Cahier d'activité de la classe de 3ème

Auteur :

Adekoulé Emmanuel ILEDI

Professeur Adjoint

Tel : (+229) 67 39 92 89/ 95 37 13 89

E-mail : iledi.emmanuel@yahoo.fr

Version : SEPTEMBRE 2022

PROGRAMME D'ETUDES DE LA CLASSE DE $3^{ème}$

SA N°1 : TRIANGLES

1. Nombres réels.
2. Valeur absolue.
3. Trigonométrie.
4. Propriétés de Thalès relatives au triangle.
5. Triangles semblables.
6. Triangles rectangle
7. Angles et cercles.

SA N°2 : CONFIGURATIONS DE L'ESPACE

1. Cône.
2. Sections planes

SA N°3 : CALCUL LITTERAL

1. Polynômes.
2. Equations de droite.
3. Equations - Inéquations
4. Multiplication d'un vecteur par un nombre réel.
5. Calculs sur coordonnées de vecteurs ?

SA N°4 : ORGANISATION DES DONNEES

1. Applications affines.
2. Applications linéaires.
3. Statistique.

SA N°1 : TRIANGLES

Situation de départ : Le lotissement
Texte : Aménagement du territoire

Le conseil communal de Kata, dès son installation a fait réaliser le lotissement de l'un de ses villages DUNIA.
Pour la construction des infrastructures d'utilité publique (route, école, marché, terrain de sport, centre de santé, jardins publics, espaces verts.), il a été prélevé 40% de la superficie initiale de chaque parcelle des propriétaires terriens.
Le conseil communal a fait aménager un jardin public de forme circulaire de 120m de diamètre. Au centre de ce jardin, un obélisque a été érigé. Bio possédait un terrain rectangulaire de 20m sur 30m. A l'issue des travaux de recasement, il lui a été attribué un terrain carré.
Baké, l'une des filles de Bio, se préoccupe de connaître les dimensions de la parcelle attribuée à son père. Par ailleurs, impressionnée par la beauté du nouvel environnement créé au niveau du jardin public, elle se demande quelle peut bien être la hauteur de l'obélisque.

Tâche : Tu vas te construire des nouvelles connaissances en mathématiques. Pour cela :
- Exprime ta perception de chacun des problèmes posés
- Analyse chaque problème posé
- Mathématise chacun des problèmes posés
- Opère sur l'objet mathématique que tu as identifié pour chacun des problèmes
- Améliore au besoin ta production.

Activité 0
- Lis le texte de la situation de départ.
- Reformule le problème ou la situation-problème en tes propres termes.
- Formule toutes les idées et questions que t'inspire la situation de départ.
- Reconnais des situations similaires.
- Anticipe éventuellement sur la réponse au problème.

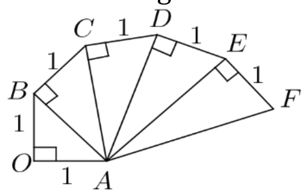
Séquence n°1 : Nombres réels

Activité 1.1
Baké voudrait déterminer les dimensions de la nouvelle parcelle attribuée à son père après le lotissement.

1.1 Ensemble des nombres réels – Racine carrée

Consigne 1.1 : Découverte et définition de la racine carrée

On considère la figure codée suivante



1. Observe attentivement cette figure puis calcule AB^2, AC^2, AD^2, AE^2 et AF^2 en utilisant la propriété de Pythagore.
2. (a) Peut-on trouver un nombre rationnel qui représente la longueur du segment [AB] ?

Information
Le nombre qui exprime la longueur AB est noté $\sqrt{2}$ et se lit **« racine carrée de 2 ».**

   (b) A partir de cet exemple donne le nombre qui exprime la longueur des chacun des cotés [AC], [AD], [AE] et [AF].
3. Complète la phrase suivante pour en faire une définition :

Définition
« On appelle racine carrée d'un nombre réel positif $\boldsymbol{a}$; le nombre réel positif noté $\sqrt{a}$ et dont le.... est égal à $\boldsymbol{a}$ »

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

Conséquences de la définition
a et b sont des nombres positifs :
- $\sqrt{a} = b$ équivaut à $a = \cdots$
- $\sqrt{a} \geq \cdots$
- $\left(\sqrt{a}\right)^2 = \cdots$; $\sqrt{0} = \cdots$ et $\sqrt{1} = \cdots$
- Dans l'écriture $\sqrt{a}$ le symbole « $\sqrt{\ }$ » est appelé radical et a le radicante.

Information : Les nombres $\sqrt{7}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$ ne sont pas des nombres rationnels, on dit que ces nombres sont des nombres irrationnels.

Consigne 1.2
1. Calcule l'aire de l'ancienne parcelle de Bio puis déduis l'aire de la nouvelle parcelle carrée.
2. Aide Baké à déterminer la longueur c du côté de la nouvelle parcelle de son père.

Consigne 1.3
ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 3cm et AC = 7cm.
Calcule la longueur BC.
Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

Consigne 1.4 : Ensemble des nombres réels
Recopie et complète la définition suivante :

Définition

« L'ensemble formé des nombres rationnels et des nombres irrationnels est appelé ensemble des nombres réels.

- L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$

Les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ sont :

$\mathbb{R}_+$: Ensemble des nombres réels ....

$\mathbb{R}_-$: Ensemble des nombres réels ....

$\mathbb{R}^*$ Ensemble des nombres réels ....

$\mathbb{R}_+^*$: Ensemble des nombres réels ....

$\mathbb{R}_-^*$: Ensemble des nombres réels ....

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

Evaluation formative

Remplace les pointillés par les symboles $\in$; $\notin$; $\subset$ *ou* $\subset$ qui conviennent.

$2 \ldots \mathbb{N}$; $2 \ldots . \mathbb{Z}$; $2 \ldots . \mathbb{D}$; $2 \ldots \ldots . \mathbb{Q}$; $2 \ldots . \mathbb{R}$; $-7 \ldots \mathbb{N}$; $-7 \ldots . \mathbb{Z}$; $-7 \ldots \ldots . \mathbb{D}$; $-7 \ldots . \mathbb{Q}$; $-7 \ldots . \mathbb{R}$; $\frac{2}{3} \ldots \mathbb{N}$; $\frac{2}{3} \ldots . \mathbb{Z}$; $\frac{2}{3} \ldots . \mathbb{D}$; $\frac{2}{3} \ldots . \mathbb{Q}$; $\frac{2}{3} \ldots . \mathbb{R}$; $\sqrt{5} \ldots \mathbb{N}$; $\sqrt{5} \ldots . \mathbb{Z}$; $\sqrt{5} \ldots . \mathbb{D}$; $\sqrt{5} \ldots . \mathbb{Q}$; $\sqrt{5} \ldots . \mathbb{R}$.

1.2 Construction d'un segment de longueur $\sqrt{a}$ $(a \geq 2)$

Consigne 1.5

Baké veut construire un segment de longueur $\sqrt{29}cm$ et $\sqrt{7}cm$, pour cela on te demande de suivre le programme de construction suivant.

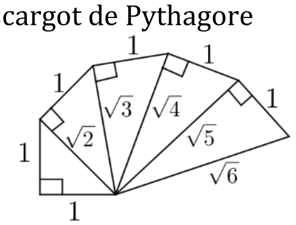
- Construction de segment de longueur $\sqrt{29}cm$
  29= 25+4 donc $29 = 5^2 + 2^2$
- Construis alors un triangle rectangle tel que les deux côtés à supports perpendiculaires mesurent 5cm et 2cm.
  La longueur de l'hypoténuse de ce triangle est égale à $\sqrt{29}cm$
- Construction de segment de longueur $\sqrt{7}cm$
  7= 16 – 9 donc $7 = 4^2 - 3^2$
- Construis un demi-cercle de diamètre AB= 4cm et marque un point C sur le cercle tel que AC= 3cm.
- Trace le segment [BC] sa longueur est alors $\sqrt{7}$cm

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

Retenons

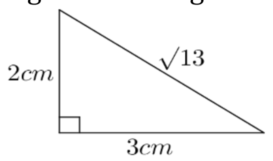
Pour construire un segment de longueur $\sqrt{a}$ $(a > 0)$, on peut utiliser :

- L'escargot de Pythagore



- Un triangle rectangle connaissant les longueurs x et y des côtés de l'angle droit tel que $a = x^2 + y^2$ et donc la longueur de l'hypoténuse de ce triangle est $\sqrt{a}$.

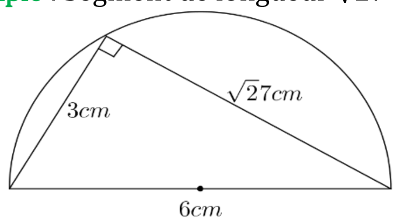
Exemple : Segment de longueur $\sqrt{13}$



$\sqrt{13} = \sqrt{2^2 + 3^2}$

- Un triangle rectangle connaissant la longueur x de l'hypoténuse et la longueur y de l'un des côtés de l'angle droit. On a : $\sqrt{a} = x^2 - y^2$

Exemple : Segment de longueur $\sqrt{27}$



$\sqrt{27} = \sqrt{6^2 - 3^2}$

1.3 Puissance à exposant entier relatif d'un nombre réel.

Consigne 1.6

1. Ecris plus simplement chacun des nombres suivants
   $A = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$; $B = \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}$; $C = \frac{7^4}{7^6}$; $D = (5^{-3})^6$
2. Complète les phrases suivantes pour en faire des propriétés :

Propriétés

- Si a est un nombre réel non nul et n un entier naturel plus grand que 1
  $\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \ldots \ldots \ldots \times a}_{n \; facteurs} = a^{\cdots\cdots}$
- Si a est un nombre réel non nul et n un entier naturel non nul :
  $a^n = \frac{1}{a^{\cdots}}$; $a^n . a^{-n} = a^{\cdots\cdot} = \cdots$;
- Si a *et* b sont deux nombres réels non nuls n *et* m sont des entiers relatifs :
  $a^n . b^n = (ab)^{\cdots\cdot}$; $a^n . a^m = a^{\cdots\cdot}$;
  $(a^n)^m = a^{\cdots\cdot}$; $\frac{a^m}{a^n} = a^{\cdots\cdot}$

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

Retenons

Deux nombres réels sont inverse l'un de l'autre si leur produit est égal à 1.

Exemple : A=3 $- 2\sqrt{2}$ et B=3 $+ 2\sqrt{2}$

$A \times B = (3 - 2\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})$

$= (3)^2 - (2\sqrt{2})^2$

$= 9 - 8$

$= 1$

Prof. Adekoulé Emmanuel ILEDI

$A \times B$=1 alors les nombres A et B sont inverse l'un de l'autre.

1.4 Somme et racines carrées

Consigne 1.7

On donne A=$\sqrt{16}+\sqrt{4}$ et B= $\sqrt{16+4}$

1. (a) Calcule A *et* B.
   (b) Complète par = ou ≠ $A \ldots\ldots B$.
2. Recopie puis complète les pointillés par le symbole = ou ≠ qui convient.
   a *et* b étant des nombres plus grands que 0
   $\sqrt{a}+\sqrt{b} \ldots\ldots \sqrt{a+b}$

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

1.5 Produit, quotient et racines carrées

Consigne 1.8

On considère deux nombres réels positifs a et b avec b non nul.

1. (a) Précise le signe de chacun des nombres $\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ et $\sqrt{a\times b}$.
   (b) Calcule $(\sqrt{a}\times\sqrt{b})^2$ et $(\sqrt{a\times b})^2$ et déduis que $\sqrt{a}\times\sqrt{b}$= $\sqrt{a\times b}$
2. (a) Précise le signe de chacun des nombres $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ et $\sqrt{\frac{a}{b}}$.
   (b) Calcule $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2$ et $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2$ et déduis que $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$=$\sqrt{\frac{a}{b}}$

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

1.6 Racines carrées et puissances

Consigne 1.9

1. (a) Calcule $(\sqrt{a^6})^2$ *et* $(a^3)^2$ puis déduis en une comparaison de $\sqrt{a^6}$ et a^3 avec $a\in\mathbb{R}_+$.
   (b) Calcule $(\sqrt{b^{35}})^2$ et$(b^{17}\sqrt{b})^2$ puis déduis-en une comparaison de $\sqrt{b^{35}}$et $b^{17}\sqrt{b}$ avec $b\in\mathbb{R}_+$
2. En remarquant que $6=2\times3$; $35=2\times17+1$ puis en utilisant les résultats précédents, recopie puis complète les pointillés pour en faire des propriétés :

Propriétés

a étant un nombre réel positif et n un nombre entier relatif

$\sqrt{a^{2n}}=\cdots$ $\sqrt{a^{2n+1}}$=…$\sqrt{\ldots}$.»

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Activité d'approfondissement

Simplifie chacune des expressions suivantes :

V=$\sqrt{3^5}$; W=$\sqrt{3^{14}}$; X=$\sqrt{3^{14}\times2^9}$; Y=$\sqrt{1{,}21}$ et Z=$\sqrt{0{,}005}$.

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

1.7 Ecriture d'un nombre sous la forme $a\sqrt{b}$

Consigne 1.10

On veut écrire $\sqrt{72}$ sous la forme $a\sqrt{b}$. Pour cela :

- Décompose 72 en produit de facteurs premiers.
- En utilisant le résultat de la décomposition et la propriété précédente ; complète :
  $\sqrt{72}=\cdots\sqrt{\ldots}$

Information : Tu viens ainsi de donner une écriture de $\sqrt{72}$ sous la forme $a\sqrt{b}$.

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Activité d'approfondissement

1. Ecris plus simplement chacun des nombres suivants : A=$\sqrt{2}\times\sqrt{8}$; B=$\sqrt{25\times81}$; C=$\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{6}}$;
   D=$\sqrt{\frac{121}{25}}$; E =$\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{3}}$; F=$\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}}$; G=$\sqrt{7}\times\sqrt{7}$;
   H=$\sqrt{3}\times\sqrt{12}$; I=$\sqrt{5}\times\sqrt{7{,}2}$;
2. Ecris les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont entiers naturels que tu préciseras et b le plus petit possible : A=$\sqrt{125}$; B=$\sqrt{63}$; C=$\sqrt{48}$; D=$\sqrt{80}$; E=2$\sqrt{7}$ ×5$\sqrt{28}$; F=$\sqrt{275}$; G=3$\sqrt{27}$ ×2$\sqrt{15}$; H=$\sqrt{98}\times\sqrt{\frac{1}{2}}$

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

1.8 Calculs avec des racines carrées

Consigne 1.11

Recopie et complète les phrases suivantes pour en faire des propriétés :

Propriété

a et b sont des nombres positifs, m et n des nombres rationnels :

- $m\sqrt{a}+n\sqrt{a}=(\ldots+\cdots)\sqrt{a}$
- $m(n\sqrt{a})=\cdots\times\ldots\sqrt{a}$
- $m\sqrt{a}\times n\sqrt{b}$=$(\ldots\times\ldots)\sqrt{\ldots\ldots}$
- $m\sqrt{a}\times\sqrt{a}$=…$(\sqrt{a})^{\ldots}$=…×..

a et b sont deux nombres réels non nuls, complète

$(a+b)^2$=… ; $(a-b)^2$=… ;
$(a-b)(a+b)=\cdots$

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Activité d'approfondissement

Effectue chacune des opérations suivantes

A= $\sqrt{300}-\sqrt{75}$+5$\sqrt{3}$; B= 3$\sqrt{20}$+2$\sqrt{80}$ −7$\sqrt{125}$
C=$(5\sqrt{2}-4\sqrt{3})(5\sqrt{2}+4\sqrt{3})$; D=$(2\sqrt{3}+4)^2$;
E=$(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})(5\sqrt{5}+4\sqrt{2})$.

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

1.9 Expressions conjuguées – Ecriture d'un quotient sans radical au dénominateur

Consigne 1.12 : Notion d'expressions conjuguées

Après le lotissement, certains des terrains sont de forme rectangulaire et d'autres de forme carrée.
Trois terrains ont les dimensions suivantes:

(t_1): $\sqrt{5}m$;

(t_2) : $(4-2\sqrt{3})\ m$ et $(4+2\sqrt{3})m$;

(t_3) : $(4-2\sqrt{3})\ m$

1. Donne la nature de chacun de ces terrains.
2. Détermine l'aire de chacun de ces terrains.

Information : Le produit de $(4-2\sqrt{3})$ par $(4+2\sqrt{3})$ donne un nombre rationnel, alors on dit que les expressions $(4-2\sqrt{3})$ et $(4+2\sqrt{3})$ sont des expressions conjuguées. $\sqrt{5}$ est son propre conjugué.

3. Complète le tableau suivant

Nombre réel A	Expression conjuguée de A
$2\sqrt{5}-3$	
$-3\sqrt{2}$	
	$7-\sqrt{6}$
	$\sqrt{11}$

4. Recopie et complète la phrase suivante pour en faire une définition

Définition

Deux expressions sont dites conjuguées lorsque leur produit donne un nombre……………….

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Retenons

Soit a, b, c et d des nombres réels et $b \geq 0$ et $d \geq 0$

- L'expression conjuguée de $a\sqrt{b}$ est $a\sqrt{b}$ ou $-a\sqrt{b}$.
  Exemple : L'expression conjuguée de $2\sqrt{3}$ *est* $2\sqrt{3}$
- L'expression conjuguée de $a + c\sqrt{b}$ est $a - c\sqrt{b}$ et réciproquement.
  Exemple : L'expression conjuguée de $2-5\sqrt{3}$ *est* $2+5\sqrt{3}$
- L'expression conjuguée de $a\sqrt{b}+c\sqrt{d}$ est $a\sqrt{b}-c\sqrt{d}$ et réciproquement.
  Exemple : L'expression conjuguée de $2\sqrt{7}-5\sqrt{3}$ *est* $2\sqrt{7}+5\sqrt{3}$

Propriété

Pour écrire sans radical au dénominateur un quotient (ou rendre rationnel le dénominateur d'un quotient), on multiplie le numérateur et le dénominateur de ce quotient par l'expression conjuguée du dénominateur.

Remarque

Dans le cas où le dénominateur est sous la forme $a\sqrt{b}$, on peut multiplier le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{b}$.

Consigne 1.13 : Approfondissement

Ecris sans radical au dénominateur chacun des nombres suivants :

$A=\frac{2}{\sqrt{3}}$; $B=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}+3}$; $C=\frac{2-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$ et $D=\frac{3\sqrt{2}+7}{-3\sqrt{2}}$.

1.10 Développement, réduction et factorisation des expressions comportant des radicaux.

Consigne 1.14

1. Développe puis écris plus simplement :
   (a) $3\sqrt{2}(\sqrt{7}-\sqrt{2})$.
   (b) $(2+7\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})$.
   (c) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2$.
   (d) $\left(2-3\sqrt{2}\right)^2$.
   (e) $(1-\sqrt{7})(1+\sqrt{7})$.
2. (a) a étant un nombre réel non nul, recopie et complète les pointillés par la lettre qui convient.
   $x^2 - a = x^2 - (\ldots)^2$
   $= (x - \ldots.)(x + \cdots)$.
   (b) Factorise chacune des expressions suivantes : A=x^2-7 ; B= $9x^2-6x\sqrt{5}+5$;
   C=$4x^2-9$; D=$x^2+2x\sqrt{3}+3$;
   E=$9x^2-2+(15x-5\sqrt{2})$ et
   F=$a(5+\sqrt{2})-(5\sqrt{2}+2)$.

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

1.11 Inégalité et addition

Consigne 1.15 : Inégalité et addition

Complète la démonstration suivante en vue d'obtenir une propriété

a, b, c *et* d sont des nombres réels tels que

$a < b$ *et* $c < d$

donc : $a + c < b + \ldots$ et $b + c < \cdots + d$

Par conséquent : $a + c < b + \cdots$

Propriété

Lorsqu'on ajoute membre à membre des inégalités de même sens, on obtient une nouvelle inégalité de même………….

a, b, c *et* d étant des nombres réels

Si $a < b$ *et* $c < d$ alors $a + c < \cdots \ldots$

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

1.12 Inégalité et multiplication

Consigne 1.16 : Inégalité et multiplication

Complète la démonstration suivante en vue d'obtenir une propriété

a, b, c *et* d sont des nombres réels positifs tels que

$a < b$ et $c < d$

Comme $c > 0$ *et* $b > 0$

Donc : $a \times c < b \times \ldots$ et $b \times c < \cdots \times d$

Par conséquent : $a \times c < b \times \ldots$

Propriété

Lorsqu'on multiplie membre à membre des

inégalités de même sens entre nombres positifs, on obtient une nouvelle inégalité de même…………..
a, b, c et d étant des nombres réels positifs
Si $a < b$ et $c < d$ alors $a \times c < \cdots$
Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

1.13 Comparaison de deux nombres réels

Consigne 1.17 : Comparaison de deux nombres à partir de leurs carrés

Les nombres de la première ligne du tableau suivant sont rangés dans l'ordre croissant, complète la deuxième ligne de ce tableau par le carré de chacun de ces nombres.

a	-9	-7	-3		2	5	7	10
a^2								

1. Complète par $<$ou $>$
   $-9 \ldots\ldots -3$ et $(-9)^2 \ldots.(-3)^2$ $5 \ldots..7$ et $(5)^2 \ldots.(7)^2$
2. Complète la démonstration suivante en vue d'obtenir une propriété :
   - Les nombres positifs du tableau sont rangés dans le…….ordre que celui de leurs carrés
   - Les nombres négatifs du tableau sont rangés dans l'ordre ……. de celui de leurs carrés
3. Recopie puis complète les phrases suivantes pour en faire des propriétés :

Propriétés

P_1 : Deux nombres positifs sont rangés dans …..que celui de leurs carrées.
P_2 : Deux nombres négatifs sont rangés dans …..de celui de leurs carrées.
Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Consigne 1.18 : Comparaison de deux nombres positifs à partir de leurs racines carrés – Comparaison de deux nombres non nuls de même signe à partir de leurs inverses

Les nombres de la première ligne des tableaux suivants sont rangés dans l'ordre croissant, complète la deuxième ligne de ces tableaux

x	4	9	144		x	4	5	10
$\sqrt{x}$					$\frac{1}{x}$			

1. Complète par $<$ou $>$ les pointillés suivants :
   (a) $4 \ldots..144$ et $\sqrt{4} \ldots.\sqrt{144}$;
   (b) $10 \ldots..5$ et $\frac{1}{10} \ldots.\frac{1}{5}$;
   (c) -4 …..-2 et $-\frac{1}{4}$…..$-\frac{1}{2}$.
2. Recopie puis complète les phrases suivantes pour en faire des propriétés.

Propriétés

P_3 : Deux nombres positifs sont rangés dans …que leurs racines carrées.
P_4 : Deux nombres de même signe et différents de zéro sont rangés dans………….. de celui de leurs inverses.
Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Consigne 1.19 : Comparaison de deux nombres réels.

Après le partage, deux amis de Baké reçoivent chacune une place carrée dont les dimensions sont $7\sqrt{3}$ et $2\sqrt{6}$.

1. Bintou veut comparer ces dimensions ; pour cela :
   (a) Calcule $(7\sqrt{3})^2$ et $(2\sqrt{6})^2$;
   (b) Compare les résultats obtenus ;
   (c) Donne le signe de $7\sqrt{3}$ et $2\sqrt{6}$;
   (d) En utilisant l'une des propriétés ci-dessus déduis-en une comparaison des nombres $7\sqrt{3}$ et $2\sqrt{6}$.
2. Fais de même pour comparer les nombres $-5\sqrt{2}$ et-3

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Retenons
Pour comparer deux nombres réels, on peut :
- comparer leurs carrés ou leurs racines carrées ;
- comparer leurs inverses ;
- étudier le signe de leur différence ;
- les placer dans des intervalles disjoints.

Consigne 1.20 : Application

Compare :
1. $7\sqrt{5}$ et $3\sqrt{2}$.
2. $2\sqrt{5}$ et $7\sqrt{3}$.
3. $\sqrt{17}$ et $\sqrt{31}$.
4. $7+\sqrt{5}$ et $3+\sqrt{3}$.
5. 9 et $3\sqrt{5}$.
6. $-4\sqrt{7}$ et $-2\sqrt{3}$.

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

1.14 Etude de signe d'un nombre réel

Consigne 1.21

Baké décide maintenant de déterminer le signe de quelques nombres formés à partir des dimensions de certaines places

1. Donne le signe de chacun des nombres $6+5\sqrt{5}$ et $-1-2\sqrt{3}$. Pour cela pour chaque nombre :
   ✓ donne le signe de chaque terme
   ✓ Déduis donc le signe du nombre
2. Détermine le signe de chacun des nombres $3\sqrt{2}-6$ et $7-4\sqrt{3}$ .Pour cela
   ✓ Compare les nombres $3\sqrt{2}$ et 6 puis 7 et $4\sqrt{3}$.

✓ Déduis donc le signe de $3\sqrt{2}-6$ puis de $7-4\sqrt{3}$.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

1.15 Encadrement

Consigne 1.22 : Encadrement

1. A l'aide de ta calculatrice, donne une valeur approchée par défaut à 10^{-4} près de $\sqrt{5}$.
2. Donne un encadrement de $\sqrt{5}$ par deux nombres décimaux consécutifs
   (a) d'ordre 1
   (b) d'ordre 2

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

Consigne 1.23 : Encadrement d'une somme

Pour encadrer les résultats de certaines opérations effectuées avec les dimensions de quelques places, Baké a adopté le programme suivant.

Sachant que $2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24$ et $1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$

1. Encadrons la somme $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ et le produit $\sqrt{5}\times\sqrt{3}$ par deux nombres décimaux d'ordre deux en complétant le programme suivant :
2. On a $2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24$ et $1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$
   Donc $2{,}23+1{,}73 < \sqrt{5}+\sqrt{3} < \cdots$
   D'où $\ldots\ldots < \sqrt{5}+\sqrt{3} < \cdots$
3. Fais de même pour encadrer le produit $\sqrt{5}\times\sqrt{3}$.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

Consigne 1.24 : Encadrement d'une différence

Sachant que $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$ et $2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24$

Encadrons la différence $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ par deux nombres décimaux d'ordre deux en complétant le programme suivant :

On a : $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$ et $2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24$

Donc $-\cdots < -\sqrt{2} < -\cdots$

Par conséquent : $2{,}23+(\ldots) < \sqrt{5}-\sqrt{2} < 2{,}24+(\ldots)$

$\ldots < \sqrt{5}-\sqrt{2} < \cdots$

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

Retenons

Pour encadrer la différence $a-b$ connaissant un encadrement de a et b, on peut procéder comme suit :

- on détermine un encadrement de $-b$ de même sens que celui de a.
- on détermine ensuite un encadrement de la somme $a+(-b)$.

Consigne 1.25 : Encadrement d'un quotient

Sachant que $2{,}51 < a < 2{,}52$ et $0{,}26 < b < 0{,}27$

Encadrons du quotient $\frac{a}{b}$ par deux nombres décimaux d'ordre deux en complétant le programme suivant :

On a $0{,}26 < b < 0{,}27$ et $2{,}51 < a < 2{,}52$

Donc $\frac{1}{\ldots} < \frac{1}{b} < \frac{1}{\ldots}$

Par conséquent $\ldots\times\frac{1}{0{,}27} < a\times\frac{1}{b} < \cdots\times\frac{1}{0{,}26}$

$$\frac{\ldots}{0{,}27} < \frac{a}{b} < \frac{\ldots}{0{,}26}$$

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

Propriété

Pour encadrer le quotient $\frac{a}{b}$ connaissant un encadrement de chacun des nombres positifs a et b, on peut procéder comme suit :

- on détermine un encadrement de $\frac{1}{b}$ de même sens que celui de a.
- on détermine ensuite un encadrement du produit $a\times\frac{1}{b}$.

Attention !

