Universidad Nacional Autónoma de México
Presentado a: **Santiago Caballero Benitez**
Presentado por: **F. E. Charry-Pastrana**
Maestría en Ciencias Físicas
Introducción a Física Computacional
04.03.2018

Método Newton - Raphson en dos dimensiones

Sistema 1

Finalidad: Solucionar el sistema de ecuaciones no lineales, encontrar los valores de x y y para los cuales ambas ecuaciones son nulas,

$$\begin{aligned} g_1(x,y) &= y^2 - y\,\cos(x) + 0{,}2\,(x-0{,}5)^3, \\ g_2(x,y) &= 2\,x\,\cos(y-5) + (x+3)^2. \end{aligned}$$

La solución gráfica son aquellos valores para los cuales $g_1(x,y)$ y $g_2(x,y)$ son ceros mutuamente, aquellos puntos donde ambas funciones interceptan. Mediante la función *ContourPlot* de Mathematica se pueden ver estos puntos de intercepción, Figura 1.

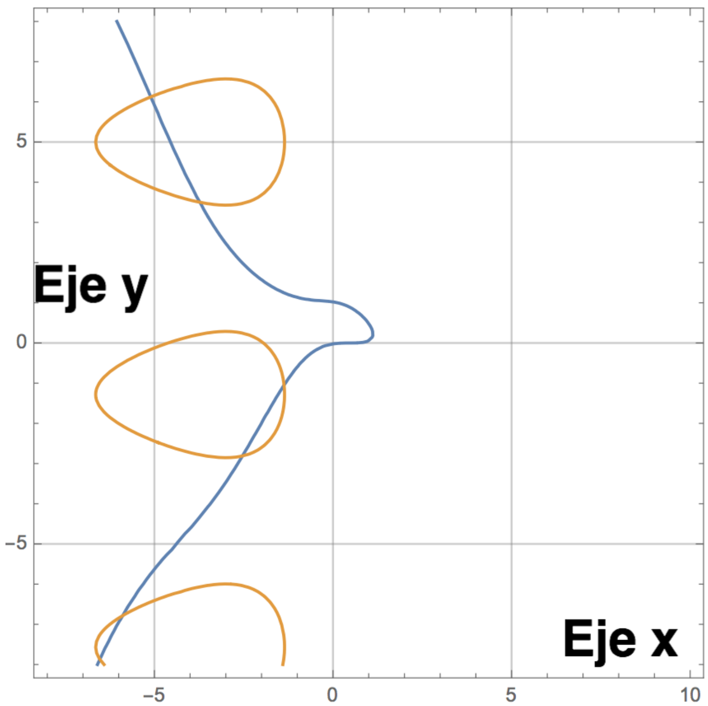

Figura 1: Solución gráfica del sistema no lineal: gráficas de contorno para $g_1(x,y)$ y $g_2(x,y)$, los puntos de intercepción son aquellos valores de x y y para los cuales ambas funciones son nulas. Se utilizarán como valores iniciales en el programa.

En la Figura 1 se observa que en la región cuadrada $-8 < x < 8$, $-8 < y < 8$ **existen seis ceros para el sistema** no lineal.

El programa implementado se realizó utilizando el Jacobiano del sistema. De la siguiente manera:

1) Dar valores iniciales para $\vec{r} = (x_0,\, y_0)$, aproximando visualmente los puntos de intercepción de la Figura 1.

2) Calcular el $\delta\vec{r} = (\delta x,\, \delta y)$ solucionando el sistema de ecuaciones

$$J\,\delta\vec{x} = -\vec{G},$$

en donde $\vec{G} = (g_1,\, g_2)$ y J es el jacobiano del sistema, a saber:

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y\,\sin(x) + 0{,}6\,(x-0{,}5)^2 & 2\,y - \cos(x) \\ 2\,\cos(y-5) + 2\,(x+3) & -2\,x\,\sin(y-5) \end{bmatrix}$$

3) Sumar $\delta\,\vec{r}$ al vector anterior, $\vec{r}$

Cuadro 1: Valores iniciales y finales para x y y, y valores de las funciones g_1 y g_2 evaluadas en los valores finales de x y y.

