Листочек №1 "Теория множеств"

Матмех, группы 25.Б82-мм
Никитин Артем Сергеевич

Октябрь 2025

1 Задачи

Задача 1.1 [1]**.** Доказать, что

а) $A \subseteq B \cap C \iff A \subseteq B$ и $A \subseteq C$;

б) $A \subseteq B \setminus C \iff A \subseteq B$ и $A \cap C = \varnothing$.

Решение.

а) **Доказательство:**

($\Rightarrow$) Пусть $A \subseteq B \cap C$. Тогда для любого $x \in A$ имеем $x \in B \cap C$, значит $x \in B$ и $x \in C$. Следовательно, $A \subseteq B$ и $A \subseteq C$.

($\Leftarrow$) Пусть $A \subseteq B$ и $A \subseteq C$. Тогда для любого $x \in A$ имеем $x \in B$ и $x \in C$, значит $x \in B \cap C$. Следовательно, $A \subseteq B \cap C$.

б) **Доказательство:**

($\Rightarrow$) Пусть $A \subseteq B \setminus C$. Тогда для любого $x \in A$ имеем $x \in B$ и $x \notin C$. Следовательно, $A \subseteq B$ и $A \cap C = \varnothing$.

($\Leftarrow$) Пусть $A \subseteq B$ и $A \cap C = \varnothing$. Тогда для любого $x \in A$ имеем $x \in B$ и $x \notin C$ (так как если бы $x \in C$, то $x \in A \cap C \neq \varnothing$). Следовательно, $x \in B \setminus C$, значит $A \subseteq B \setminus C$.

$\square$

Задача 1.2 [2]**.** Доказать следующие равенства и включения:

а) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$;

б) $\mathcal{P}(A \cup B) \supseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$;

в) $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq (\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)) \cup \{\varnothing\}$.

Привести примеры, когда указанные включения являются строгими.

Решение.

а) **Доказательство:**

($\subseteq$) Пусть $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$, тогда $X \subseteq A \cap B \subseteq A$ и $X \subseteq A \cap B \subseteq B$, значит $X \in \mathcal{P}(A)$ и $X \in \mathcal{P}(B)$, следовательно $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

($\supseteq$) Пусть $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$, тогда $X \subseteq A$ и $X \subseteq B$, значит $X \subseteq A \cap B$, следовательно $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$.

б) **Доказательство:**

Пусть $X \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$, тогда $X \subseteq A$ или $X \subseteq B$, значит $X \subseteq A \cup B$, следовательно $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$.

Пример строгого включения: $A = \{1\}$, $B = \{2\}$. Тогда $\{1, 2\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$, но $\{1, 2\} \notin \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$, поэтому включение строгое.

в) **Доказательство:**

Пусть $X \in \mathcal{P}(A \setminus B)$, тогда $X \subseteq A \setminus B \subseteq A$, поэтому $X \in \mathcal{P}(A)$. Если $X \neq \varnothing$, то X содержит хотя бы один элемент из $A \setminus B$, значит $X \nsubseteq B$, поэтому $X \notin \mathcal{P}(B)$. Следовательно $X \in \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$.

Пример строгого включения: $A = \{1, 2\}$, $B = \{1\}$. Тогда $\mathcal{P}(A \setminus B) = \mathcal{P}(\{2\}) = \{\varnothing, \{2\}\}$, а $(\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)) \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

□

Задача 1.3 [3]**.** Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ — конечный алфавит, A^n — множество слов длины n в алфавите A.

(а) На A^n задано отношение R_1: для $v = a_{i_1} \ldots a_{i_n}$ и $w = a_{j_1} \ldots a_{j_n}$ положим $(v, w) \in R_1 \iff i_k \leq j_k$ для всех $k = 1, \ldots, n$ и $i_k < j_k$ для некоторого k. Является ли R_1 отношением частичного (линейного) порядка?

(б) На A^* задано отношение R_2: для $v = a_{i_1} \ldots a_{i_n}$ и $w = a_{j_1} \ldots a_{j_r}$ положим $(v, w) \in R_2 \iff \exists k$ от 1 до n с $i_\ell = j_\ell$ при $1 \leq \ell < k$ и $i_k < j_k$, причем первые n символов w совпадают со словом v. Является ли R_2 отношением частичного (линейного) порядка?