Il n'existe pas de règle permettant de diviser ou de soustraire membre à membre des inégalités de même sens

Activité d'approfondissement

Sachant que $1{,}732<\sqrt{3}<1{,}733$ et $2{,}236<\sqrt{5}<2{,}237$, donne un encadrement d'ordre deux de chacun des nombres suivants :

$a=3\sqrt{5}-4$; $b=8-3\sqrt{3}$; $c=5\sqrt{5}+2\sqrt{3}$; $d=\frac{2\sqrt{3}+1}{\sqrt{5}-2}$; $e=\frac{7}{3\sqrt{5}+2}$.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

Evaluations formatives

Exercice 1

Ecris plus simplement :

1. $a=2\sqrt{27}-\sqrt{147}+\sqrt{12}$
2. $b=2\sqrt{48}-\sqrt{27}+2\sqrt{75}$
3. $c=61\sqrt{5}-12\sqrt{7}+49\sqrt{5}-12$
4. $d=2\sqrt{16}-6\sqrt{7}-\sqrt{63}-\sqrt{700}$
5. $5\sqrt{24}-\sqrt{54}+2\sqrt{150}$
6. $2\sqrt{11}-3\sqrt{7}-(6\sqrt{11}-9\sqrt{7})$

Exercice 2

Développe les expressions suivantes :

1. $a=(2\sqrt{2}+3)(1-\sqrt{3})$
2. $b=(3\sqrt{2}-2)(\sqrt{3}-\sqrt{2})$
3. $c=(3\sqrt{2}-2)(3\sqrt{2}+2)$
4. $d=2=(3\sqrt{2}-5\sqrt{3})(5\sqrt{2}+3\sqrt{2})$
5. $e=2(6\sqrt{12}-9\sqrt{7})^2$

Exercice 3

On considère les nombres réels suivants : $A=1+\sqrt{3}$ et $B=2-2\sqrt{3}$.

1. Démontre que $A>0$ et $B<0$.
2. Calcule A^2, B^2 et $A\times B$.
3. Donne un encadrement de $A-2B$ par deux nombres décimaux d'ordre 2, sachant que $1{,}732<\sqrt{3}<1{,}733$.

Exercice 4

L'unité de longueur est le cm. Les dimensions d'un rectangle sont : $2\sqrt{3}+2$ et $2\sqrt{3}-2$.

1. Calcule le périmètre de ce rectangle.
2. Calcule son aire.
3. Calcule le diamètre du cercle circonscrit à ce rectangle.

Exercice 5

1. Démontre que $A=\sqrt{63}+\sqrt{147}-7\sqrt{3}-\frac{21}{\sqrt{7}}$ est un nombre entier que l'on déterminera.
2. On donne $E=3-2\sqrt{2}$, $F=2\sqrt{2}-1$ et $G=\frac{E}{F}$.
   (a) Compare E et F.
   (b) Ecris G sous la forme $a+b\sqrt{2}$ où a et b sont des nombres rationnels à préciser.
3. Donne un encadrement de G à 10^{-2} près sachant que : $1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42$.

Exercice 6

Calcule :

$$A=\sqrt{78+\sqrt{4+\sqrt{19+\sqrt{32+\sqrt{13+\sqrt{9}}}}}}$$

$$B=\sqrt{76-2\sqrt{37-\sqrt{\frac{21}{25}+\frac{1}{25}\times\sqrt{6+\sqrt{103-2\sqrt{\frac{9}{4}}}}}}}$$

$$C=\sqrt{15+\sqrt{17+\sqrt{67-\sqrt{11-\sqrt{4}}}}}$$

Exercice 7

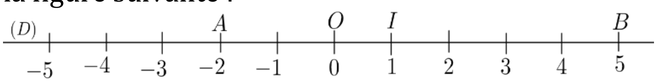
Détermine les entiers naturels a, b et c vérifiant :

$\sqrt{7+\sqrt{a}}=3$; $\sqrt{b+\sqrt{36}}=7$; $\sqrt{77+\sqrt{11+\sqrt{25}}}=c$

Séquence n°2 : Valeur absolue

Activité 1.2

Après le lotissement, le géomètre a placé des points sur une droite (D) de repère (O ; I) comme l'indique la figure suivante :



2.1 Définition de la valeur absolue

Consigne 2.1 : Définition de la valeur absolue

1. Détermine la valeur de chacune des distances OA ; OB et OI.
2. Quelle est la distance à zéro de chacun des nombres $-2{,}5$; -5 *et* 4.

Information : La distance à zéro de -5 est appelée valeur absolue de -5 et notée $|-5|$

3. Trouve la valeur absolue de chacun des nombres -8 ; $-3\sqrt{5}$; $\frac{2}{5}$; $-\frac{3}{8}$; $+0{,}03$
4. Recopie et complète la phrase suivante pour en faire une définition :

Définition

On appelle valeur absolue d'un nombre réel a , la ……… de….. Elle est notée $|a|$ et lue « valeur absolue de a »

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Exemple : $|-4|=4$; $|3|=3$

Conséquences de la définition

Soit a un nombre réel $|a|=\begin{cases} a \text{ si } a>0 \\ -a \text{ si } a<0\end{cases}$

Exemples :

- $|4|=4$ car $4>0$
- $|-7|=-(-7)=7$ (car $-7<0$)
- $|1+\sqrt{5}|=1+\sqrt{5}$ (car $1+\sqrt{5}>0$)
- $|1-\sqrt{5}|=-(1-\sqrt{5})=-1+\sqrt{5}$ (car $1-\sqrt{5}<0$)

Propriété

La racine carrée du carré d'un nombre est égale à la valeur absolue de ce nombre.

a étant un nombre réel, on a : $\sqrt{a^2}=|a|$

Exemples :

- $\sqrt{2^2}=|2|=2$;
- $\sqrt{(-7)^2}=|-7|=7$;
- $\sqrt{(1+\sqrt{5})^2}=|1+\sqrt{5}|=1+\sqrt{5}$
- $\sqrt{(1-\sqrt{5})^2}=|1-\sqrt{5}|=-1+\sqrt{5}$

Activité d'approfondissement

1. Ecris plus simplement $X=\sqrt{\left(2\sqrt{3}-5\right)^2}$,
   $Y=\sqrt{\left(2\sqrt{3}+1\right)^2}$; $Z=\sqrt{(-7{,}8)^2}$.
2. (a) Calcule $\left(3\sqrt{5}-8\right)^2$.
   (b) Donne le signe de $3\sqrt{5}-8$.
   (c) Ecris à l'aide d'un seul radical le nombre

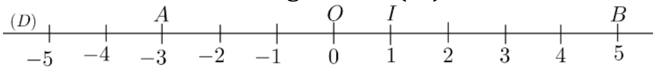
$T=\sqrt{109-48\sqrt{5}}$.

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

2.2 Distance de deux nombres réels

Consigne 2.2 : Distance de deux nombres réels

On considère la droite graduée (D) ci-dessous



1. (a) Précise l'abscisse de chacun des points A et B puis donne la valeur de la distance AB.
   (b) Calcule $|-3-5|$ et compare cette valeur à celle de la distance AB.

Information : Tu as calculé ainsi la distance de -3 à 5. On note : $d(-3\,;\ 5)$ et on lit distance de -3 à 5

2. Recopie et complète la phrase suivante pour en faire une définition :

Définition

a et b sont des nombres réels.
On appelle distance des nombres réels a et b, le nombre réel positif noté $d(a,b)$ défini par $d(a,b)=$…

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Activité d'approfondissement

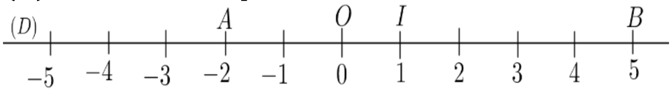
1. Donne la distance de 4 à $3\sqrt{2}$.
2. Calcule : $A=\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}-\sqrt{(\sqrt{3}+2)^2}+d(1;2\sqrt{3})$

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

2.3 Intervalles de $\mathbb{R}$

Activité 1.3

Observe la figure ci-dessous où (D) est une droite graduée de repère (O,I) et A et B deux points de (D) d'abscisses respectives -2 et 5.



Consigne 2.3 : Découverte

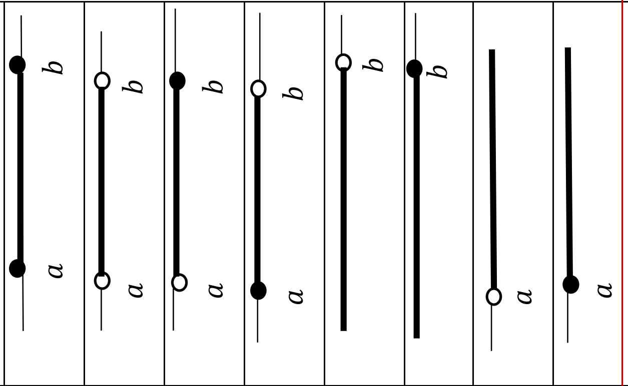
1. Reproduis la droite (D) puis :
   - Hachure en rouge la portion des points dont les abscisses sont inférieures ou égales à -2
   - Hachure en bleu la portion des points dont les abscisses sont strictement comprises entre -2 *et* 5
   - Hachure en noir la portion des points dont les abscisses sont supérieures ou égales à 5.

Information : Ces différentes portions sont appelées des intervalles de $\mathbb{R}$ et sont respectivement notées $]\leftarrow;-2]$; $]-2\,;5[$ et $[5\,;\rightarrow[$

2. Place sur chaque portion la notation qui convient.

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Retenons : Les intervalles de $\mathbb{R}$



Ecriture	Lecture	Ensemble des x tels que	Représentation
$[a\,;b]$	Intervalle fermé a, b	$a \le x \le b$	
$]a\,;b[$	Intervalle ouvert a, b	$a < x < b$	
$]a\,;b]$	Intervalle ouvert a fermé b	$a < x \le b$	
$[a\,;b[$	Intervalle fermé a ouvert b	$a \le x < b$	
$]\leftarrow;b[$	Intervalle des nombres inférieurs à b	$x < b$	
$]\leftarrow;b]$	Intervalle des nombres inférieurs ou égaux à b	$x \le b$	
$]a\,;\rightarrow[$	Intervalle des nombres supérieurs à a	$x > a$	
$[a\,;\rightarrow[$	Intervalle des nombres supérieurs ou égaux à a	$x \ge a$	

Activité de réinvestissement

1. Représente sur une droite graduée les intervalles suivants : $[-5\,;6[$; $]2;7]$;$]-3;\rightarrow[$ et $]\leftarrow;2]$.
2. Ecris sous forme d'intervalles chacun des ensembles de nombres définis par : $x \le -7$; $x > -1$;$-5 < z < \sqrt{3}$; $\sqrt{5} \le t$ et $0 \le y < 3$.
3. Traduis à l'aide d'inégalités $y \in [-2;\rightarrow[$; $x \in]2;7[$; $z \in [0\,;11]$; $y \in]-1;\sqrt{3}]$; $x \in]\leftarrow;\sqrt{3}]$; $y \in]-1;\sqrt{3}]$

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

2.4 Amplitude d'un intervalle ayant deux bornes réelles

Vocabulaire
a et b sont des nombres réels tels que $a < b$.
Les nombres a et b sont les bornes de chacun des intervalles suivants : $[a;\ b]$, $[a;\ b[$, $]a;\ b[$, $]a;\ b]$.

Consigne 2.4
On donne un intervalle $I =]-3; 7]$.
1. Donne trois nombres réels appartenant à l'intervalle I.
2. (a) Précise les bornes de l'intervalle I.
   (b) Détermine la distance entre ces deux bornes.

Information : Cette valeur de la distance entre les deux bornes de l'intervalle I est appelée amplitude de l'intervalle I

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Définition
Si a *et* b sont deux nombres réels distincts, l'amplitude de tout intervalle ayant pour bornes a et b est la distance des nombres a et b c'est-à-dire $|a - b|$.

Activité d'approfondissement
On considère les écritures suivantes : I=$[-3; 8[$; J=$]7;\ 5]$; $K = [-12; -5]$; $D =]\leftarrow; -4]$; $E = [0\ ; \rightarrow]$
(a) Parmi ces écritures, cites ceux qui sont des intervalles de $\mathbb{R}$.
(b) Détermine si possible l'amplitude de chacun des intervalles ci-dessus cités.

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

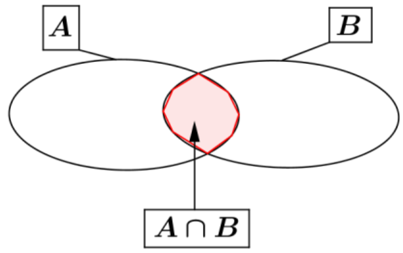
2.5 Intersection et réunion de deux intervalles de $\mathbb{R}$

Consigne 2.5
On considère les intervalles définis par A=$[-3; 4]$ $B = [0\ ; 6[$ et $C =]1; \rightarrow[$
1. (a) Représente les intervalles A et B sur la même droite graduée puis hachure la portion commune à A et à B.
   (b) Traduis cette portion par un intervalle.
2. (a) Représente les intervalles C et B sur une même droite graduée puis hachure toute la portion de droite délimitée par les intervalles C et B.
   (b) Traduis cette portion par un intervalle

Information
- La portion commune aux deux intervalles A et B est appelée intersection des intervalles A et B et est notée $A \cap B$.
- La portion de droite délimitée par les intervalles C et B est appelée réunion des intervalles C et B et est notée $C \cup B$.

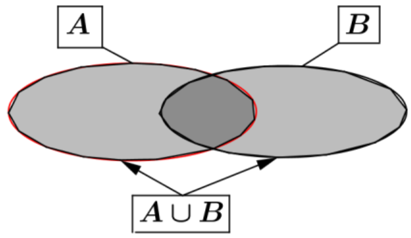
Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Retenons
1. **L'intersection des ensembles A et B** est l'ensemble des éléments appartenant à A et à B. On note $\boldsymbol{A \cap B}$ et on lit : **A inter B.**



$x \in A \cap B$ équivaut à $x \in A$ et $x \in B$

2. **La réunion des ensembles A et B** est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B. On note $\boldsymbol{A \cup B}$ et on lit : **A union B.**



$x \in A \cup B$ équivaut à $x \in A$ ou $x \in B$

Activité d'approfondissement
Soit les intervalles suivants : A=$[-6; 2]$; B=$[-3\ ; 1[$ et C=$]0; \rightarrow[$
Détermine les ensembles suivants sous forme d'intervalle $A \cup B$; $C \cap B$; $A \cup C$; $A \cap B$; $A \cap C$

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Evaluations formatives

Exercice 1
On considère les nombres réels a et b suivants :
a=$4\sqrt{5} - 9$ et b=$4\sqrt{5} + 9$
1. Calcule a^2, b^2, $a \times b$ et $\frac{a}{b}$.
2. Étudie le signe de chacun des nombres a et b.
3. Écris au moyen d'un seul radical les nombres x=$\sqrt{161 - 72\sqrt{5}}$ et y=$\sqrt{161 + 72\sqrt{5}}$
4. Calcule $d(a; b)$.

Exercice 2
1. On donne les intervalles suivants :
   A=$]-3\ ;1]$; B=$[-4\ ;7[$; C=$]\leftarrow;5-\sqrt{3}]$ et D=$[-7-\sqrt{3}\ ; \rightarrow[$.
   (a) Traduis à l'aide d'inégalités l'appartenance de x à chacun de ces intervalles.

(b) Écris plus simplement : $A \cap B$; C∩D et A∪C

2. x et y désignent des nombres réels tels que : $-3 \leq -2x+5 \leq 2$ et $4+3y < 7y - 5$.
   (a) Trouve les inégalités que vérifient x et y.
   (b) Traduis les inégalités par des intervalles.

Exercice 3

Soit A=$\sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{9+4\sqrt{5}}$ et B=$\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}}$

1. (a) Calcule A^2.
   (b) Déduis-en une écriture plus simple de A.
2. (a) Calcule B^2.
   (b Déduis-en une écriture plus simple de B.

Exercice 4

1. Etudie le signe de $2\sqrt{2}-4$.
2. Calcule $\left(2\sqrt{2}-4\right)^2$.
3. (a) Ecris plus simplement B=$\sqrt{24-16\sqrt{2}}$.
   (b) Déduis-en un encadrement de B sachant que $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$ puis donne l'amplitude de cet encadrement à 10^{-2} près.

Exercice 5

On considère deux nombres réels A et B tels que : A=$1-2\sqrt{2}$ et B=$2-\sqrt{3}$.

1. Justifie que A est négatif et que B est positif.
2. Détermine le signe de B−A.
3. Compare A et B.
4. Calcule B^2 et écris le nombre E = $\sqrt{\frac{3}{7+4\sqrt{3}}}$ sous la forme $a+b\sqrt{3}$ où a et b sont des nombres rationnels à préciser.

Exercice 6

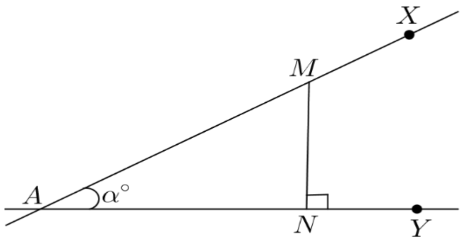
On considère les nombres réels suivants : $a=2-\sqrt{3}$, $b=-2-\sqrt{3}$; $c=-2+\sqrt{3}$; $d=2+\sqrt{3}$; E=$a^{-2}+b^{-2}$ et F=c^2+d^2.

1. Donne le signe de chacun des nombres a, b, c, et d.
2. Démontre que le nombre A tel que A=$\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}-\sqrt{c^2}-\sqrt{d^2}$ est égal à $-4-2\sqrt{3}$.
3. Encadre A par deux nombres décimaux d'ordre 3.
   On donne $1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$
4. Démontre que E=F.

Séquence n°3 : Trigonométrie

Activité 1.4

Pour permettre la fluidité de la circulation, le lotissement a prévu une voie dont les bords de la chaussée sont parallèles à l'un des côtés droit de la parcelle attribuée à son père. Dans le souci de vérifier certaines mesures de cette parcelle fournies par le plan du lotissement, Baké réalise la figure suivante :



$\widehat{XAY}$ est un angle aigu, M un point de [AX) distinct de A ; N le projeté orthogonal de M sur le support de la demi-droite [AY).

Les rapports $\frac{AN}{AM}$ et $\frac{MN}{AM}$ ne dépendent pas de la position du point M sur [AX). Ces rapports sont aussi les mêmes si on prend M distinct de A sur [AY). N étant le projeté orthogonal de M sur le support de [AX). Ils ne dépendent que de l'angle $\widehat{XAY}$ choisi.

3.1 Les rapports trigonométriques

Consigne 3.1

Recopie et complète les définitions suivantes :

- Le rapport $\frac{AN}{AM}$ est appelé .... de l'angle $\widehat{XAY}$ et noté.....
- Le rapport $\frac{MN}{AM}$ est appelé .... de l'angle $\widehat{XAY}$ et noté.....
- Si l'angle $\widehat{XAY}$ n'est pas droit, le rapport $\frac{MN}{AN}$ est appelé .... de l'angle $\widehat{XAY}$ et noté.....
- Si l'angle $\widehat{XAY}$ n'est pas nul, le rapport $\frac{AN}{MN}$ est appelé .... de l'angle $\widehat{XAY}$ et noté.....

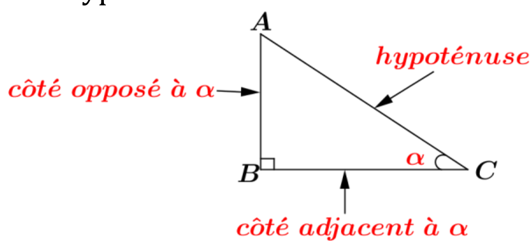
Information : *Les rapports* $\frac{AN}{AM}$; $\frac{MN}{AM}$; $\frac{MN}{AN}$ *et* $\frac{AN}{MN}$ *sont appelés « rapports trigonométriques de l'angle* $\widehat{XAY}$ »

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

Définition : Sinus et cosinus d'un angle aigu

Dans un triangle rectangle :

- on appelle **sinus** d'un angle aigu (ou de sa mesure), le quotient de la longueur du côté opposé à cet angle par la longueur de l'hypoténuse.
- on appelle **cosinus** d'un angle aigu (ou de sa mesure), le quotient de la longueur du côté adjacent à cet angle par la longueur de l'hypoténuse.



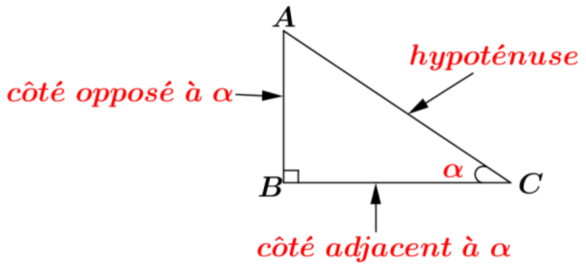
$$sin\alpha = sin\widehat{C} = \frac{\textbf{longueur du côté opposé}}{\textbf{longueur de l'hypoténus}} = \frac{AB}{AC}$$

$$cos\alpha = cos\widehat{C} = \frac{\textbf{longueur du côté adjacent}}{\textbf{longueur de l'hypoténus}} = \frac{BC}{AC}$$

Définition : Tangente et cotangente d'un angle

Dans un triangle rectangle :

- on appelle **tangente** d'un angle aigu (ou de sa mesure), le quotient de la longueur du côté opposé à cet angle par la longueur du côté adjacent.
- on appelle **cotangente** d'un angle aigu (ou de sa mesure), le quotient de la longueur du côté adjacent à cet angle par la longueur du côté opposé



$$tan\alpha = tan\widehat{C} = \frac{\textbf{longueur du côté opposé}}{\textbf{longueur du côté adjacent}} = \frac{AB}{BC}$$

$$cotan\alpha = cotan\widehat{C} = \frac{\textbf{longueur du côté adjacent}}{\textbf{longueur du côté opposé}} = \frac{BC}{AB}$$

Consigne 3.2

EFG est un triangle rectangle en E tel que EF=3cm ; EG=$\sqrt{3}$ et FG=$2\sqrt{3}$

Calcule les rapports trigonométriques de l'angle $\widehat{EFG}$.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

3.2 Somme des carrés de cosinus et de sinus d'un angle

Consigne 3.3

DEF est un triangle rectangle en E. On pose $mes\widehat{EFD} = \alpha$,

$(cos\alpha)^2 = cos^2\alpha \qquad (sin\alpha)^2 = sin^2\alpha$

1- Exprime $cos\alpha$ et $sin\alpha$ en fonction des longueurs des côtés du triangle EDF.

2- En utilisant la propriété de Pythagore, exprime DF^2 en fonction de EF^2 et ED^2.

3- a) En utilisant les questions 1. et 2., calcule $cos^2\alpha + sin^2\alpha$

b) Recopie te complète :

Si α désigne la mesure d'un angle, alors $cos^2\alpha + sin^2\alpha = \cdots$

3.3 Rapports trigonométriques des angles de mesures 30°, 60°, 45°, 0° et 90°

Consigne 3.4

On considères les configurations suivantes :

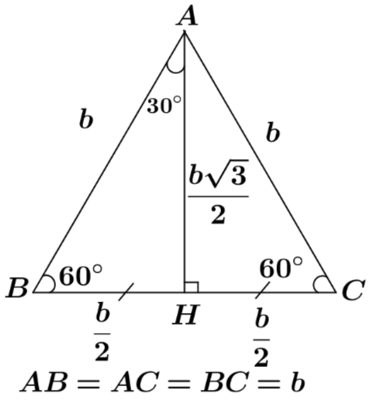


Figure 1

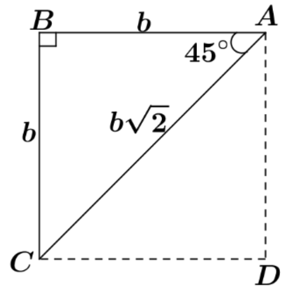


Figure 2

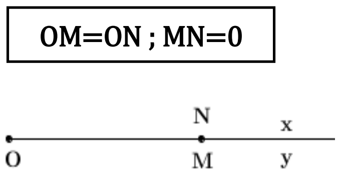


Figure 3

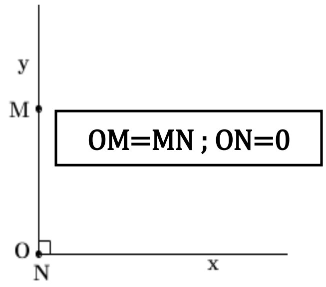


Figure 4

Les figures 3 et 4 sont obtenues en variant l'angle $\widehat{MON}$

1. Pour la figure 1 :
   (a) Détermine $sin\widehat{BAH}$; $cos\widehat{BAH}$; $tan\widehat{BAH}$ et $cotan\widehat{BAH}$. Déduis-en les valeurs exactes de $sin30°$; $cos30°$; $tan30°$ et $cotan30°$.
   (b) Détermine $sin\widehat{ABH}$; $cos\widehat{ABH}$; $tan\widehat{ABH}$ et $cotan\widehat{ABH}$. Déduis-en les valeurs exactes de $sin60°$; $cos60°$; $tan60°$ et $cotan60°$.
2. Pour la figure 2 :
   (a) Détermine $sin\widehat{BAC}$; $cos\widehat{BAC}$; $tan\widehat{BAC}$ et $cotan\widehat{BAC}$. Déduis-en les valeurs exactes de $sin45°$; $cos45°$; $tan45°$ et $cotan45°$.
3. (a) Détermine les rapports trigonométriques de l'angle $\widehat{xoy}$ dans chacun des cas figure 3 et figure 4.
   (b) Déduis-en $sin0°$; $cos0°$; $tan0°$ et $cotan0°$ puis $sin90°$; $cos90°$; $tan90°$ et $cotan90°$.
4. Reproduis puis complète le tableau ci-dessous :

Mesures d'angles	0°	30°	45°	60°	90°
sin					
cos					
tan					
$cotan$					

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

3.4 Tangente et cotangente en fonction de sinus et de cosinus

Consigne 3.5

On considère le triangle DEF de la consigne 3.3, on suppose que $cos\alpha \neq 0$ et $sin\alpha \neq 0$.

1. Exprime $\tan\alpha$ *et* $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ en fonction des longueurs des côtés du triangle EDF. Que remarques-tu ?
2. Exprime $\cot an\,\alpha$ *et* $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ en fonction des longueurs des côtés du triangle EDF. Que remarques-tu ?
3. Complète les propriétés suivantes :
   Si α designe la mesure d'un angle, tel que $cos\alpha \neq 0$et $sin\alpha \neq 0$, alors $\tan\alpha$ … $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ et $\cot an\,\alpha$ …. $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Propriété

Lorsque deux angles aigus ont un même rapport trigonométrique, ils ont la même mesure.

Activité d'approfondissement

Dans un triangle ABC rectangle en B, on a : $sin\hat{A}$=$\frac{2}{3}$

Calcule $cos\hat{A}$, $tan\hat{A}$ et $cotan\hat{A}$.

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

3.5 Détermination de la mesure d'un angle

Consigne 3.6

A l'aide de ta calculatrice, complète le tableau suivant :

α	62°			
$sin\alpha$		0,635		
$cos\alpha$			0,927	
$tan\alpha$				4,671
$cotan$				

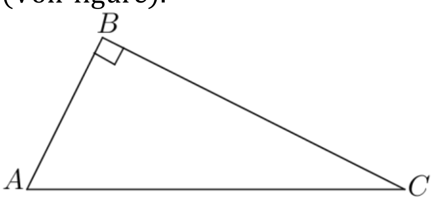
On déterminera α à un degré près.

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

3.6 Cosinus-sinus, tangente –cotangente de deux angles complémentaires

Consigne 3.7

On considère une parcelle triangulaire ABC rectangle en B pris dans le plan du lotissement. (Voir figure).



1. (a) Justifie que les angles $\widehat{ACB}$*et* $\widehat{BAC}$ sont complémentaires.
   (b) Calcule $\sin\widehat{ACB}$ et $\cos\widehat{BAC}$. Que constates-tu ?
   (c) Calcule $\tan\widehat{ACB}$ et $\cot an\,\widehat{BAC}$. Que constates-tu ?
2. Complète la phrase suivante pour en faire une propriété :

Propriété

- Si deux angles sont complémentaires, le sinus de l'un est égal au …….. de l'autre.
- Si deux angles sont complémentaires, la tangente de l'un est égale au …… …. de l'autre.

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Consigne 3.8 : Application

ABC est un triangle rectangle en A tel que $sin\hat{B}$=0,47.

1. Justifie que les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont complémentaires.
2. Déduis-en $cos\hat{C}$.

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Evaluations formatives

Exercice 1

Soit le triangle ABC tel que AC = 6cm ; AB = 9cm et $mes\widehat{BAC}$=60°. H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

1. Fais une figure puis calcule AH ; HC ; BH et BC.
2. (a) Calcule $tan\widehat{ABC}$.
   (b) Déduis-en une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.