x_0	y_0	x_f	y_f	$g_1(x_f, y_f)$	$g_1(x_f, y_f)$
-1	-1	-1.36871	-1.04647	2×10^{-12}	4×10^{-12}
-2	-3	-2.53541	-2.81140	0.7×10^{-12}	3×10^{-12}
-4	3	-3.73261	3.50116	0.7×10^{-14}	0.1×10^{-14}
-5	6	-5.10215	6.12292	-0.3×10^{-10}	8×10^{-10}
-6	-7	-5.89703	-6.78736	-3×10^{-12}	10×10^{-12}
-6.8	-8	-6.53167	-7.86822	0×10^{-14}	0.4×10^{-14}

4) Repetir el proceso anterior hasta que el valor absoluto del máximo entre $g_1(x, y)$ y $g_2(x, y)$ sea menor que determinado criterio. Se utilizó el límite de 10^{-8}.

Los resultados del procedimiento anterior, para diferentes valores iniciales, se muestra en la Figura 2 y los valores finales se muestra en el Cuadro 1. Tal como se muestra en la Figura 1, no existe ceros para el sistema lineal para $x > 0$ en el intervalo cuadrado considerado: $-8 < x < 8$, $-8 < y < 8$.

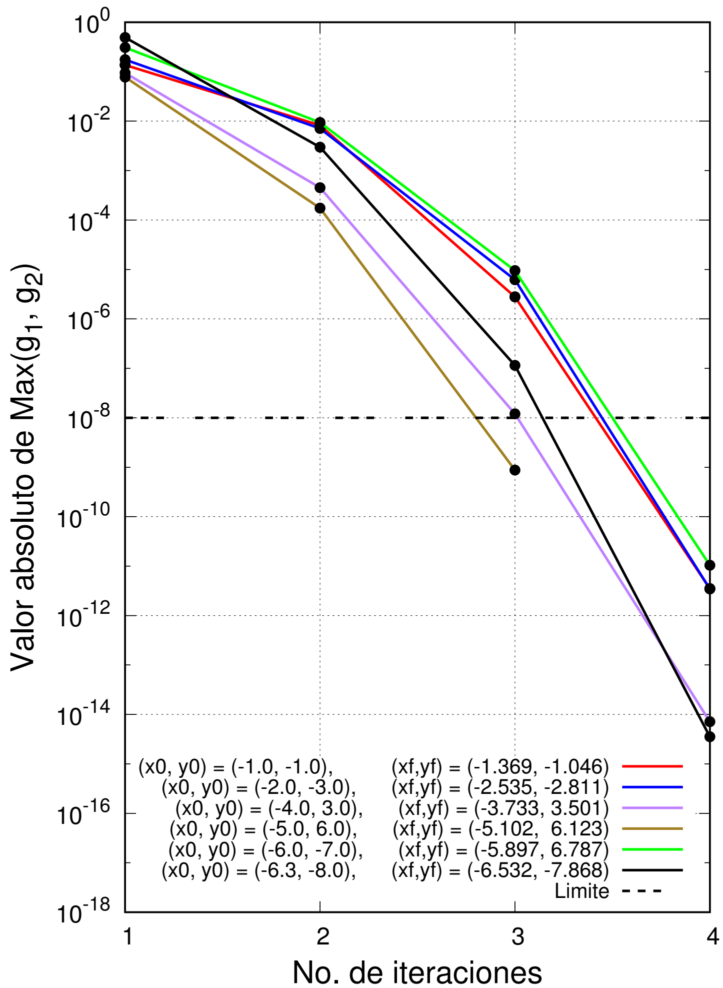

Figura 2: Valor absoluto del máximo entre las funciones $g_1(x, y)$ y $g_2(x, y)$, calculadas para x y y después de cierto No. de iteraciones. Para cada curva se escribe los valores iniciales para x_0 y y_0 y los valores finales, x_f y y_f, para los cuales el sistema no lineal converge con un valor inferior a 10^{-8}

Cuadro 2: Valores iniciales y finales para x y y, y valores de las funciones f_1 y f_2 evaluadas en los valores finales de x y y.

x_0	y_0	x_f	y_f	$g_1(x_f, y_f)$	$g_1(x_f, y_f)$
-2	-3	-2.58659	-2.88702	2×10^{-14}	-6×10^{-14}
-2	1	-1.44540	1.27761	2×10^{-16}	0×10^{-16}
-4	3	-3.65120	3.37110	35×10^{-16}	8×10^{-16}
-5	-6	-4.96939	-5.59468	5×10^{-10}	28×10^{-10}
-6	7	-5.65380	7.24314	0.1×10^{-12}	-0.8×10^{-12}

