Estimación de una Opción Europea Utilizando el Modelo Black and Scholes y Simulación de Montecarlo

Alan Alcántara Nagamatsu, Ernesto Godínez Medina, Óscar Urenda, Marcos Esparza Arizpe

Dr. Brenda Ivette García Maya, Dr. Abelardo Ernesto Damy Solís, Dr. Juan Francisco Corona Burgueño

***Abstract*— In the financial world, mathematical models are commonly used to asses risk, predict stock prices, and analyze the market.Among them, highly regarded is the Black and Scholes Model; a mathematical model used to price underlying assets and derivatives. In this paper, the value of an asset through time was estimated. This was achieved analyzing interbank interest rate of a full year for which then the underlying asset was estimated and consequently the price of a european call option.**

***Index Terms*— Black & Scholes, Montecarlo, Opción de compra europea, Variables aleatorias.**

I. Introducción

En la negociación de un activo a vender en el futuro entre dos partidos, por ley habrá un perdedor y un ganador del contrato. Para el beneficio de ambos partidos, queremos que las pérdidas sean mínimas. Por lo tanto, la estimación de un precio activo a un futuro cercano es sumamente relevante para evadir riesgo y minimizar pérdidas, para esto se emplea un instrumento financiero llamada opción.

En el presente trabajo se busca estimar el valor de una opción de compra para un activo utilizando el modelo de Black and Scholes, modelando la evolución del activo de forma brauniana mediante una simulación de Montecarlo.

II. Descripción de la Problemática

Dado que es de interés estimar el valor de una opción, primero es necesario definir el tipo de opción con la que se trabajará. En este caso se trata de una opción europea, es decir, solo puede ser aplicada una vez que se alcanza el tiempo de maduración que se estableció. Con esta delimitación, es posible utilizar el modelo de Black and Scholes.

Sin embargo, para poder utilizar este modelo, se deben definir otros valores. En particular, se establece el valor inicial de la acción en \$100 así como una opción de compra de \$105 que se puede aplicar tras un año.

Cabe mencionar que el activo con el que se trabaja es la tasa de interés interbancaria. Entonces, para poder hacer estimaciones del precio del activo con el paso del tiempo, se utilizó la base de datos de Banxico respecto a este activo.

III. Preguntas de Investigación

Tomando en cuenta un activo cuyo valor actual es de \$100 para el cuál se trató una opción europea de compra de \$105 a un año, ¿Cuál será el valor de esta opción al finalizar el tiempo de maduración?

IV. Marco Teórico

Para realizar la estimación de la opción, se utilizaron diversas herramientas matemáticas traducidas al lenguaje de programación python. Estos son el modelo de Black y Scholes, la simulación con Monte Carlo y por úlitmo la suma de variables aleatorias de acuerdo a ciertos tipos de distribución.

IV-A. *Modelo de Black y Scholes*

Black and Scholes es un tipo de modelo matemático financiero desarrollado por los economistas Fischer Black, Myron Scholes y Robert Meron para calcular el valor futuro de derivadas financieras. En 1997, BSM (Black Scholes Merton) ganó el Nobel Prize de Economía. Desarrollada en 1973, el modelo usa una ecuación diferencial inicialmente para ponerle precio a opciones financieras de estilo europeo. Nota que las opciones europeas son aquellas que solamente se pueden llevar a cabo hasta la fecha de expiración. El estilo americano en cambio se puede ejecutar en cualquier intervalo antes de la fecha de expiración [1].
El modelo postula que instrumentos financieros como acciones de valores, o contratos a futuro, tendrán una distribución log-normal de precios que siguen "random walk". Random Walk se refiere a que los precios de estos son altamente volátiles, y por lo tanto los valores previos de estos son irrelevantes al intentar predecir los precios a futuro [2].

IV-A.1. Modelo Matemático: El modelo matemático de BS dice que el valor de una opción europea C(t,s) sigue la siguiente ecuación

$$C(t, s) = s\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2) \tag{1}$$

En donde se asume que el precio un activo subyacente S se modela con movimiento browniano, r es igual a una tasa libre de riesgo (constante en (0,T)). Además N es una función de distribución normal y d1 y d2 son:

$$
\begin{aligned}
d_1 &= \frac{\ln(s/K) + r\tau + \sigma^2\tau/2}{\sigma\sqrt{\tau}} \\
d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{\tau} = \frac{\ln(s/K) + r\tau - \sigma^2\tau/2}{\sigma\sqrt{\tau}}
\end{aligned} \tag{2}
$$

Las cuales dependen de K, precio de ejercicio, $\tau = T - t$

IV-B. Simulación del movimiento geométrico browniano

El movimiento browniano geométrico es un modelo de amplio uso en finanzas y sirve para representar el precio de algunos bienes que fluctúan siguiendo los vaivenes de los mercados financieros, en particular, es utilizado en matemáticas financieras para modelar precios en el modelo de Black-Scholes [3]. Esta consiste en la obtención de su media, varianza y covarianza usando la función generadora de momentos de una distribución normal con parámetros μ y σ.