Exercice 2

1. Construis un triangle ABC tel que AB = 5cm ; AC = 8cm et $mes\widehat{BCA}$ = 33°. H est le pied de la hauteur issue du sommet A.
2. Calcule les valeurs exactes de AH, HC et HB.
3. Calcule $mes\widehat{ABC}$ et la longueur BC.

Exercice 3

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que AB = 5cm et BC = 9cm.

1. Détermine $cos\hat{B}$.
2. Donne une valeur approchée de $\hat{B}$ à 10^{-2} près.

Exercice 4

STO est un triangle tel que S T = 3cm, SO =$\sqrt{3}$ et OT = $2\sqrt{3}$.

1. (a) Montre que STO est rectangle en S.
   (b) Calcule $tan\widehat{SOT}$ puis déduire la mesure de l'angle $\widehat{SOT}$.
2. Soit H le projeté orthogonal de S sur(OT). Montre que SH =$\frac{3}{2}$.
3. La perpendiculaire à (OT) passant par T coupe (OS) en D.
   Calcule les angles du triangle DST puis calculer TD et DS.

Exercice 5

On considère un rectangle ABCD et les points E et F appartenant respectivement aux segments [AB] et

[EC], EB =ED = 10cm ; $mes\widehat{CEB}$ =37° et $mes\widehat{BFE}$ =62°.

1. Fais une figure.
2. Calcule EF, BC et $sin\widehat{AED}$.
3. Donne une valeur approchée à 0.1 près de l'aire du triangle DEC.

Exercice 6

ABCD est un trapèze rectangle, le côté AB est perpendiculaire aux bases BC et AD. On a AB=7 cm, $mes\widehat{ABD}$ = 60°, BC=CD, le point H est le pied de la perpendiculaire abaissée de C sur la droite (BD).

1. Construis la figure.
2. Calcule AD, BD, BH puis BC.
3. Donne une valeur exacte du périmètre de ABCD, puis une valeur approchée à 0,01 près.
4. Calcule l'aire du trapèze rectangle ABCD, puis donne une valeur approchée à 0,01 près.

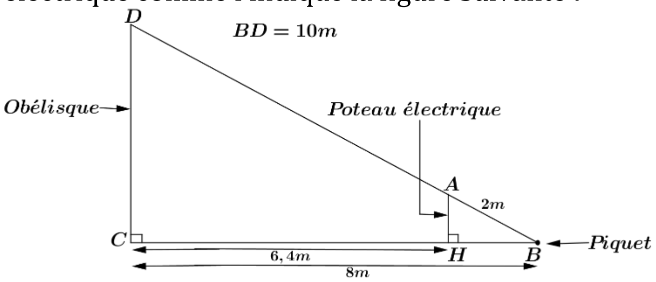
Exercice 7

1. Dessine le triangle ABC rectangle en B tel que AC=10 cm et $mes\widehat{CAB}$ = 38°.
2. Calcule AB et CB et l'aire du triangle ABC.
3. (a) Sur la même figure, de l'autre côté de la droite (AC) par rapport au point B, dessiner le triangle ACD rectangle en A et tel que $mes\widehat{DCA}$=27°.
   (b) Calcule CD et AD et l'aire du triangle ACD.
4. Donne une valeur approchée à 0,01 près du périmètre du polygone ABCD et de l'aire de la figure.

Séquence n°4 : Propriétés de Thalès relatives au triangle

Activité 1.5

Baké, lors de sa promenade dans le jardin, heurte son pied contre un piquet situé sur le même plan horizontal que l'obélisque à 8m de celui-ci. Un câble tendu de 10m de long, relie le piquet au sommet de l'obélisque tout en le maintenant dans la position verticale et passe aussi par le sommet d'un poteau électrique comme l'indique la figure suivante :



Baké constate que le point A est à 2m du piquet et l'ensemble obélisque-poteau-piquet forme deux triangles DCB et AHB.
Il s'interroge sur la hauteur du poteau et la ressemblance de ces deux triangles.

4.1 Propriété de Thalès

Consigne 4.1

1- Justifie que les droites (AH) et (CD) sont parallèles

2- Calcule et compare les rapports $\frac{BH}{BC}$ et $\frac{BA}{BD}$.

3- Recopie et complète la phrase suivante :
« BCD est un triangle, A un point de la droite (BD) et M un point de la droite (BC) tels que (AH)//(DC) alors $\frac{BH}{BC}$...... $\frac{BA}{BD}$ »

4.2 Réciproque de la propriété de Thalès

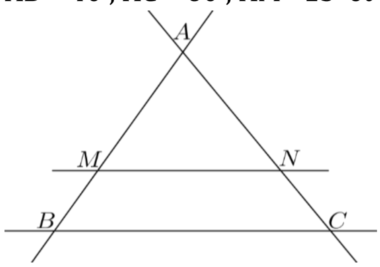
Consigne 4.2

Recopie et complète la phrase suivante :
« BCD est un triangle, A un point de la droite (BD) et M un point de la droite (BC) tels que la position qu'occupe le point A par rapport à B et D est………….. que celle qu'occupe H par rapport à B et C. Si l'on a $\frac{BH}{BC}$ ...... $\frac{BA}{BD}$ alors la droite (AH) si elle existe est parallèle à la droite (DC) »

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Activité d'approfondissement

On considère le triangle ABC ci-dessous ; M est un point de (AB) et N un point de (AC) tel que BC= 50; AB= 40 ; AC= 60 ; AM=15 et (MN)//(BC).



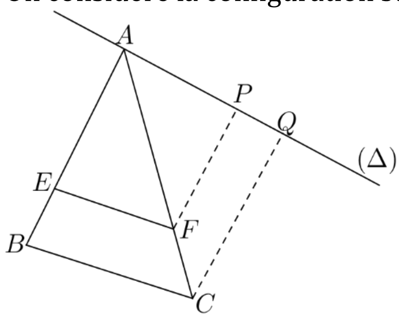
Calcule la distance AN.

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

4.3 Conséquence de la propriété de Thalès

Consigne 4.3

On considère la configuration suivante :



ABC est un triangle. E et F sont deux points respectifs des droites (AB) et (AC). P et Q sont deux points de la droite (Δ) tels que (PF)//(CQ)//(AB) et $(BC)//(\Delta)//(EF)$

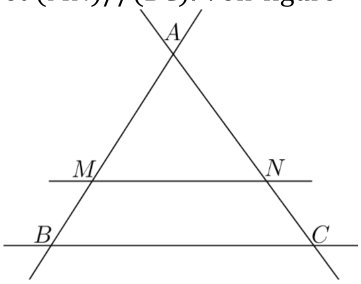
1. (a) Justifie que $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$ et $\frac{AF}{AC} = \frac{AP}{AQ}$
   (b) Déduis-en que $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{AP}{AQ}$.

2. (a) Donne la nature de chacun des quadrilatères AEFP et ABCQ puis compare AP et EF ; AQ et BC.
   (b) Déduis de tout ce qui précède que $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$.
3. Recopie et complète la phrase suivante :
« ABC est un triangle, N un point de la droite (AB) et M un point de la droite (AC) tels que (MN)//(BC) alors $\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB} = \frac{...}{...}$

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

Activité d'approfondissement 1

On considère la configuration suivante. ABC est un triangle ; M est un point de (AB) et N un point de (AC) tels que BC= 50 ; AB= 40 ; AC= 60 ; AM=15 et (MN)//(BC). Voir figure



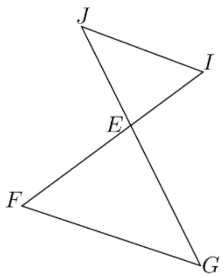
Détermine la distance MN.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

Activité d'approfondissement 2

La figure ci-dessous représente le domaine d'un propriétaire terrien.

On donne EF= 12m ; EG= 18m ; FG = 24m ; EJ= 6m et EI =4m



Démontre que (IJ) ∥ (FG)

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

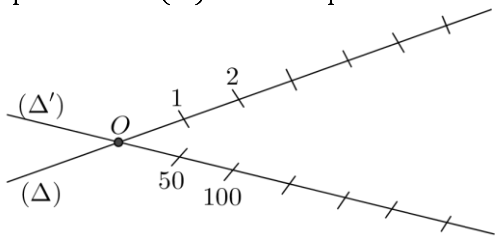
4.4 Construction de la quatrième proportionnelle à partir de trois longueurs x, y et z

Consigne 4.4

Dans un tableau de proportionnalité de deux couples de nombres, où trois nombres sont connus, le quatrième nombre est appelé « la quatrième proportionnelle »

Quantité (en kg)	4	6
Prix (en F)	300	a

Tu es invité à déterminer graphiquement le nombre a en utilisant les propriétés de Thalès. Pour cela complète la figure ci-après dans laquelle (Δ) et (Δ′) sont deux axes gradués sécants en O ; (Δ) est l'axe des quantités et (Δ′) l'axe des prix.



(a) Reproduis la configuration ci-dessus ;
(b) Marque sur l'axe des quantités les points A et B d'abscisses respectives 4 et 6 puis sur l'axe des prix le point C d'abscisse 300.
(c) Trace la parallèle à la droite (AC) passant par B, elle coupe l'axe des prix en D ;
(d) Quelle est l'abscisse du point D ?

Information : Cette valeur représente la quatrième proportionnelle des nombres 4 ; 6 et 300 ;

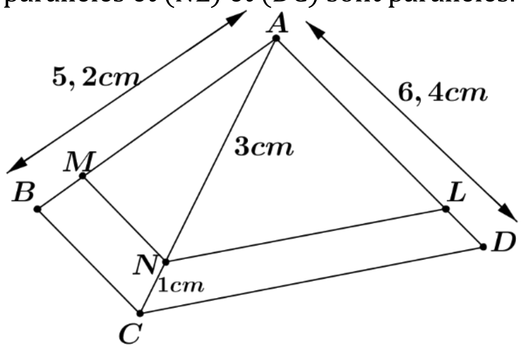
(e) Précise alors la valeur de a.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

Evaluations formatives

Exercice 1

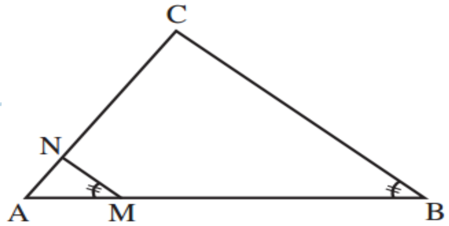
Dans la figure ci-dessous, (MN) et (BC) sont parallèles et (NL) et (DC) sont parallèles.



1. Calcule AM et AL.
2. Montre que les droites (ML) et (BD) sont parallèles.

Exercice 2

Dans la figure ci-dessous, AM = 2cm, MB = 6cm et AC = 5cm.



Calcule AN

Exercice 3

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que AC=5cm et BC=6cm. Soit M un point de [BC] tel que CM=1cm.

La perpendiculaire à (BC) passant par M coupe (AC) en N.

1. Calcule le périmètre du triangle CMN.
2. Calcule l'aire du triangle CMN.

Exercice 4

Soit ABC un triangle isocèle en A. Soit D un point de [AB]. La parallèle à (AC) passant par D coupe (BC) en E.
Montre que BDE est un triangle isocèle.

Exercice 5

MAN est un triangle tel que MN = 9cm ; AM = 4,5cm et AN = 6cm. B est un point du segment [AM] tel que AB = 3cm et C celui de [AN] tel que AC = 4cm.

1. Fais une figure.
2. (a) Démontre que (BC) // (MN).
   (b) Déduis-en la longueur de [BC].
3. La parallèle à la droite (CM) passant par N coupe la droite (AM) en D.
   (a) Démontre que $\frac{AB}{AM} = \frac{AM}{AD}$.
   (b) Calcule AD.

Exercice 6

A et C sont deux points tels que AC=6cm et B est un point de [AC] tel que AB=4cm.

1. Construis (C_1) le cercle de diamètre [AB] et (C_2) le cercle de diamètre [BC].
2. Soit M un point de (C_1) tel que AM =1,5cm. La droite (BM) coupe (C_2) en N.
   (a) Montre que les droites (AM) et (NC) sont parallèles.
   (b) Calcule CN et BN.

Exercice 7

Soit EFG un triangle tel que EF = 6cm, EG = 5cm et FG = 8cm. Soit I le point du segment [EF] tel que EI = 2,4cm. La parallèle à (FG) passant par I coupe (EG) en H.
Calcule le périmètre du triangle EIH.

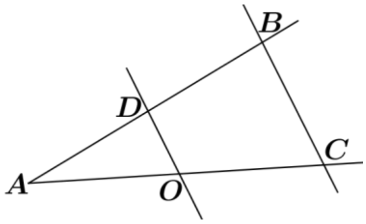
Exercice 8

Soit un rectangle ABCD tel que AB=8 cm et BC=4 cm.

1. Place sur [AB] le point I tel que AI=6 cm. Placer le point J milieu de [BC]. Tracer la parallèle à (IJ) passant par A. Cette droite coupe (DC) en K et (BC) en H.
2. Calcule BH.
3. Calcule CH et en déduire que K est le milieu de [DC].
4. Montre que (KJ) // (DB).

Exercice 9

Sur la figure ci-dessous, AD=5cm ; AO=8cm ; BD=6cm ; OC=9,6cm.



Montre que (OD)//(BD).

Exercice 10

Soit ABC un triangle tel que AB=5 cm ; AC=10 cm et BC=8 cm. Soit R le point de [AB] tel que AR=2 cm. Soit S le point de [AC] tel que AS=4 cm

1. Fais une figure.
2. Montre que (RS) et (BC) sont parallèles.
3. Soit T le point de [BC] tel que BT=3 cm. Montre que (RT) et (AC) ne sont pas parallèles.

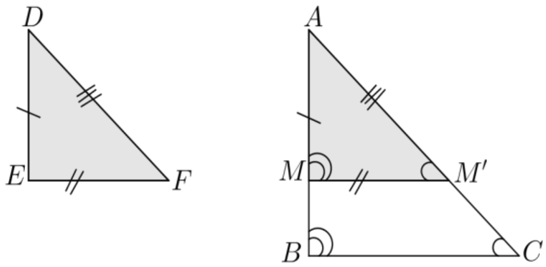
Exercice 11

1. Place quatre points A, O, F, C alignés dans cet ordre tels que AC=15, AO=OF=3. Placer le point B tel que(OB)⊥(AC) et OB=6.
2. Prouve que AB $=3\sqrt{5}$ et que BC$=6\sqrt{5}$.
3. Démontre que les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires.
4. (a) Construis le cercle (C) de diamètre [FC] qui recoupe la droite (BC) en H.
   (b) Démontre que le triangle FHC est rectangle.
   (c) Démontre que les droites (AB) et (FH) sont parallèles.
   (d) Calcule CF et CH.
5. Démontre que le triangle BAF est isocèle.
6. (a) Trace par A la parallèle à la droite (BF) ; elle coupe la droite (HF) en G.
   (b) Démontre que le quadrilatère ABFG est un losange et préciser son périmètre.
7. Montre que le triangle OBC a la même aire que le losange ABFG.

Séquence n°5 : Triangles semblables

Activité 1.6

Baké s'imagine qu'il peut avoir une similitude entre les triangles ABC et EFD définis comme suit (voir figure)
ABC est un triangle. M est un point de [AB] et M' le point de [AC] tel que (MM') soit parallèle à (BC).



Consigne 5.1

1. Justifie que $\frac{AM}{AB} = \frac{AM'}{AC} = \frac{MM'}{BC}$. On dit alors que les triangles ABC et AMM' sont semblables.
2. Justifie que les triangles DEF et AMM' sont superposables. Dans ce cas les triangles DEF et ABC sont semblables.

Identifie les éléments homologues en complétant le tableau

Côtés homologues	Sommets homologues	Angles homologues
[AB] et [DE] ……………	A et D ……………..	$\widehat{BAC}$ et $\widehat{EDF}$ …………….

3. Recopie et complète les phrases suivantes pour en faire des définitions :

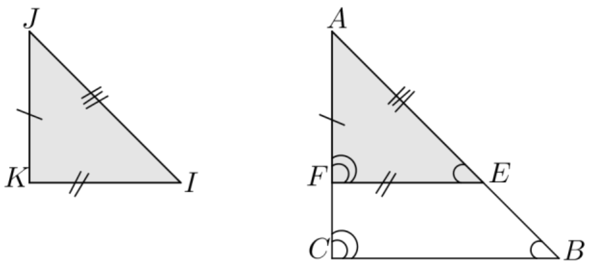
Définitions

- Deux triangles sont dits semblables si les longueurs des côtés de l'un sont ……………aux longueurs des côtés de l'autre.
- Si deux triangles sont semblables, tout triangle superposable à l'un est ……………….à l'autre

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Consigne 5.2

On considère la configuration suivante :



ABC est un triangle. E est un point du segment [AB] et F le point du segment [EF] tels que (EF)//(BC)

1. (a) Justifie que $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$
   (b) Que peut-on dire des triangles ABC et AEF.
2. (a)Justifie que les triangles AEF et IJK sont superposables.
   (b) Que peut-on alors dire des triangles ABC et IJK.
3. (a) Le tableau des sommets homologues du triangle ABC au triangle IJK est

I	J	K

Complète ce tableau

(b) On sait que $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$; $AE=IJ$ et $AF=JK$; $FE=KI$

Complète, donc $\frac{\dots}{AB} = \frac{\dots}{AC} = \frac{\dots}{BC}$

Information : Ces rapports sont appelés rapport de similitude du triangle ABC au triangle IJK

4. Recopie et complète la phrase suivante pour en faire une définition :

Définition

T_1 et T_2 sont deux triangles semblables.
On appelle rapport de similitude de T_1 à T_2 le rapport de la longueur d'un côté quelconque de T_2 à la longueur de son … de T_1.

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Consigne 5.3

D'après la consigne précédente, les triangles IJK et AEF sont superposables tels que $mes\widehat{AEF}=mes\widehat{JIK}$, $mes\widehat{AFE}=mes\widehat{JKI}$ et $mes\widehat{EAF}=mes\widehat{IJK}$ et les triangles IJK et ABC sont semblables.

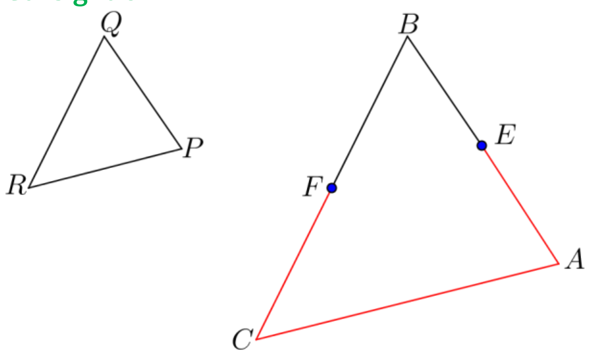
1. En utilisant la figure de la consigne précédente justifie que $mes\widehat{AFE}=mes\widehat{ACB}$; $mes\widehat{AEF}=mes\widehat{ABC}$ et $mes\widehat{EAF}=mes\widehat{BAC}$.
2. Déduis-en que $mes\widehat{JKI}=mes\widehat{ACB}$; $mes\widehat{JIK}=mes\widehat{ABC}$ et $mes\widehat{IJK}=mes\widehat{BAC}$.
3. Recopie et complète la phrase suivante pour en faire une propriété

Propriété

Si deux triangles sont semblables, alors tout angle de l'un a ………..qu'un angle de l'autre »

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Consigne 5.4



ABC et PQR sont deux triangles tels que $mes\widehat{PQR}=mes\widehat{ABC}$ et $mes\widehat{PRQ}=mes\widehat{ACB}$.
On marque les points F de [BC] et E de [BA] tels que BF=QR ; BE=QP et (FE)//(AC)

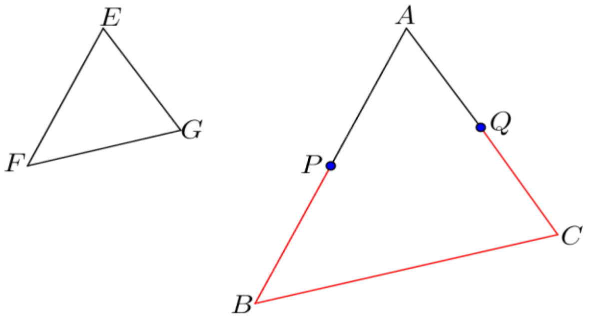
1. (a) Justifie que $\frac{BE}{BA} = \frac{BF}{BC} = \frac{EF}{AC}$.
   (b) Que peut-on dire des triangles ABC et EBF ?
2. (a)Justifie que les triangles PQR et EBF sont superposables.
   (b) Déduis-en que les triangles PQR et ABC sont semblables.
3. Recopie et complète la phrase suivante pour en faire une propriété

Propriété

Si deux triangles sont tels que deux des angles de l'un ont les mêmes mesures que deux angles de l'autres, alors ces triangles………

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Consigne 5.5



ABC et EFG sont deux triangles tels que
$mes\widehat{BAC} = mes\widehat{FEG}$; $\frac{EF}{AB} = \frac{EG}{AC}$
On marque les points P de [AB] et Q de [AC] tels que EF=AP et EG=AQ

1. Justifie que $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC}$
2. (a) Déduis-en que (PQ) et (BC) sont parallèles puis complète :$\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{...}{...}$.
   (b) Que peut-on alors dire des triangles APQ et ABC.
3. On sait que les triangles APQ et EFG sont superposables, justifie alors que les triangles EFG et ABC sont semblables.
4. Recopie et complète la phrase suivante pour en faire une propriété

Propriété

Si deux triangles sont tels que deux côtés de l'un ont des longueurs proportionnelles à celles de deux côtés de l'autre et que les angles formés par ces côtés ont la même mesure, alors ces triangles sont……………

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

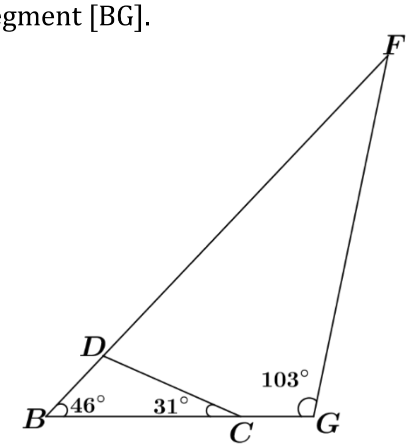
Evaluations formatives

Exercice 1

PIN et OLE sont deux triangles tels que :
PI=8cm, PN=5cm et IN=6cm
OL=24cm, OE=18cm et LE=15cm.
Démontre que les triangles PIN et OLE sont semblables.

Exercice 2

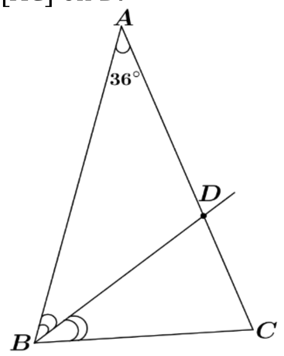
D est un point du segment [BF] et C est un point du segment [BG].



Démontre que les triangles BCD et BFG sont semblables.

Exercice 3

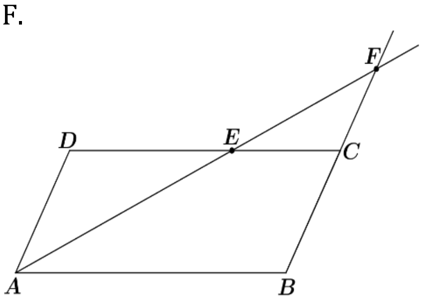
ABC est un triangle isocèle en A tel que $mes\widehat{BAC}$=36°. La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe le côté [AC] en D.



1. Calcule la mesure de chacun des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$.
2. Démontre que les triangles BCD et ABC sont semblables.

Exercice 4

ABCD est un parallélogramme et E est un point du côté [DC]. Les demi-droites [AE) et [BC) se coupent en F.



Démontre que les triangles ADE et EFC sont semblables.

Exercice 5

ABC est un triangle tel que AC = $3\sqrt{3}$cm.
Le point J appartient au côté [AC] tel que CJ =$\sqrt{3}$cm.
(D) est la droite passant par le point C et parallèle à la droite (AB). La droite passant par J et parallèle à la droite (BC) coupe la droite (AB) au point I et la droite (D) au point K.

1. Démontre que les triangles ABC et JCK sont semblables.
2. Cite les sommets homologues de ces triangles.
3. Calcule le rapport de similitude du triangle ABC au triangle JCK.

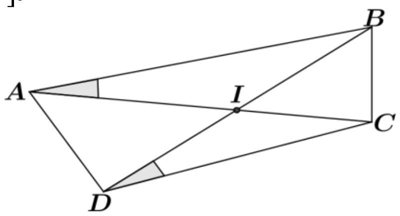
Exercice 6

On considère le triangle ABC tel que AB = 4,5cm ; BC = 4cm et AC = 3cm. M est un point du segment [AB] tel que AM = 1,5cm. La parallèle à (AC) passant par M coupe la droite (BC) en F.

1. Fais une figure.
2. Démontre que les triangles BMF et ABC sont semblables.
3. Calcule le rapport de similitude du triangle BMF au triangle ABC.

Exercice 7

ABCD est un quadrilatère tel que $mes\widehat{BAC} = mes\widehat{BDC}$.
On note I le point d'intersection des diagonales [AC] et [BD].



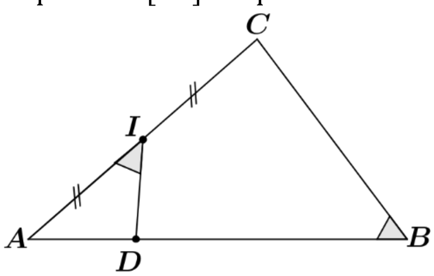
Démontre que les triangles AIB et DIC sont semblables.

Exercice 8

IJK est un triangle isocèle en I tel que IK=5cm et KJ=7cm.
LMN est un triangle isocèle en L tel que LM=8cm et MN=11,2 cm.
Les triangles IJK et LMN sont-ils semblables ? Explique.

Exercice 9

ABC est un triangle tel que : AB=42mm, AC=28mm et BC=36mm. I est le milieu de [AC].
D est le point de [AB] tel que $mes\widehat{AID} = mes\widehat{ABC}$.

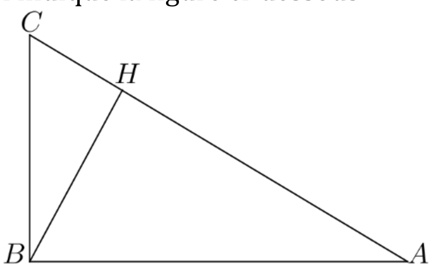


1. Démontre que les triangles ABC et AID sont semblables.
2. Calcule les longueurs des côtés du triangle AID.

Séquence n°6 : Triangle rectangle

Activité 1.7

La petite portion de terre laissée par les travaux de recasement étant très exigüe, l'entrepreneur propose une subdivision en deux parties comme l'indique la figure ci-dessous.



Le triangle ABC est rectangle en B et $(BH) \perp (AC)$.

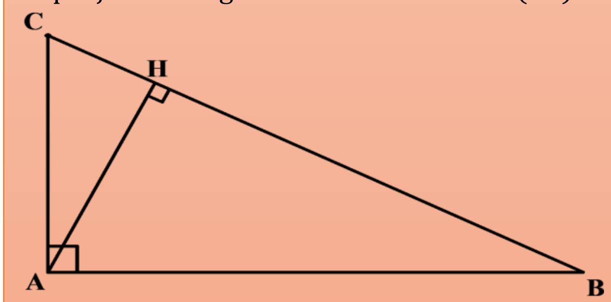
Consigne 6.1: les relations métriques dans un triangle rectangle

1. (a) En considérant deux différents triangles, exprime de deux manières différentes le sinus de l'angle en A ($Sin\hat{A}$).
   (b) Déduis en que $AB \times BC = BH \times AC$.
   (c) Exprime de deux manières différentes le cosinus de l'angle en A ($Cos\hat{A}$).
   (d) Déduis en que $AB^2 = AC \times AH$.
2. (a) En considérant deux différents triangles, exprime de deux manières différentes le cosinus de l'angle en C ($Cos\hat{C}$).
   (b) Déduis que $BC^2 = AC \times CH$.
3. (a) En considérant les triangles ABH et BHC, donne $tan\widehat{BAH}$ et $tan\widehat{CBH}$.
   (b) Sachant que $\widehat{BAH} = mes\widehat{CBH}$, exprime de deux manières différentes $tan\widehat{BAH}$
   (c) Déduis-en que$BH^2 = AH \times CH$.

