

Péndulo doble

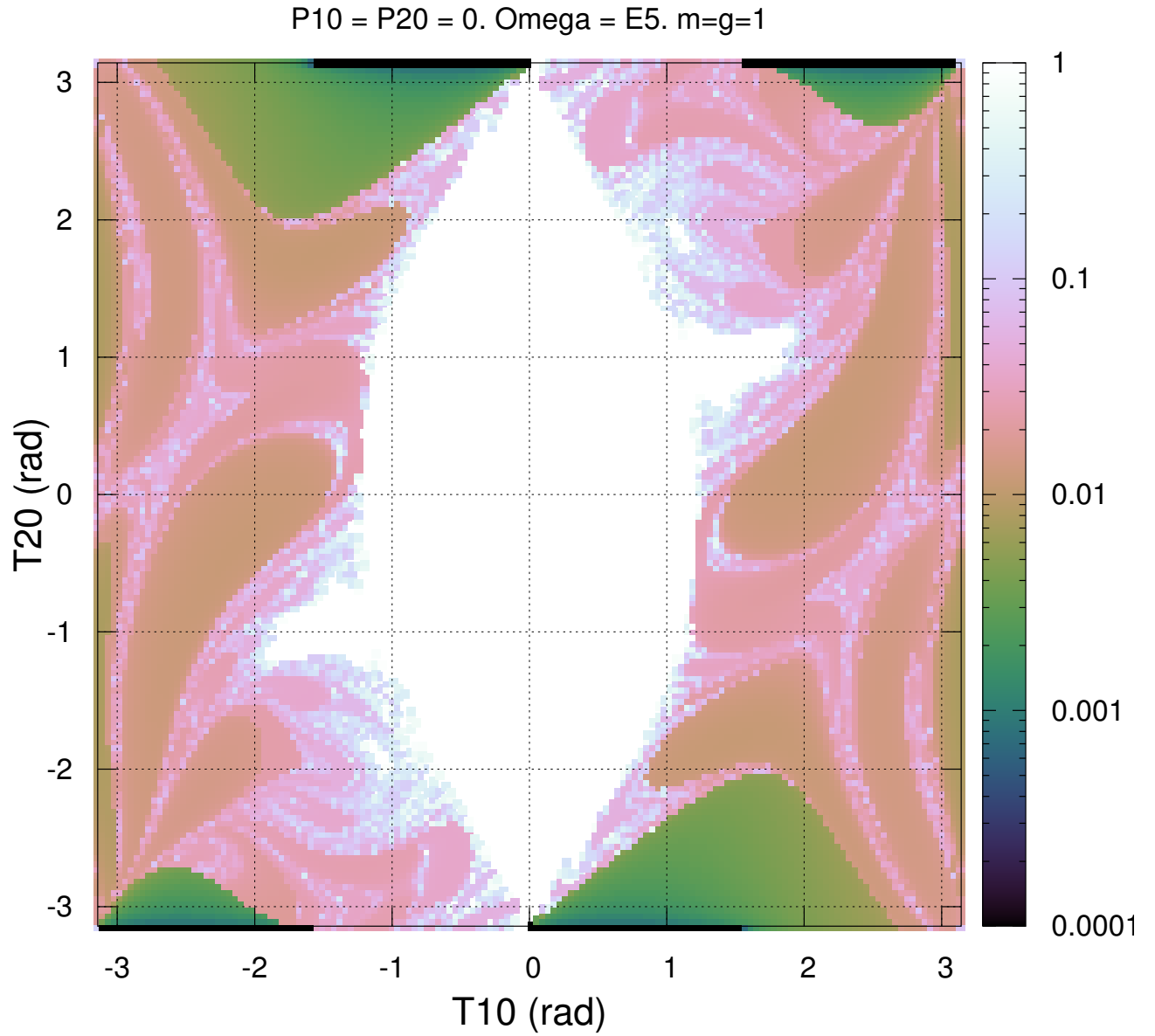


Figura 1: Dependencia del tiempo crítico (t_c) en función de los ángulos iniciales $\theta_{1,0}$ (T10) y $\theta_{2,0}$ (T20) para valores $P_{1,0} = P_{2,0} = 0$, $\omega^2 = 10^5$, $g = 1$ y $m = 1$.