Решение.

(а) Нет, не является, так как отсутствует рефлексивность (требуется $i_k < j_k$ для некоторого k) и антисимметричность ($i_k \leq j_k$ и $j_k \leq i_k$ для всех k, значит $i_k = j_k$ для всех k, противоречие с условием $i_k < j_k$ для некоторого k).

(б) Нет, не является. По условию, первые n символов w совпадают с первыми n символами v, но длина v равна n, поэтому слово w можно представить как слово v с последующими a_{j_k}, где $k > n$, но это противоречие условию $\exists k$ от 1 до n с $i_\ell = j_\ell$ при $1 \leq \ell < k$ и $i_k < j_k$.

□

Задача 1.4 [2]**.** Для каждой из функций найти область значений и указать, является ли функция инъективной, сюръективной, биекцией.

(а) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x + 1;$

(б) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 1;$

(в) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - 1;$

(г) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x;$

(д) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{3x^2 + 1};$

(е) $f : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x;$

(ж) $f : [0, \pi] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x;$

(з) $f : \mathbb{R} \to [-1, 1],\ f(x) = \sin x;$

(и) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 \sin x.$

Решение.

(а) Область значений: $\mathbb{R}$
Свойства: инъективна, сюръективна, биекция

(б) Область значений: $[1, +\infty)$
Свойства: не инъективна ($f(1) = f(-1) = 2$), не сюръективна

(в) Область значений: $\mathbb{R}$
Свойства: инъективна, сюръективна, биекция

(г) Область значений: $(0, +\infty)$
Свойства: инъективна, не сюръективна

(д) Область значений: $[1, +\infty)$
Свойства: не инъективна ($f(1) = f(-1) = 2$), не сюръективна

(е) Область значений: $[-1, 1]$
Свойства: инъективна, не сюръективна

(ж) Область значений: $[0, 1]$
Свойства: не инъективна ($\sin(\pi/6) = \sin(5\pi/6) = 1/2$), не сюръективна

(з) Область значений: $[-1, 1]$
Свойства: не инъективна ($\sin 0 = \sin \pi = 0$), сюръективна

(и) Область значений: $\mathbb{R}$
Свойства: не инъективна ($f(0) = f(\pi) = 0$), сюръективна

□

Задача 1.5 [2]**.** Даны $g : A \to B$ и $f : B \to C$. Рассмотрим композицию $g \circ f : A \to C$, $(g \circ f)(x) = f(g(x))$. Определить, какие утверждения верны:

(а) Если g инъективна, то $g \circ f$ инъективна.

(б) Если f и g сюръективны, то $g \circ f$ сюръективна.

(в) Если f и g биекции, то $g \circ f$ биекция.

(г) Если $g \circ f$ инъективна, то f инъективна.

(д) Если $g \circ f$ инъективна, то g инъективна.

(е) Если $g \circ f$ сюръективна, то f сюръективна.

Решение.

(а) Неверно. Например, если $A = \{1\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{4\}$, $g(1) = 2$, тогда $f(2) = 4$, $f(3) = 4$.

(б) Верно. Пусть $c \in C$. Так как f сюръективна, существует $b \in B$ такой что $f(b) = c$, так как g сюръективна, существует $a \in A$ такой что $g(a) = b$, тогда $(g \circ f)(a) = f(g(a)) = f(b) = c$.

(в) Верно. Следует из (б) и того, что композиция инъективных функций инъективна.

(г) Неверно. Например, если $A = \{1\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{4\}$, $g(1) = 2$, тогда $f(2) = 4$, $f(3) = 4$.

(д) Верно. Пусть $g(a_1) = g(a_2)$. Тогда $f(g(a_1)) = f(g(a_2))$, значит $(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2)$. Так как $g \circ f$ инъективна, $a_1 = a_2$.

(е) Верно. Пусть $g(a) = b$, $f(b) = c$, тогда $(g \circ f)(a) = f(g(a)) = f(b) = c$ - сюръективна.

