

Algebra Cheat Sheet

8. Juli 2012

Permutationen

Seite 41

Def: *Permutation*

Ist eine bijektive Abbildung $\alpha : X \rightarrow X$.
 $S_X :=$ Menge aller Permutationen von X
 $S_n := S_X$ mit $X = \{1, 2, \dots, n\}$

Def: *r-Zykel*

Seien $i_1, \dots, i_r \in \{1, 2, \dots, n\}$ paarweise verschieden.
Ein Zykel der Länge r ist dann $\alpha := (i_1 i_2 \dots i_r) \in S_n$
mit $\alpha(i_1) = i_2, \alpha(i_2) = i_3, \dots, \alpha(i_r) = i_1$. $(a_0 a_1 a_2 a_3 a_4) \rightarrow (a_4 a_1 a_2 a_3 a_0)$

Def: *Transposition*

Ein 2-Zykel

Morphismen

Seite 50

Def: *Homomorphismus/Morphismus*

Gegeben sind zwei Halbgruppen: $(G, \times), (H, \#)$. Die Abbildung $f : G \rightarrow H$ ist ein Homomorphismus, wenn $f(a) = f(a) \# f(b) \quad \forall a, b \in G$.

Def: *Monomorphismus*

Ein injektiver Homomorphismus

Def: *Epimorphismus*

Ein surjektiver Homomorphismus

Def: *Isomorphismus*

Ein bijektiver Homomorphismus

Def: *Automorphismus*

$f : G \rightarrow G$, f injektiv: beide Halbgruppen sind gleich.

Misc

Def: *injektiv*

$f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$ „für jedes x max. ein y “
 $f : A \rightarrow B$ ist *injektiv* genau dann wenn $\forall b \in B : |f^{-1}(\{b\})| \leq 1$

Def: *surjektiv*

$\forall b \in B, \exists a \in A : b = f(a)$ „die gesamte Bildmenge ist erreichbar“

Def: *bijektiv*

Injektiv und Surjektiv zusammen.

Def: *Bild*

$$f^{-1}(C) : a \in A : f(a) \in C$$

Gruppen

Def: *Halbgruppe (s. 37)*

- Trägermenge G
- Abbildung: $G \times G \rightarrow G$, assoziativ

Def: *Monoid (s. 37)*

- Trägermenge G
- Abbildung: $G \times G \rightarrow G$, assoziativ, kann kommutativ (abelsch) sein
- Neutrales Element $a^0 = e$

Def: *Gruppe (s. 47)*

- Trägermenge G
- Abbildung: $G \times G \rightarrow G$, assoziativ, kann kommutativ (abelsch) sein
- Neutrales Element $a^0 = e$
- Inverses Element a^{-1}

Def: *Ring (s. 85)*

- Trägermenge G
- Abbildungen
 1. „+“ : $G \times G \rightarrow G$, assoziativ, distributiv, kommutativ, neutrales Element „0“, inverses Element „-a“
 2. „·“ : $G \times G \rightarrow G$, assoziativ, distributiv, optional kommutativ, optional neutrales Element $\neq 0$ („Einselement“), optional inverses Element („Einheit“)

Def: *Körper (Wikipedia)*

- Trägermenge G
- Abbildungen
 1. „+“ : $G \times G \rightarrow G$, assoziativ, distributiv, kommutativ, neutrales Element „0“, inverses Element „-a“
 2. „·“ : $G \times G \rightarrow G$, assoziativ, distributiv, kommutativ, neutrales Element $\neq 0$ („Einselement“), inverses Element („Einheit“)

Verbände und Boolesche Algebren

Def: *Teilweise geordnete Menge (s. 10)*

Eine Menge ist teilweise Geordnet, wenn auf ihr eine Relation \leq existiert, die

- reflexiv ($a \leq a$)
- antisymmetrisch ($a \leq b$ und $b \leq a \Rightarrow b = a$)
- transitiv ($a \leq b$ und $b \leq c \Rightarrow a \leq c$)

ist. Die Relation $<$ bedeutet dann \leq und $a \neq b$.

Def: *Total geordnete Menge/Kette (s. 10)*

Eine Menge ist total geordnet, wenn sie Teilweise geordnet ist und für alle Elemente x, y der Menge gilt entweder $x \leq y$ oder $y \leq x$.

Def: *Spezielle Elemente in teilweise geordneten Mengen (s. 10)*

Sei (P, \leq) teilweise geordnet, $X \subset P$, $X \neq \emptyset$

1. $y \in X$ ist *minimal*, wenn $\forall x \in X : x > y$
2. $y \in X$ ist *kleinstes Element*, wenn $\forall x \in X : y \leq x$
3. $y \in P$ ist *untere Schranke* von X , wenn $\forall x \in X : y \leq x$
4. $y \in P$ ist *größte Untere Schranke* von X , wenn y größtes Element in der Menge der unteren schranken ist.

Bei total geordneten mengen gilt:

minimales Element = kleinstes Element

Def: *Verband (s. 16)*

Ein Verband ist eine teilweise geordnete Menge. je zwei Elemente x, y der Menge haben:

- Durchschnitt $:= x \wedge y := \text{Min}\{x, y\} :=$ größte untere Schranke von $\{x, y\}$, falls sie existiert.
- Vereinigung $:= x \vee y := \text{Max}\{x, y\} :=$ kleinste obere Schranke von $\{x, y\}$, falls sie existiert.

Rechenregeln:

- $x \wedge x = x, x \vee x = x$
- $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z), (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$
- $x \wedge y = y \wedge x, x \vee y = y \vee x$
- $x \wedge (x \vee y) = x, x \vee (x \wedge y) = x$
- $x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x \Leftrightarrow x \vee y = y$

Def: *Boolsche Algebra (s. 17)*

Notation $\mathfrak{A} = (A, \wedge, \vee, ', 0, 1)$

- Trägermenge A
- Abbildungen: $\wedge, \vee : A \times A \rightarrow A$, assoziativ, kommutativ, distributiv
- Abbildung: $' : A \rightarrow A$
- Neutrale/Inverse Elemente: $0, 1 \in A$
- *Rechenregeln:*
 - $x \vee x = x, x \wedge x = x$
 - $x \vee (x \wedge y) = x, x \wedge (x \vee y) = x$
 - $x \vee 0 = x, x \wedge 0 = 0$
 - $x \vee 1 = 1, x \wedge 1 = x$
 - $x \vee x' = 1, x \wedge x' = 0$
- *Es folgt:*
 - $x \vee y = 1$ und $x \wedge y = 0 \implies y = x'$
 - $(x \vee y)' = x' \wedge y'$ (de Morgan)
 - $(x \wedge y)' = x' \vee y'$ (de Morgan)

Def: *Boolscher Term*

- jedes X_1, X_2, \dots, X_n ist ein Boolescher Term
- Wenn P, Q Boolesche Terme sind, so auch $P', (P \wedge Q), (P \vee Q)$

Äquivalenzrelationen

Def: *Äquivalenzrelation (s. 7)*

Eine Äquivalenzrelation ist eine Relation, die

- reflexiv (aRa)
- symmetrisch ($aRb \Rightarrow bRa$)
- transitiv ($aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$)

ist.

Def: *Äquivalenzklasse (s. 7)*

(a) bezeichnet die Äquivalenzklasse zu a bezgl. der Äquivalenzrelation R und ist definiert als $(a) = \{b \in A : aRb\}$