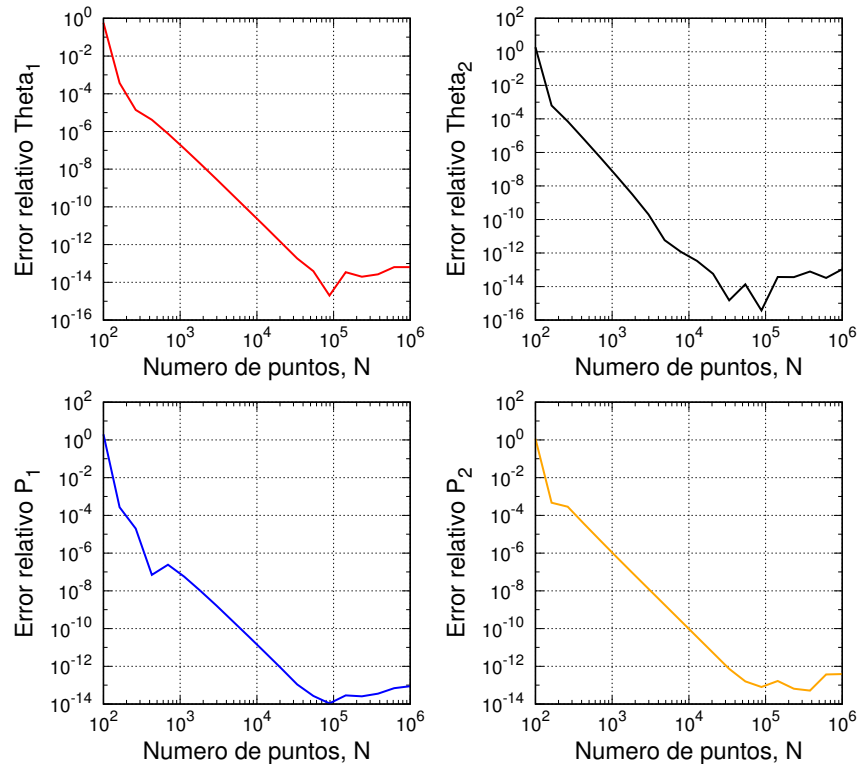


Figura 2: Dependencia del error relativo en función del número de puntos N para cada una de las funciones de interés del péndulo doble (θ_1 , θ_2 , p_1 o p_2) para $t = 10$. Las constantes utilizadas fueron $m = 1$, $g = 1$, $l = 1$, $\theta_{1,0} = \frac{\pi}{10}$, $\theta_{2,0} = \frac{\pi}{4}$, $p_{1,0} = 1$ y $p_{2,0} = 0$.

Las ecuaciones de movimiento del péndulo doble son:

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= \frac{6}{m l^2} \frac{2 p_1 - 3 p_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{16 - 9 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)} \\ \dot{\theta}_2 &= \frac{6}{m l^2} \frac{8 p_1 - 3 p_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{16 - 9 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)} \\ \dot{p}_1 &= -\frac{1}{2} m l^2 \left(\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + 3 \frac{g}{l} \sin(\theta_1) \right) \\ \dot{p}_2 &= -\frac{1}{2} m l^2 \left(-\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \frac{g}{l} \sin(\theta_1) \right).\end{aligned}$$

Para unas condiciones iniciales de θ_1 , θ_2 , p_1 y p_2 se resuelven mediante el método de Runge-Kutta.

Se inicia el documento con la Figura 1 para probar que el código funciona correctamente puesto que es una imagen amply reportada en la literatura.

0. Error

Se define el error relativo en el presente documento como la diferencia relativa de la función (θ_1 , θ_2 , p_1 o p_2) en un tiempo $t = 10$ con un número determinado de puntos N_i respecto al valor de la función para $t = 10$ con un número de puntos N_{i-1} . En la Figura 2 se muestra el error relativo para cada una de las funciones de interés de acuerdo al número de puntos N .

De acuerdo al comportamiento de la Figura 2, se escoge como número de puntos, en todos los casos, $N = 10^4$.

1. Espacio fase t_c vs. ω^2 para $\theta_{1,0} = \theta_{2,0} = \frac{\pi}{2}$ y $p_{1,0} = p_{2,0} = 0$.

El tiempo crítico se asume como aquel tiempo para el cual $|\theta_2| > \pi$. La Figura 3 muestra el comportamiento del tiempo crítico en función de la frecuencia $\omega^2 = \frac{g}{l}$ (el valor de g es siempre fijo, $g = 1$) para condiciones iniciales de $\theta_{1,0} = \theta_{2,0} = \frac{\pi}{2}$ y $p_{1,0} = p_{2,0} = 0$.

2. Espacio fase t_c vs. ω^2 vs. $\theta_{1,0} = \theta_{2,0}$ para $p_{1,0} = p_{2,0} = 0$.

En las Figuras 4 y 5 se muestran el comportamiento de t_c en función de ω^2 y de los ángulos iniciales, $\theta_{1,0} = \theta_{2,0}$. En la Figura 5 se encierran ciertas zonas que presentan un comportamiento anómalo, similar al que se presenta para valores grandes de ω^2 en la Figura

