Théorèmes d'interversions

Ernest van Wijland

Théorème double-limite : E, F des $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies. $A \subset E$. $f_n, f \in \mathcal{F}(A, F)$. Si :

- (f_n) converge uniformément vers f sur A
- f a une limite finie en $a \in \bar{A}$ ou $a = \pm\infty$

Alors :

- $(\lim\limits_{x \to a} f_n(x))$ converge
- $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ converge
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \lim\limits_{x \to a} f_n(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$

Intégration d'une limite : $I = [a, b]$. $a < b$ deux réels. $f_n \in \mathcal{F}(I, F)$ continues. Si :

- (f_n) converge uniformément vers f sur I

Alors :

- $\int_a^b f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f$

Primitivation d'une limite : $(f_n), f$ continues de I dans F. Soit $a \in I$. $\Phi_n(x) = \displaystyle\int_a^x f_n(t) \mathrm{d}t$ et $\Phi(x) = \displaystyle\int_a^x f(t) \mathrm{d}t$. Si :

- (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment de I

Alors :

- (Φ_n) converge uniformément sur tout segment vers Φ

Dérivation d'une limite (cas $\mathcal{C}^1$) : $f_n \in \mathcal{C}^1(I, F)$. Si :

- (f_n) converge simplement vers f
- (f_n') converge uniformément sur tout segment

Alors :

- f est $\mathcal{C}^1$ et $\forall x \in I, f'(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n'(x)$
- (f_n) converge uniformément sur tout segment vers f

Dérivation d'une limite (cas $\mathcal{C}^p$) : Soit $p \in \mathbb{N}^*$. $f_n \mathcal{C}^p$. Si :

- $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$, $f_n^{(k)}$ converge simplement
- $(f_n^{(p)})$ converge uniformément sur tout segment

Alors :

- la limite simple f de (f_n) est $\mathcal{C}^p$
- $\forall k \in [\![0, p]\!], \forall x \in I,\ f^{(k)}(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n^{(k)}(x)$

Théorème de convergence dominée : (f_n) continues par morceaux sur I. Si :

- (f_n) converge simplement vers f continue par morceaux
- il existe $\varphi \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ intégrable telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, |f_n(t)| \leq \varphi(t)$$

Alors :

- les f_n et f sont intégrables
- $\int_I f = \lim_{n \to +\infty} \int_I f_n$

Intégration terme à terme : $u_n \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$. Si :

- les u_n sont intégrables sur I
- $\sum u_n$ converge simplement et $(x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x))$ est continue par morceaux
- $\sum \int_I |u_n|$ converge

Alors :

- $(x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x))$ est intégrable sur I
- $\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n$

Continuité d'une intégrale à paramètre : $A \subset E$ un espace vectoriel normé de dimension finie. $I \subset \mathbb{R}$. $f : A \times I \to \mathbb{K}$. Si :

- $\forall t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A
- $\forall x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I
- il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable telle que

$$\forall (x,t) \in A \times I, |f(x,t)| \leq \varphi(t)$$

Alors :

- $g : x \mapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A

Limites d'intégrales : I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. $f : J \times I \to \mathbb{K}$ et $\lambda_0 \in \bar{J}$. Si :

- $\forall \lambda \in J, t \mapsto f(\lambda,t)$ est continue par morceaux
- il existe $F \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$ telle que $\forall t \in I$, $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} f(\lambda,t) = F(t)$
- il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable telle que

$$\forall (\lambda,t) \in J \times I, |f(\lambda,t)| \leq \varphi(t)$$

Alors :

- $\forall \lambda \in J$, $t \mapsto f(\lambda,t)$ intégrable
- F intégrable
- $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} \int_I f(\lambda,t)\mathrm{d}t = \int_I F(t)\mathrm{d}t$

Dérivation d'une intégrale à paramètre (cas $\mathcal{C}^1$) : Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. $f : J \times I \to \mathbb{K}$. Si :

- $\forall t \in I, x \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur J
- $\forall x \in J, t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I
- $\forall x \in J, t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I
- il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que

$$\forall (x,t) \in J \times I, |\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leq \varphi(t)$$

Alors :

- $g : J \to \mathbb{K}$ définie par $g(x) = \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^1$ sur J
- $\forall x \in J, g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$

Dérivation d'une intégrale à paramètre (cas $\mathcal{C}^p$) : Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. $f : J \times I \to \mathbb{K}$. $p \in \mathbb{N}^*$. Si :

- $\forall t \in I, x \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^p$ sur J
- $\forall x \in J, \forall k \in [\![0, p-1]\!], t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est intégrable sur I
- $\forall x \in J, t \mapsto \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)$ est continue par morceaux sur I
- $\forall [a,b] \subset J$, il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times I, |\frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)| \leq \varphi(t)$$

Alors :

- $g : J \to \mathbb{K}$ définie par $g(x) = \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^p$ sur J
- $\forall k \in [\![0, p]\!], \forall x \in J, g^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\mathrm{d}t$

Théorème de convergence dominée des séries (HP) : Soit $(c_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de réels et $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs ou nuls. Si :

- $\sum a_k$ converge
- $\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2, |c_{n,k}| \leq a_k$
- $\forall k \in \mathbb{N}, c_{n,k} \longrightarrow l_k \in \mathbb{R}$ quand $n \longrightarrow +\infty$

Alors :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_{n,k} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} l_k$

Théorème de Fubini (HP) : Soit $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ continue. On a :

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$