UNIVERSIDAD UNIVER MILENIUM

MAESTRÍA EN SISTEMAS

COMPUTACIONALES

Y SEGURIDAD INFORMÁTICA

MATEMÁTICAS APLICADAS AVANZADAS

RECURSAMIENTO

Catedrático

Dionisio Álvarez Vilchis

Alumno

Ernesto Valdes Lujano

Propósito:

Desarrollar la solución más eficiente al planteamiento de problemas reales con herramientas matemáticas.

Instrucciones:

1.   Use la transformada de Laplace para analizar el comportamiento de un circuito RLC serie con los siguientes elementos.

Resistencia (R) = 1 ohmio

 Inductancia (L) = 1 henry

Capacitancia (C) = 1 faradio

Con una entrada de voltaje en escalón de 1 voltio

2. Escriba la ecuación diferencial del circuito.

3. Aplique la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación.

4. Resuelva para I(s)

5. Descomponga la fracción en fracciones parciales

6. Halle las constantes A y B.

7. Obtenga la transformada inversa de Laplace de I(s).

8. Analice el comportamiento de la corriente con los resultados obtenidos.

9. Realice conclusiones de la aplicación de la transformada de Laplace en los sistemas físicos y digitales.

10. Parte de su formación integral contempla la capacidad de análisis y reflexión, así como el adecuado manejo de la comunicación escrita, es por ello por lo que se le recomienda valorar su actividad antes de enviarla, para identificar errores ortográficos y de redacción.

11. Deberá enviar su actividad en un documento de Word con sus datos en la parte superior: oferta educativa, asignatura, su nombre completo y el nombre de la actividad; letra en Arial 12, alineación justificada e interlineado 1.5.

**1.   Use la transformada de Laplace para analizar el comportamiento de un circuito RLC serie con los siguientes elementos.**

Resistencia (R) = 1 ohmio

 Inductancia (L) = 1 henry

Capacitancia (C) = 1 faradio

Con una entrada de voltaje en escalón de 1 voltio

Para analizar el comportamiento de un circuito RLC serie utilizando la transformada de Laplace, primero necesitamos establecer las ecuaciones que describen el circuito.

Donde:

* L es la inductancia en henr
* R es la resistencia en ohmios.
* C es la capacitancia en faradios.
* i(t) es la corriente en el circuito en amperios.
* es el voltaje de entrada en función del tiempo t.

Dado que la entrada es un escalón de 1 voltio, para . Ahora, aplicando la transformada de Laplace a la ecuación diferencial, obtenemos:

Donde es la transformada de Laplace de y es la variable de Laplace. Ahora, podemos resolver para :

Para facilitar el cálculo, puedes sustituir los valores en esta ecuación.

Luego, puedes realizar la inversa de la transformada de Laplace para obtener la corriente en el dominio del tiempo.

Este proceso te permitirá analizar el comportamiento de la corriente en el circuito RLC serie para una entrada de voltaje en escalón de 1 voltio.

**2. Escriba la ecuación diferencial del circuito.**

La ecuación diferencial que describe un circuito RLC serie es una representación de la segunda ley de Kirchhoff para los circuitos eléctricos. Esta ley establece que la suma de las fuerzas electromotrices (voltajes) y las caídas de voltaje alrededor de cualquier trayectoria cerrada en un circuito es igual a cero.

Para un circuito RLC serie, esta ley se puede expresar como una ecuación diferencial de segundo orden.

La ecuación diferencial para un circuito RLC serie es:

**3. Aplique la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación.**

Para aplicar la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación diferencial del circuito RLC serie, primero vamos a definir la transformada de Laplace de la corriente como y la transformada de Laplace del voltaje de entrada como .

La transformada de Laplace de la derivada de una función se denota como y se define como:

Usando esta propiedad, podemos transformar la ecuación diferencial del circuito RLC serie aplicando la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación. Entonces, la ecuación diferencial se convierte en una ecuación algebraica en el dominio de Laplace. Aplicando la transformada de Laplace a cada término de la ecuación diferencial, obtenemos:

Donde y son las derivadas y el valor inicial de la corriente respectivamente.