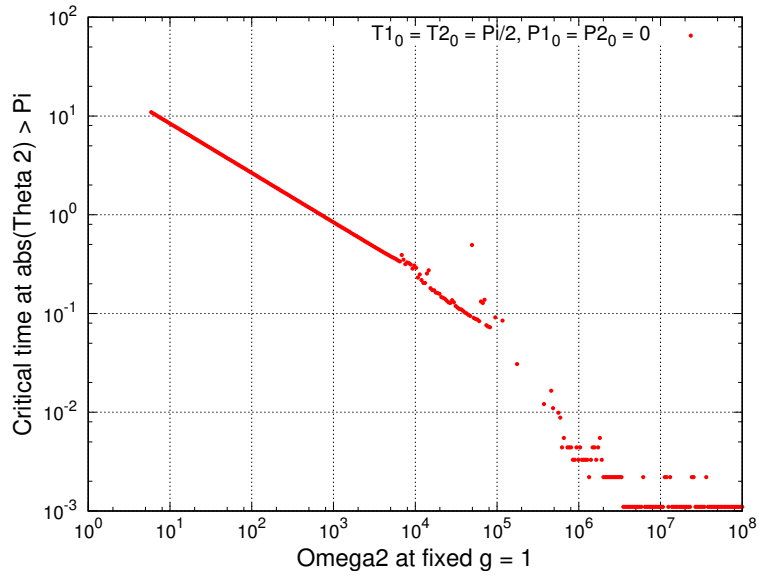


Figura 3: t_c vs. ω^2 . En la figura se omite los valores de t_c para $\omega^2 < 10$ debido a que presenta un comportamiento similar al que se ilustra en el intervalo $10^1 < \omega^2 < 10^3$.

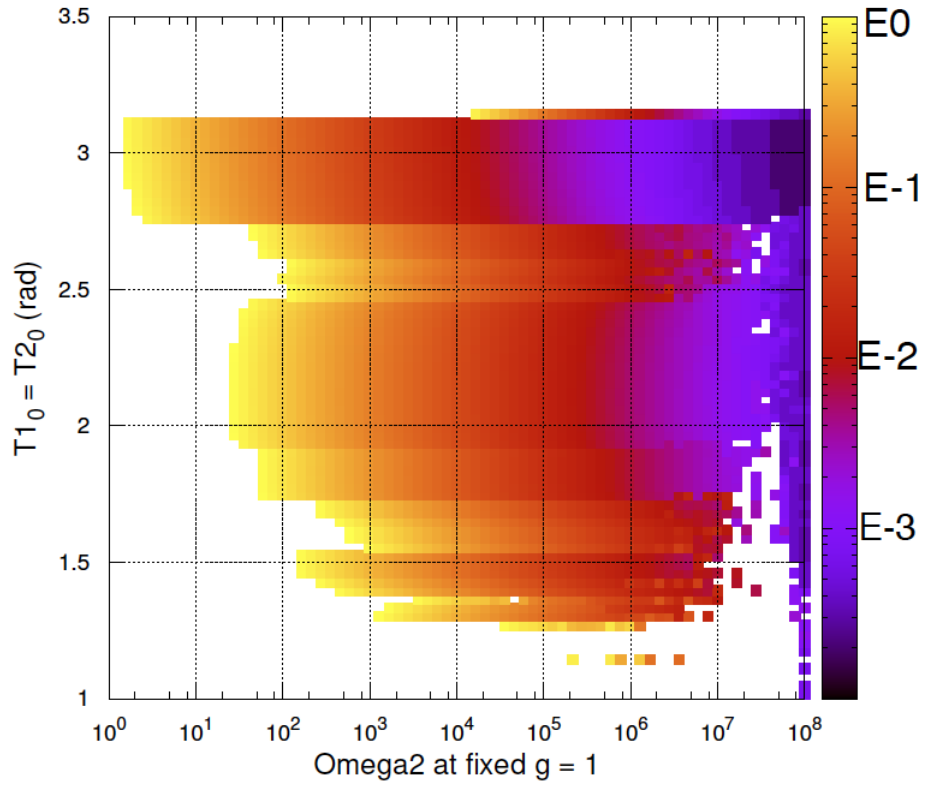


Figura 4: Dependencia del tiempo crítico, t_c , en función de ω^2 y el ángulo inicial $\theta_{1,0} = \theta_{2,0}$ en un rango de frecuencias entre $1 < \omega^2 < 10^8$.