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Propriétés : Relations métriques dans un triangle rectangle

Considérons le triangle ABC rectangle en A. H est le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).



Les relations métriques relatives au triangle ABC sont :

$$AB \times AC = AH \times BC$$
$$AB^2 = BH \times BC$$
$$AC^2 = CH \times CB$$
$$AH^2 = HC \times HB$$

Activité d'approfondissement

ABC est un triangle rectangle en A tel que AC=6 et $CB = 3\sqrt{5}$. H désigne le projeté orthogonal de A sur (BC) L'unité est le mètre.

1. Fais une figure sans utiliser les dimensions.
2. Calcule HC ; AB et AH.

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Evaluations formatives

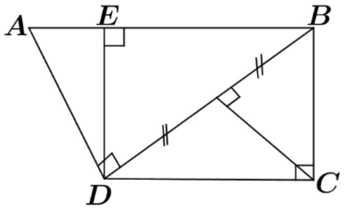
Exercice 1

EFG désigne un triangle rectangle en E tel que FG = 4EF. Soit H le pied de la hauteur issue de E.
Montre que HF=$\frac{1}{16}FG$.

Exercice 2

ABCD est un quadrilatère. Le segment [DE] mesure

4cm et l'aire du triangle BED est de $20cm^2$.



Détermine le périmètre du quadrilatère ABCD.

Exercice 3

IJK est un triangle rectangle en I. H est pied de la hauteur issue de I. On donne $\mathrm{JH} = 6{,}4$ et $\mathrm{JK} = 10$.
1. Construis le triangle IJK
2. Calcule IJ ; IK et IH.

Exercice 4

ABC est un triangle rectangle en B.H est le pied de la hauteur issue de B. On donne $\mathrm{AB} = 3$ cm et $\mathrm{AC} = 6$cm.
1. Construis le triangle ABC.
2. Calcule BC, BH, AH, et CH.

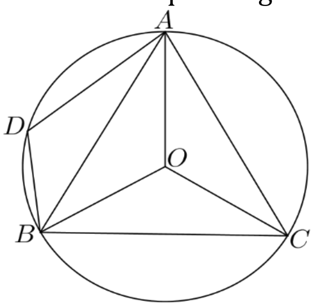
Exercice 5

On donne un segment [BC] tel que $\mathrm{BC} = 8$.
Soit (Δ) la médiatrice de [BC] ; H le milieu de [BC] et A un point de (Δ) tel que $\mathrm{AB} = 2\mathrm{BH}$.
1. Quelle est la nature du triangle ABC ?
2. Calcule AH.

Séquence n°7 : Angles et cercles

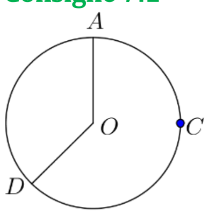
Activité 1.8

L'espace vert de la situation de départ a une forme circulaire et est subdivisé en de petites portions de terre destinées à l'installation d'infrastructures publiques comme l'indique la figure ci'dessous.



7.1 Angle saillant et angle rentrant

Consigne 7.1



1. Reproduis le cercle ci-dessus et l'angle $\widehat{AOD}$.
2. Colorie en rouge le secteur circulaire délimité par l'angle au centre interceptant le petit arc $\overset{\frown}{AD}$.

Information : L'angle au sommet O de ce secteur $(\widehat{AOD})$ est appelé angle saillant et l'autre $(\widehat{AOD})$ angle rentrant.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

> **Retenons**
> Dans un cercle de centre O,
> - ✓ L'angle au centre qui intercepte le petit arc $\overset{\frown}{AD}$ est appelé angle saillant AOD ou tout simplement angle AOD, il est noté $\widehat{AOD}$.
> - ✓ L'angle au centre qui intercepte le grand arc $\overset{\frown}{AD}$est appelé angle rentrant AOD, il est noté $\widehat{AOD}$.

7.2 Angle inscrit dans un cercle

Consigne 7.2 : Définition d'un angle inscrit dans un cercle.

Sur la configuration de l'activité 1.8, on considère l'angle $\widehat{BAC}$
1. Quelle est la position du sommet de cet angle par rapport au cercle.

Information : Un tel angle est appelé angle inscrit dans le cercle

2. Complète la phrase suivante pour en faire une définition :

Définition

Un angle inscrit dans un cercle est un angle dont le sommet est ... et dont les côtés sont ...

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

Consigne 7.3 : Arc intercepté par un angle inscrit.

Sur la configuration de l'activité 1.8, on considère l'angle $\widehat{BAC}$.

1- (a) Quels sont les côtés de cet angle ?
b) En quels points les côtés de cet angle coupent-ils le cercle ?

2- a) Quels sont les arcs de cercle délimités par ces deux points ?
b) Parmi ces arcs lequel ne contient pas le sommet de l'angle $\widehat{BAC}$?

Information : Cet arc est appelé arc intercepté par l'angle inscrit $\widehat{BAC}$.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

Consigne 7.4 : Angle au centre associé à un angle inscrit

Observe attentivement la figure de l'activité 1.8, on considère l'angle $\widehat{ABC}$
1. (a) Quelle est la nature de cet angle ?
(b) Quel arc intercepte cet angle ?
2. Quel est l'angle au centre du cercle qui intercepte le même arc ?

Information : On dit que cet angle au centre est l'angle au centre associé à l'angle inscrit$\widehat{BAC}$.

3. Recopie puis complète la phrase suivante pour en faire une définition :

Définition

On appelle angle au centre associé à un angle inscrit, l'angle au centre interceptant le ……que cet angle inscrit.

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Retenons

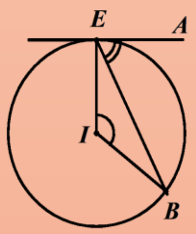


Fig1

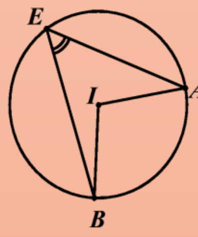


Fig2

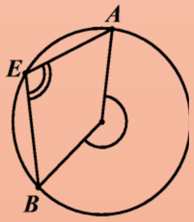


Fig3

(AE)⊥(EI).

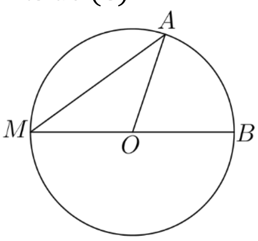
Pour chaque figure, l'angle $\widehat{AEB}$ est un angle inscrit dans le cercle considéré.

En effet,

- Pour la figure n°1, la droite (EA) est tangente en E au cercle C(I ; r) et l'angle inscrit $\widehat{AEB}$ intercepte l'arc $\widehat{EB}$. Cet angle inscrit a pour angle au centre associé l'angle $\widehat{EIB}$.
- Pour la figure n°2, l'angle inscrit $\widehat{AEB}$ intercepte l'arc $\widehat{AB}$ et son angle au centre associé est l'angle $\widehat{AIB}$.
- Pour la figure n°3, l'angle inscrit est obtus et intercepte l'arc $\widehat{AB}$ (lire grand arc AB). Son angle au centre associé est l'angle rentrant $\widehat{AIB}$

Consigne 7.5 : Relation entre la mesure d'un angle inscrit et celle de son angle au centre associé

On considère le cercle (C) de centre O. A, B et M sont trois points de (C).



1. (a) Quel est l'ange au centre associé à l'angle inscrit $\widehat{AMB}$.
   (b) Quelle est la nature du triangle AOM.
   (c) Déduis-en une comparaison de $mes\widehat{AMO}$ et $mes\widehat{OAM}$.
2. (a) Justifie que $2mes\widehat{AMO}+mes\widehat{AOM}=180°$.
   (b) Justifie que $mes\widehat{AOB}+mes\widehat{AOM}=180°$.
3. Déduis-en que $mes\widehat{AMB}=\frac{1}{2}mes\widehat{AOB}$
4. Complète la phrase suivante pour en faire une propriété :

Propriété

Un angle inscrit dans un cercle a pour mesure……de la mesure de l'angle au centre associé

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

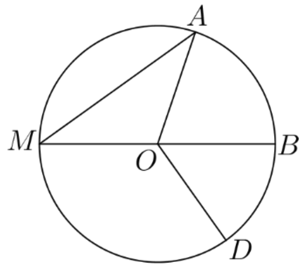
Remarque

Si $\widehat{AMB}$ un angle inscrit dans le cercle de centre O interceptant le grand arc AB ou ayant pour angle au centre associé l'angle rentrant $\widehat{AOB}$ alors

$$mes\widehat{AMB} = 180° - \frac{1}{2}mes\widehat{AOB}$$

Activité d'approfondissement

On considère la configuration suivante où O est le centre du cercle.

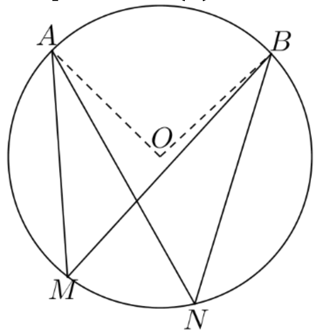


1. Détermine $mes\widehat{AMB}$ si $mes\widehat{AOB}$ =30°.
2. Détermine $mes\widehat{ABD}$ si $mes\widehat{AOD}$ =50°.

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Consigne 7.6 : Angle inscrit interceptant le même arc

On considère le cercle (C) de centre O. A ; B ; N et M sont quatre points de (C).



1. Exprime la mesure de chacun des angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ en fonction de la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$.
2. Déduis-en que $mes\widehat{AMB}=mes\widehat{ANB}$.
3. Recopie et complète la phrase suivante pour en faire une propriété :

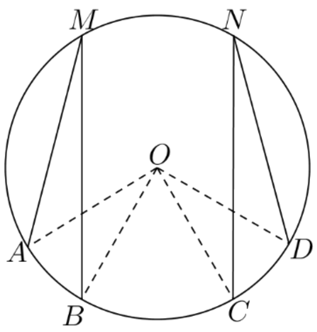
Propriété

Dans un cercle, deux angles inscrits qui interceptent le même arc ont …

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Consigne 7.7 : Angle inscrit interceptant deux arcs de même longueur

On considère le cercle (C) de centre O. A, B, C, D, N et M sont des points de (C) tels que $L_{\widehat{AB}} = L_{\widehat{CD}}$



1. Justifie que $mes\widehat{AOB} = mes\widehat{COD}$.
2. (a)Exprime la mesure de l'angle $\widehat{AMB}$ en fonction de celle de l'angle $\widehat{AOB}$.
   (b) Exprime la mesure de l'angle $\widehat{CND}$ en fonction de celle de l'angle $\widehat{COD}$.
   (c) Déduis-en que $mes\widehat{AMB}$=$mes\widehat{CND}$.
3. Complète la phrase suivante pour en faire une propriété :

Propriété

Dans un cercle deux angles inscrits qui interceptent deux arcs de même longueur ont ……

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

7.3 Quadrilatère inscriptible dans un cercle

Consigne 7.8 : Quadrilatère inscrit dans un cercle

Observe attentivement la configuration de l'activité 1.8

1. Nomme sur cette configuration un quadrilatère dont les sommets sont sur le cercle.

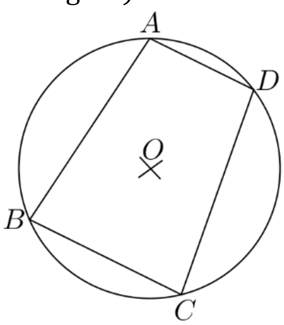
Information : On dit que ce quadrilatère est inscrit dans le cercle.

2. Recopie et complète les pointillés par le mot qui convient.
   Un quadrilatère inscrit dans un cercle est un quadrilatère dont les……..sont sur le cercle.

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Consigne 7.9 : Propriétés

On considère un quadrilatère ABCD et le cercle de centre O (voir figure).



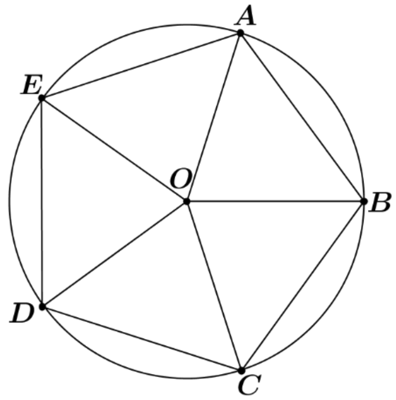
1. (a) Quelle est la position du quadrilatère ABCD par rapport au cercle ?
   (b) Cite les angles opposés du quadrilatère ABCD.
2. (a) Exprime la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ en fonction de celle de $\widehat{AOC}$.
   (b) Exprime la mesure de l'angle $\widehat{ADC}$ en fonction de celle de $\widehat{AOC}$.
3. (a) Déduis-en que $mes\widehat{ABC}$+$mes\widehat{ADC} = 180°$.
   (b) Que peut-on dire des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$.
4. Recopie et complète les phrases suivantes pour en faire des propriétés :

Propriétés

- Si un quadrilatère est inscrit dans un cercle, alors ses angles opposés sont………
- Si un quadrilatère est tel que deux angles opposés sont supplémentaires, alors il est……..

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Consigne 7.10 : Mesure de l'angle au sommet d'un polygone régulier à n côtés ($n \geq 3$)



On considère un polygone régulier à n côtés ($n \geq 3$). A, B et C désignent trois sommets consécutifs de ce polygone (voir figure).

1. Justifie que les triangles AOB et BOC sont des triangles isocèles superposables.
2. Donne la mesure de chacun des angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ en fonction de n.
3. Recopie et complète la démonstration suivante :
   AOB étant un triangle …….. en O donc
   $mes\widehat{OAB} \ldots mes\widehat{OBA}$ or
   $mes\,\widehat{\ldots}. + mes\widehat{OAB} + mes\widehat{OBA} = 180°$.
   Alors $mes\widehat{AOB}$+ …$mes\widehat{OBA}$=180° Par conséquent $mes\widehat{OBA} = \frac{180° - mes\widehat{AOB}}{2}$
   $mes\widehat{OBA} = \frac{180° - \frac{360°}{n}}{2}$ car $mes\widehat{AOB}$=…
4. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ en complétant la démonstration suivante :
   Les triangles OBA et OBC étant à la fois isocèle et superposables, donc $mes\widehat{OBA} \ldots\ldots mes\widehat{OBC}$
   Or $mes\widehat{ABC} = mes\widehat{OBA} + mes\widehat{OBC}$ alors
   $mes\widehat{ABC} = \cdots mes\widehat{OBA}$. Par conséquent
   $mes\widehat{ABC} = 180° - \frac{\ldots}{\ldots}$
5. Recopie et complète la phrase suivante pour en faire une propriété :

   Propriété

   La mesure d'un angle au sommet d'un polygone régulier à n côtés ($n \geq 3$) est égale à …………

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Evaluations formatives

Exercice 1

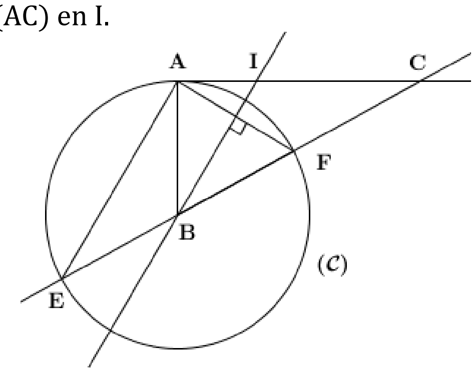
(C) est un cercle de centre O et de rayon 3cm. A et B sont deux points de ce cercle tels que $mes\widehat{BOA}$=60° Les tangentes au cercle (C) en A et en B se coupent en T. Les droites (OT) et (AB) se coupent en I.

1. (a) Détermine la nature de chacun des triangles AOB et ATB.
   (b) Calcule la mesure de l'angle $\widehat{BTA}$.
2. Démontre que la droite (OT) est la médiatrice du segment [AB].
3. Démontre que les points O, A, T et B appartiennent à un même cercle.

Exercice 2

Sur la figure suivante :

- le triangle ABC est tel que $AB = 5$, $BC = 10$ et $AC = 5\sqrt{3}$.
- (C) est le cercle de centre B et de rayon AB.
- (C) coupe la droite (BC) en F et en E.
- la perpendiculaire à (AF) passant par B coupe (AC) en I.



1. Démontre que le triangle ABC est rectangle en A.
2. Justifie que la droite (AE) est perpendiculaire à la droite (AF).
3. (a) Justifie que les droites (AE) et (BI) sont parallèles.
   (b) Calcule CI.
4. Justifie que $mes\widehat{FBA}$= 60°.
5. Calcule $mes\widehat{FEA}$.

Exercice 3

O est le centre du cercle de diamètre AB auquel appartient les points C et D. L'angle $\widehat{CBA}$ mesure 20°.

1. Précise la mesure de l'angle$\widehat{BCA}$.
2. Déduis-en la mesure de l'angle$\widehat{BAC}$.
3. Calcule la mesure de l'angle $\widehat{BDC}$.
4. Calcule la mesure de l'angle $\widehat{BOC}$.

Exercice 4

Soit (C) le cercle de centre O et de diamètre [ST]. La médiatrice de [OT] coupe [ST] en H et le cercle (C) en P et P'.

1. Faire une figure.
2. Sachant que $mes\widehat{TPP'} = 30°$, calculer la mesure des angles $\widehat{TSP'}$ puis $\widehat{TOP'}$.
3. Sachant que le rayon du cercle (C) est 6cm, calcule les distances PS et PT.

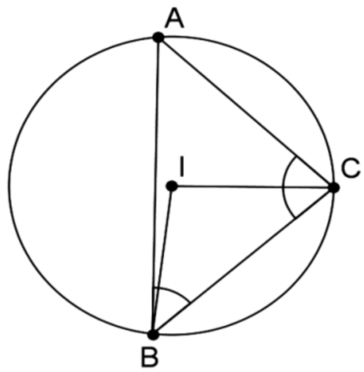
Exercice 5

ABC est un triangle inscrit dans un cercle (C) de centre O. La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe le cercle (C) au point A'. [A'B'] est La corde de (C) telle que [A'B'] soit parallèle à [AB].

1. Faire une figure.
2. Démontre que les angles $\widehat{A'AB}$ et $\widehat{A'B'C}$ ont la même mesure.

Exercice 6

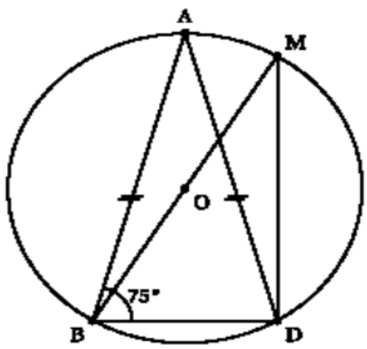
On donne le triangle ABC et son cercle circonscrit de centre I. On donne : $mes\widehat{CBA} = 48°$ et $mes\widehat{BCA}$=72°.



Calcule $mes\widehat{CIB}$.

Exercice 7

On considère la figure ci-dessous :

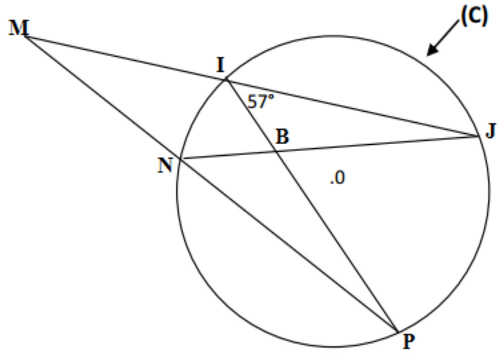


- ABD est un triangle isocèle en A tel que mes=75° ;
- (C) est le cercle circonscrit au triangle ABD ;
- O est le centre du cercle ;
- [BM] est un diamètre de (C).

1. Quelle est la nature du triangle BMD? Justifier la réponse.
2. (a) Calcule la mesure de l'angle $\widehat{DAB}$.
   (b) Justifie que l'angle $\widehat{DMB}$ mesure 30°.
3. On donne : BD = 5,6cm et BM = 11,2cm. Calcule DM. On arrondira le résultat au dixième près.

Exercice 8

On considère la figure ci-dessous :



1. (a) Détermine la mesure de l'angle $\widehat{JNP}$.
   (b) Déduis-en celle de l'angle $\widehat{JNM}$.
2. (a) Détermine la mesure de l'angle $\widehat{NBP}$ dans le triangle NBP.
   (b) En déduire celle de l'angle $\widehat{IBN}$.
3. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{MIB}$.
4. Déduis de toutes les questions précédentes la mesure de l'angle $\widehat{JMP}$.

Retour et projection

Consigne1 : Objectivation

1- Qu'as-tu découvert sur la SA n°1 ?
2- Qu'as-tu appris de nouveau sur la SA n°1 ?
3- Qu'as-tu trouvé difficile ou facile sur la SA n°1 ?

Consigne 2 : Auto-évaluation

1. Qu'est-ce que tu as réussi ?
2. Qu'est-ce que tu n'as pas réussi ?
3. Qu'est-ce que tu vas faire pour améliorer ta production ?

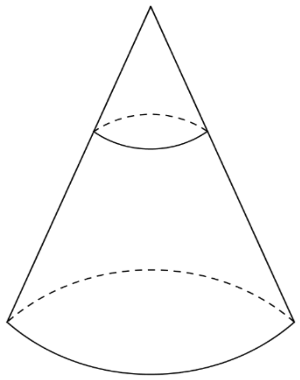
Fin de la SA N°1

SA N°2 : CONFIGURATIONS DE L'ESPACE

Situation de départ

Texte : Le grenier de Sossa

Anani, élève de la classe de $3^{ème}$ est habitué à voir les agriculteurs de sa région construire des greniers de forme cylindrique en vue de conserver le maïs. L'attention de Anani a été retenue par la façon dont l'agriculteur Sossa a construit son grenier : sur le sol, il a tracé un cercle de 2m de diamètre.
Au centre de ce cercle, il a implanté verticalement un pieu de 5m de haut. Une à une, plusieurs perches de même longueur sont disposées sur le cercle et s'appuient par leur extrémité sur un cerceau de 30cm de rayon dont le centre est au sommet du pieu. L'ensemble est fermé par un chapeau conique. Voici ci-dessous une illustration du grenier de Sossa.



Tâche : Tu vas te construire de nouvelles connaissances en mathématiques. Pour cela tu auras tout au long de la situation d'apprentissage à :

- Exprimer ta perception de chacun des problèmes posés ;
- Analyser chacun des problèmes posés ;
- Mathématiser chacun des problèmes posés ;
- Opérer sur l'objet mathématique que tu as identifié pour chaque problème ;
- Améliorer au besoin ta production.

Activité 0

- Lis le texte de la situation de départ, reformule le problème en tes propres termes.
- Formule toutes les idées et questions que t'inspire la situation de départ.
- Evoque des situations similaires.

Séquence n°1 : Cône de révolution

Activité 2.1

Anani se propose de fabriquer une maquette du chapeau du grenier, de déterminer l'aire de la surface de filet nécessaire pour couvrir ce chapeau ainsi que le volume de cette partie du grenier.

1.1 Représentation et description d'un cône de révolution

Consigne 1.1

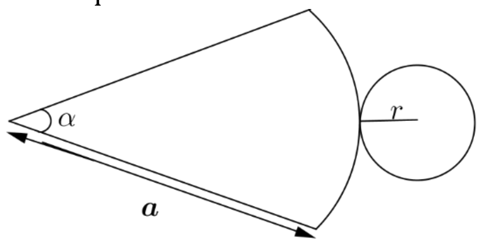
1. Quel est le nom du solide représentant le chapeau du grenier ?
2. (a) Fais une description complète de ce solide.
   (b) Dessine ce solide en perspective à l'échelle de $\frac{1}{50}$ sachant que sa hauteur est de $\sqrt{3}$m et son rayon de base est 1m.

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

1.2 Patron d'un cône de révolution

Consigne 1.2

Anani ouvre un cône circulaire droit le long de l'un de ses génératrices et obtient la figure plane dont une esquisse est la suivante :



Il établit ainsi le tableau de proportionnalité suivant.

Mesure de l'angle en °	360	β
Longueur de l'arc intercepté	$2\pi a$	$2\pi r$

1- En utilisant le tableau ci-dessus, exprime la mesure de l'angle au sommet du développement de la surface latérale de ce cône en fonction de r et a.
2- Dessine en vraie grandeur le patron du cône de hauteur $h=4cm$ et de rayon $r=3cm$.

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Retenons

Soit r le rayon d'un cône de révolution et a son apothème. La mesure β de l'angle au sommet du développement de la surface latérale de ce cône est donnée par :

$$\boldsymbol{\beta = \frac{360° \times r}{a}}$$

Aussi, on a :

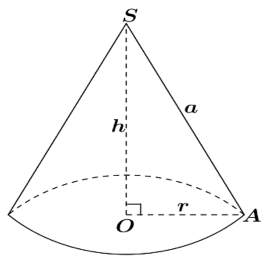
$$\boldsymbol{a = \frac{360° \times r}{\beta}}$$

$$\boldsymbol{r = \frac{\beta \times a}{360°}}$$

1.3 Relation liant les dimensions d'un cône de révolution

Consigne 1.3

On considérant le cône suivant :

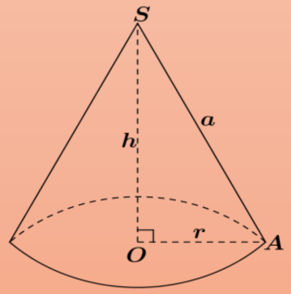


Prof. Adekoulé Emmanuel ILEDI

1. Donne la nature du triangle SOA.
2. (a)Calcule SA^2en fonction de OA^2 et OS^2.
   (b) Déduis-en la relation qui lie a ; r et h

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

Retenons



En considérant le triangle SOA du cône ci-dessus, d'après la propriété de Pythagore, on a :

$$\boldsymbol{a^2 = h^2 + r^2}$$

1.4 Aire latérale- aire totale d'un cône de révolution

Cosigne 1.4

Après le développement du cône, Anani souhaite connaître l'aire de la surface du carton ayant servi à la fabrication de cône. Pour cela il construit le tableau de proportionnalité suivant

Longueur de l'arc	$2\pi a$	$2\pi r$
Aire du secteur délimité	πa^2	A_L

$A_L$désigne l'aire latérale du cône de rayon r et d'apothème a.

1. En utilisant le tableau ci-dessus, exprime l'aire latérale A_L de ce cône en fonction de r et a.
2. (a) Donne l'aire de base de ce cône en fonction de r.
   (b) Déduis-en l'aire totale de ce cône en fonction de a et r.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

Retenons

Soit A_b l'aire de base d'un cône de révolution de rayon r et d'apothème a ; A_L son aire latérale et A_T son aire totale. On a :

$$\boldsymbol{A_b = \pi r^2}$$

$$\boldsymbol{A_L = \pi r a}$$

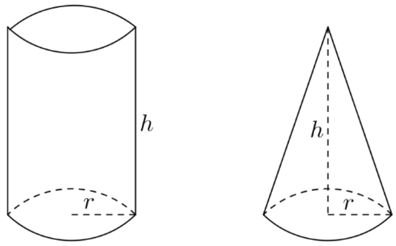
A_T=$A_b + A_L$

$= \pi r^2 + \pi r a$ d'où $\boldsymbol{A_T = \pi r(r + a)}$

1.5 Volume d'un cône de révolution

Consigne 1.5

Julien veut déterminer le volume d'un cône, pour cela il décide de remplir du sable un cylindre ayant la même hauteur et la même base que ce cône. Après, il constate qu'il a fallu trois volumes de sable de ce cône pour remplir ce cylindre.



1. Donne l'expression du volume V' du cylindre en fonction de son rayon r et de sa hauteur h.
2. Exprime le volume V de ce cône en fonction du volume V' du cylindre puis en fonction de son rayon r et de sa hauteur h.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

Retenons

Soit A_b l'aire de base d'un cône de révolution de hauteur h, de rayon r et V son volume. On a :

$$\boldsymbol{V = \frac{A_b \times h}{3}}$$

Or $A_b = \pi r^2$ donc $\boldsymbol{V = \frac{\pi r^2 \times h}{3}}$

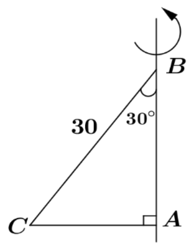
Evaluations formatives

Exercice 1

L'angle au sommet du développement de la surface latérale d'un cône circulaire droit en feuille de tôle est 288°. La base du cône est un disque de 25,12cm de périmètre. Prendre $\pi \approx 3{,}14$.