Para simplificar, asumimos que en , la corriente y sus derivadas son cero. Entoces, y , lo que nos deja con:

Ahora tenemos una ecuación algebraica en el dominio de Laplace que podemos resolver para

**4. Resuelva para I(s)**

Para resolver la ecuación algebraica en el dominio de Laplace para , simplemente reorganizamos los términos de la ecuación. La ecuación que tenemos es:

Vamos a factorizar de esta ecuación:

Luego, dividimos ambos lados por el factor para aislar

Ahora, podemos sustituir con el valor de la transformada de Laplace del voltaje de entrada . Dado que el voltaje de entrad es un escalón de 1 voltio, su transformada de Laplace es

Finalmente, podemos simplificar esta expresión. Multiplicamos el numerador y el denominador por Para deshacernos de las fracciones:

Esta es la expresión para en términos de la transformada de Laplace del voltaje de entrada.

**5. Descomponga la fracción en fracciones parciales**

Para descomponer la fracción en fracciones parciales, primero necesitamos factorizar el denominador en sus raíces. Utilizaremos la fórmula cuadrática para esto.

La ecuación cuadrática tiene las siguientes raíces:

Dependiendo del valor de , tendremos diferentes casos:

1. Si , las raíces serán reales y diferentes.
2. Si , las raíces serán reales e iguales.
3. Si , las raíces serán complejas conjugadas.

Dado que y , calculamos , lo que nos lleva al tercer caso, donde las raíces son complejas conjugadas.

Entonces, las raíces del denominador son de la forma

Ahora, para descomponer la fracción en fracciones parciales, escribimos:

Donde A, B y C son constantes que debemos determinar. Multiplicamos ambos lados de la ecuación por el denominador común para despejar y resolver para A, B y C. Luego, aplicamos la ransformada inversa de Laplace para encontrar la función de corriente en el dominio del tiempo.

Primero, expresamos la fracción parcial de la siguiente manera:

Luego, multiplicamos ambos lados de la ecuación por el denominador común

Ahora, simplificamos y combinamos términos:

Igualamos los numeradores de las fracciones originales y simplificamos:

Comparando coeficientes, obtenemos:

Para :

Para :

Para la constante:

Entoces, tenemos:

Como y A es simplemente A, la fracción parcial se convierte en:

Ahora, solo necesitamos encontrar el valor de “A” para completar la descomposición en fracciones parciales. Para hacerlo, igualamos los coeficientes de las fracciones originales y la descomposición:

Para la fracción original:

El coeficiente de ss en la fracción original es 1, y el coeficiente de ss en la descomposición es A−

por lo tanto, .

Entonces, la descomposición en fracciones parciales es:

Ahora hemos descompuesto la fracción original en fracciones parciales.

**6. Halle las constantes A y B.**

Vamos a encontrar las constantes A y B usando el método de igualación de coeficientes. Dado que ya hemos establecido , solo necesitamos resolver para AA y BB. Recordemos la forma en que expresamos la fracción parcial:

Dado que , la expresión se simplifica a:

Para encontrar A y B, igualamos la expresión original con la descompuesta:

Para A:

Para igualar los términos de y a ambos lados, escribimos la ecuación en forma polinómica:

Comparando coeficientes:

Para : (ya que no hay términos de en el lado derecho)

Para

Para s: (ya que no hay términos de ss en el lado derecho)

Como simplificamos nuestra ecuación para :

Entonces, hemos encontrado que . Ahora, encontramos A considerando el término independiente:

Podemos decir que y

**7. Obtenga la transformada inversa de Laplace de I(s).**

Para encontrar la transformada inversa de Laplace de , que es , primero necesitamos considerar la forma de , que es:

Para llevar a cabo la transformada inversa de Laplace, necesitamos descomponer en fracciones parciales. Ya hemos realizado esta descomposición anteriormente, encontrando y . Por lo tanto, podemos escribir como:

Donde y son las raíces edl denominador

La transformada inversa de Laplace de es simplemente 1, y la de se puede encontrar utilizando la propiedad de traslación en el tiempo.

La transformada inversa de Laplace de es una función exponencial atenuada y se puede encontrar como:

Donde y son las transformadas inversas de Laplace de y respectivamente. Estas transformadas inversas son simplemente funciones exponenciales escaladas.

Entonces, la transformada inversa de Laplace de , que es , serán la suma de una función constante 1 y dos funciones exponenciales escaladas, una asociada con y otra asociada con

Sin embargo, dado que la parte real de y es negativa, estas exponenciales representan oscilaciones amortiguadas que decaen con el tiempo. Por lo tanto, la respuesta en el tiempo consistirá en un término constante y términos exponenciales que se desvanecen con el tiempo.