IV-C. Simulación con Monte Carlo

El método de Monte Carlo es un método de simulación que busca estimar los posibles resultados de un evento incierto. En particular, hace uso de métodos probabilísticos para poder trabajar con situaciones estocásticas. Gracias a la ley de los grandes números, el método de Monte Carlo puede generar el valor esperado de un componente probabilístico. Es por esto que este método se usan en procesos estocásticos y no-determinísticos. Cabe aclarar que no existe un único Método de Monte Carlo, si no que se trata de una colección de métodos que siguen una serie de pasos similares [4]. De forma general, estos pasos son los siguientes:

1. Definir un dominio donde se encuentren las variables de entrada y de salida.
2. Establecer las funciones de distribución de probabilidad de las variables de entrada.
3. Realizar n simulaciones donde se obtengan valores aleatorios de las variables de entrada, tal que se puedan obtener distintos valores de salida.
4. Partir de los valores de salida determinar la probabilidad de que la salida se comporte de cierta manera.

Tomando en cuenta lo anterior, es importante entender algunas condiciones que se requieren para poder aplicar un método de Monte Carlo de forma efectiva [5], las cuales son:

1. El sistema debe poderse describir por una o más funciones de distribución de probabilidad (pdf).
2. Se tienen que establecer límites y reglas de muestreo para las pdf.
3. Se requiere de un método de generación de números aleatorios adecuado al problema, tal que no se presente una correlación entre las muestras generadas.
4. Se debe definir un error para poder aceptar o rechazar una corrida.

V. Metodología y análisis de datos

Al extraer la información requerida de la base de datos en Banxico [6], se obtuvieron las tasas de incrementos de cada día en el último año. Con esto, se consiguieron los incrementos existentes tomando la diferencia logarítmica entre cada día y a estos valores se les denominó como X_i. Teniendo estas X_i, con su media y su varianza se determinan los valores de μ y de σ. A continuación, debido a que los valores de X_i son variables que siguen un movimiento browniano, es necesario realizar una simulación de un movimiento geométrico gaussiano, es decir, se generarán $S(h)...,S(nh)$. Para ello, se generan variables aleatorias gaussianas con media 0 y varianza 1, a las cuales se les denominó como $Z_1,...,Z_n$. Teniendo estas variables, se actualizan los valores de X_i tomando en cuenta la siguiente formula:

$$X_i = \mu h - \frac{\sigma^2}{2}h + \sigma\sqrt{h}Z_i \tag{3}$$

Una vez actualizadas las variables X_i, se realizó MonteCarlo para estimar el posible precio final del activo. Esto siguiendo la siguiente formula:

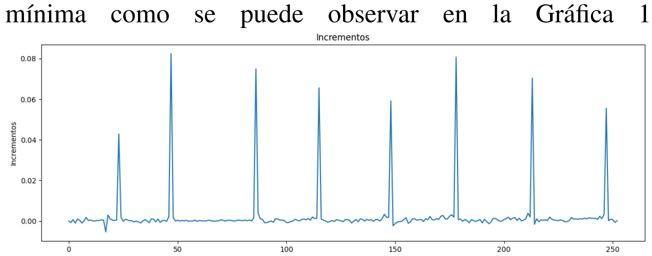
$$S_{ih} = se^{\sum_{j=1}^{i} X_j} \tag{4}$$

Ya que se consiguió el valor estimado por MonteCarlo, se utilizó el modelo matemático de BS de la opción europea, donde se consideran las siguientes variables como:

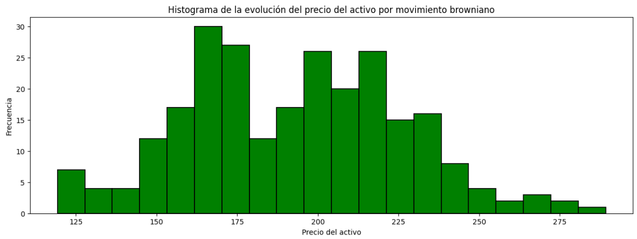
s = Estimación obtenida por MonteCarlo.
N = Función de distribución de una variable gaussiana estándar.
K = Precio de ejercicio(Strike price).
r = Tasa libre de riesgo.
T = Tiempo de maduración.
σ = Varianza entre los incrementos.