1. (a) Calcule la hauteur du cône.
   (b) Calcule l'aire totale du cône.
   (c) Calcule son volume.
   (d) Réalise un patron de ce cône.
2. Un verre de tome conique a les mêmes dimensions que le cône. On s'en sert pour remplir un cylindre de 6cm de rayon et 10cm de hauteur.
   Calcule le nombre maximum de verre contenu dans ce cylindre.

Exercice 2



L'unité de longueur est le cm.
Calcule la hauteur, le rayon de la base et le volume du cône de révolution obtenu en faisant tourner le triangle ABC autour de (AB), sachant que BC=30 et $mes\widehat{ABC} = 30°$ ($\pi \approx 3{,}14$)

Exercice 3

Calcule le volume d'un cône de révolution sachant que le périmètre du cercle de base est 44cm et qu'une génératrice mesure 25cm (on prendra $\frac{\pi 22}{7}$)

Exercice 4
Un cône de révolution a une génératrice de 20cm ; sa base a un rayon de 12cm.
Calcule la hauteur de ce cône et son volume.
($\pi \approx 3{,}14$)

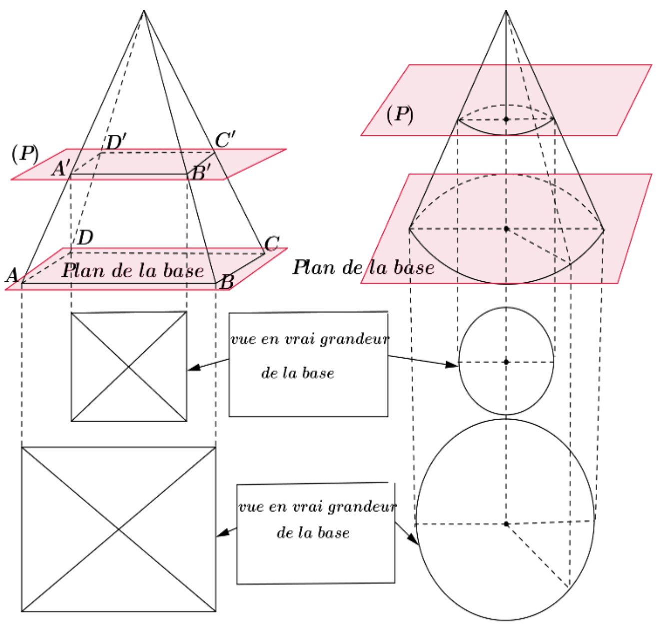
Exercice 5
Un cône de révolution a une génératrice de 45cm ; sa base a un rayon de 15cm.
Calcule l'aire latérale de ce cône et son aire totale.
($\pi \approx 3{,}14$)

Exercice 6
Un cône de révolution a une génératrice de 35cm.
Un patron de ce cône est constitué d'un secteur circulaire de mesure 135°.
Calcule le rayon de la base de la base de ce cône
($\pi \approx 3{,}14$)

Exercice 7
Un cône de révolution a une génératrice de 35cm.
Ce cône a pour aire latérale 11775cm^2.
Calcule le rayon de sa base, sa hauteur et son volume. ($\pi \approx 3{,}14$)

Séquence n°2 : Section plane

Activité 2.2
Anani décide de mettre en œuvre certaines caractéristiques du grenier de Sossa. Ainsi, il réalise les figures ci-dessous dont l'une est la représentation en perspective du chapeau du grenier coupé par un plan (P) parallèle au plan de sa base et l'autre est la représentation en perspective d'une pyramide régulière coupé par un plan (P) parallèle au plan de sa base.



2.1 Section d'un cône de révolution et d'une pyramide régulière

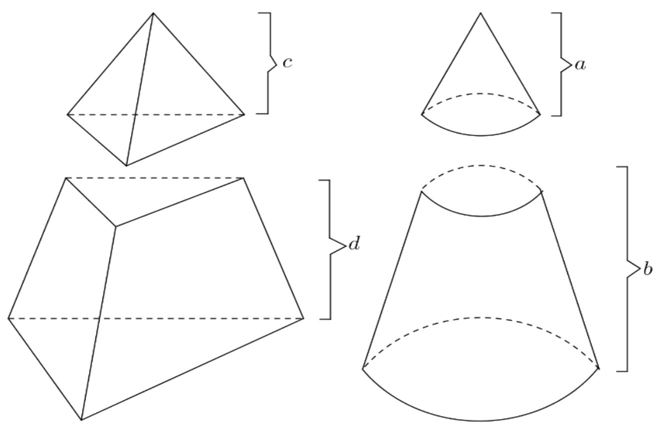
Consigne 2.1
1. Quelle est la nature de la section obtenue pour la pyramide régulière ?
2. Pour le cas de la pyramide, les côtés [AB] et [A'B'] par exemple sont appelés côtés correspondants.
   Donne tous les autres côtés correspondants de cette figure.
3. Quelle est la nature de la section obtenue pour le cône de révolution?
4. Complète les phrases suivantes pour en faire des propriétés :

Propriétés

- La section d'une pyramide par un plan parallèle à la base est un polygone de même nature que………….. Les supports des côtés correspondants de ces polygones sont ………
- La section d'un cône par un plan parallèle à la base est un ………………

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Consigne 2.2 : Solide réduit- tronc de solide
Après la section de chaque solide, Anani a obtenu dans chaque cas deux solides.

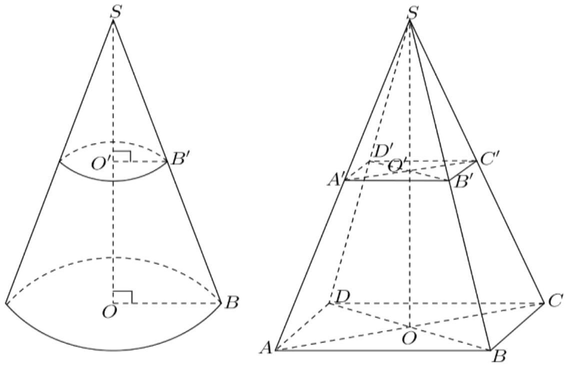


1. Annote le schéma en utilisant les lettres.
2. Complète la phrase suivante :
- La section d'une pyramide régulière par un plan parallèle à celui de la base permet d'obtenir d'un côté une **petite pyramide régulière** appelée…………et de l'autre……………..
- La section d'un cône de révolution par un plan parallèle à celui de la base permet d'obtenir d'un côté un petit cône appelé…….et de l'autre…………

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

2.2 Echelle ou coefficient de réduction d'un solide

Consigne 2.3
On considère les figures suivantes :



Pour le cône, on pose $SB' = a'$; $SO' = h'$; $O'B' = r'$; $SB = a$; $SO = h$; $OB = r$.

1. Démontre que les triangles SOB et SO'B' sont semblables.
2. (a) Etablis le rapport k de similitude du triangle SOB au triangle $SO'B'$.

Information : *Ce rapport k est appelé échelle de réduction du solide initial.*

(b) Déduis de tout ce qui précède que $k = \frac{a'}{a} = \frac{h'}{h} = \frac{r'}{r}$

3. Recopie et complète les phrases suivantes :
   - L'échelle k de réduction dans une section d'une pyramide régulière ou d'un cône de révolution par un plan parallèle à sa base est le rapport d'une longueur du solide………à la longueur correspondante du solide………..
   - Si a désigne l'apothème du solide initial ; a' l'apothème du solide réduit et k l'échelle de réduction alors $a' = \cdots a$; de même $h' = \ldots h$ et $r' = k \ldots$

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Retenons

Si k désigne l'échelle de réduction d'un solide initial, on a :

$$\boldsymbol{k = \frac{a'}{a} = \frac{h'}{h} = \frac{r'}{r}}$$

- a' est l'apothème du solide réduit et a celui du solide initial ;
- h' est la hauteur du solide réduit et h celui du solide initial ;
- r' est le rayon de base du solide réduit et r celui du solide initial.

2.3 Aires du solide réduit en fonction des aires du solide initial et de l'échelle de réduction

Consigne 2.4

Anani remarque qu'il peut obtenir l'aire du solide réduit en multipliant l'aire correspondante du solide initiale par le carré de l'échelle de réduction.

1- a) En te référant à cette information, exprime l'aire de base A'_b du cône réduit en fonction de l'aire de base A_b du cône initial et de l'échelle de réduction k.

b) Déduis-en le rapport $\frac{A'_b}{A_b}$.

2- De même si AL' *et* AL désignent respectivement l'aire latérale du solide réduit et du solide initial, alors on a :

$AL' = \cdots Al$ *et* $\frac{AL'}{AL} = \cdots$

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Retenons

Si k désigne l'échelle de réduction d'un solide initial, on a :

$$\boldsymbol{k^2 = \frac{A'_b}{A_b} = \frac{A'_L}{A_L}}$$

$A'_b = k^2 \times A_b$ et $A'_L = k^2 \times A_L$

- A'_b est l'aire de base du solide réduit et A_b celle du solide initial ;
- A'_L est l'aire latérale du solide réduit et A_L celle du solide initial.

2.4 Volume du solide réduit en fonction du volume du solide initial

Consigne 2.5

Après l'autre remarque, Anani affirme que le volume du solide réduit peut être obtenu en multipliant le volume du solide initial par le cube de l'échelle de réduction k.

1. En utilisant cette information, exprime le volume V' du solide réduit en fonction du volume V du solide initial et de l'échelle de réduction k.
2. Déduis-en le rapport $\frac{V'}{V}$ en fonction de k.

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Retenons

Si k désigne l'échelle de réduction d'un solide initial, on a :

$$\boldsymbol{k^3 = \frac{V'}{V}}$$

$$\boldsymbol{V' = k^2 \times V}$$

- V' est le volume du solide réduit et V celui du solide initial.

2.5 Dimensions, aire latérale et volume du tronc de solide en fonction des dimensions, aire latérale et volume du solide initial

Consigne 2.6

Soient a' *et* h' les dimensions du solide réduit ; a *et* h les dimensions du solide initial et k l'échelle de réduction.

1- Exprime en fonction de a et a' puis en fonction de h *et* h' respectivement les dimensions a_t et h_t du tronc de solide. En déduire l'expression de a_t en fonction de a et k.

2- Exprime l'aire latérale AL_t du tronc du solide en fonction de l'aire latérale AL' du solide réduit et AL du solide initial. En déduire l'expression de AL_t en fonction de AL *et* k.

3- Exprime le volume V_t du tronc du solide en fonction du volume V' du solide réduit et V du solide initial. En déduire l'expression de V_t en fonction de V et k.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

Retenons

Si k désigne l'échelle de réduction d'un solide initial, on a :

$$\boldsymbol{a_t = a(1-k)} \text{ et donc } \boldsymbol{a = \frac{a_t}{1-k}}$$

$$\boldsymbol{h_t = h(1-k)} \text{ et donc } \boldsymbol{h = \frac{h_t}{1-k}}$$

$$\boldsymbol{AL_t = AL(1-k^2)} \text{ et donc } \boldsymbol{AL = \frac{AL_t}{1-k^2}}$$

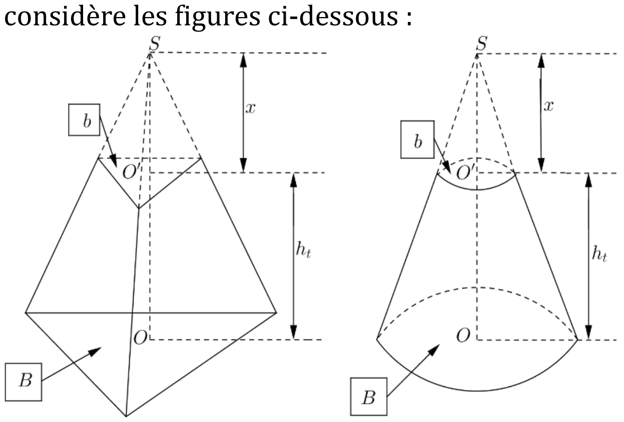
$$\boldsymbol{V_t = V(1-k^3)} \text{ et donc } \boldsymbol{V = \frac{V_t}{1-k^3}}$$

- $\boldsymbol{a_t}$ est l'apothème du tronc du solide et $\boldsymbol{a}$ celui du solide initial ;
- $\boldsymbol{h_t}$ est la hauteur du tronc du solide et $\boldsymbol{h}$ celui du solide initial ;
- $\boldsymbol{AL_t}$ est l'aire latérale du tronc du solide et $\boldsymbol{AL}$ celle du solide initial ;
- $\boldsymbol{V_t}$ est le volume du tronc du solide et $\boldsymbol{V}$ celui du solide initial.

2.6 Autre formule du volume du tronc d'un solide

Consigne 2.7

Anani désire déterminer le volume du tronc d'une pyramide régulière et d'un cône de révolution connaissant les aires B et b des bases parallèles respectivement du solide initial et du solide réduit et la hauteur OO' du tronc de l'un de ces solides. On considère les figures ci-dessous :



On pose $SO' = x$

1. Exprime SO en fonction de x et h_t.
2. (a) Donne l'expression du volume V' du solide réduit en fonction b et x.
   (b) Donne l'expression du volume V du solide initial en fonction de B ; x et h_t.
   (c) En déduire que le volume V_t du tronc du solide est donné par l'expression
   $V_t = \frac{1}{3}B(x+h_t) - \frac{1}{3}bx$ ou $V_t = \frac{1}{3}Bh_t + \frac{1}{3}(B-b)x$.
   (d) En déduire que $V_t = \frac{h_t}{3}\left(B + \frac{x}{h_t}(B-b)\right)$
3. (a) Justifie que $\frac{x}{h_t} = \frac{k}{1-k}$ avec k l'échelle de réduction.
   (b) En remarquant que $k^2 = \frac{b}{B}$, justifie que : $\frac{x}{h_t} = \frac{\sqrt{Bb}+b}{B-b}$.
4. Déduis-en que : $V_t = \frac{h_t}{3}(B + \sqrt{Bb} + b)$
5. Soit r et r' les rayons respectifs de la grande base du cône initial et de la petite base du cône réduit.
   Prouve que : $V_t = \frac{\pi h_t}{3}(r^2 + rr' + r'^2)$.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

Retenons

- Le volume V_t d'un tronc de cône de révolution ou d'un tronc de pyramide régulière de hauteur h_t est donné par :
$$\boldsymbol{V_t = \frac{h_t}{3}(B + \sqrt{Bb} + b)}$$
- Dans le cas d'un tronc de cône de révolution de hauteur h_t, et dont r et r' désignent les rayons des deux bases, le volume V_t de ce tronc est donné par :
$$\boldsymbol{V_t = \frac{\pi h_t}{3}(r^2 + rr' + r'^2)}$$

Retenons

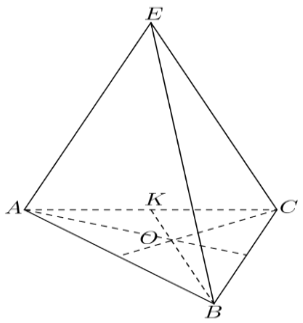
Soit a l'apothème d'une pyramide à base carrée de côté c et h la hauteur de cette pyramide. On a :

$$\boldsymbol{a^2 = h^2 + \frac{c^2}{4}}$$

Activité d'approfondissement

EABC est une pyramide régulière à base triangulaire ABC. O est l'orthocentre du triangle ABC, voir figure ci-dessous. Le volume de la pyramide est V= $24\sqrt{3}\ cm^3$ et la longueur du segment [BC] est 6cm.

Godjoy un élève en classe de 3ème a découvert cette figure chez l'une de ses condisciples et veut déterminer la hauteur de la pyramide



Information

Les droites (BO) et (AC) sont sécantes en K

Tâche : Tu vas te mettre à la place de **Godjoy** en répondant aux questions suivantes :

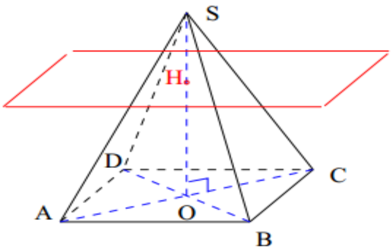
1. Démontre que la hauteur du triangle ABC est BK= $3\sqrt{3}$ cm.
2. Déduis que l'aire de base de la pyramide est $\mathscr{A}= 9\sqrt{3}\ cm^2$.
3. Calcule BO.
4. Détermine la hauteur EO de la pyramide.

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Evaluations formatives

Exercice 1

SABCD est une pyramide dont la base ABCD est un rectangle de centre O et dont la hauteur est le segment [SO]. On donne AB=32 cm ; BC=22 cm et SO=36 cm.



1. Calcule le volume V_1 de cette pyramide.
2. On coupe cette pyramide par un plan parallèle à la base. Ce plan coupe la hauteur [SO] en H tel que S H $=\frac{1}{4}SO$.
   (a) Quelle est la nature de l'intersection de ce plan et de la pyramide ?
   (b) Calcule le volume V_2 du tronc de pyramide.
   (c) Déduis-en le volume de la pyramide réduite.

Exercice 2

Un cône a pour volume $9400cm^3$. L'aire de sa base est égale à $705cm^2$. Une section à mi-hauteur détermine un petit cône P et un tronc de cône T.
1. Calcule les volumes de P et de T.
2. Calcule l'aire de la base et la hauteur de P.

Exercice 3

La hauteur d'un cône est 3,5m. Sachant que l'aire de base du cône est $25m^2$ et celle du cône réduit est $9m^2$.
1. Calcule la hauteur du cône réduit.
2. Calcule le volume du tronc de cône.

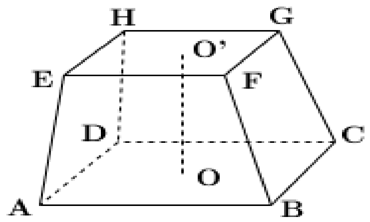
Exercice 4

La hauteur d'un cône de révolution vaut 1,30 m et l'aire de sa base est égale à $2{,}5m^2$. On sectionne le cône par un plan parallèle à sa base à une distance de 0,9m du sommet.
Détermine l'aire de la section obtenue.

Exercice 5

SABCD est une pyramide régulière de sommet S, de hauteur SH = 238m et dont la base ABCD est un carré de 150m de côté. On effectue la section de cette pyramide par un plan (P) parallèle à la base et qui passe par le milieu O de [SH].
1. Représente la pyramide et la section de pyramide obtenue à l'échelle $\frac{1}{5000}$.
2. Calcule le volume de la pyramide SABCD.
3. Calcule le volume du tronc de pyramide.
4. Calcule le rapport des volumes du tronc de pyramide et de la pyramide SABCD.

Exercice 6



L'unité de longueur est le cm. ABCDEFGH est le tronc de pyramide qui a été obtenu par la section d'une pyramide régulière SABCD de hauteur [SO], avec le plan parallèle à la base qui passe par le point O'. Sachant que AB=50, EF=40 et OO'=35, calcule le volume de la grande pyramide SABCD et le volume du tronc de pyramide ABCDEFGH.

Exercice 7

La hauteur d'un cône de révolution est 0,6m et le rayon de sa base est 0,4m.
A quelle distance du sommet faut-il sectionner le cône pour obtenir un cône dont l'aire latérale est le quart de l'aire latérale du cône initial ?

Exercice 8

SABCD est une pyramide à base carrée ABCD de centre H. On donne : AB = 20 cm, SA = 40 cm, SH est la hauteur et A' est le milieu de [SA].
On coupe la pyramide par un plan parallèle à sa base passant par A'.
1. Calcule AC, AH et SH.
2. Soit K milieu de [AB], calculer SK.
3. Calcule le volume de la pyramide SABCD. Déduis-en le volume V' de la pyramide réduite.
4. Calcule le volume du tronc de la pyramide obtenue après la section.

Retour et projection

Consigne1 : Objectivation

1. Qu'as-tu découvert sur la SA n°2 ?
2. Qu'as-tu appris de nouveau sur la SA n°2 ?
3. Qu'as-tu trouvé difficile ou facile sur la SA n°2 ?

Consigne 2 : Auto-évaluation

1. Qu'est-ce que tu as réussi ?
2. Qu'est-ce que tu n'as pas réussi ?
3. Qu'est-ce que tu vas faire pour améliorer ta production ?

Fin de la SA N°2

SA N°3 : CALCUL LITTERAL

Situation de départ

Texte :

Le conseil communal de Zodji a décidé de faire aménager les abords de la rivière Zo afin de créer sur ses deux rives un espace de jeu. Pour ce faire, il lui faut après nettoyage des deux rives procéder à l'épandage d'un herbicide à raison de 4 litres sur $100m^2$ pour une superficie de plus de $20ha$.
Cet herbicide est vendu dans un magasin de la place à 3.500 F le tube de un litre.
Comlan, fils du comptable de la commune est un élève de la classe de troisième au CEG de Zodji. Des informations qu'il a reçues de son professeur de Sciences Physiques et des agents commerciaux qu'il a rencontrés il ressort que :

- la fabrication de l'herbicide nécessite le mélange de 2 produits A et B qui sont vendus respectivement à 900F la bouteille de un litre et à 5000F le bidon de 5 litres.
- pour être efficace ce mélange doit être constitué d'au moins 40% du produit A et d'au moins 50% du produit B.
- les deux produits, après achat, doivent passer au contrôle de qualité dans une machine qui ne peut travailler plus de 6 heures par jour.
- le temps disponible pour le contrôle de qualité ne peut excéder 5 jours.
- le produit A nécessite 4 min de contrôle par litre et le produit B 15 min de contrôle par bidon.
- le contrôle d'une bouteille du produit A coûte 90 F et celui d'un bidon du produit B coûte 500F.

Avant l'épandage l'herbicide devra être dilué dans de l'eau.
Le comptable a le choix entre acheter l'herbicide dans le commerce et le faire fabriquer.

Tâche : Tu vas te construire des nouvelles connaissances en mathématiques. Pour cela tu auras tout au long de cette situation d'apprentissage à :

- Exprimer ta perception de chacun des problèmes posés ;
- Analyser chacun des problèmes posés ;
- Mathématiser chacun des problèmes posés ;
- Opérer sur l'objet mathématique que tu as identifié pour chacun des problèmes ;
- Améliorer au besoin ta production.

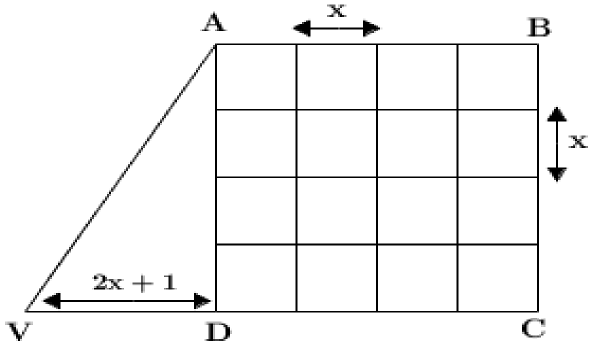
Activité 0

- Lis le texte de la situation de départ.
- Reformule le problème ou la situation-problème en tes propres termes.
- Formule toutes les idées et questions que t'inspire la situation de départ.
- Reconnais des situations similaires.
- Anticipe éventuellement sur la réponse au problème.

Séquence n°1 : Polynômes

Activité 3.1

Sur l'une des rives, le conseil communal dégage une surface pour essayer l'efficacité de l'herbicide afin de minimiser le coût. A cet effet, un domaine ayant la forme d'un trapèze ABCV, comme l'indique la figure suivante, a servi à l'opération.



1.1 Notion de polynôme

Consigne 1.1

1. Soit x le prix d'un litre du produit B.
   Donne l'expression littérale qui traduit le prix de 3 litres du produit B.

Information : Cette expression est appelée monôme de variable x, de degré 1 et de coefficient 3.

2. Donne des exemples de monômes :
   - de variable x et de degré 1
   - de variable z et de degré 2
   - de variable y et de coefficient $-\sqrt{3}$.

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Définitions

- **Un monôme** est une expression littérale qui peut s'écrire sous la forme ax^n avec $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
  Exemple : $4x^2$ ou x ou 5 etc.
- **Un polynôme** est une somme algébrique de deux ou plusieurs monômes
  Exemple : $4x^2+3x+2$ ou $4x^2+3x$ ou $3x+2$ etc.
- Le degré le plus élevé des monômes d'un polynôme est le degré de ce polynôme.
  Exemple : Le degré du polynôme $7x^3$+$6x^5$+11 est 5.

Remarque

Un monôme est aussi un polynôme.

Consigne 1.2

1. (a) Calcule en fonction de x, l'aire P(x) du carré ABCD puis l'aire T(x) du triangle ADV.
   (b) Déduis-en l'aire du trapèze.
2. Comment peux-tu désigner les expressions obtenues ?
3. Précise le degré de chacune des expressions obtenues.

1.2 Calculs sur les polynômes

Consigne 1.3 : Somme, soustraction et multiplications de polynômes.

On considère les expressions suivantes :
$f(x)=2x^3-5x^2+x-1$; $g(x)=-3x^2+7x-\sqrt{5}$ et $h(x)=x-2$

1. Calcule, réduis et ordonne suivant les puissances croissantes de x chacune des expressions : $f(x)+g(x)$; $f(x)-h(x)$ et $f(x)\times h(x)$.
2. Précise le degré de chaque polynôme obtenu.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

Consigne 1.4 : Développement d'un polynôme

On donne les polynômes suivants.
$G(x)=(2x-5)^2-3x(4x^2-5x)$; $T(x)=(4-3x)^2$
$F(x)=(3x-2)(x+1)-(7x^2+8x)$;
$h(x)=(2x-\sqrt{7})(2x+\sqrt{7})$; $R(x)=(3x+2)^2$

1. Développe réduis et ordonne chacun des polynômes E, T et R suivant les puissances décroissantes de x.
2. Calcule la valeur numérique de chacun des polynômes $G(x)$ et $F(x)$ pour $x=0$ et pour $x=-1$.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

Consigne 1.5 : Factorisation d'un polynôme

On donne les polynômes suivants :
$f(x)=3x+6$; $g(x)=2x^2-10x$ et $h(x)=6x^4-12x^3+18x^2$

1. Factorise chacun des polynômes $f(x)$; $g(x)$ et $h(x)$.
2. On donne :
   $A(x)=(x^2-4)-5(x^2+4x+4)+(x+2)(x-1)$ et $B(x)=(4x^2-12x+9)+(4x^2-9)-(2x-3)$
   (a) Factorise chacune des polynômes :
   x^2-4 ; (x^2+4x+4) ; $4x^2-12x+9$ et $4x^2-9$
   (b) Déduis-en une factorisation de chacun des polynômes $A(x)$ *et* $B(x)$
3. Calcule la valeur numérique du polynôme $A(x)$pour $x=-2$

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

Evaluations formatives

Exercice 1

On donne l'expression : $A=(3x+5)^2+(3x+5)(2x+7)$

1. Développe et réduis M.
2. Factorise M.
3. Calcule M pour $x=2$, puis pour $x=0$.

Exercice 2

Développe, réduis et ordonne les expressions suivantes :
$A=(2x-3)(-x+2)-x(5-4x)$;
$B=(2x+3)^2+(3x-2)^2$;
$C=(x-1)^2-3x(x+1)$;
$D=4x^2-1-(2x-1)(3x+7)$.

Exercice 3

Mets sous forme d'un produit de facteurs du premier degré les expressions suivantes :
$A=3x-6+(x^2-4x+4)$
$B=(2x-2)^2-(1-x)^2$
$C=25x^2-30x+9$
$D=4x^2-1-(2x-1)(3x+7)$
$E=(3x+2)(5x-2)+(3x+2(x-8)$
$F=4x^2-8x+4-(2x-2)(-3x+9)$
$G=(3x+5)^2-(3x+5)(2x+8)$
$H=25x^2+20x+4$
$I=25(x+2)^2-16(4-2x^2)$
$J=(x+13)(x+1)-4(x+1)^2$

Exercice 4

Soit $A=(4x-1)^2-(4x-1)(3x-6)$ et $B=1-9x^2+2(x-2)(3x-1)$
1. Factorise A, B et A – B.
2. Développe et réduire A, B et A – B.