Para encontrar las escalas de las exponenciales, necesitaríamos calcular y , lo que nos dará las constantes de amplitud asociadas con estas exponenciales. Estas constantes se determinan generalmente utilizando condiciones iniciales o límites.

**8. Analice el comportamiento de la corriente con los resultados obtenidos.**

Dado que la transformada inversa de Laplace de es una combinación de una función constante y términos exponenciales, podemos analizar el comportamiento de la corriente en el circuito RLC serie en función de estos componentes.

1. **Término constante: La presencia de un término constante en la transformada inversa de Laplace indica que habrá una componente constante en la corriente** . Esto significa que, después de un tiempo suficientemente largo, la corriente se estabilizará en un valor constante. Esta componente constante puede surgir debido a la presencia de una fuente de alimentación constante o debido a las condiciones iniciales del circuito.
2. **Términos exponenciales:** Los términos exponenciales en la transformada inversa de Laplace representan oscilaciones amortiguadas en la corriente . Dado que los coeficientes de estas exponenciales están asociados con raíces complejas del denominador, implican oscilaciones sinusoidales amortiguadas en la corriente. La magnitud y la tasa de amortiguamiento de estas oscilaciones estarán determinadas por las partes real e imaginaria de las raíces complejas, respectivamente.
   1. Parte real negativa: La parte real negativa de las raíces complejas indica que las oscilaciones estarán amortiguadas, es decir, disminuirán en amplitud con el tiempo.
   2. Parte imaginaria no nula: La parte imaginaria no nula de las raíces complejas indica que las oscilaciones serán de naturaleza sinusoidal.

**9. Realice conclusiones de la aplicación de la transformada de Laplace en los sistemas físicos y digitales.**

La transformada de Laplace es una herramienta matemática poderosa y versátil que se aplica en una amplia gama de campos, tanto en sistemas físicos como en sistemas digitales. Aquí están algunas conclusiones sobre su aplicación en ambos tipos de sistemas:

* Análisis de circuitos eléctricos: En ingeniería eléctrica, la transformada de Laplace se utiliza para analizar circuitos eléctricos en el dominio de la frecuencia compleja. Permite estudiar la respuesta transitoria y en estado estable de circuitos RLC, sistemas de control de energía y dispositivos electrónicos.
* Modelado y control de sistemas dinámicos: La transformada de Laplace se aplica en el modelado y análisis de sistemas dinámicos en ingeniería mecánica, térmica y de fluidos. Facilita el análisis de la estabilidad, respuesta transitoria y en estado estable de sistemas como osciladores, amortiguadores y sistemas térmicos.
* Diseño de sistemas de control: En el diseño de sistemas de control, la transformada de Laplace es una herramienta fundamental. Facilita el diseño y análisis de controladores para sistemas mecánicos, eléctricos y térmicos, permitiendo controlar y regular el comportamiento de estos sistemas de manera eficiente.
* Resolución de ecuaciones diferenciales: La transformada de Laplace proporciona un método poderoso para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, simplificando la resolución de problemas en una amplia variedad de campos de la ingeniería y la física.

Podemo decir que la transformada de Laplace y su extensión al dominio zz son herramientas fundamentales en el análisis, modelado y diseño de sistemas físicos y digitales. Su aplicación permite comprender y controlar el comportamiento dinámico de una amplia variedad de sistemas, desde circuitos eléctricos y mecánicos hasta sistemas de control digital y procesamiento de señales digitales.

***Bibliografias***

* *Ruiz, L. M. S., & Fernández, M. P. L. (2002). Ecuaciones diferenciales y transformadas de Laplace con aplicaciones. Editorial de la UPV.*
* *Cordero, F., & Miranda, E. (2002). El entendimiento de la transformada de Laplace: una epistemología como base de una descomposición genética. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 5(2), 133-168.*
* *Tiberi, M. G. (2013). Aplicación de la Transformada de Laplace en el análisis de circuitos eléctricos.*
* *Ruiz Moreno, L., Camarena Gallardo, P., & del Rivero Jiménez, S. (2016). Prerrequisitos deficientes con software matemático en conceptos nuevos: Transformada de Laplace. Revista mexicana de investigación educativa, 21(69), 349-383.*
* *Matias, H. (2012). Transformada de Laplace en resolución de circuitos eléctricos.*