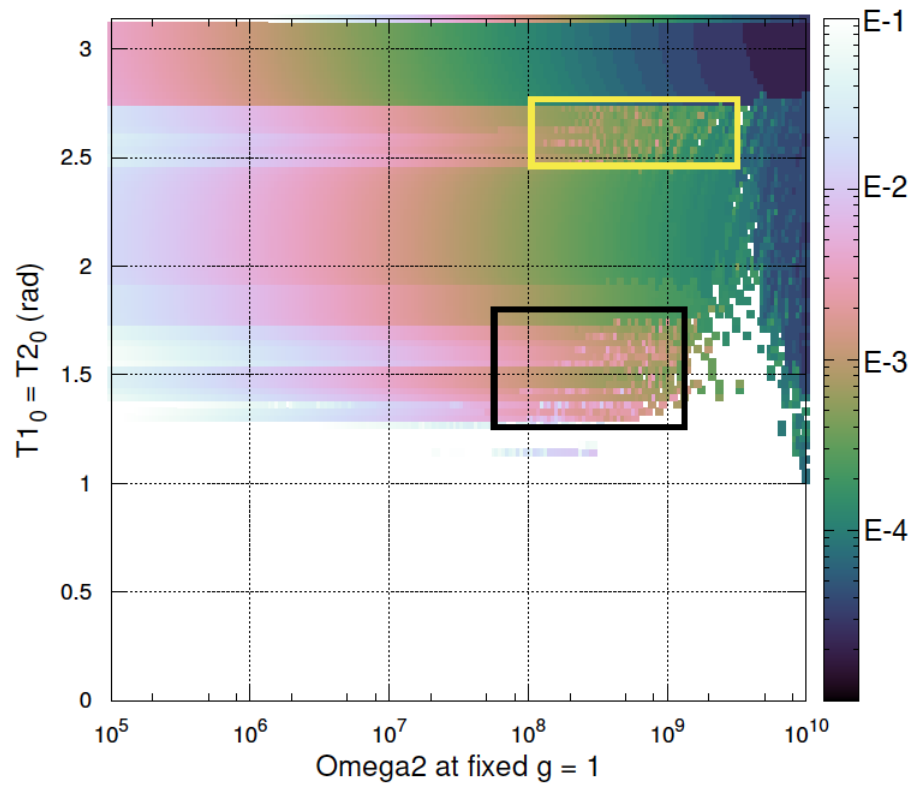


Figura 5: Dependencia del tiempo crítico, t_c , en función de ω^2 y el ángulo inicial $\theta_{1,0} = \theta_{2,0}$ en un rango de frecuencias entre $10^5 < \omega^2 < 10^{10}$. Nótese los recuadros, en donde se observa que para ciertas frecuencias y valores iniciales del ángulo, el valor de t_c no es continuo.