Exercice 5

Soit $C=(x-2)(3x-5)+9x^2-25$

1. Développe et réduis C.
2. Factorise C.
3. Calculer C pour $x=-2$; pour $x=\sqrt{7}$ et pour $x=2\sqrt{3}-1$.

Séquence n°2 : Equations de droite

Activité 3.2

L'épandage sur l'une des rives nécessite la fabrication de 100L d'herbicide dont la composition nécessite x bidons de 5L du produit A et 11 bidons de 5L du produit B.

2.1 Equation du premier degré dans ℝ

Consigne 2.1

1. Traduis cette situation par une équation.

Cette équation est appelée équation du premier degré dans ℝ.

2. Détermine le nombre de bidons de 5L du produit A à utiliser.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

Consigne 2.2
On considère les polynômes suivants
$F(x) = x^2 + 4x - 3$; $G(x) = x^2 - 2x + 1$
1. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $F(x)=G(x)$
2. Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes : $3x - 1 = -5$; $2x+1=5x-4$; $x\sqrt{3}+5=1-5x$

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

Propriété : Equation du type $(ax + b)(cx + d)=0$
Le produit de deux nombres réels est nul signifie que l'un au moins de ces deux nombres est nul.
$(ax + b)(cx + d)=0$ équivaut à $ax + b=0$ ou $cx+d=0$

Remarque : $(ax + b)^2 = 0$ équivaut à $ax + b = 0$

Consigne 2.3 : Résolution d'équation du type $(ax + b)(cx + d)=0$
Résous dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{N}$ chacune des équations
(a) $(3x + \sqrt{2})(-2x - 5)=0$;
(b) $(5x + 3)^2=0$;
(c) $(x - 2)(3x + 5)+(x - 2)(-x + 7)=0$;
(d) $(x + 1)(x - 2)=(x + 1)(2x + 3)$.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

Propriétés : Equation du type $|ax + b|=c$
a, b et c sont des nombres réels avec $a \neq 0$
- 1^{er} cas : $c > 0$

$|ax + b|=c$ équivaut à $ax + b=c$ ou $ax + b=-c$
- $2^{ème}$ cas : $c = 0$

$|ax + b| = 0$ équivaut à $ax + b = 0$
- $3^{ème}$ cas : $c < 0$

$|ax + b| = c$ est absurde, donc cette équation n'admet pas de solution.

Consigne 2.4 : Résolution d'équation du type $|ax + b|=c$
Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :
$|1 - 3x|=5$; $|-x + 5\sqrt{2}|=0$ et $\left|\frac{2}{3}x - 1\right|=-1$

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

2.2 Equation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Consigne 2.5
Le contrôle d'un litre du produit A coûte 90 F et celui d'un bidon du produit B coûte 500 F. Le comptable désire contrôler x litres du produit A et y bidons du produit B ; le montant total à payer est de 86.050 F.
1. Écris une équation (E) traduisant cette situation.

Information : Une telle équation est appelée équation du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

2. Vérifie que le comptable peut contrôler 45 litres du produit A et 164 bidons du produit B.

Information : On dit que le couple (45; 164) est une solution de l'équation (E).

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

Définition
On appelle équation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, toute équation de la forme $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$ où $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ sont des constantes réelles avec a et b non tous nuls.

Consigne 2.6 : Solution d'une équation du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
1. On donne l'équation (E_1) : $2x+3y=-5$ d'inconnues x et y.
   (a) Pour $x = 3$, calcule la valeur de y.
   (b) Pour $y = 5$, calcule la valeur de x.
2. Parmi les équations suivantes, lesquelles sont des équations du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
   $2x + 4y -1=0$; $x - 3y=0$; $-x+2y - 5z=0$ et $2x^2 - 3y+1=0$,
3. On donne dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ l'équation (E) :$2x+y -5=0$
   (a) Parmi les couples (1 ; 3) ; (2 ; 0) ; (2 ;1) ; (0 ; 5), trouve ceux qui sont solutions de l'équation (E).
   (b) Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), place les points correspondants aux couples de coordonnées solutions de l'équation (E).
4. Trace la droite passant par deux de ces points.
5. Complète les phrases suivantes pour en faire des propriétés :
   - Les représentations des solutions d'une équation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sont des points.......................
   - Toutes les solutions d'une équation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sont représentées sur une........
6. En utilisant l'équation (E), écris y en fonction de x.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

2.3 Equations réduites – Equations cartésiennes d'une droite

Définition : Equation réduite d'une droite
L'écriture de la forme $\boldsymbol{y=ax + b}$ est **l'équation réduite** d'une droite sécante à l'axe des ordonnées avec a et b des nombres réels.
$\boldsymbol{a}$ est appelé **coefficient directeur** de la droite et $\boldsymbol{b}$ son **ordonnée à l'origine**.

Consigne 2.7
On considère les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives $3x -5y+2=0$ et $2x+3y=8$.

Prof. Adekoulé Emmanuel ILEDI

Pour chacune des droites (D_1) et (D_2), écris son équation réduite, précise son coefficient directeur et son ordonnée à l'origine.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

Consigne 2.8

Le plan est muni d'un repère (O, I, J), (D) est la droite d'équation $y = ax + b$ où a et b sont des nombres réels. $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sont deux points de (D) et donc $x_A \neq x_B$.

1. (a) Ecris y_A et y_B respectivement en fonction de x_A et x_B.
   (b) Justifie que $y_B - y_A = a(x_B - x_A)$.
2. Déduis-en le coefficient directeur a de la droite (D) en fonction des coordonnées des points A et B.
3. Complète la phrase suivante pour en faire une définition :

Définition

Le coefficient directeur d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées et passant par les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ est donné par la relation :

$$a=\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

Retenons

Pour déterminer l'équation d'une droite (D) non parallèle à l'axe des ordonnées passant par les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ avec $x_A \neq x_B$, sous la forme $y=ax + b$, on peut procéder comme suit :

- ✓ déterminer a le coefficient directeur de (D) défini par $\boldsymbol{a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}}$ et
- ✓ déterminer b l'ordonnée à l'origine de (D) définie par $\boldsymbol{b=y_B - ax_B}$ ou $\boldsymbol{b=y_A - ax_A}$ (puisque $A \in (D)$ et $B \in (D)$)

Consigne 2.9

Le plan est muni d'un repère (O, I, J). On donne les points A(5 ; 1) ; B(3 ;−1) et $C(2; 3)$

1. Détermine une équation des droites (AB) et (AC) sous la forme $y = ax + b$.
2. Construis la droite (D) d'équation.
3. Détermine une équation de la droite (Δ) de coefficient directeur −3 et passant par A'(2 ; 4).

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

Consigne 2.10

Le plan étant muni d'un repère (O; I; J). (D) est la droite d'équation $2x - y + 4=0$.

1. Reproduis puis complète le tableau ci-dessous :

(D)	A	B
x		
y		

Le couple $(x; y)$ étant solution de l'équation de la droite (D).

2. Trace la droite (D)

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

Consigne 2.11

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).

On donne les points $A(1 ; -3)$ et $B(-1 ; -3)$

1. (a) Trace la droite (AB).
   (b) Complète la phrase suivante :
   Les droites (AB) et (OI) sont ....
2. (a) On a y_A=y_B=−3 donc une équation de la droite (AB) est y=...
   (b) Complète la phrase suivante pour en faire une propriété :

Propriété

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), lorsque deux points M et N ont même.....b, la droite (MN) a pour équation y=b.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

Consigne 2.12

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).

On donne les points A(2 ;2) et B(2 ;-1)

1. (a) Trace la droite (AB).
   (b) Complète la phrase suivante :
   Les droites (AB) et (OJ) sont ....
2. (a) On a $x_A = x_B = 2$ donc une équation de la droite (AB) est x=...
   (b) Complète la phrase suivante pour en faire une propriété :

Propriété

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), lorsque deux points M et N ont même........a, la droite (MN) a pour équation $x = a$.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

Consigne 2.13

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).

On donne les points A(3 ; 3) et $B(-2 ; -2)$

1. Détermine une équation de la droite (AB).
2. Trace cette droite. Que constates-tu ?
3. Complète la phrase suivante :
   Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), la droite passant par .... du repère a pour équation $y = ax$.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

Consigne 2.14 : Droites parallèles

Le plan est muni du repère (O, I, J).

(D) et (D') sont deux droites d'équations respectives $y = -x + 3$ et $y = -x - 4$

1. Soit a et a' les coefficients directeurs respectifs des droites (D) et (D'). Précise a et a' puis compare-les.

2. (a) Construis les droites (D) et (D') dans le même repère.
   (b) Quelle est la position de ces droites ?
3. Complète les phrases suivantes pour en faire des propriétés :

Propriétés

- Si deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées sont parallèles, alors elles ont …. coefficient directeur.
- Si deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées ont même coefficient directeur, alors elles sont ……

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Consigne 2.15 : Application

Le plan est muni d'un repère orthonormé
(D) est la droite d'équation $y = \frac{2}{3}x - 2$. Détermine une équation de la droite (D') parallèle à (D) et passant par A$(-3\,;-1)$.

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Consigne 2.16 : Droites perpendiculaires

Le plan est muni du repère (O, I, J).
(D) et (D') sont deux droites d'équations respectives $y = \frac{2}{5}x + 3$ et $y = -\frac{5}{2}x - 1$

1. Soit a et a' les coefficients directeurs respectifs des droites (D) et (D'). Précise a et a' puis calcule le produit $a \times a'$.
2. (a) Construis les droites (D) et (D') dans le même repère.
   (b) Quelle est la position de ces droites ?
3. Complète les phrases suivantes pour en faire des propriétés :

Propriétés

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

- Si deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées sont…., alors le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1.
- Si le produit des coefficients directeurs de deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées est ……, alors ces droites sont perpendiculaires.

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Consigne 2.17 : Application

Le plan est muni d'un repère orthonormé. (D) est la droite d'équation $y = -5x - 2$ et on considère les points $A(-1\,;\,-2)$ et $B(4\,;\,-2)$

1. Détermine une équation de la droite (D_1) perpendiculaire à (D) et passant par A.
2. Détermine une équation de la droite (D_2), médiatrice du segment [AB].

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

2.4 Construction d'une droite connaissant son coefficient directeur et un de ses points

Consigne 2.18

Le plan est muni d'un repère (O; I; J). (Δ) est la droite passant par A(2;−1) et de coefficient directeur 2.
Construis la droite (Δ). Pour cela :

1. Place le point A dans le repère.
2. Soit (D) la droite d'équation y = 2x, construis la droite (D).
3. Trace la droite parallèle à (D) passant par le point A.

Cette parallèle ainsi tracée est la droite (Δ).

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Evaluations formatives

Exercice 1

Résous dans ℝ et dans ℕ les équations suivantes :

1. $4(x + 2)+1=2(7x - 5)$.
2. $(2x - 4)(-2x + 3)=0$.
3. $(x - 4)(-4x + 2) - (x - 4)(1-2x)=0$.
4. $(3x - 4)(-x + 2) = (-x + 2)(4-2x)$.

Exercice 2

Résous sans ℝ les équations suivantes :

1. $\frac{x-1}{x+3}=\frac{5}{4}$.
2. $\frac{2x+1}{x}=\frac{2x}{x+4}$.
3. $\frac{2x+3}{x-1}=\frac{4x}{2x+3}$.

Exercice 3

1. Quel est le nombre dont le double plus 16 est égal au triple moins 21 ?
2. Quel est le nombre dont le quadruple moins 24 est égal au triple moins 3 ?

Exercice 4

Godjoy possède 520F de plus que Luc. Zoé possède le double de l'argent de Luc. A eux trois, ils ont 3120F.
Calcule ce que possède chacune de ces personnes.

Exercice 5

Godjoy achète un appareil photo, un flash et une pellicule. Elle paie le tout à 1102F.
Le flash vaut 4 fois la pellicule et l'appareil vaut 6 fois la flash. Trouve le prix de chaque objet.

Exercice 6

Soit A, B et C les points de coordonnées respectives (3; 5), (−1; 2) et (7;−2) et H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC). Nous appelons (x; y) les coordonnées de H et k le nombre réel tel que BH = k:BC.

1. Exprime x et y en fonction de k.
2. Détermine le nombre k pour que les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BC}$ soient orthogonaux.
3. Justifie que H est un point du segment [BC].
4. Calcule les coordonnées du point H.

5. Calcule les longueurs AH, BH et HC.
6. Calcule la tangente de l'angle $\widehat{ABH}$.

Exercice 7

Dans le plan est muni d'un repère (O; I; J), on donne les points : A(5; 1), B(−2; 3) et la droite (D) d'équation $7x - 5y = 4$.

1. Trouve une équation de la droite (Δ) passant par A et parallèle à (D).
2. Détermine une équation de la médiatrice de [AB].

Exercice 8

Le plan est muni du repère orthonormé (O; I; J). On considère les droites (D) et (D') d'équations respectives (D) : $y=-x+2$ et (D') : $y = -2x + 6$.

1. Détermine les coordonnées du point I, point d'intersection des droites (D) et (D').
2. La droite (D) coupe l'axe des abscisses en A, l'axe des ordonnées en B. La droite (D) coupe l'axe des abscisses en A', l'axe des ordonnées en B'.
   Calcule les coordonnées des points A, B, A' et B'.
3. Par l'origine O, on trace la droite (Δ) perpendiculaire à (D'). Elle coupe (D') en H. Détermine une équation de (Δ) et calcule les coordonnées du point H.
4. Calcule la longueur OH.

Séquence 3 : Equations – Inéquations

Activité 3.3

Le comptable prévoit dépenser au plus 36000F pour l'acquisition de x litres du produit B. Le litre de produit B est vendu à 1500F.

3.1 Inéquations du premier degré dans ℝ

Consigne 3.1

1. Écris une inéquation traduisant la contrainte du comptable.

Cette écriture est appelée inéquation du premier degré dans ℝ.

2. Détermine x l'ensemble des nombres possibles de litre du produit B que le comptable pourra acheter.

Tu viens ainsi de donner l'ensemble des solutions de l'inéquation précédente

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

> **Retenons**
> L'ensemble des solutions d'une inéquation du premier degré dans ℝ est un intervalle de ℝ.

Consigne 3.2

Résous chacune des inéquations suivantes et représente graphiquement l'ensemble de leurs solutions : (I_1) : $6-5x \geq 0$; (I_2) : $5x -3<1+2x$; (I_3) : $2(1-3x)<3(2-x)$.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

Consigne 3.3

Résous dans ℝ, chacun des systèmes :

$(S_1) : \begin{cases} 2x + 3 < 0 \\ -x - 5 < 0 \end{cases}$ et $(S_2) : \begin{cases} 3(x+2) \geq x + 1 \\ 2x + 1 < 3x - 2 \end{cases}$

Ces systèmes sont appelés des systèmes d'inéquations du premier degré à une inconnue dans ℝ.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

> **Définition**
> On appelle système de deux inéquations du premier degré à une inconnue dans ℝ tout système formé de deux inéquations du 1er degré dans ℝ.

Consigne 3.4 : Problèmes se ramenant à des inéquations et système d'inéquations du premier degré dans ℝ

Un épicier achète 50 boîtes de conserve pour 10000F. Quel doit être le prix de vente minimal d'une boîte pour qu'il réalise un bénéfice total d'au moins 1250F ?

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

3.2 Systèmes de deux équations du premier degré dans ℝ × ℝ

> **Définition**
> On appelle système de deux équations du 1er degré dans ℝ × ℝ tout système formé de deux équations du 1er degré dans ℝ × ℝ.

Consigne 3.5

Le plan est muni d'un repère orthonormé. On considère les droites (D_1) et (D_2) d'équation respective $x+3y-5=0$ et $2x - y+4=0$.

a) Justifie que les droites (D_1) et (D_2) sont sécantes.
b) Construis (D_1) et (D_2) puis détermine graphiquement le couple de coordonnées du point d'intersection A de ces deux droites.

Information : Tu viens ainsi de résoudre par la **méthode graphique** le système $\begin{cases} x + 3y - 5 = 0 \\ 2x - y + 4 = 0 \end{cases}$ appelé système de deux équations du premier degré dans ℝ × ℝ

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

Consigne 3.6

On considère le système précédent dont les équations sont notées : (E_1) : $x+3y-5=0$ et (E_2) : $2x - y+4=0$.

a) Ecris x en fonction de y dans (E_1) puis remplace le dans (E_2).
b) Déduis-en la valeur de y puis celle de x.

Information : Tu viens ainsi de résoudre par la **méthode de substitution** le système $\begin{cases} x+3y-5=0 \\ 2x-y+4=0 \end{cases}$

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Retenons : Méthode de substitution

Pour résoudre un système de deux équations du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par **la méthode de substitution**, on procède comme suit :

- Exprimer y en fonction de x dans l'une des deux équations.
- Remplacer l'expression de y dans la seconde équation.
- Déterminer ainsi la valeur de x.
- Déterminer la valeur de y.
- Vérification.
- Solution.

Consigne 3.7

On considère le système précédent dont les équations sont notées (E_1) : $x+3y-5=0$ et (E_2) : $2x-y+4=0$.

a) Multiplie chaque membre de l'équation (E_2) par 3, tu obtiens une nouvelle équation $(E_2{}')$.
b) Additionne membre à membre les équations du nouveau système formé par (E_1) et (E_2').

Information : Tu viens d'éliminer y ;

Détermine alors la valeur de x

c) Multiplie chaque membre de l'équation (E_1) par -2, tu obtiens une nouvelle équation $(E_1{}')$
d) Additionne membre à membre les équations du nouveau système formé par (E_1') et (E_2).

Information : Tu viens d'éliminer x ;

Détermine alors la valeur de y.

Information : Tu viens ainsi de résoudre par la **méthode de combinaison ou d'addition** le système $\begin{cases} x+3y-5=0 \\ 2x-y+4=0 \end{cases}$.

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Retenons : Méthode de combinaison ou d'addition

Pour résoudre un système de deux équations du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par la **méthode de combinaison ou d'addition**, on procède comme suit :

- Élimination de x par équilibrage de ses coefficients et addition membre à membre.
- Détermination de y.
- Élimination de y par équilibrage de ses coefficients et addition membre à membre.
- Détermination de x
- Vérification.
- Solution.

On considère le système précédent dont les équations sont toujours notées : (E_1) : $x+3y-5=0$ et (E_2) : $2x-y+4=0$.

a) Ecris x en fonction de y dans (E_1) et x en fonction de y dans (E_2).
b) Par comparaison de ces expression, détermine la valeur de y puis déduis-en celle de x.

Information : Tu viens ainsi de résoudre par la **méthode de comparaison** le système $\begin{cases} x+3y-5=0 \\ 2x-y+4=0 \end{cases}$

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Retenons : Méthode de comparaison

Pour résoudre un système de deux équations du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par la **méthode de comparaison**, on procède comme suit :

- Expression de y en fonction de x ou expression de x en fonction de y dans les deux équations.
- Pose l'égalité des expressions obtenues puis résous l'équation.
- Détermine la valeur de l'autre inconnue.
- Vérification.
- Solution.

Consigne 3.9

On considère les systèmes d'équations suivants

(S_1): $\begin{cases} 4x+y-7=0 \\ -2x-y+5=0 \end{cases}$; (S_2): $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x-y-6=0 \end{cases}$;

(S_3): $\begin{cases} 3x+2y=0 \\ x+4y+5=0 \end{cases}$.

1. Résous (S_1)par la méthode de substitution et la méthode de comparaison.
2. Résous (S_2)par la méthode graphique.
3. Résous (S_3)par la méthode de combinaison.

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Consigne 3.10 : Problèmes se ramenant à des systèmes de deux équations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

60 livres de deux sortes occupent 210 cm sur une étagère, ces livres sont rangés les uns contre les autres, leurs épaisseurs est soit 4 cm soit 2 cm. Quel est le nombre de livres de chaque sorte ?

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

3.3 Inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Consigne 3.11

Le conseil communal reçoit des groupes de visiteurs avec du lait stocké dans des bidons de 3L et de 5L. Le maire dispose de 24 bidons de lait. On désigne par x le nombre de bidons de 3L et y celui de bidons de 5L reçu.

1. Sachant que le Maire ne peut distribuer plus de 24 bidons, traduis cette situation par une inéquation.

Cette inéquation est appelée inéquation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

2. Dans Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J), trace la droite (D) d'équation $3x + 5y - 24 = 0$ et place les points O, A, B, C, D et E de coordonnées respectives (0 ; 0), (2 ; 1) ; (5 ;3) ; (4 ; 3) ; (−2 ; 6) et (8 ; 0).
3. En combien de parties la droite (D) d'équation $3x + 5y - 24 = 0$ délimite-elle le plan ?

1- Parmi les couples ci-dessus, indique ceux dont les coordonnées vérifient l'inéquation $3x+5y - 24 > 0$.

2- Hachure le demi-plan contenant les points dont les coordonnées vérifient l'inéquation $-2x - y + 5 > 0$

Information : Ce demi-plan est l'ensemble des points dont les coordonnées sont solutions de l'inéquation $3x+5y - 24 > 0$

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

3.4 Systèmes d'inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Consigne 3.12

On veut résoudre graphiquement le système suivant : (S): $\begin{cases} -2x - y + 5 > 0 \\ x - 3y + 6 < 0 \end{cases}$. Pour cela, on pose

On donne les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives $-2x - y+5=0$ et $x - 3y+6=0$

1. Construis les droites (D_1) et (D_2).
2. Retrouve l'ensemble des points du plan dont les coordonnées sont solutions de chacune des inéquations $-2x - y+5> 0$ et $x - 3y+6< 0$ (Tu hachureras le demi-plan non solution de chaque inéquation)
3. Déduis-en l'ensemble des points dont les coordonnées sont à la fois solution des deux inéquations $-2x - y + 5 > 0$et $x - 3y + 6 < 0$

Information : Tu viens ainsi de résoudre le système $\begin{cases} -2x - y + 5 > 0 \\ x - 3y + 6 < 0 \end{cases}$ qui est un système d'inéquation du premier degré à deux inconnues x et y. Cette résolution est graphique.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

Consigne 3.13

Résous graphiquement chacun des systèmes d'inéquations suivants :

(S_1): $\begin{cases} 3x - y + 1 > 0 \\ x + 2y - 5 \leq 0 \end{cases}$; (S_2): $\begin{cases} x + 2y - 4 > 0 \\ 2x - 2y - 1 < 0 \end{cases}$

Consigne 3.14 : Problème conduisant à système d'inéquation du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Un artisan fabrique des objets de type A et des objets de type B. La réalisation d'un objet de type A demande 2000 F de matière première et 4000 F de main d'œuvre, celle d'un objet de type B demande 4000 F de matière première et 6000 F de main d'œuvre.

Les dépenses journalières en main d'œuvre et en matière première ne doivent pas dépasser respectivement 60000 F et 72000 F.

1. Ecris un système d'inéquations qui tient compte des contraintes ci-dessus.
2. Résous graphiquement ce système.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

Evaluations formatives

Exercice 1

Un père a 27 ans de plus que son fils ; dans 6 ans l'âge du père sera le double de l'âge de son fils.

1. Quels sont les âges du père et du fils ?
2. Trouve les valeurs de x et de y vérifiant le système suivant : $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ -x + 8y = 2 \end{cases}$

Exercice 2

Le plan est muni du repère (O; I; J).
(D) et (D') sont deux droites de ce plan, sécantes en un point A d'abscisse −2.
(D) coupe (OJ) au point d'ordonnée 4.
(D') a pour équation : $2x - 3y + 1 = 0$.
Détermine une équation de (D).

Exercice 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O; I; J).

1. Construis les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives $y=-4x+3$ et $y=2x - 5$.
2. Détermine les coordonnées du point d'intersection A des droites (D_1) et (D_2).
3. Déduis-en une résolution graphique du système d'inéquations $\begin{cases} y + 4x - 3 \leq 0 \\ y - 2x + 5 \geq 0 \end{cases}$. (On *hachurera la partie non solution.*)

Exercice 4

Une personne achète 76 plants d'arbres fruitiers constitués de pommiers à 7 euros le pied et de poiriers à 9 euros le pied.
Le montant de la facture s'élève à 614 euros.
Déterminer le nombre d'arbres fruitiers de chaque sorte.

Exercice 5

Un terrain rectangulaire a un périmètre de 115m. Calculer sa longueur sachant qu'elle est supérieure de 8m que sa largeur.

Exercice 6

1. Détermine les deux nombres α et β cachés de telle sorte que le système $\begin{cases} 2x - y = \alpha \\ x + y = \beta \end{cases}$ admette pour solution unique le couple (−1; 2).
2. (a) Démontre l'égalité : $(a + b)^2=(a - b)^2 +4ab$.

(b) L'aire de la surface d'une parcelle rectangulaire est $420m^2$. Sa longueur L surpasse sa largeur l de 23m.
Calcule les dimensions de cette parcelle. (*Tu utiliseras l'égalité démontrée à la question* 2.a)

Exercice 7

1. Résous dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système d'équations suivant : $\begin{cases} 4x + 2y = 44 \\ 50x - 15y = 70 \end{cases}$.
2. Le nombre total des pattes des coqs et des brebis d'un éleveur est 44. Le coq est vendu à 1 500 F l'unité et la brebis à 5 000 F. La différence entre le prix de vente total des brebis et celui des coqs est 7 000 F
   (a) Traduis cette situation en un système d'équations.
   (b) Détermine le nombre de coqs et celui de brebis vendus.

Exercice 8

A midi, nous étions 10 personnes au restaurant, 2 personnes ont pris le menu «affaire» et les autres ont pris le menu «touristique». L'addition s'est montée à 870F.
Le soir, nous étions 15 personnes au même restaurant, 6 personnes ont pris le menu «affaire» et les autres ont pris le menu «touristique». L'addition s'est montée à 1260F.
Calcule le prix d'un repas «affaire» et le prix d'un repas «touristique».

Exercice 9

Chez le même poissonnier, une cliente achète 2 Kg de sardines et 3 Kg de rougets et elle paye 16 dinars.
Une seconde cliente achète 4 Kg de sardines et 2 Kg de rougets et elle paye 14 dinars.
Quel est le prix d'un Kg de sardine et d'un Kg de rouget ?

Exercice 10

Avec 7 dinars tu peux acheter soit 4 CD et 2 cassettes soit 2 CD et 8 cassettes.
Combien coûte un CD ? une cassette ?

Exercice 11

Des pigeons et des colombes se posent sur une ligne électrique. **Godjoy** dit à son frère **Adébola** : je compte 28 pattes. **Adébola** répond : Il y a deux pigeons de plus que les colombes.
Combien y-a-t-il de pigeons ?

Exercice 12

Merveille veut constituer un petit élevage. Pour cela, il veut acheter plus de 8 poulets et canards, mais sa dépense doit être inférieure à 18000F.

1. Sachant qu'un poulet coûte 15 00F et un canard coûte 2 250F, quelles sont toutes les possibilités d'achat pour **Merveille** ?
2. Quel est le nombre minimal de poulets que **Merveille** peut acheter ?
3. Quelles sont les possibilités d'achat si **Merveille** veut acquérir plus de 3 canards ?

Exercice 13

Dans sa tirelire, Marie a 18 pièces, uniquement des pièces de 25F et de 50F. Elle possède 600F.
Quel est le nombre de pièces de 25F et de pièces de 50F ?

Exercice 14

Actuellement, l'âge du père est le double de celui de son fils. Dans 5 ans, ils auront à eux deux 70 ans.
Quel est l'âge du fils ? du père ?

Exercice 15

Un père a le triple de l'âge de son fils. Dans 12 ans, l'âge du père sera le double de l'âge du fils.
Quel est l'âge du fils ? du père ?

Exercice 16

Résous les inéquations suivantes et représente graphiquement les solutions :

1. $-2x+11 \geq 5x+31$.
2. $8x \leq 15 - 2x$.
3. $x - \frac{x}{4} > \frac{2x-3}{3}$.
4. $\frac{3x-2}{6} - \frac{x+1}{2} > 2 - \frac{1}{3}(5x - 1)$.