Sistema 2

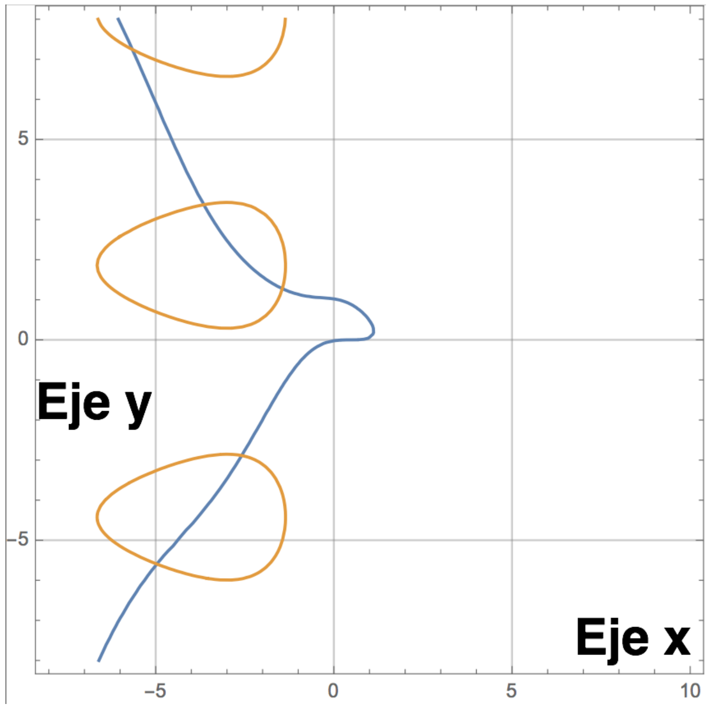

Figura 3: Solución gráfica del sistema no lineal: gráficas de contorno para $f_1(x, y)$ y $f_2(x, y)$.

Repitiendo el proceso anterior para el sistema:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= y^2 - y\,\cos(x) + 0{,}2\,(x - 0{,}5)^3, \\ f_2(x, y) &= 2\,x\,\cos(y - 5) - (x + 3)^2. \end{aligned}$$

El Jacobiano del sistema es

$$J = \begin{bmatrix} y\,\sin(x) + 0{,}6\,(x - 0{,}5)^2 & 2\,y - \cos(x) \\ 2\,\cos(y - 5) - 2\,(x + 3) & -2\,x\,\sin(y - 5) \end{bmatrix}$$

La solución gráfica del sistema se muestra en la Figura 3. Los ceros de las funciones f_1 y f_2 se muestran en el Cuadro 2 y el proceso iterativo se muestra en la Figura 4. Al igual que el sistema de ecuaciones 1, el sistemas de ecuaciones no lineal f_1 y f_2 no presenta ceros para $x > 0$ en el intervalo cuadrado considerado.

Sistema 3

De nuevo, repitiendo el proceso anterior para el sistema

$$\begin{aligned} h_1(x, y) &= y^2 - y\,\cos(x\,y) + 0{,}2\,(x - 0{,}5)^3, \\ h_2(x, y) &= 2\,x\,\cos(x\,y - 5) - (x + 3)^2. \end{aligned}$$

El Jacobiano del mismo es

$$J = \begin{bmatrix} y^2\,\sin(x\,y) + 0{,}6\,(x - 0{,}5)^2 & 2\,y - \cos(x\,y) + x\,y\,\sin(x\,y) \\ 2\,\cos(x\,y - 5) - 2\,x\,y\,\sin(x\,y - 5) - 2\,(x + 3) & -2\,x^2\,\sin(x\,y - 5) \end{bmatrix}$$

La solución gráfica se muestra en la Figura 5. Al igual que en los casos anteriores, no existen ceros para $x > 0$ aunque el sistema presenta numeros ceros (aprox. 32), sólo se calcularán algunos.