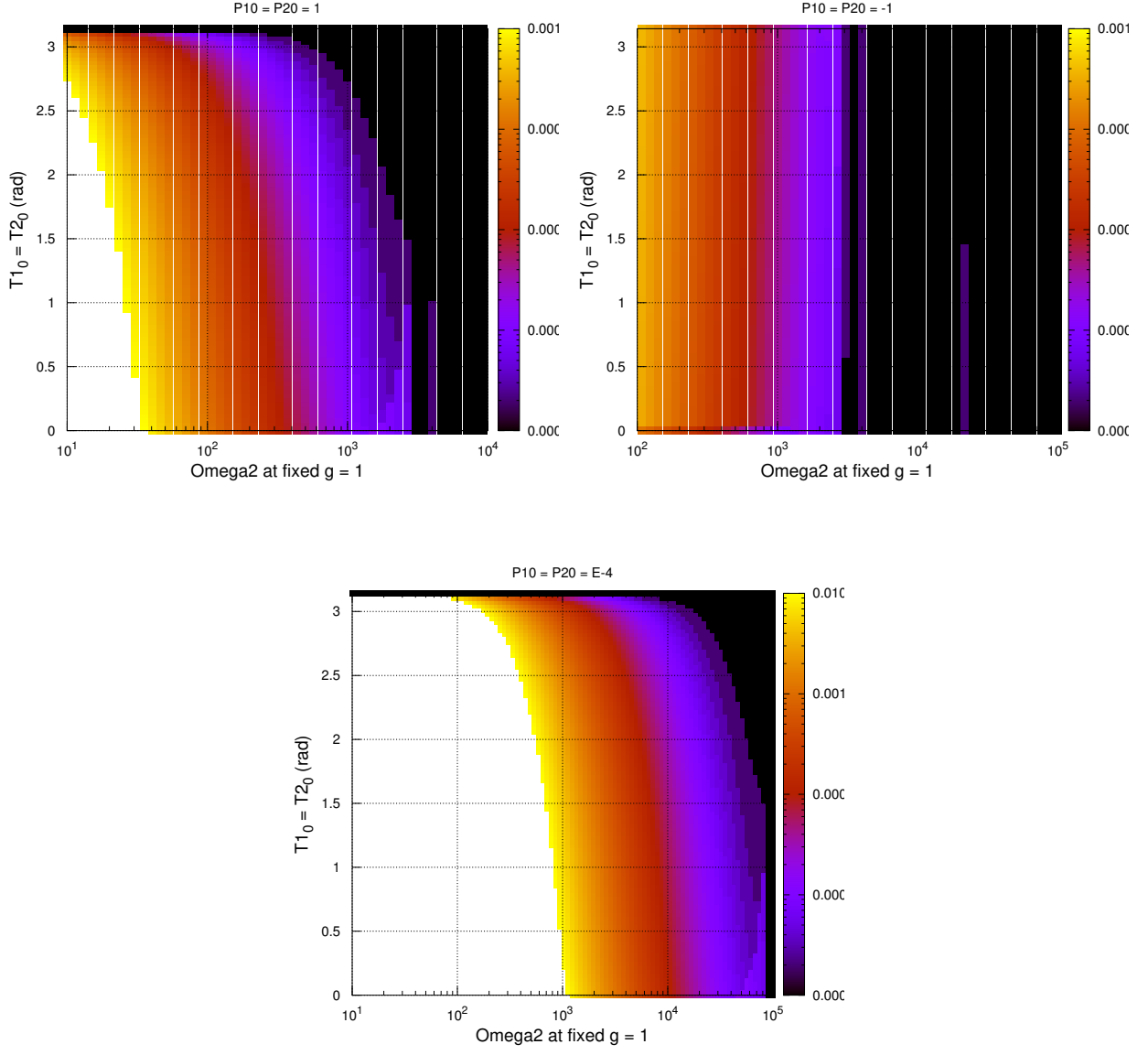


Figura 6: Dependencia del tiempo crítico en función de ω^2 y $\theta_{1,0} = \theta_{2,0}$ para diferentes valores de $p_{1,0} = p_{2,0} = -1, 1, 10^{-4}$.

3.

3. Espacio fase t_c vs. ω^2 vs. $\theta_{1,0} = \theta_{2,0}$ variando $p_{1,0} = p_{2,0}$.

La dependencia del tiempo crítico en función de los momentos iniciales presenta algunos problemas debido a que, dado que las variaciones de t_c se presenta para $\omega^2 > 10^5$ (ver Figura 3), los tiempos críticos se vuelven pequeños ($\sim 10^{-6}$), esta es la razón por la cual los intervalos para ω^2 en la Figura 6 son del orden de $10^1 < \omega^2 < 10^4$.

En la Figura 6 se puede ver que, *en los intervalos analizados* de ω^2 y $\theta_{1,0} = \theta_{2,0}$, la variación de t_c es suave (no caos).

4. Trayectorias

El análisis de las trayectorias se realiza para tres casos: ángulos pequeños, ángulos iniciales de $\frac{\pi}{2}$ y ángulos intermedios.

4.1 Caso de ángulos pequeños: $\theta_{1,0} = \theta_{2,0} = \frac{\pi}{10}$ y $p_{1,0} = p_{2,0} = 0$

Dado que se trata de ángulos pequeños, se encuentra un comportamiento similar a osciladores armónicos no acoplados. Las trayectorias y dependencias temporales se muestra en la Figura 7.