Exercice 17

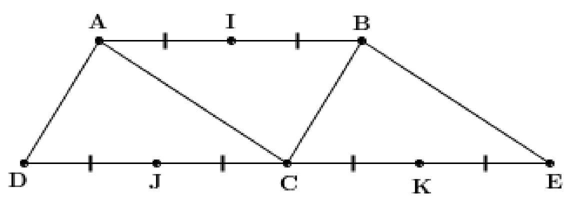
Résous les inéquations suivantes et représente graphiquement les solutions :

1. $\begin{cases} 3x + 5 \leq 17 \\ 3 - 4x \leq 15 \end{cases}$
2. $\begin{cases} \frac{5x}{12} - \frac{3}{4} \leq \frac{17x-5}{18} + \frac{1}{9} \\ 3(8x - 3) - 5(3x + 1) \geq 9(x - 4) \end{cases}$

Séquence n°4 : Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

Activité 3.4

Au cours de l'épandage de l'herbicide, les déplacements de l'ouvrier Codjo du Conseil Communal sont schématisés par la figure suivante



DC = CE

4.1 Sens, directions et égalité de vecteurs

Consigne 4.1

Cite quatre paires de vecteurs :

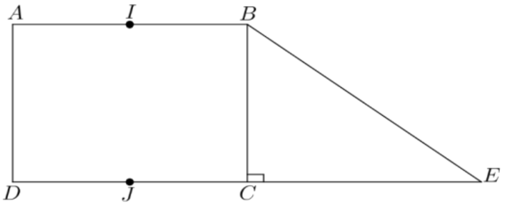
- qui ont même direction ;
- qui ont même direction et même sens ;
- qui ont même direction et des sens contraires ;
- qui sont égaux

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

4.2 Sommes de deux vecteurs

Consigne 4.2

Dans la figure ci-dessous, ABCD est un parallélogramme et ABED est un trapèze tel que C est milieu du segment [DE]. I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [DC].



Complète les pointillés suivants :

1. $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\ldots$
2. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CE}=\ldots$
3. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EC}=\ldots$
4. $\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{JC}=\ldots$
5. $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}=\ldots$
6. $\overrightarrow{DJ}+\overrightarrow{CJ}=\ldots$

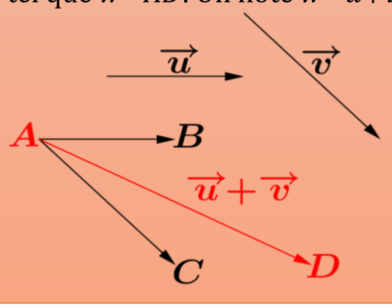
Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Définition : Somme de vecteurs

Soit A un point du plan et soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On désigne par B et C les points du plan tels que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$.

Soit D le point du plan tel que [BC] et [AD] aient le même milieu.

On appelle vecteur somme de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le vecteur $\vec{w}$ tel que $\vec{w}=\overrightarrow{AD}$. On note $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$.



Propriété : Relation de Chasles

Pour tous points A, B et C quelconques du plan, on a : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

Remarque

$\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{BA}$ mais $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$

4.3 Produit d'un vecteur par un nombre réel

Consigne 4.3

1. Complète chacune des écritures suivantes :

$\overrightarrow{DE}=\ldots\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{DE}=\ldots\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{DE}=\ldots\overrightarrow{AI}$; $\overrightarrow{DE}=\ldots\overrightarrow{IB}=\ldots\overrightarrow{BI}$

2. Que peux-tu dire des directions, du sens puis des longueurs des vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{BI}$ d'une part, et des vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{AB}$ d'autre part ?

Information : On dit que le vecteur $\overrightarrow{DE}$ est le produit du vecteur $\overrightarrow{BI}$ par -4 et le vecteur $\overrightarrow{DE}$ est le produit du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par 2.

3. Recopie et complète les phrases suivantes :
   Dans l'égalité vectorielle liant deux vecteurs :
   - si le coefficient est positif alors les vecteurs ont ……direction et ……..sens ;
   - si le coefficient est négatif alors les vecteurs ont ……direction et de sens……
4. Recopie et complète la phrase suivante pour en faire une définition :

Définition

On appelle produit d'un vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$ par un nombre réel non nul k, le vecteur $\overrightarrow{MN}$ noté $k\overrightarrow{AB}$ tel que :

- les droites (AB) et (MN) ont la même………..
- les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de…….. lorsque k est positif et de ………. lorsque k est négatif.
- MN=$|k|$.AB

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Propriété

A, B, C et D étant des points du plan, h et k des nombres réels, on a :

- $h\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AB}=(h+k)\overrightarrow{AB}$;
- $h\overrightarrow{AB}+h\overrightarrow{CD}=h\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)$
- $k\left(h\overrightarrow{AB}\right)=(k\times h)\overrightarrow{AB}$.

Consigne 4.3

Simplifie les écritures suivantes :

$\vec{u}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}$; $\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IF}$; $\vec{w}=2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BE}-2\overrightarrow{DE}$;

$\vec{t}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}-\frac{5}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{a}=-5(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB})+7(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})$

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

4.4 Vecteurs colinéaires

Consigne 4.4

On considère la figure de l'activité 3.2

1. Trouve cinq vecteurs qui ont la même direction que le vecteur $\overrightarrow{DC}$.

Information : On dit que ces vecteurs sont colinéaires

2. Complète la phrase suivante pour en faire une définition :

Définition

On dit que deux vecteurs sont colinéaires lorsqu'ils ont même ……. ou lorsque l'un d'eux est le vecteur nul.

3. (a) Que peux-tu dire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$?
   (b) Exprime le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AI}$.
   (c) Exprime le vecteur $\overrightarrow{DE}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AI}$.
   (d) Déduis des questions précédentes qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{DE} = k\overrightarrow{AB}$.
4. Complète les phrases suivantes pour en faire des propriétés :

Propriétés

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont deux vecteurs du plan. $\overrightarrow{AB}$ n'est pas le vecteur nul.

- Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ sont ……… alors il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{CD}=k\overrightarrow{AB}$.
- S'il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$ alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont …..

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Activité d'approfondissement

Soit un parallélogramme NUIT de centre O. On désigne par K le milieu de [UI] et par J le milieu de [T I]. Soit M le point défini par $\overrightarrow{OM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OK}$. La parallèle à la droite (KJ) passant par M coupe (OJ) en H.

1. Faire une figure.
2. Détermine le réel k vérifiant $\overrightarrow{HM}=k\overrightarrow{TU}$.
3. Que peux-tu dire des vecteurs $\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{TU}$?

4.5 Vecteur directeur d'une droite

Consigne 4.5

Observe attentivement la figure de l'activité 3.2

1. Enumère trois vecteurs de même direction que la droite (ED).

Information : On dit que ces vecteurs sont des **vecteurs directeurs** de la droite (ED).

2. Complète la phrase suivante pour en faire une définition :

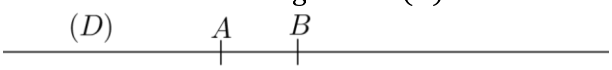
Définition

On dit qu'un vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur d'une droite (D) lorsque les droites (AB) et (D) ont ………

4.6 Caractérisation de l'alignement de trois points par une égalité vectorielle

Consigne 4.6

On considère la droite graduée (D) ci-dessous



1. Reproduis la droite (D) et marque un point M sur cette droite distinct de A et B.
2. Compare la direction des droites (AB) et (AM).
3. (a) Que peux-tu dire des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$?
   (b) Déduis-en une égalité vectorielle qui lie les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$.
4. (a) Quelle est la position des points A, B et M ?
5. Recopie et complète les phrases suivantes pour en faire des propriétés :

Propriétés

A, B et M sont trois points du plan.

- Si les points A, B et M sont ……… alors il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$
- S'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$, alors les points A, B et M sont…………

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Activité d'approfondissement

Quatre points A, B, C et d sont tels que $5\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$.

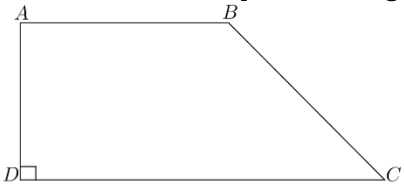
Montre que les points B, C et D sont alignés.

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

4.7 Caractérisation du parallélisme de deux droites par une égalité vectorielle

Consigne 4.7

On considère le trapèze rectangle ABCD suivant :



1- Quelle est la position des droites (AB) et (DC) ?
2- a) Que représente le vecteur $\overrightarrow{AB}$ pour la droite (AB) puis le vecteur $\overrightarrow{CD}$ pour la droite (DC).
   b) Que peux-tu dire des vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}$.
3- Complète les phrases suivantes pour en faire des propriétés :

Propriétés

- Si (AB)//(CD), alors il existe un réel k tel que $\overrightarrow{CD} = \cdots \overrightarrow{AB}$.
- S'il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{CD}=k\overrightarrow{AB}$, alors (AB)……..(CD).

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Activité d'approfondissement

PIC est un triangle. Soit N le milieu de [PI] et O un point de la droite (CN).

1. Construis les points R et S tels que $\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{PI}+\overrightarrow{PC}$ et $\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{PS}+\overrightarrow{PO}$.
2. (a) Montre que $\overrightarrow{SI}=\overrightarrow{CO}$.
   (b) Déduis-en que les droite (SI) et (CN) sont parallèles.

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

4.8 Vecteurs orthogonaux

Consigne 4.8

ABCD est un rectangle

1. Détermine deux droites perpendiculaires, support de deux côtés du rectangle.
2. Détermine un vecteur directeur de chacune de ces deux droites.

Information : On dit que ces vecteurs sont orthogonaux.

3. Recopie et complète la phrase suivante pour en faire une définition :

Définition

On dit que deux vecteurs non nuls sont orthogonaux lorsqu'ils sont les vecteurs directeurs de deux droites ....

On convient que le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur du plan.

On note $\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AB}$ pour exprimer que les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Retenons

On dit que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux.

Evaluations formatives

Exercice 1

ABC est un triangle.

1. Construis les points I et J tels que $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{JC}=\overrightarrow{AJ}$.
2. Démontre que $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
3. (a) Que peux-tu dire des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BC}$ d'une part, et des droites (IJ) et (BC) d'autre part ?
   (b) Déduis-en une comparaison de BC et de IJ.
4. (a) Construis les points D et E tels que $\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{ED}=2\overrightarrow{BC}$.
   (b) Montre que le point C est le milieu du segment [AD].

Exercice 2

On considère trois points non alignés A, B et C du plan.

1. Construis le point D du plan tel que : $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{AB}$.
2. Démontre que les points B, C et D sont alignés.

Exercice 3

On considère trois points non alignés A, B et C du plan et l'on définit deux points E et F par : $\overrightarrow{AE}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AC}$.

Démontre que les droites (EF) et (BC) sont parallèles.

Exercice 4

On considère dans un plan un triangle ABC et E, F, G trois points du plan tels que : $\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BE}=\vec{0}$; $\overrightarrow{AF}-2\overrightarrow{FC}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{GF}=\vec{0}$.

1. Démontre que les droites (EF) et (BC) sont parallèles.
2. Démontre que le quadrilatère EBCG est un parallélogramme.
3. (a) Montre que les triangles AEF et FGC sont semblables.
4. (b) Détermine le rapport de similitude du triangle FGC au triangle AFE.

Exercice 5

Soit ABC un triangle et E le point défini par : $3\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}=\vec{0}$.

1. Montre que $\overrightarrow{EA}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et construire E.
2. Construis le point F tel que $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.
3. Montre que A, C, et F sont alignés.

Exercice 6

(D_1) et (D_2) sont deux droites strictement parallèles.

Sur (D_1) on marque deux points E et F tels que EF =6cm.

Sur (D_2) on marque deux points M et N tels que NM = 2cm et que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{EF}$ soient de sens contraires.

1. Fais une figure.
2. Démontre qu'il existe un réel k que l'on déterminera tel que $\overrightarrow{MN}=k\overrightarrow{EF}$.
3. Les droites (NE) et (ME) se coupent en A.
   (a) Exprime chacune des longueurs EA et EM en fonction de AM.
   (b) Déduis-en les réels k_1 et k_2 tels que $\overrightarrow{EA}=k_1\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{ME}=k_2AM$.

Exercice 7

Soit ABC un triangle.

1. Place les points E et F tels que $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$.
2. Montrer que (BC) et (EF) sont parallèles.

Exercice 8

Construire un parallélogramme ABCD et le point I tel que $\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}$

Montre que B est le milieu du segment [AI].

Exercice 9

Construire un triangle ABC puis les points D, E et F tels que : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}$.

1. Quelle est la nature des quadrilatères ABDC, ADEB et AEFC ?
2. Montre que D est le milieu de [EC].
3. En déduis que D est le milieu de [AF].

Exercice 10

1. Trace un parallélogramme ABCD.
2. Quels sont les points P et Q tels que $\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}$?
3. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$. Construis l'image E du point C par la translation t.
4. Trace en rouge, l'image du triangle ABC par la translation t.
5. Montre que $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DE}$.

Séquence n°5 : Calculs sur les coordonnées de vecteurs

Activité 3.5

Dans un document du plan de l'aménagement des abords de la lagune, Paola trouve le plan d'un dispositif de jeu prévu sur le site. Il éprouve des difficultés dans la lecture de certaines positions des différents points du plan.

5.1 Abscisses d'un point dans un repère

Consigne 5.1

(D) est une droite munie d'un repère (A, B) ; M est un point de la droite (D).

1. Justifie qu'il existe un nombre réel x tel que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$.

Information : On dit que x est l'abscisse du point M dans le repère (A, B).

2. Complète la phrase suivante pour en faire une définition :

Définition

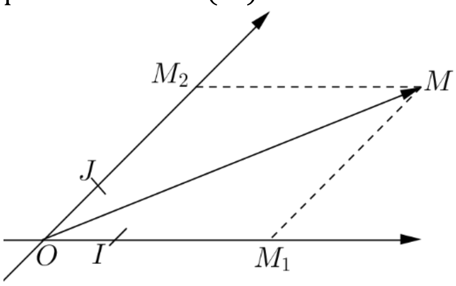
La droite (D) est munie du repère (O ; I).
On appelle…… du point M dans le repère (O, I) le nombre réel x tel que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI}$.

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

5.2 Coordonnées d'un point dans le plan muni d'un repère

Consigne 5.2

On considère la configuration suivante où M_1 est le projeté orthogonal de M sur (OI) parallèlement à (OJ) et M_2 est le projeté orthogonal de M sur (OJ) parallèlement à (OI).



1. Justifie qu'il existe un nombre réel x tel que $\overrightarrow{OM_1} = x\overrightarrow{OI}$.
2. Justifie qu'il existe un nombre réel y tel que $\overrightarrow{OM_2} = y\overrightarrow{OJ}$.
3. Exprime le vecteur $\overrightarrow{OM}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$ *et* $\overrightarrow{OM_2}$ (Tu pourras utiliser la relation de Chasles). Déduis son expression en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$.
4. Que représente les réels x et y pour le point M dans le repère (O, I, J).
5. Complète la phrase suivante pour en faire une définition.

Définition

Le plan est muni du repère (O, I, J), M est un point du plan.

On appelle coordonnées du point M dans le repère (O, I, J), le couple $(x\,;y)$ de nombres réels vérifiant l'égalité : $\boldsymbol{\overrightarrow{OM}} = \cdots + \cdots$. x est appelé l'abscisse de M et y l'ordonnée de M dans le repère (O, I, J). On note $\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix}$ ou $M(x;y)$.

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Consigne 5.3

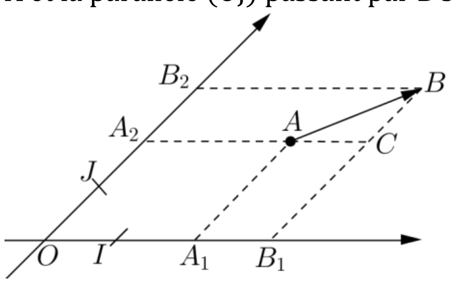
On donne dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) les points A(3 ;2) ; B(1 ;5) ; C(3 ;1) ; D(−2 ;3) ; E(0 ;4)et P(−2 ; 0).
Place ces points dans le plan muni du repère (O, I, J)

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

5.3 Coordonnées d'un vecteur dans le plan muni d'un repère

Consigne 5.4

On considère la configuration suivante où A_1 et B_1 sont les projetés respectifs des points A et B sur (OI) parallèlement à (OJ) et A_2 et B_2 sont les projetés respectifs des points A et B sur (OJ) parallèlement à (OI). La parallèle à (OI) passant par A et la parallèle (OJ) passant par B se soupent en C.



1. Justifie qu'ils existent deux nombres réels x et y tels que : $\overrightarrow{A_1B_1}=x\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{A_2B_2}=y\overrightarrow{OJ}$.
2. Exprime le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{CB}$ puis des vecteurs $\overrightarrow{A_1B_1}$ et $\overrightarrow{A_2B_2}$.
3. Déduis-en l'expression de $\overrightarrow{AB}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ et des nombres réels x et y.
4. Que représente les nombres réels x et y pour le vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans le repère (O, I, J).
5. Complète la phrase suivante pour en faire une définition.

Définition

Le plan est muni du repère (O, I, J), A et B sont des points du plan.
On appelle coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ ou composantes scalaires de $\overrightarrow{AB}$ dans le repère (O, I, J) le couple $(x\,;\,y)$ de nombres réels vérifiant l'égalité $\overrightarrow{AB}$=…+….
On note $\overrightarrow{AB}\binom{x}{y}$ ou $\overrightarrow{AB}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})$ pour exprimer que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont les nombres réels x et y pris dans cet ordre.
Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Remarque
Contrairement à un point du plan, on ne parlera ni d'abscisse ni d'ordonnées pour un vecteur. On préfèrera les expressions ''première coordonnée'' et ''deuxième coordonnée''.

5.4 Construction d'un vecteur dans un plan

Consigne 5.5

Le plan est muni d'un repère (O ; I ; J)

1. Représente le vecteur $\overrightarrow{AB}$ sachant que A (3 ; 1) et B (−2 ; 3).
2. Représente le vecteur $\overrightarrow{EF}(4;2)$ sachant que E (2 ; 1) en suivant la démarche suivante :
   - Place le point E dans le plan puis construis le point E_1 tel que $\overrightarrow{EE_1}=4\overrightarrow{OI}$.
   - Construis ensuite le point F tel que $\overrightarrow{E_1F}=2\overrightarrow{OJ}$

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

5.5 Calcul des coordonnées d'un vecteur

Consigne 5.6

Le plan et muni d'un repère (O, I, J) ; soit les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$

1. Exprime le vecteur $\overrightarrow{OA}$ en fonction de $x_A; y_A; \overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ puis $\overrightarrow{OB}$ en fonction de $x_B; y_B$; $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$.
2. (a)Exprime le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.
   (b) Déduis-en $\overrightarrow{AB}$ en fonction de x_A ; y_A ; x_B ; y_B $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$.
3. Complète :
   Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B \ldots x_A\,;\,y_B \ldots y_A)$.

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Propriété
Soit $\overrightarrow{AB}(x;y)$ et $\overrightarrow{CD}(x';y')$ deux vecteurs du plan muni d'un repère (O ; I ; J)
Si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ alors $x=\ldots$ et $y=\ldots$; $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}(\ldots\,;\ldots)$ et $k\overrightarrow{AB}(\ldots;\ldots)$.

5.6 Coordonnées du milieu d'un segment, du vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ et du vecteur $k\overrightarrow{AB}$

Consigne 5.7

Le plan est muni du repère (O ; I ; J).

1. Soit $M(x_M; y_M)$ le milieu du segment [AB] avec $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.
   (a) Ecris une relation vectorielle les points A, B et M.
   (b) Ecris cette relation uniquement en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OM}$.
   (c) Déduis-en les coordonnées du point M en fonction des coordonnées des points A et B
2. Complète la phrase suivante :
   Si M est le milieu du segment [AB] alors $M\left(\frac{\ldots}{\ldots}\ ;\ \frac{\ldots}{\ldots}\right)$.
3. A, B, C et D sont quatre points du plan tels que $\overrightarrow{AB}(x;y)$ et $\overrightarrow{CD}(x';y')$.
   (a) Exprime $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ en fonction de $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$.
   (b) Déduis-en les coordonnées de $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$.
4. On donne A et B deux points du plan tels que $\overrightarrow{AB}(x;y)$ et k un nombre réel.
   (a) Exprime le vecteur $k\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$.
   (b) Déduis-en les coordonnées de $k\overrightarrow{AB}$.

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Activité d'approfondissement

Le plan est muni d'un repère (O ; I ; J). A, B, C, D et E sont des points tels que A(2 ; 3), B(−1 ; −4) et les points C et D tels que $\overrightarrow{OC}=5\overrightarrow{OI}+7\,\overrightarrow{OJ}$; $\overrightarrow{DO}=2\overrightarrow{OI}-3\,\overrightarrow{OJ}$.

1- Donne les coordonnées des points C et D.
2- Calcule les coordonnées de chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ et $\vec{u}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}$.
3- a)Calcule les coordonnées du milieu G du segment [AB]
b) Calcule les coordonnées du point E pour que ABCE soit un parallélogramme.
c) Précise les coordonnées du centre H de ce parallélogramme.

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

5.7 Condition de colinéarité de deux vecteurs

Consigne 5.8

A, B, C et D sont quatre points du plan muni d'un repère (O, I, J) tels que $\overrightarrow{AB}(x;y)$; $\overrightarrow{CD}(x';y')$ et $\overrightarrow{CD}=k\overrightarrow{AB}$ avec $k\in\mathbb{R}$

1. (a) Que peux-tu dire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
   (b) En considérant l'égalité $\overrightarrow{CD}=k\overrightarrow{AB}$ compare les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $k\overrightarrow{AB}$ en complétant les expressions suivantes : $x'=\ldots x$ et $y'=\ldots y$.
2. (a) En supposant $x\neq 0$ et $y\neq 0$, exprime k en fonction de x et x' d'une part puis en fonction de y et y' d'autre part.
   (b) Déduis de ce qui précède que $xy'-x'y=0$

3. Recopie et complète les phrases suivantes pour en faire des propriétés :

Propriété

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$sont deux vecteurs tels que $\overrightarrow{AB}(x; y)$et $\overrightarrow{A'B'}(x'; y')$.

- Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$sont colinéaires alors $xy' - x'y = \cdots$
- Si $xy' - x'y = \cdots$ alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont colinéaires.

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Consigne 5.9 : Application

Le plan est muni d'un repère. Soit les points A, B, C et D du plan tels que A(−1; 2), B(−3; 1), C(2; 5) et D(1; 5).

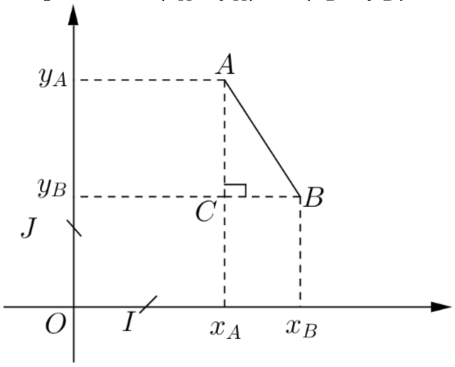
Justifie que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires.

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

5.8 Calcul dans un repère orthonormé

Consigne 5.10 : Distance de deux points dans un plan muni d'un repère orthonormé.

On considère un plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) et les point A et B de coordonnées respectives $(x_A ; y_A)$ et $(x_B ; y_B)$



1. (a) Calcule BC en fonction de x_A et x_B.
   (b) Calcule AC en fonction de y_A et y_B.
2. (a)Calcule AB^2 en fonction de AC^2et BC^2 en utilisant la propriété de Pythagore.
   (b) Déduis-en l'expression de AB en fonction des coordonnées de A et B.
3. Complète les phrases suivantes pour en faire des propriétés :

Propriétés

A et B sont deux du plan muni d'un repère orthonormé.

- Si $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ alors AB=$\sqrt{\ldots + \ \ldots}$
- Si $\overrightarrow{AB}$ $(a ; b)$, alors AB=$\sqrt{\ldots + \ \ldots}$

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Activité d'approfondissement

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

On donne les points $A(2 ; 4)$; $B(5 ; 2)$; $C(1 ; -4)$; $D(-4 ; -5)$ et F(6 ;3)

1. Calcule les distances AC ; AB : DC et BC.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont-ils colinéaires ?
3. Démontre que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Consigne 5.11

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points $A(1 ; -2)$; $B(3 ; 1)$; $C(3 ; -5)$ et $F(6 ;\ 3)$

1. Calcule les distances AB et BF.
2. Soit le point K du plan tel que $\overrightarrow{OK}$=2$\overrightarrow{AB}$ −3$\overrightarrow{BC}$. Détermine les coordonnées de K.
3. Détermine les coordonnées du point E, symétrique de K par rapport à F.
4. Détermine les coordonnées du point G, image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{CF}$
5. (a) Place les points A, B, C dans le repère.
   (b) Construis le point L, image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Consigne 5.12 : Condition d'orthogonalité de deux vecteurs

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O; I; J), on considère les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$de deux écoulement perpendiculaires tels que $\overrightarrow{AB}$(3; 2)et $\overrightarrow{A'B'}$(−4 ; 6).

NB : Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont orthogonaux

1. Calcule $x_{\overrightarrow{AB}} \times x_{\overrightarrow{A'B'}} + y_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\overrightarrow{A'B'}}$.
2. (a)Que constates-tu ?
   (b) Complète les phrases suivantes pour en faire des propriétés :

Propriétés

Le plan étant muni d'un repère orthonormé (O, I, J). $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$sont deux vecteurs tels que $\overrightarrow{AB}(x ; y)$ et $\overrightarrow{A'B'}(x' ; y')$.

- Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont orthogonaux alors $xx'+yy'$=...
- Si $xx'+yy'$=... alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$sont orthogonaux.

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Activité d'approfondissement

Le plan est muni d'un repère. Soit les points H, K, L et M du plan tels que E(3; 2), F(−2; 0), G(−2; 5) et H(1; 5).

Justifie que les vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{FH}$ sont orthogonaux.

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Evaluations formatives

Exercice 1

Le plan est muni du repère (O; I; J). Soient A(1;−1), B(2; 3), C(1; 4), D(−5; 3) et E(−6;−1).

1. Calcule les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.
2. Détermine les coordonnées des images des points A, O et E par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
3. (a) Place le point H défini par $\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}$.
   (b) Calcule les coordonnées du point H.

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O; I; J).
1. Place les points A(3; 2), B(−1;−2) et C(5;−1).
2. Soit G le centre de gravité du triangle ABC. Calcule AG.

Exercice 3

Le plan est muni du repère orthonormé (O; I; J).
1. Place les points A(−3; 0), B(2; 1), C(4; 3) et D(−1; 2).
2. Montre que les segments [AC] et [BD] ont le même milieu K.
3. Montre que le triangle OBD est rectangle et isocèle.
4. Détermine les coordonnées du point E pour que BODE soit un parallélogramme.
5. Quelle est la nature du quadrilatère AOCE ?

Exercice 4

Le plan est muni du repère orthonormé (O; I; J).
Soit (C) un cercle de centre I(2;−3) et de rayon R =2 cm.
1. Le point K(2; −1) appartient-il au cercle (C) ?
2. Soit S ($\sqrt{2}$;−1). Démontre que la droite (SK) est tangente au cercle (C).

Exercice 5

Le plan est muni du repère orthonormé (O; I; J). On considère les points A(1;−2), B(3; 2) et C(7; 0).
1. Détermine les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.
2. Montre que les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires.
3. Calcule AC et BD puis déduire la nature du quadrilatère ABCD.

Exercice 6

Le plan est muni du repère (O; I; J). On donne : A(1;−1), B(−1;−2) et C(−2; 2).

5. Détermine le couple de coordonnées du point G pour que : $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
6. Détermine le couple de coordonnées du point D pour que : $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$.
7. Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires.
8. Justifie que les points B, G et D sont alignés

Exercice 7

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O; I; J), on considère les points A(−2; −1) et B(4; 3). On note (C) le cercle de diamètre [AB] et M le centre de (C).
1. Dessine la figure.
2. Calcule les coordonnées de M.
3. Calcule le rayon du cercle (C) (on donnera la valeur exacte).
4. Soit F le point de coordonnées (3; 4). Démontre que F est un point du cercle (C).
5. Que peut-on dire du triangle AFB ?
6. On précise que FA =$\sqrt{50}$ et FB=$\sqrt{2}$.
   Calcule l'arrondi au degré de l'angle $\widehat{FAB}$.

Exercice 8

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
La droite (D) passe par le point A(−1; 1) et admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{EF}$(3;−4).
La droite (D') passe par le point B(0; 3) et est perpendiculaire à (D).
Détermine le couple de coordonnées de K, point d'intersection de (D) et (D').

Exercice 9

Soient les points A(2; 3) ; B(4;−1) et M(3;−2) dans un repère (O; I; J).
Calculer les coordonnées des points C et D tels que ABCD soit un parallélogramme de centre M.