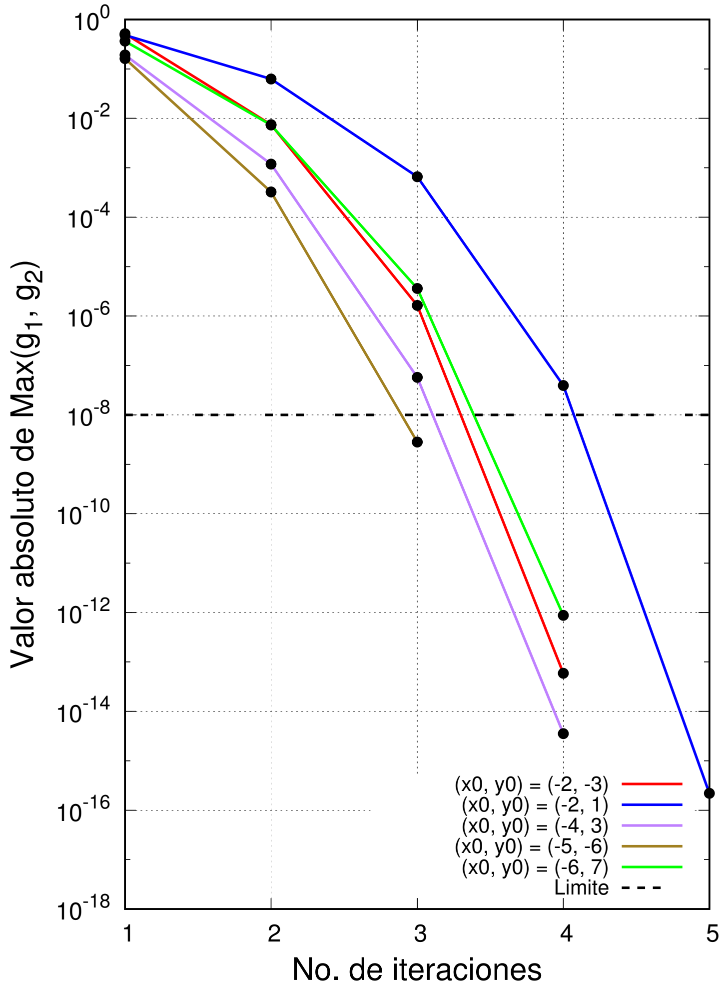

Figura 4: Valor absoluto del máximo entre las funciones $f_1(x,y)$ y $f_2(x,y)$, calculadas para x y y después de cierto No. de iteraciones. Para cada curva se escribe los valores iniciales para x_0 y y_0 referenciados en el Cuadro 2 para los cuales el sistema no lineal converge con un valor inferior a 10^{-8}

Algunos ceros del sistema $h_1(x,y)$ y $h_2(x,y)$ se muestran en el Cuadro 3 y el proceso iterativo se muestra en la Figura 6. La convergencia para los valores iniciales de $(x_0,\, y_0) = (-3,\, 2{,}5)$ presenta el mayor número de iteraciones debido a que el valor de x y y al que converge no son cercanos a los valores iniciales, $(x_f,\, y_f) = (-2{,}1\, 1{,}4)$

Cuadro 3: Valores iniciales y finales para x y y, y valores de las funciones $h_1(x,y)$ y $h_2(x,y)$ evaluadas en los valores finales de x y y.

x_0	y_0	x_f	y_f	$g_1(x_f,y_f)$	$g_1(x_f,y_f)$
-1.5	-2	-1.47206	-1.70750	7×10^{-10}	-18×10^{-10}
-3	2.5	-2.10470	1.44704	-0.1×10^{-14}	0.3×10^{-14}
-3.5	2.5	-3.25576	2.80955	-13×10^{-14}	-5×10^{-14}
-5	-5	-4.91231	-5.25247	-0.1×10^{-10}	0.3×10^{-10}
-5	5	-4.50664	5.45652	51×10^{-12}	-0.2×10^{-12}
-6	7	-4.91231	-5.25247	-10×10^{-12}	26×10^{-12}