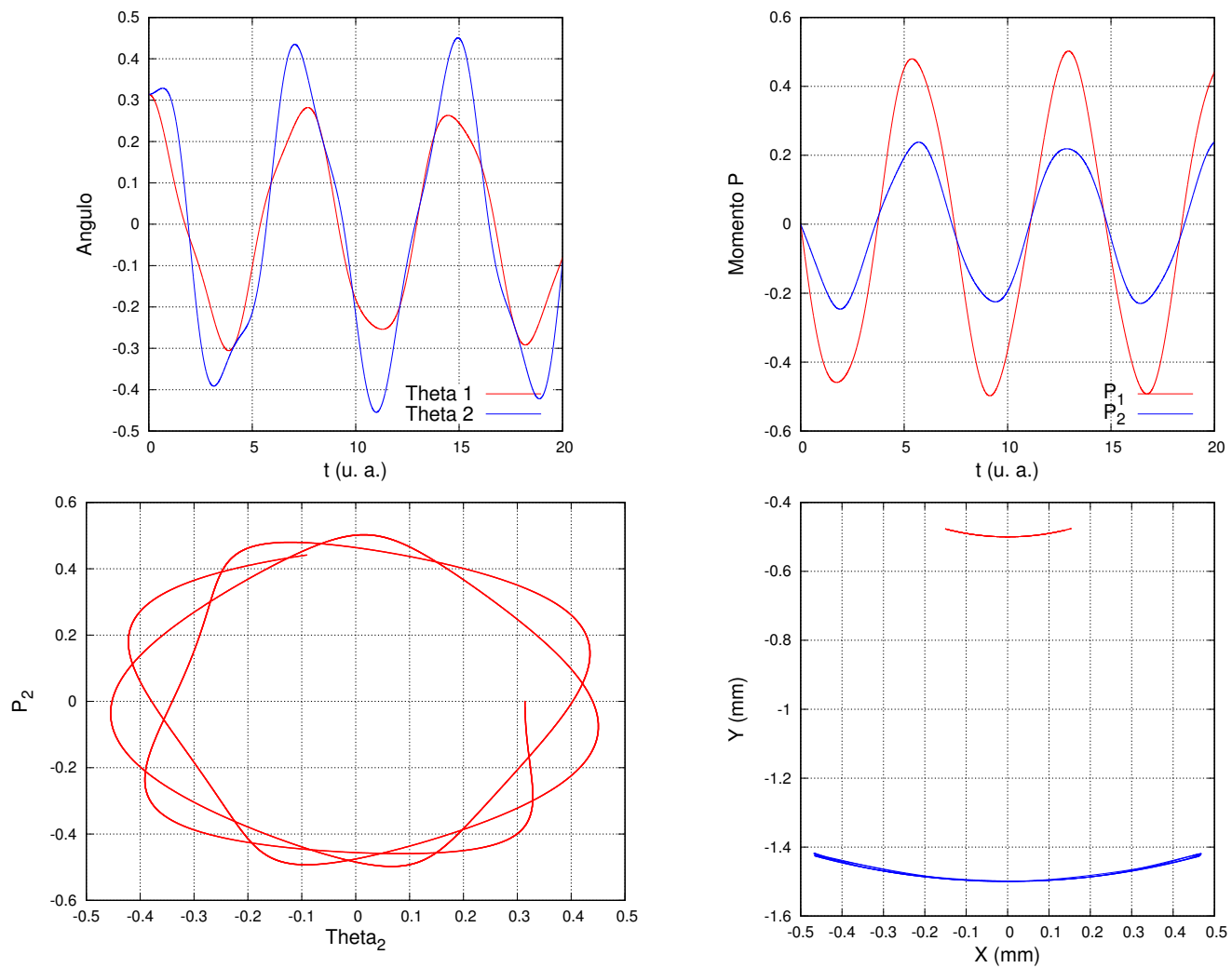


Figura 7: Resultado para **ángulos pequeños**. p y θ en función del tiempo, espacio fase, y trayectoria para $0 < t < 20$

