Ниценко Снежана Андреевна 25.Б82-мм

д/з 09-10-25

[1.1]

а) Для $A \subseteq B \cap C \Rightarrow A \subseteq B$ и $A \subseteq C$. Тогда $\forall$ x $\in A$ и $x \in B \cap C$, значит $x \in B$ и $x \in C$. Следовательно, $A \subseteq B$ и $A \subseteq C$.

Для $A \subseteq B$ и $A \subseteq C \Rightarrow A \subseteq B \cap C$. Тогда $\forall\, x \in A$ имеем $x \in B$ и $x \in C$, значит $x \in B \cap C$. Следовательно, $A \subseteq B \cap C$.

б) Для $A \subseteq B \setminus C \Rightarrow A \subseteq B$ и $A \cap C = \varnothing$. Тогда $\forall\, x \in A$ имеем $x \in B$ и $x \notin C$. Значит $A \subseteq B$ и $A \cap C = \varnothing$.

Для $A \subseteq B$ и $A \cap C = \varnothing \Rightarrow A \subseteq B \setminus C$. Тогда $\forall\, x \in A$ имеем $x \in B$ и $x \notin C$, значит $x \in B \setminus C$. Следовательно, $A \subseteq B \setminus C$.

[1.2]

а)] (пусть) $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$. Тогда $X \subseteq A \cap B$, значит $X \subseteq A$ и $X \subseteq B$, следовательно $X \in \mathcal{P}(A)$ и $X \in \mathcal{P}(B)$, то есть $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Обратно,] $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. Тогда $X \in \mathcal{P}(A)$ и $X \in \mathcal{P}(B)$, значит $X \subseteq A$ и $X \subseteq B$, следовательно $X \subseteq A \cap B$, т.е. $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$.

б)] $X \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. Тогда $X \subseteq A$ или $X \subseteq B$, значит $X \subseteq A \cup B$, следовательно $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$.

Пример строгого включения:] $A = \{a\}$, $B = \{b\}$. Тогда $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}\}$, а $\mathcal{P}(A \cup B) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

в)] $X \in \mathcal{P}(A \setminus B)$. Тогда $X \subseteq A \setminus B$, значит $X \subseteq A$ и $X \cap B = \varnothing$.

Если $X = \varnothing$, то $X \in \{\varnothing\} \subseteq (\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)) \cup \{\varnothing\}$.

Если $X \neq \varnothing$, то $X \subseteq A$, но $X \nsubseteq B$ (так как $X \cap B = \varnothing$ и $X \neq \varnothing$), значит $X \in \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$.

Пример строгого включения:] $A = \{a, b\}$, $B = \{b\}$. Тогда $\mathcal{P}(A \setminus B) = \mathcal{P}(\{a\}) = \{\varnothing, \{a\}\}$, а $(\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)) \cup \{\varnothing\} = (\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} \setminus \{\varnothing, \{b\}\}) \cup \{\varnothing\} = \{\{a\}, \{a, b\}, \varnothing\}$.

[1.4]

(а) $f(x) = 3x + 1$: О.з. $\mathbb{R}$, инъективна (макс. 1 прообраз для каждого образа), сюръективна ($f(x)$=y разрешимо при любом x) $\Rightarrow$ биективна.

(б) $f(x) = x^2 + 1$: О.з. $[1, +\infty)$, не инъективна ($f(x) = f(-x)$), не сюръективна (не можем достичь отриц. значений).

(в) $f(x) = x^3 - 1$: О.з. $\mathbb{R}$, инъективна (сущ. прообраз для каждого образа), сюръективна ($f(x)$=y всегда разрешимо) $\Rightarrow$ биективна.

(г) $f(x) = e^x$: О.з. $(0, +\infty)$, инъективна (прообраз для каждого образа), не сюръективна (не можем достичь отриц. значений).

(д) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 1}$: О.з. $[1, +\infty)$, не инъективна ($f(x) = f(-x)$), не сюръективна (не можем получить отриц. значения).

(е) $f(x) = \sin x$ на $[-\pi/2, \pi/2]$: О.з. $[-1, 1]$, инъективна (строго возрастает на заданном промежутке), не сюръективна (не получаем значения меньше -1 и больше 1).

(ж) $f(x) = \sin x$ на $[0, \pi]$: О.з. $[0, 1]$, не инъективна ($f(\pi/3) = f(2\pi/3)$), не сюръективна.

(з) $f(x) = \sin x$ на $\mathbb{R} \to [-1, 1]$: О.з. $[-1, 1]$, не инъективна (sin периодичен), сюръективна (все зн. [-1,1] достигаются).

(и) $f(x) = x^2 \sin x$: О.з. $\mathbb{R}$, не инъективна ($f(0) = f(\pi)$), сюръективна (для каждого y сущ. x).

[1.5] $g \circ f = f(g(x))$

(а) Неверно. $f(x) = x$, $g(x) = x^2$. $g \circ f = x^2$ - не инъективна.

(б) Верно. $g(x) = x$, $f(x) = x$. $g \circ f =$ x - сюръективна.

(в) Верно. $f(x) = x$, $g(x) = x + 1$. $g \circ f =$ x+1 - биективна.

(г) Неверно. Если $A = \{x\}$, $B = \{y, z\}$, $C = \{u\}$, $g(x) = y \Rightarrow f(y) = u$, $f(z) = u$.

(д) Верно.] $g(x_1) = g(x_2)$. $\Rightarrow f(g(x_1)) = f(g(x_2))$, значит $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. Так как $g \circ f$ инъективна, $x_1 = x_2$.

(е) Неверно. $A = \{x, y\}$, $B = \{z, w\}$, $C = \{u\}$, $g(x) = z$, $g(y) = w$, $f(z) = u$, $f(w) = u$. $\Rightarrow g \circ f$ сюръективна, но f не сюръективна.