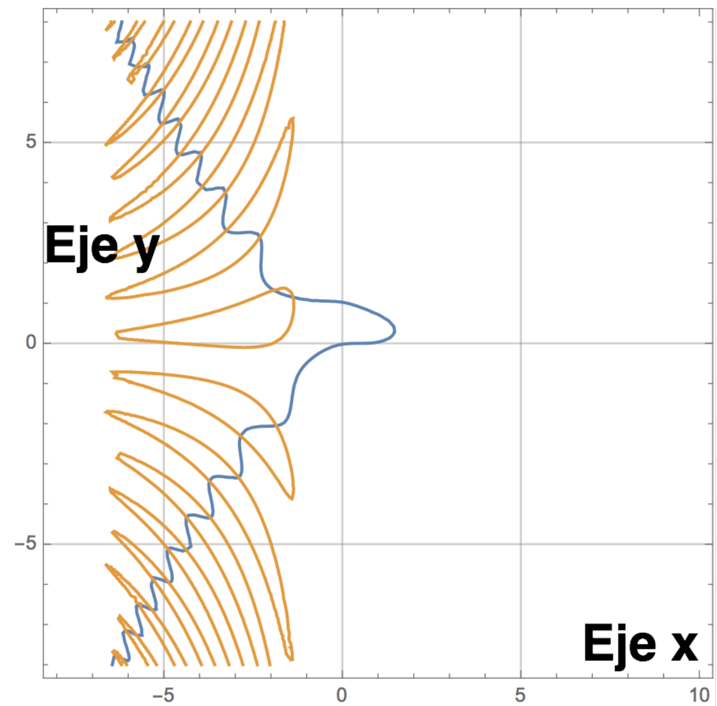

Figura 5: Solución gráfica del sistema no lineal: gráficas de contorno para $h_1(x, y)$ y $h_2(x, y)$.

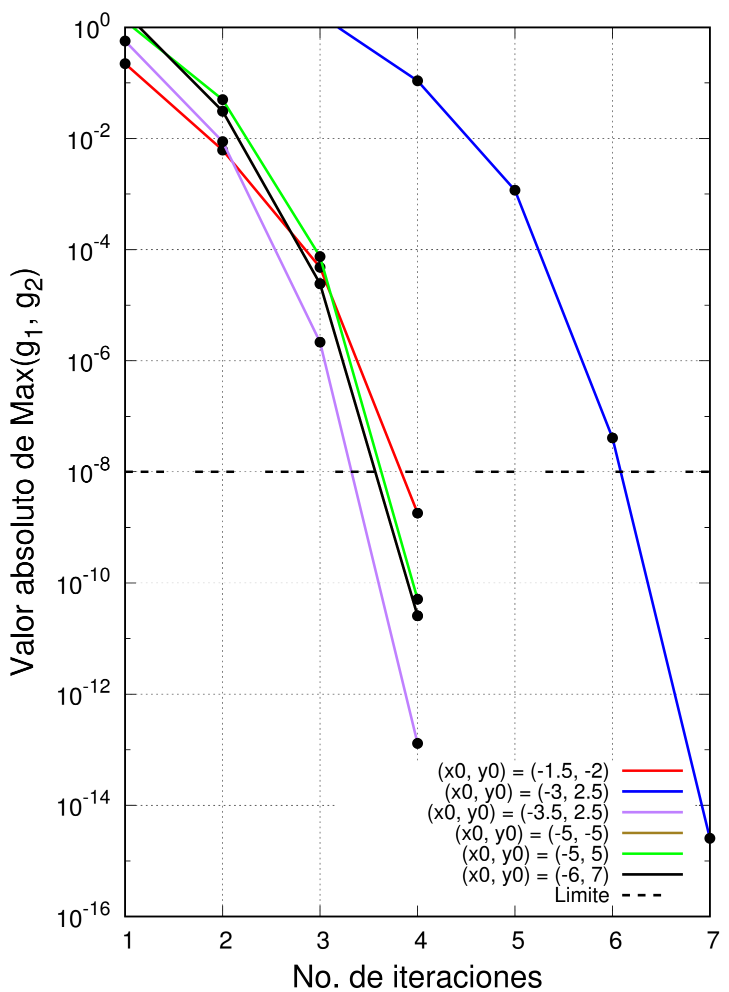

Figura 6: Valor absoluto del máximo entre las funciones $h_1(x, y)$ y $h_2(x, y)$, calculadas para x y y después de cierto No. de iteraciones. Para cada curva se escribe los valores iniciales para x_0 y y_0 referenciados en el Cuadro 2 para los cuales el sistema no lineal converge con un valor inferior a 10^{-8}