Algebra Cheat Sheet

7. Juli 2012

Permutationen

Seite 41

Def: *Permutation*
Ist eine bijektive Abbildung $\alpha : X$.
$S_X :=$ Menge aller Permutationen von X
$S_n := S_X$ mit $X = \{1, 2, \dots, n\}$

Def: *r-Zykel*
Seien $i_1, \dots, i_r \in \{1, 2, \dots, n\}$ paarweise verschieden.
Ein Zykel der Länge r ist dann $\alpha := (i_1 i_{2r}) \in S_n$
mit $\alpha(i_1) = i_2$, $\alpha(i_2) = i_3$, $\dots \alpha(i_r) = i_1$. $(a_0 a_1 a_2 a_3 a_4) \rightarrow (a_4 a_1 a_2 a_3 a_0)$

Def: *Transposition*
Ein 2-Zykel

Morphismen

Seite 50

Def: *Homomorphismus/Morphismus*
Gegeben sind zwei Halbrguppen: $(G, \times)$, $(H, \#)$. Die Abbildung $f : G \rightarrow H$ ist ein Homomorphismus, wenn $f(a) = f(a)\#f(b) \quad \forall a, b \in G$.

Def: *Monomorphismus*
Ein injektiver Homomorphismus

Def: *Epimorphismus*
Ein surjektiver Homomorphismus

Def: *Isomorphismus*
Ein bijektiver Homomorphismus

Def: *Automorphismus*
$f : G \rightarrow G$, f injektiv: beide Halbgruppen sind gleich.

Misc

Def: *injektiv*
$f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$ „für jedes x max. ein y“
$f : A \rightarrow B$ ist *injektiv* genau dann wenn $\forall b \in B : |f^-1(\{b\})| \leq 1$

Def: *surjektiv*
$\forall b \in B, \exists a \in A : b = f(a)$ „die gesamte Bildmenge ist erreichbar“

Def: *bijektiv*
Injektiv und Surjektiv zusammen.

Def: *Bild*
$f^-1(C) : a \in A : f(a) \in C$

Gruppen

Def: *Halbgruppe (s. 37)*
- Trägermenge G
- Abbildung: $G \times G \rightarrow G$, assoziativ

Def: *Monoid (s. 37)*
- Trägermenge G
- Abbildung: $G \times G \rightarrow G$, assoziativ, kann kommutativ (abelsch) sein
- Neutrales Element $a^0 = e$

Def: *Gruppe (s. 47)*
- Trägermenge G
- Abbildung: $G \times G \rightarrow G$, assoziativ, kann kommutativ (abelsch) sein
- Neutrales Element $a^0 = e$
- Inverses Element a^-1

Def: *Ring (s. 85)*
- Trägermenge G
- Abbildungen
  1. $" + "$: $G \rightarrow G$, assoziativ, distributiv, kommutativ, neutrales Element „0“, inverses Element „-a“
  2. $" \cdot "$: $G \rightarrow G$, assoziativ, distributiv, optional kommutativ, optinal neutrales Element $\neq 0$ („Einselement“), optional inverses Element („Einheit“)

Def: *Körper (Wikipedia)*
- Trägermenge G
- Abbildungen
  1. $" + "$: $G \rightarrow G$, assoziativ, distributiv, kommutativ, neutrales Element „0“, inverses Element „-a“
  2. $" \cdot "$: $G \rightarrow G$, assoziativ, distributiv, kommutativ, neutrales Element $\neq 0$ („Einselement“), inverses Element („Einheit“)

Verbände und Boolsche Algebren

Def: *Teilweise geordnete Menge (s. 10)*
Eine Menge ist teilweise Geordnet, wenn auf ihr eine Relation $\leq$ existiert, die

- reflexiv $(a \leq a)$
- antisymmetrisch $(a \leq b und b \leq a \Rightarrow b = a)$
- transitiv $(a \leq b und b \leq c \Rightarrow a \leq c)$

ist. Die Relation $<$ bedeutet dann $\leq$ und $a \neq b$.

Def: *Total geordnete Menge/Kette (s. 10)*
Eine Menge ist total geordnet, wenn sie Teilweise geordnet ist und für alle Elemente x, y der Menge gillt entweder $x \leq y$ oder $y \leq x$.

Def: *Speziele Elemente in teilweise geordneten Mengen (s. 10)*
Sei $(P, \leq)$ teilweise geordnet, $X \subset P$, $X \neq \emptyset$

1. $y \in X$ ist *minimal*, wenn $\forall x \in X : x > y$
2. $y \in X$ ist *kleinstes Element*, wenn $\forall x \in X : y \leq x$
3. $y \in P$ ist *untere Schranke* von X, wenn $\forall x \in X : y \leq x$
4. $y \in P$ ist *größte Untere Schranke* von X, wenn y größtes Element in der Menge der unteren schranken ist.

Bei total geordneten mengen gillt:
minimales Element = *kleinstes Element*

Def: *Verband (s. 16)*
Ein Verband ist eine teilweise geodnete Menge. je zwei Elemente x, y der Menge haben:

- Durchschnitt $:= x \wedge y := Min\{x, y\} :=$ größte untere Schranke von {x, y}, falls sie existiert.
- Vereinigung $:= x \vee y := Max\{x, y\} :=$ kleinste obere Schranke von {x, y}, falls sie existiert.

Rechenregeln:

- $x \wedge x = x$, $x \vee x = x$
- $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$, $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$
- $x \wedge y = y \wedge x$, $x \vee y = y \vee x$
- $x \wedge (x \vee y) = x$, $x \vee (x \wedge y) = x$
- $x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x \Leftrightarrow x \vee y = y$

Def: *Boolsche Algebra (s. 17)*
Notation $\mathfrak{A} = (A, \wedge, \vee, ', 0, 1)$

- Trägermenge A
- Abbildungen: $\wedge, \vee : A \times A \to A$, assoziativ, kommutativ, distributiv
- Abbildung: $' : A \to A$
- Neutrale/Inverse Elemente: $0, 1 \in A$
- *Rechenregeln:*
  - $x \vee x = x$, $x \wedge x = x$
  - $x \vee (x \wedge y) = x$, $x \wedge (x \vee y) = x$
  - $x \vee 0 = x$, $x \wedge 0 = 0$
  - $x \vee 1 = 1$, $x \wedge 1 = x$
  - $x \vee x' = 1$, $x \wedge x' = 0$
- *Es folgt:*
  - $x \vee y = 1$ und $x \wedge y = 0 \Longrightarrow y = x'$
  - $(x \vee y)' = x' \wedge y'$ (de Morgan)
  - $(x \wedge y)' = x' \vee y'$ (de Morgan)

Def: *Boolscher Term*

- jedes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ist ein Boolscher Term
- Wenn P, Q Boolsche Terme sind, so auch P', $(P \wedge Q)$, $(P \vee Q)$

Äquivalenzrelationen

Def: *Äquivalenzrelation (s. 7)*
Eine Äquivalenzrelation ist eine Relation, die

- reflexiv (aRa)
- symmetrisch $(aRb \Rightarrow bRa)$
- transitiv $(aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc)$

ist.

Def: *Äquivalenzklasse (s. 7)*
(a) bezeichnet die Äquivalenzklasse zu a bezgl. der Äquivalenzrelation R und ist definiert als $(a) = \{b \in A : aRb\}$