□

Задача 1.6 [3]**.** Учащиеся одной школы часто собираются группами и ходят в кафе-мороженое. После такого посещения они ссорятся настолько, что никакие двое из них после этого вместе мороженое не едят. К концу года выяснилось, что в дальнейшем они могут ходить в кафе-мороженое только поодиночке. Докажите, что если число посещений было к этому времени больше 1, то оно не меньше числа учащихся в школе.

Решение. . □

Задача 1.7 [3]**.** 30 учеников одного класса решили побывать друг у друга в гостях. Известно, что ученик за вечер может сделать несколько посещений, и что в тот вечер, когда к нему кто-нибудь должен прийти, он сам никуда не уходит. Покажите, что для того, чтобы все побывали в гостях у всех,

а) четырех вечеров недостаточно,

б) пяти вечеров также недостаточно,

в) а десяти вечеров достаточно,

г) и даже семи вечеров тоже достаточно.

Решение. Пусть S — множество вечеров, в которые происходят посещения. Каждому ученику сопоставим подмножество $A \subset S$ — множество вечеров, когда он ходит в гости. Два ученика с множествами A и B могут взаимно посетить друг друга тогда и только тогда, когда $A \not\subset B$ и $B \not\subset A$. Таким образом, чтобы все 30 учеников попарно могли встретиться, нужно выбрать 30 подмножеств S, никакие два из которых не находятся в отношении включения (то есть будем искать антицепи).

Когда $|S| \leq 5$ максимальная антицепь имеет размер $\binom{5}{2} = 10$ (или $\binom{5}{3} = 10$). Так как $10 < 30$, снова нельзя выбрать 30 подмножеств без включения. Следовательно, пяти вечеров и меньше не достаточно.

Когда $|S| \geq 7$, возьмем все подмножества размера 3: их не менее $\binom{7}{3} = 35$. Ни одно трехэлементное подмножество не содержится в другом трехэлементном. Так как $35 \geq 30$, можно выбрать 30 подмножеств размера 3, и все ученики смогут взаимно посетить друг друга. Следовательно, семи вечеров и больше достаточно. $\square$

Задача 1.8 [3]**.** У каждого из жителей города N число знакомых составляет не менее 30% населения города. Житель идет на выборы, если баллотируется хотя бы один из его знакомых. Докажите, что можно так провести выборы мэра города N из двух кандидатов, что в них примет участие не менее половины жителей.

Решение.

$\square$

Задача 1.9 [3]**.** В Думе 1600 депутатов образовали 16000 комитетов по 80 человек в каждом. Докажите, что найдутся два комитета, имеющие не менее четырех общих членов.

Решение. Предположим, что у любых двух комитетов ≤ 3 общих членов. Всего неупорядоченных пар комитетов $\frac{16000 \times 15999}{2} = 127\,992\,000$. Если у каждой пары комитетов ≤ 3 общих членов, то общее число ситуаций «депутат X сидит в комитетах A и B одновременно» для всех пар комитетов не больше $3 \times 127\,992\,000 = 383\,976\,000$.

Теперь подсчитаем это же число другим способом. Всего мест в комитетах: $16000 \times 80 = 1\,280\,000$. Среднее число комитетов на депутата $\frac{1\,280\,000}{1600} = 800$. Для депутата, который сидит в a комитетах, он является общим членом для $\frac{a(a-1)}{2}$ пар комитетов.

Найдем минимальное общее число ситуаций «депутат X сидит в комитетах A и B одновременно». Это число будет минимальным, когда количество комитетов на каждого депутата будет равно среднему числу комитетов. Если все депутаты сидят ровно в $a = 800$ комитетах, то каждый депутат дает $\frac{800 \times 799}{2} = 400 \times 799 = 319\,600$ пар. Тогда найдем минимальное значение «депутат X сидит в комитетах A и B одновременно»: $1600 \times 319\,600 = 511\,360\,000$.

Получаем противоречие: $511\,360\,000 > 383\,976\,000$ (минимальное больше максимального). Значит, предположение неверно, и существуют два комитета, имеющие не менее четырех общих членов. $\square$

Примечание.

Напоминание: задачи, имеющие сложность 1 должны уметь решать все. На решение этих задач дается дедлайн – две недели (на первый раз 09.10.2025).