Exercice 10

Dans un repère orthonormé (O; I; J), placer les points A(−4; 2) ; B(2; 4) et C(5; −2).
1. Calculer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.
2. Soit E l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
   Calculer les coordonnées du point E.
3. Soit F le symétrique de C par rapport à B.
   Calculer les coordonnées du point F.

Retour et projection

Consigne1 : Objectivation

1. Qu'as-tu découvert sur la SA n°3 ?
2. Qu'as-tu appris de nouveau sur la SA n°3 ?
3. Qu'as-tu trouvé difficile ou facile sur la SA n°3 ?

Consigne 2 : Auto-évaluation

1. Qu'est-ce que tu as réussi ?
2. Qu'est-ce que tu n'as pas réussi ?
3. Qu'est-ce que tu vas faire pour améliorer ta production ?

Fin de la SA N°3

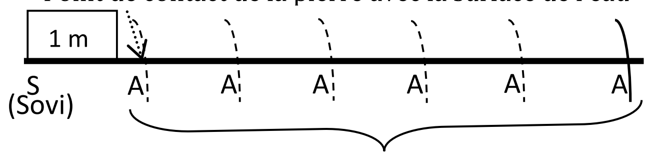
SA N°4 : ORGANISATION DES DONNEES

Situation de départ

Texte :

Pour préparer une course en pirogue, 115 élèves d'un collège de Cotonou ont entrepris de lancer une commande de T-shirts. En vue d'établir le bon de commande , les élèves ont communiqué leur taille à Sovi leur premier responsable .Selon l'information donnée par le fournisseur, les tailles S, M, L, XL et XXL sont destinées aux personnes mesurant respectivement moins de 160 cm, de 160cm à moins de 165cm, de 165cm à moins de 170 cm, de 170cm à moins de 175cm, 175cm et plus.
Sovi a voulu mesurer la longueur de cette course. Il a jeté dans la lagune, à un mètre devant lui un caillou. Il s'est alors formé à la surface de l'eau une succession de rides circulaires concentriques. Sovi s'est intéressé aux positions successives de la première ride.

Point de contact de la pierre avec la surface de l'eau



Positions successives de la première ride formée

Un dispositif lui a permis de consigner dans un tableau les distances $SA_1, SA_2, SA_3, SA_4, SA_5$ (cf figure) ainsi que les temps correspondants.

Distance SA_i (en m)	2	3,5	4	6	7	8,5
Temps (en secondes)	2	5	6	10	12	15

Kokou, posté au point d'arrivée de la course a noté que la ride observée est parvenue à son niveau au bout de 3 min.
Sovi se demande quoi faire pour assurer à chaque élève un T-shirt convenable et comment calculer la longueur de la course.

Tâche : Tu vas te construire de nouvelles connaissances en mathématique ; pour cela tu auras, tout au long de cette S.A., à :

- Exprimer ta perception de chacun des problèmes posés ;
- Analyser chaque problème posé ;
- Mathématiser chacun des problèmes posés ;
- Opérer sur l'objet mathématique que tu as identifié pour chacun des problèmes ;
- Améliorer au besoin ta production.

Activité 0

- Lis le texte de la situation de départ.
- Reformule le problème ou la situation-problème en tes propres termes.
- Formule toutes les idées et questions que t'inspire la situation de départ.
- Reconnais des situations similaires.
- Anticipe éventuellement sur la réponse au problème.

Séquence n°1 : Application affine

Activité 4.1

Pour la sécurité des engins des participants à la course, le collège a prévu la garde des engins. Chaque participant qui garde un engin paie d'abord un montant forfaitaire de 50F à la guérite puis après, ce montant est augmenté de 25 F par heure de garde.

1.1 Définition d'une application affine

Consigne 1.1

1. En utilisant cette information, détermine le montant à payer par un participant dont l'engin a fait 5 heures au niveau de la garde des engins.
2. Si y désigne le prix à payer pour x heures de garde de son engin, exprime y en fonction de x.

Information : La correspondance qui à chaque temps de garde x (en heures) associe le montant à payer $y = 25x + 50$ est appelée application affine de coefficient 25 et de terme constant 50.

3. Recopie et complète la phrase suivante pour en faire une définition :

Définition

a et b étant deux nombres réels ;
On appelle **application affine f** toute application qui à chaque nombre reél x associe le nombre réel $f(x) =$.........
a est appelé coefficient de l'application f et b son terme constant.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

1.2 Reconnaissance et détermination d'une application affine

Consigne 1.2 Reconnaissance d'une application affine

Parmi les expressions suivantes, quelles sont celles qui définissent une application affine. Tu préciseras pour chaque application affine son coefficient et son terme constant.

$f(x)=3x-5$; $g(x)=-7x$; $h(x)=-5$; $k(x)=3x^2-5$; $j(x)=\frac{2}{3}x-5$.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

Retenons

Soit f une application affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)= ax+b$ avec a son coefficient et b son terme constant.

Si $f(x_1)=y_1$ et $f(x_2)=y_2$ avec $x_1 \neq x_2$, alors on a :

$$a=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} \quad \text{et}$$

$$b=f(x_1)-ax_1 \text{ ou } b=f(x_1)-ax_1$$

$$b=y_1-ax_1 \text{ ou } b=y_2-ax_1$$

Consigne 1.3 : Détermination d'une application affine

f est une application affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$ où a et b sont seux nombres réels.

Sachant que $f(1)=3$ et $f(4)=18$

1. Détermine les réels a et b.
2. Ecris alors l'expression $f(x)$.
3. Représente graphiquement cette application affine f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O; I; J).

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

1.3 Sens de variation d'une application affine

Consigne 1.4

Soit f une application affine définie par $f(x)=ax+b$ où a et b sont deux nombres réels.

u et v sont deux nombres réels tels que $u<v$

Tu vas comparer $f(u)$ et $f(v)$.

1. Calcule $f(u)$ et $f(v)$ en fonction de a et b.
2. Remplace les pointillés par l'un des symboles suivants : <ou >ou =

   ➢ 1er Cas : $a>0$

   $u<v$ équivaut à $au\ldots\ldots av$

   $u<v$ équivaut à $au+b\ldots\ldots av+b$

   $u<v$ équivaut à $f(u)\ldots\ldots f(v)$

Information 1 : On dit dans ce cas que l'application affine f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

➢ $2^{ème}$ Cas : $a<0$

$u<v$ équivaut à $au\ldots\ldots av$

$u<v$ équivaut à $au+b\ldots\ldots av+b$

$u<v$ équivaut à $f(u)\ldots\ldots f(v)$

Information 2 : On dit dans ce cas que l'application affine f est strictement décroissantes sur $\mathbb{R}$

➢ $3^{ème}$ Cas : $a=0$

$u<v$ équivaut à $au\ldots\ldots av$

$u<v$ équivaut à $au+b\ldots\ldots av+b$

$u<v$ équivaut à $f(u)\ldots\ldots f(v)$

Information 3 : On dit dans ce cas que l'application affine f est constante sur $\mathbb{R}$

3. Recopie et complète les propriétés suivantes : f étant une application affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$;
   - Si $\boldsymbol{a>0}$ alors l'application f est strictement …………… sur $\mathbb{R}$.
     Ou encore,
     Pour deux nombres réels u et v, si $u<v$ équivaut à $f(u)\ldots f(v)$, alors l'application f **est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.**
   - Si $\boldsymbol{a<0}$ alors l'application f est strictement …………… sur $\mathbb{R}$.
     Ou encore,
     Pour deux nombres réels $et\ v$. Si $u<v$ équivaut à $f(u)\ldots f(v)$, alors l'application f **est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.**
   - Si $a=0$ alors l'application f est ……. sur $\mathbb{R}$.
     Ou encore,
     Pour deux nombres réels $et\ v$. Si $u<v$ équivaut à $f(u)\ldots f(v)$, alors l'application f **est constante sur $\mathbb{R}$.**

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

1.4 Représentation graphique d'une application affine

Définition

Le plan est muni d'un repère orthonormé. f est une application affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$

On appelle représentation graphique de l'application affine f dans le plan muni d'un repère la droite (D) d'équation $y=ax+b$

Activité d'approfondissement

On donne les applications affines f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=3x-1$; $g(2)=3$ et $g(-1)=5$; $h(x)=-2$

1. Etudie le sens de variation de chacune de ces applications.
2. Représente dans le même repère les applications f ; g et h.

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Evaluations formatives

Exercice 1

f est une application affine définie $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=(4\sqrt{2}-6)x+\sqrt{27}$

1. Compare $4\sqrt{2}$ et 6.
2. f est-elle croissante ou décroissante ?
3. Range par ordre croissant $f\left(\frac{3}{2}\right)$; $f\left(\frac{2}{5}\right)$; $f\left(\frac{2}{3}\right)$ et $f(2)$.

Exercice 2

Trouve l'expression de la fonction affine f telle que : $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$ et $f(1)=\frac{1}{4}$.

Exercice 3

Soit f l'application affine telle que $f(x)=-2x+3$.

1. Calcule $f(4)$ et $f(-3)$.
2. Reproduis et complète le tableau suivant : On donnera une explication des résultats

x	-3		1		5
$f(x)$		7			

3. Quelle est l'image de 5 par f ?
4. Tracer la représentation graphique de f.

Exercice 4

Précise le sens de variation de chacune des applications affines définies par :

$f(x)=2x+3$; $g(x)=-5x$; $h(x)=7$; $i(x)=-\frac{1}{3}x-2$; $j(x)=(3-2\sqrt{2})x-2$ et $k(x)=(1-\sqrt{5})x+3$.

Exercice 5

Représente graphiquement les applications affines suivantes :

1. $f(x)=2x+1$
2. $f(x)=2x$
3. $f(x)=-3x+2$
4. $f(x)=-3$

Exercice 6

a et b étant des nombres réels, f est l'application affine définie par : $f(x)=ax+b$.
Dans chacun des cas suivants, détermine :

(a) b sachant que $a=-\sqrt{3}$ et $f(5)=7$.
(b) a sachant que $b=1+\sqrt{2}$ et $f(3)=-\sqrt{2}$.
(c) a et b sachant que $f(3)=1$ et $f(-\sqrt{5})=3$.

Exercice 7

Détermine les applications affines définies par :

1. $f(2)=1$ et $f(3)=5$.
2. $f(-2)=-3$ et $f(4)=1$.
3. $f(0)=4$ et $f(-3)=-2$.
4. $f(2)=3$ et $f(3)=3$.

Exercice 8

Des élèves décident de vendre des croissants à domicile pour financer leur voyage de fin d'année.
Le montant facturé comprend le prix des croissants auquel s'ajoute une somme fixe pour la livraison. Le prix facturé est fonction affine f du nombre de croissants.
On sait que 4 croissants livrés coûtent 19 francs et 10 croissants livrés coûtent 37 francs.

1. Dessiner la représentation graphique de la fonction f. En abscisse, on prendra 1 cm pour 1 croissant, en ordonnée 1 cm pour 5 francs.
2. Par lecture graphique, déterminer le prix de 12 croissants livrés.
3. Déterminer a et b tels que $f(x)=ax+b$.
4. Retrouver par le calcul, le prix de 12 croissants.
5. Quel est le montant de la livraison ?

Exercice 9

Les villes de Dakar et de Kaolack sont distantes de 190 km. Mr **Godjoy** quitte Dakar à 6 h et se dirige vers Kaplack au volant de son véhicule à la vitesse moyenne de 80 km/h. Mr **Adébola**, lui, prend un taxi-brousse quittant Kaolack pour Dakar à 6 h 20 et roulant à la vitesse moyenne de 95 km/h
Détermine graphiquement puis par le calcul :

(a) l'heure et la distance entre le lieu de croisement des deux véhicules et Kaolack ;
(b) la distance qui sépare les deux véhicules à 7 h.

Exercice 10

Pour financer une sortie pédagogique, une école décide de vendre les tomates de son jardin.
Le client paye en plus de la quantité de tomates achetée une somme forfaitaire fixe pour le transport.
Un commerçant qui a acheté 300 kg a versé au gestionnaire une somme totale de 125 000 F.
Un membre de l'association des parents d'élèves a acheté 100 kg et a payé 45 000 F.

1. Calcule le prix d'un kilogramme de tomates et la somme forfaitaire allouée au transport.
2. Soit $p(x)$ la somme totale, en francs, payée par un client qui a acheté kilogrammes de tomates. Détermine l'expression $p(x)$.
3. Dans un repère orthogonal, représente graphiquement p en prenant 1 cm pour 50 kg en abscisses et 1 cm pour 10000 F en ordonnées.
4. Détermine la somme totale à payer pour un achat de 75 kg de tomates.

Exercice 11

Un fournisseur d'accès à Internet propose à ses clients 3 formules d'abonnement :

- Une formule A comportant un abonnement fixe de 12 000 F par mois auquel s'ajoute le prix des communications au tarif préférentiel de 100 F de l'heure.
- Une formule B offrant un libre accès à Internet mais pour laquelle le prix des communications est de 250 F pour une heure de connexion.
- Une formule C offrant un libre accès à Internet et comportant une carte d'abonnement annuel de 25 000 F.

Dans les deux premiers cas, les communications sont facturées proportionnellement au temps de connexion.

1. Reproduis et complète le tableau suivant :

Nombre d'heures de connexion		60	80
Prix à payer	Formule A		
	Formule B		
	Formule C		

2. Pierre se connecte 60 heures par mois et Fatou 80 heures par mois. Quelle est la formule la plus avantageuse pour chacune de ces personnes.
3. On note x le temps de connexion d'un client, exprimé en heures. On appelle P_A le prix à payer en FCFA avec la formule A, P_B le prix à payer en

FCFA avec la formule B et P_C le prix à payer en FCFA avec la formule C.
Exprimer P_A, P_B et P_C en fonction de x.

4. Dans un repère orthogonal trace :
   (a) la droite (D_1), représentation graphique de la fonction $f(x) = 100x + 12000$;
   (b) la droite (D_2), représentation graphique de la fonction $g(x) = 250x$;
   (c) la droite (D_3), représentation graphique de la fonction $h(x) = 25\,000$

(On prendra 1 cm pour 10 h sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 5 000 F sur l'axe des ordonnées)

5. Moïse, qui a choisi la formule A a payé 20 000 F.
   (a) Détermine graphiquement le temps pendant lequel il s'est connecté.
   (b) Vérifie le résultat par le calcul.
6. (a) Résous dans ℝ l'inéquation : $250x \leq 100x + 12000$.
   (b)Interprète le résultat obtenu.
7. Détermine graphiquement à partir de quelle durée de connexion par mois la formule C est plus avantageuse que les deux autres.

Séquence n°2 : Application linéaire

Activité 4.2

Sovi constate après analyse du tableau de la situation de départ, que la relation entre le temps et la distance parcourue par la première ride se présente comme suit dans le tableau ci-dessous.

Distance $A_0A_i = y_i$ en m	1,5	2	4	5	6,5
Temps x_i en s	3	4	8	10	13

Il désire connaître l'expression de cette relation.

2.1 Définition d'une application linéaire

Consigne 2.1

1. Justifie que ce tableau est un tableau de proportionnalité.
2. Précise le coefficient de proportionnalité qui exprime la distance en fonction du temps.
3. Donne l'expression de cette relation et précise son terme constant.

Information : La correspondance g qui à chaque temps de parcours x (en seconde) associe la distance parcourue $g(x) = \frac{1}{2}x$ est appelée application linéaire de coefficient $\frac{1}{2}$.

4. Si la première ride a durée 9s, quelle sera la distance de parcours ?

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

Définition : Application linéaire
On appelle application linéaire , une application affine dont le terme constant est nul.
a étant un nombre réel, l'application linéaire g de coefficient a est l'application qui à chaque réel x associe le nombre ax.
On note $g(x) = ax$.

2.2 Reconnaissance, détermination et représentation d'une application linéaire

Consigne 2.2

1. Parmi les application de ℝ dans ℝ suivantes, trouve les applications linéaires : $f(x)=3x+2$; $g(x)=5x$; $h(x)=2x^2$ x ; $i(x) = -\frac{1}{3}x$ et $j(x)=\frac{2}{x}$.
2. Détermine l'application linéaire g telle que $g(4) = 12$.
3. Représente graphiquement g dans un repère orthonormé (O, I, J).
4. Par quel point particulier passe cette représentation ?
5. Recopie puis complète :
   Dans le plan muni d'un repère, la représentation graphique d'une application linéaire passe par............

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

Remarque
L'application linéaire définie par $f(x)=ax$ étant une application affine, sa représentation graphique est donc la droite $y = ax$.
Cette droite passe par l'origine du repère.

Consigne 3 : Tableau de correspondance d'une application linéaire.

Le tableau ci-dessous est un tableau de correspondance d'une application linéaire

x	2	4	5	7	8
$g(x)$	6	12	15	21	24

1. Justifie que c'est un tableau de proportionnalité.
2. En posant$g(x) = ax$, détermine le réel a.
3. Recopie puis complète les phrases suivantes :
   - Un tableau de valeur d'une application linéaire est un tableau de ....
   - Un tableau de proportionnalité est un tableau de valeur d'une ....

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

Consigne 4 : Propriétés

On considère une application linéaire g définie sur ℝ par $g(x) = ax, a \in ℝ$, u ; v et k sont des nombres réels quelconques.

1. Calcule $g(u + v)$ et $g(u)+g(v)$ puis compare les résultats obtenus.
2. Calcule $g(ku)$ et $kg(u)$ puis compare les résultats obtenus.
3. Complète la phrase suivante pour en faire une propriété :

Propriété

g étant une application linéaire, u ; v et k des nombres réels quelconques, on a :

$g(u + v)= g(u)$ ....

$g(ku)=...g(u)$.

Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

Activité d'approfondissement

On considère les nombres réels x_1 et x_2 tels que $x_1 = -2$ et $g(x_1) = -6$.
Détermine l'application linéaire g et x_2 telle que $g(x_1 - 3x_2) = -12$.
Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

Evaluations formatives

Exercice 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O; I; J), on considère l'application linéaire f telle que : $f(1)+f(2) = 5$.
1. Détermine l'application f.
2. Représente graphiquement f.
3. Détermine le nombre réel $f(x^2+5)-f(x^2+10)$.

Exercice 2

f est l'application linéaire définie par : $f(x) = -\frac{7}{5}x$

(a) Calcule : $f(5)$; $f(-2)$; $f\left(-\frac{5}{7}\right)$.
(b) Calcule les nombres réels a, b et c tels que $f(a)=0$; $f(b)=-1$ et $f(c)=-\frac{4}{3}$.

Exercice 3

f est l'application affine telle que : $f(-3)=2$.
Calcule le coefficient de cette application linéaire et complète le tableau suivant :

x	-2	$-\frac{1}{3}$	0			
$f(x)$				$-\frac{5}{4}$	-1	$\frac{3}{5}$

Exercice 4

Calcule le coefficient des applications linéaires f, g, h et k suivantes :
(a) f est telle que : $f(2)+f(3) = -5$.
(b) g est telle que : $2g(1) = 0,5$.
(c) h est telle que : $h(2) - h\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{4}$.
(d) k est telle que : $2k(-1)+\frac{1}{2}k(1) = \sqrt{2}$.

Séquence n°3 : Statistiques

Activité 4.3

En vue d'établir le bon de commande, le relevé de recensement des tailles se présente comme suit :

171	160	170	166	179	168	177	169	163	172
174	161	162	173	166	169	173	167	159	172
164	156	164	155	165	168	157	165	158	173
171	167	161	175	165	178	173	166	162	169
170	155	162	172	155	175	170	165	173	177
164	169	174	178	169	157	162	159	161	174
155	177	168	174	173	162	172	177	156	179

Le souci de Sovi est de connaître le nombre de T-shirts nécessaire pour chaque type de taille.

Vocabulaire générale

- **Population :** C'est l'ensemble sur lequel porte une étude statistique.
- **Individu :** C'est chaque élément de la population étudiée.
- **Caractère :** C'est sur quoi porte une étude statistique. Le caractère peut être qualitatif (la couleur des cheveux, les sports pratiqués ou le type de film préféré, etc.) ou quantitatif (la taille, l'âge, le temps passé devant la télévision, etc.).
- **Modalités :** Ce sont les différentes réponses que le caractère permet d'avoir.
- **Effectif d'une modalité :** C'est le nombre d'individus de la population qui représente cette modalité.
- **Effectif total :** C'est le nombre total des individus d'une population.

Consigne 3.1 : Regroupement d'une série statistique en classe d'amplitude égale.

1. Reproduit et complète le tableau suivant en faisant un regroupement par classe d'amplitude 5.

Classes	[150 ;160[	[160 ;165[	[165 ;170[
Effectifs	11	13	17
Fréquence			

Classes	[170 ;175[	[175 ;180[	Total
Effectifs	19	10	70
Fréquence			

2. Donne la classe ayant l'effectif le plus élevé.
Cette classe est appelée la classe modale de la série statistique.
3. Recopie et complète la phrase suivante pour en faire une définition :

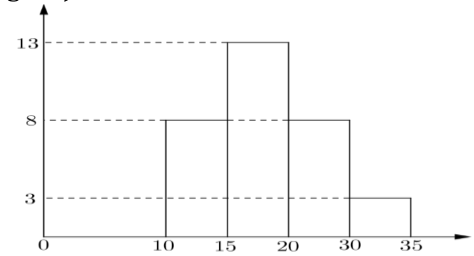
Définition

Une classe modale d'une série statistique est une classe correspondant à l'effectif ....
Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min

Définition : Histogramme
Un histogramme est un graphique constitué de bandes juxtaposées dont les aires sont proportionnelles aux .... (ou fréquences) des classes.

Consigne 3.2

Godjoy s'est intéressé à l'âge d'un échantillon des élèves du collège privé *ACADEMIA* ayant organisé une journée culturelle. Les résultats obtenus sont présentés par l'histogramme. (Voir figure).



1. Dresse le tableau des effectifs et des fréquences en (%) de cette série statistique sachant que la 1ère classe est de la forme [a ; b[.
2. Précise la classe modale de cette série.
3. Détermine le nombre d'élève ayant au moins 15 ans.

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Définition

- **Un diagramme circulaire** d'une série statistique est un disque partagé en secteurs circulaires de mesures proportionnelles aux effectifs ou aux fréquences des modalités ou des classes.
  La mesure α de chaque secteur circulaire est donnée par :
  $$\alpha = \frac{Effectif\ de\ chaque\ modalité \times 360°}{Effectif\ total}$$
- **Un diagramme semi-circulaire** d'une série statistique est un demi-disque partagé en secteurs circulaires de mesures proportionnelles aux effectifs ou aux fréquences des modalités ou des classes.
  La mesure α de chaque secteur circulaire est donnée par :
  $$\alpha = \frac{Effectif\ de\ chaque\ modalité \times 180°}{Effectif\ total}$$

Consigne 3.3

Les T-shirts commandés sont de couleur verte, jaune, bleue et rouge. Il a été dénombré dans la commande : 25 T-shirts verts, 10 T-shirts jaunes, 15 T-shirts bleus et 20 T-shirts rouges.

1. Représente un diagramme semi-circulaire et un diagramme circulaire de cette série statistique.
2. Construis un diagramme en bâtons de cette série statistique.

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Activité d'approfondissement

Les résultats d'une étude statistique réalisée sur un échantillon d'une population sont consignés dans le tableau ci-dessous.

Classes	[2 ;7 [	[7 ;12[	[12 ;17[	[17 ;22[	Total
Effectif	5	15			
Fréquences		30		40	100

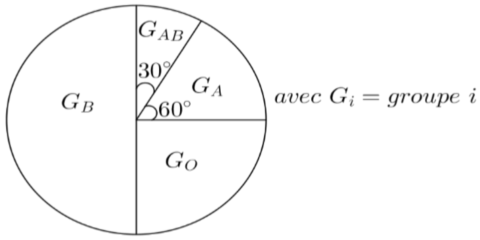
1- Reproduis et complète le tableau.
2- Précise la classe modale de cette série.
3- Construis l'histogramme et le diagramme semi-circulaire de cette série statistique.

Stratégie : TI :… min TG :…min TC :…min

Evaluations formatives

Exercice 1

Le diagramme circulaire suivant représente les résultats de l'enquête menée sur le groupe sanguin des 100 élèves interrogés par le professeur de sport



1. Construis le tableau des effectifs et des fréquences de cette série statistique.
2. Précise la classe modale de cette série.
3. Détermine le nombre d'élève ayant au plus 15 ans.

Exercice 2

Trois candidats à une élection ont obtenu les résultats donnés dans le tableau suivant.

Candidats	X	Y	Z	Total
Suffrages	8350	6221	831	
Pourcentages				
Angle au centre				

1. Compléter ce tableau.
2. Tracer le diagramme circulaire des résultats.

Exercice 3

Une enquête auprès des 48 élèves de deux classes portait sur la durée du trajet pour se rendre au collège.

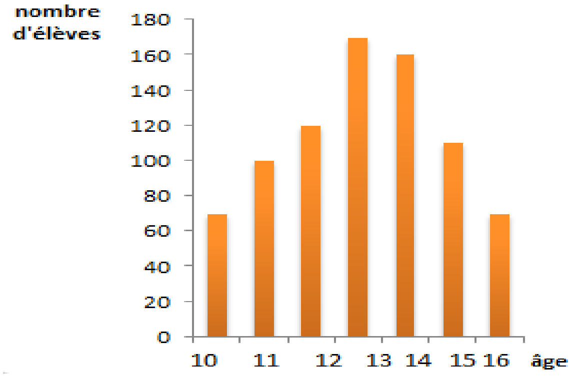
1. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous.

Temps en min	Effectifs	Fréquence en %
$0 \leq t < 15$	6	
$15 \leq t < 30$	24	
$30 \leq t < 45$		
$t > 45$	3	6,25
Total		

2. Trace l'histogramme des effectifs.
3. Quel est le nombre d'élèves dont la durée du trajet est inférieure à 45 min ?
4. Quel est le nombre d'élèves dont la durée du trajet est supérieure ou égale à 30 min ?
5. Quel est le pourcentage d'élèves dont la durée du trajet est inférieure à 30 min ?

Exercice 4

Le diagramme suivant représente le nombre d'élèves d'un collège en fonction de l'âge de ces élèves.



1. Établis le tableau des effectifs et des fréquences.
2. Quel est le mode de cette série statistique ?
3. Calcule la moyenne des âges de ces élèves.
4. Combien y a-t-il d'élèves qui ont un âge inférieur ou égal à 13ans ?

Exercice 6

Les 750 élèves d'un collège sont répartis de la façon suivante :

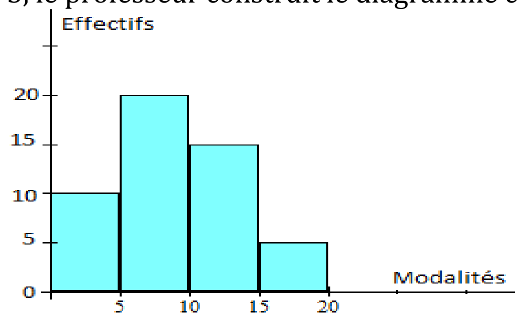
- 255 élèves sont en sixième.
- 26% des élèves sont en cinquième.
- $\frac{6}{25}$ des élèves sont en quatrième.

Compléter le tableau suivant puis tracer le diagramme semi-circulaire des effectifs.

Niveau	$6^{ème}$	$5^{ème}$	$4^{ème}$	$3^{ème}$	Total
Nombre d'élèves					
Pourcentage					
Angle					

Exercice 7

Après un devoir de Mathématiques dans une classe de 3, le professeur construit le diagramme ci-après :



1. (a) Détermine l'effectif de cette classe de 3.
   (b) Dresse le tableau des effectifs et des fréquences de cette série statistique regroupée en classe d'amplitudes égales chacune à 5.
2. Indique la classe modale.
3. Construis le diagramme circulaire de cette série statistique en indiquant les mesures des secteurs circulaires représentant les différentes classes.

Retour et projection

Consigne1 : Objectivation

1. Qu'as-tu découvert sur la SA n°4 ?
2. Qu'as-tu appris de nouveau sur la SA n°4 ?
3. Qu'as-tu trouvé difficile ou facile sur la SA n°4 ?

Consigne 2 : Auto-évaluation

1. Qu'est-ce que tu as réussi ?
2. Qu'est-ce que tu n'as pas réussi ?
3. Qu'est-ce que tu vas faire pour améliorer ta production ?

Fin de la SA N°4