VI. Resultados

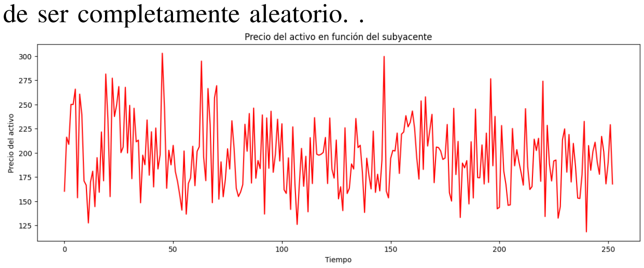
Se observó que en los incrementos habían "temporadas" en las que el precio del activo aumentaba enormemente, mientras que su disminución era mínima como se puede observar en la Gráfica 1.



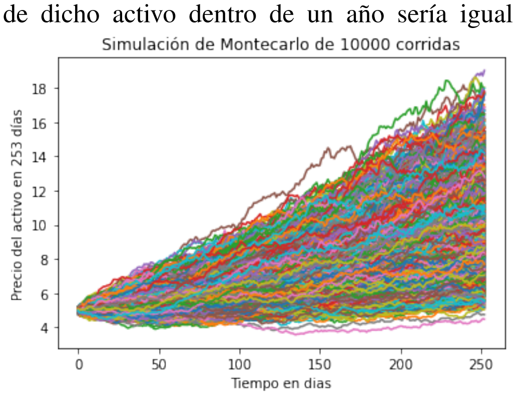
Para comprobar que las variables aleatorias X_i siguen la distribución del movimiento Browniano, se realizó el siguiente histograma, el cual nos confirma que las variables están siguiendo la distribución adecuada.



También necesario ver el comportamiento del precio subyacente con respecto del tiempo. A continuación se puede observar que dicho precio cumple con la condición de ser completamente aleatorio. .



Además podemos ver que la simulación de Montecarlo realmente fue efectiva ya que las gráficas de las 10,000 simulaciones muestran como la gran mayoría se centran cerca del valor esperado obtenido de la solución. El promedio de la simulación de Montecarlo fue 9.5787. El resultado de esta sustitución en la formula de Black and Scholes da aproximadamente 13.4169 el cual es considerado como el incremento que hubo durante un año completo, por lo que si el valor inicial es igual a 100, finalmente el valor de dicho activo dentro de un año sería igual a 113.4169.



VII. Conclusiones y recomendaciones

En conclusión, el programa realizado en python permite una fácil y rápida aplicación del modelo de Black and Scholes. Es por ello, que este se podría utilizar como base para estimar el valor de otras opciones, al ajustar los distintos parámetros como el valor inicial o el precio acordado. Sin embargo, hay que recordar que este modelo en su forma base funciona únicamente para opciones europeas.

Se recomienda para futuros trabajos que se exploren las extensiones del modelo, por ejemplo, poder trabajar con opciones americanas, tener instrumentos de dividendos continuos o discretos, etc.

Referencias

[1] A. Hayes. «Black-Scholes Model: What it is, how it works, options formula.» (2022), dirección: `https://www.investopedia.com/terms/b/blackscholes.asp#toc-history-of-the-black-scholes-model`.

[2] F. Black y M. Scholes, «The pricing of options and corporate liabilities,» *J Polit Econ*, vol. 81, n.º 3, págs. 637-654, 1973.

[3] B. Rémillard, *Statistical methods for financial engineering*, Taylor y Francis, eds. 2013, págs. 3-12, ISBN: 978-1-4398-5694-9.

[4] R. Kwiatkowski. «Monte Carlo simulation - a practical guide.» (2022), dirección: `https://towardsdatascience.com/monte-carlo-simulation-a-practical-guide-85da45597f0e`.

[5] A. Aderibigbe, «Monte Carlo simulation,» University of Ibadan, Term paper, 2014. DOI: `http://dx.doi.org/10.13140/RG.2.2.15207.16806`.

[6] BANXICO, *Tasas de interés representativas*, 2022. dirección: `https://www.banxico.org.mx/SieInternet/consultarDirectorioInternetAction.do?sector=18&accion=consultarCuadroAnalitico&idCuadro=CA51&locale=es`.