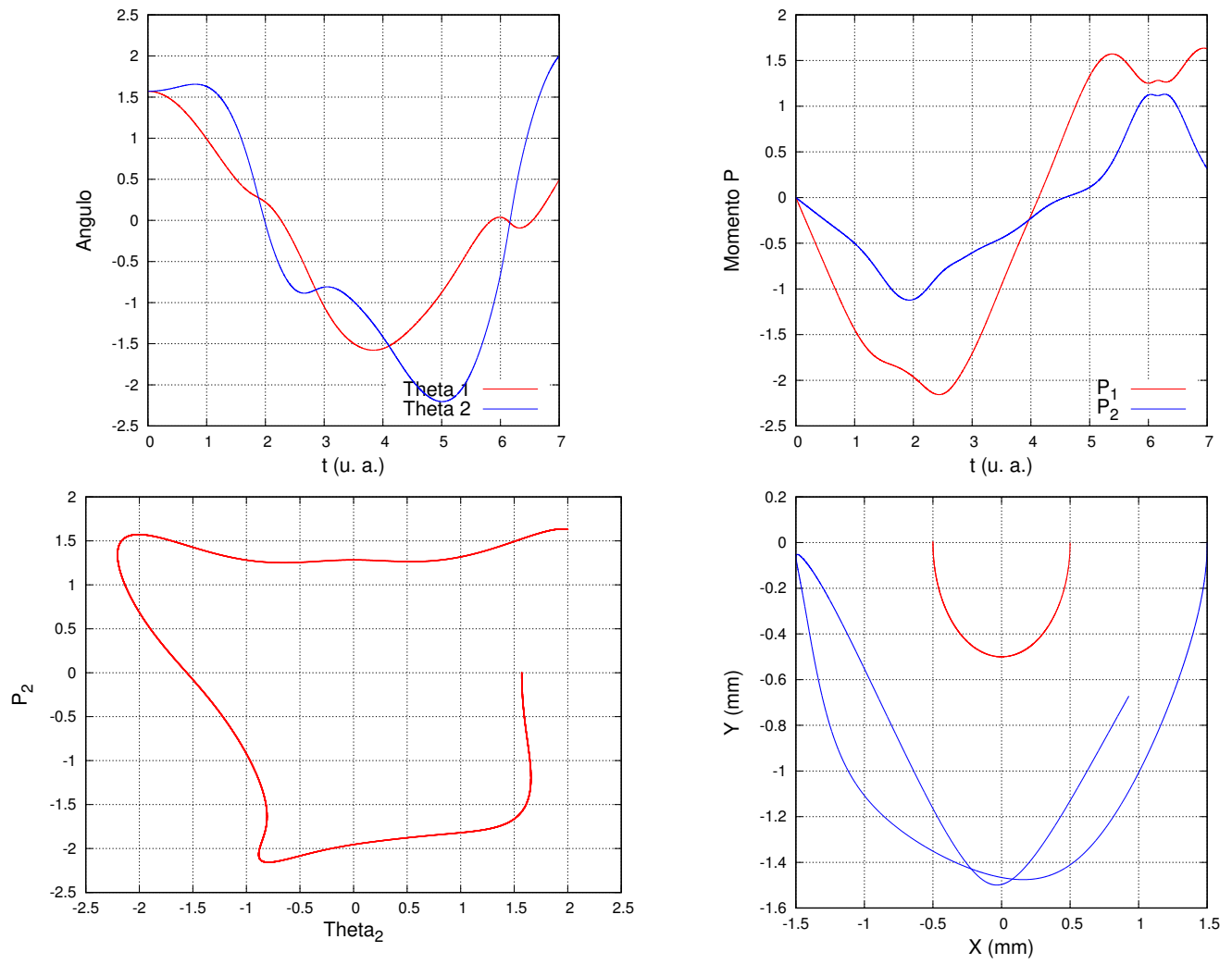


Figura 8: Resultado para **ángulos grandes**. p y θ en función del tiempo, espacio fase, y trayectoria para $0 < t < 7$

4.2 Caso ángulos “grandes”: $\theta_{1,0} = \theta_{2,0} = \frac{\pi}{2}$ y $p_{1,0} = p_{2,0} = 0$

Las trayectorias y dependencias temporales se muestra en la Figura 8. Las diferencias en los resultados para ángulos “grandes” son evidentes al compararse con los resultados de la Figura 7.

4.3 Caso ángulos intermedios: $\theta_{1,0} = \frac{\pi}{2}$, $\theta_{2,0} = \frac{\pi}{10}$, $p_{1,0} = -1$ y $p_{2,0} = 1$.

Para las condiciones iniciales como las descritas anteriormente, es imposible prever el comportamiento del péndulo doble. Los resultados se muestran en la Figura 9.

5. Segunda inversión de masa 2, $t_{c,2}$

La segunda inversión se define como el tiempo para el cuál el ángulo de la segunda partícula es $|\theta_2| > 3\pi$. Tal como se muestra en la Figura 10, los resultados para la segunda inversión son similares a los resultados para la primera inversión cuando la frecuencia es menor a $\omega^2 \sim 10^4$, una vez superado este límite, el comportamiento parecen no estar relacionandos.

