Quiz 1 Solution Section 2

Problem 1: $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} \overset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln \sqrt[n]{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1$$

Problem 2: $0.\overline{101} = 0.101101101\ldots$

$$= 1\times2^{-1} + 0\times2^{-2} + 1\times2^{-3} + 1\times2^{-4} + 0\times2^{-5} + 1\times2^{-6} + 1\times2^{-7} + 0\times2^{-8} + 1\times2^{-9} + \cdots\cdots$$

$$= 1\times2^{-1} + 0\times2^{-2} + 1\times2^{-3} + 2^{-3}(1\times2^{-1} + 0\times2^{-2} + 1\times2^{-3}) + 2^{-6}(1\times2^{-1} + 0\times2^{-2} + 1\times2^{-3}) + \cdots\cdots$$

$$= \frac{5}{8} + 2^{-3}\frac{5}{8} + 2^{-6}\frac{5}{8} + \cdots\cdots$$

$$= \frac{5}{8}\cdot\frac{1}{1-2^{-3}} = \frac{5}{8}\cdot\frac{8}{7} = \frac{5}{7}$$