mathcal{P}(B)) \cup \{\varnothing\}$.

Док-во:

1) Пусть X $\in \mathcal{P}(A \backslash B) => X \subseteq A \backslash B => X \subseteq A$ и $X \nsubseteq B$ Если $X = \varnothing, => X \subseteq A$ и $X \subseteq B$ Если $X \neq \varnothing, => X \subseteq A$ и $X \cap B = \varnothing => X \in \mathcal{P}(A) \backslash \mathcal{P}(B) \cup \{\varnothing\}$

Пример: A={1,2}, B={2}

=>P(A $\setminus B) = \{\emptyset, \{1\}\}$

P(A)={∅,1}, P(B)={∅,2} =>P(A)$\setminus\mathcal{P}(B) = \{\{1\},\{1,2\}\}$

=>P(A $\setminus B) \subset \mathcal{P}(A)\setminus\mathcal{P}(B) \cup \{\emptyset\}$

1.3

а) Проверка св-в ОЧП:

1) Рефлексивность: $\forall v$ должно выполняться $(v,v) \in R_1 i_k <= i_k$ будет выполняться, а для $i_k < i_k$ – нет => нерефлексивно

2) Антисимметричность: условия $\exists k : i_k < j_k$, и $i_k = j_k$ не могут выполняться одновременно => неа

$R_1 -$ не ОЧП

б) Проверка св-в ОЧП:

1) Рефлексивность: $\exists k : i_l = i_l => i_k < i_k$ – неверно => нерефлексивно

2) Антисимметричность: условия $\exists k : i_l = j_l$, и $i_k < j_k, i_l = j_l$, и $i_k < j_k$ не могут выполняться одновр

=> $R_2 -$ не ОЧП

1.4

а) E(f)=R, биекция

б) E(f)>=1, ничего

в) E(f)=R, биекция

г) E(f)>0, инъективна

д) E(f)>=2, ничего

е) E(f)=[-1;1], биекция

ж) E(f)=[0;1], ничего

з) E(f)=[-1;1], сюръективна

и) E(f)=R, сюръективна

1.5

а)неверно, т.к f может быть неинъективна

б)верно, т.к f(x)=z => g(f(x))=g(z)=y

в)верно, т.к f - инъективна и сюръективна и g - инъективна и сюръективна

г)верно, т.к g(f(x1))=g(f(x2)) => f(x1)=f(x2) => x1=x2

д)неверно, т.к f может быть неинъективна

е)верно, т.к для каждого y существует x т.ч g(f(x))=y => f(x) должен быть определен для всех y

1.8

Пусть A-множество жителей, k_i – число знакомых для каждого жителя

C_1 – множество людей с $d_i >= 0,5 * |A|,\ C_2 -$ множество людей с $d_i <= 0,5 * |A|$

=> $C_2 = A\setminus C_1$

По условию $d_i >= 0,3 * |A|$ => $C_1 - 0,3 * |A| <= d_i <= 0,5 * |A|$

=> $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ => такое возможно