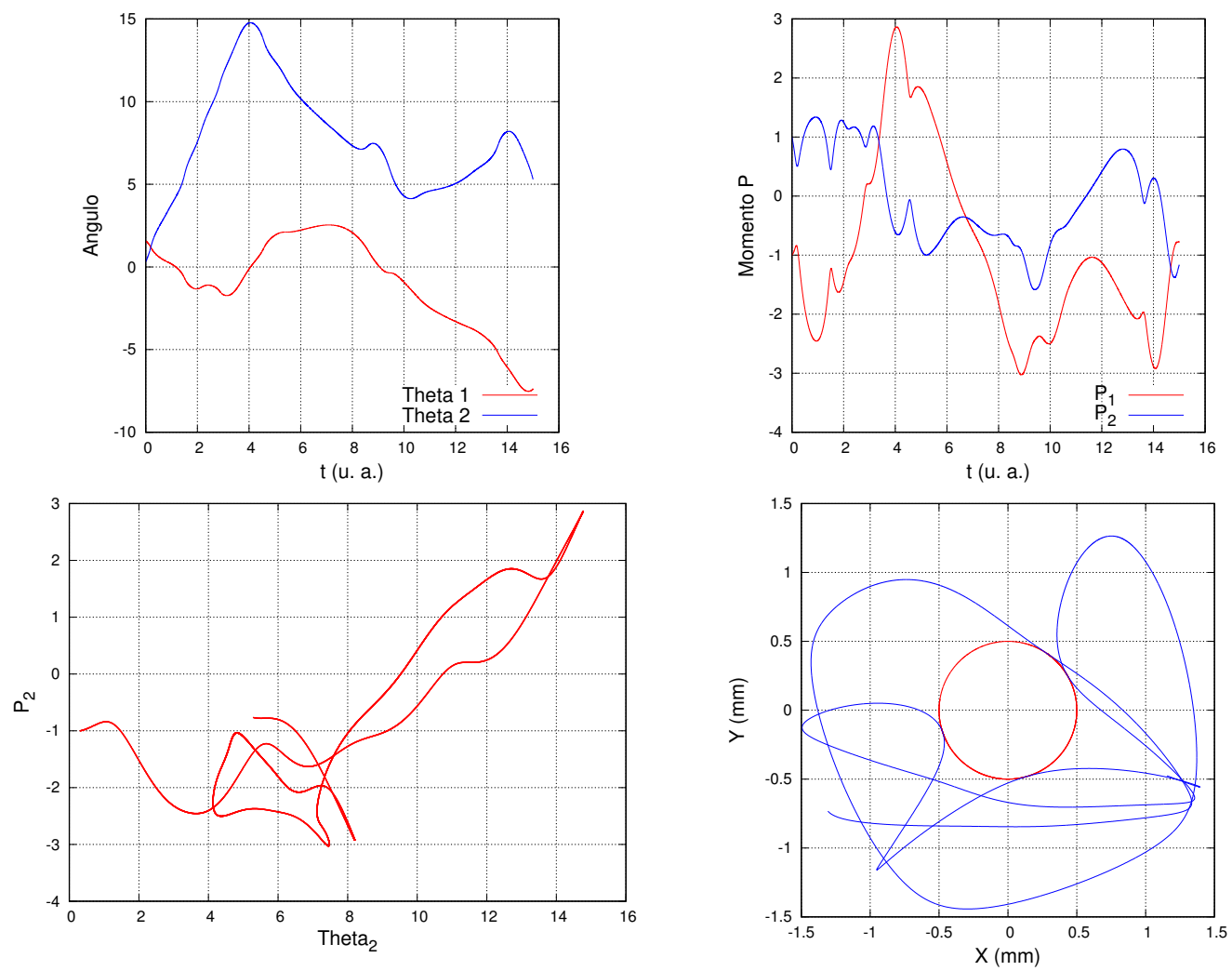


Figura 9: Resultado para **ángulos intermedios**. p y θ en función del tiempo, espacio fase, y trayectoria para $0 < t < 15$

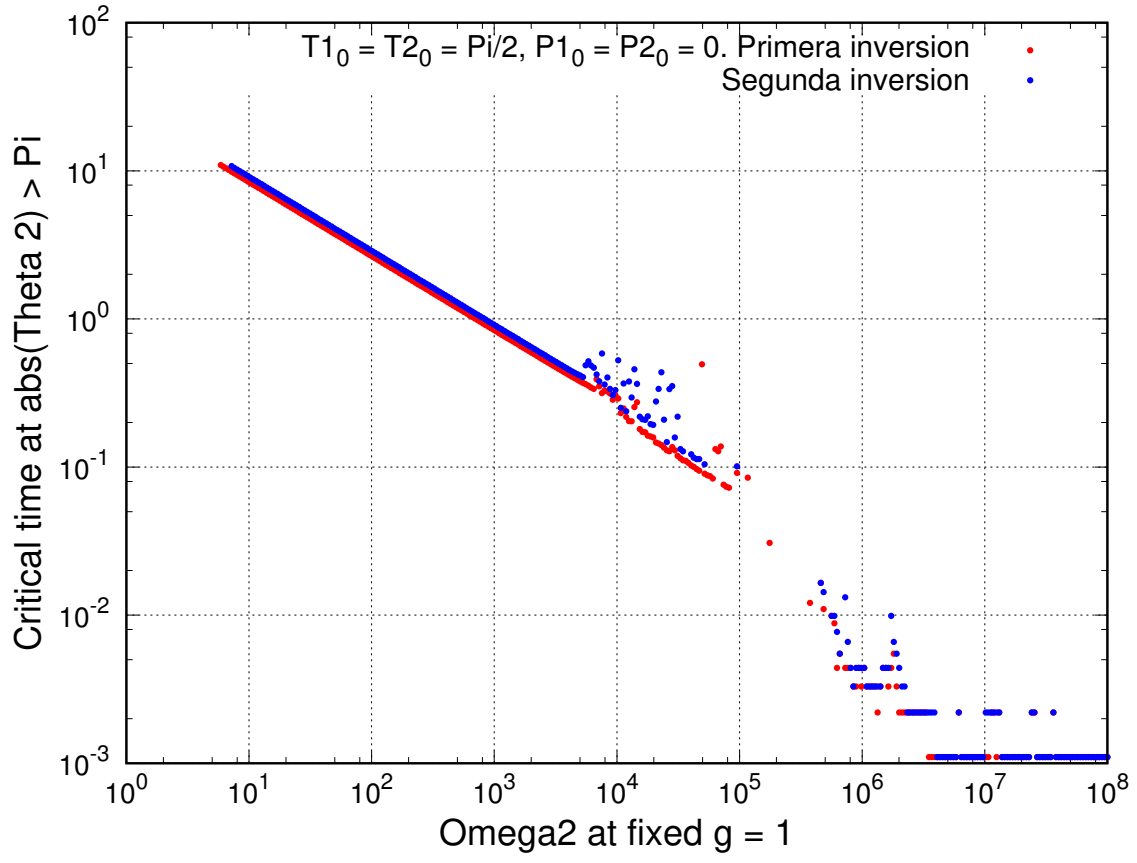


Figura 10: Dependencia del tiempo crítico (t_c) para la primera y segunda inversión en función de los ángulos iniciales $\theta_{1,0}$ (T10) y $\theta_{2,0}$ (T20) para valores $P_{1,0} = P_{2,0} = 0$, $\omega^2 = 10^5$, $g = 1$ y $m = 1$.