

```

data  $\Lambda$  : Set where
  v      : V  $\rightarrow$   $\Lambda$ 
   $\cdot$       :  $\Lambda \rightarrow \Lambda \rightarrow \Lambda$ 
   $\lambda$       : V  $\rightarrow \Lambda \rightarrow \Lambda$ 

```

```

data  $\_ \rightarrow \_ \rightarrow \_$  :  $\Sigma \rightarrow \text{List } V \rightarrow \text{List } V \rightarrow \text{Set where}$ 
   $\rightarrow \hookrightarrow$       : { $\Gamma \Delta$  : List V}
     $\rightarrow \Gamma \subseteq \Delta \rightarrow \iota : \Gamma \rightarrow \Delta$ 
   $\rightarrow < +$       : { $\Gamma \Delta$  : List V}{ $M$  :  $\Lambda$ }{ $\sigma$  :  $\Sigma$ }( $x$  : V)
     $\rightarrow \sigma : \Gamma \rightarrow \Delta$ 
     $\rightarrow \Delta \vdash M$ 
     $\rightarrow \sigma < + (x, M) : \Gamma, x \rightarrow \Delta$ 

```

```

lemmaWeakening $\rightarrow$  : { $\Gamma \Delta$  : Cxt}{ $\sigma$  :  $\Sigma$ }( $x$  : V)
   $\rightarrow \sigma : \Gamma \rightarrow \Delta \rightarrow \sigma : \Gamma \rightarrow \Delta, x$ 

```

```

lemma $\vdash \sigma \notin$  : { $\sigma$  :  $\Sigma$ }{ $\Gamma \Delta$  : List V}{ $x$  : V}
   $\rightarrow x \notin \Gamma \rightarrow \sigma : \Gamma \rightarrow \Delta \rightarrow \sigma x \equiv v x$ 

```

```

lemma $\vdash \sigma \in$  : { $\sigma$  :  $\Sigma$ }{ $\Gamma \Delta$  : List V}{ $x$  : V}
   $\rightarrow x \in \Gamma \rightarrow \sigma : \Gamma \rightarrow \Delta \rightarrow \Delta \vdash \sigma x$ 

```

```

lemma $\vdash \sigma M$  : { $\sigma$  :  $\Sigma$ }{ $\Gamma \Delta$  : List V}{ $M$  :  $\Lambda$ }
   $\rightarrow \Gamma \vdash M \rightarrow \sigma : \Gamma \rightarrow \Delta \rightarrow \Delta \vdash M \bullet \sigma$ 

```

```

lemma $\sigma \chi$  : { $\Gamma \Delta$  : Cxt}{ $M$  :  $\Lambda$ }{ $\sigma$  :  $\Sigma$ }
   $\rightarrow \chi (\sigma, M) \notin \Gamma \rightarrow \sigma : \Gamma \rightarrow \Delta \rightarrow \chi (\sigma, M) \# M$ 

```

```

lemma $\vdash \sigma ++$  : { $\sigma$  :  $\Sigma$ }{ $\Gamma \Delta$  : Cxt}{ $M$  :  $\Lambda$ }
   $\rightarrow \Delta \vdash M \bullet \sigma \rightarrow \sigma : \Gamma \rightarrow \Delta$ 
   $\rightarrow \Gamma ++ \Delta \vdash M$ 

```

```

lemma $\vdash \iota$  : { $\Gamma$  : Cxt}{ $M$  :  $\Lambda$ }
   $\rightarrow \Gamma \vdash M \bullet \iota \rightarrow \Gamma \vdash M$ 

```

```

lemma $\vdash \alpha$  : { $\Gamma$  : Cxt}{ $M N$  :  $\Lambda$ }
   $\rightarrow M \sim \alpha N \rightarrow \Gamma \vdash M \rightarrow \Gamma \vdash N$ 
  ... |  $\cdot (N \bullet \iota)$  |  $\Gamma \vdash N \bullet \iota$  | refl
  ... |  $M \bullet \iota$  | lemma $\vdash \sigma M$   $\Gamma \vdash M (\rightarrow \hookrightarrow \text{id})$  | lemma $M \sim M' \rightarrow M \sigma \equiv M' \sigma$  { $\sigma = \iota$ }  $M \sim N$ 
  ... |  $M = M$  { $N = N$ }  $M \sim N$   $\Gamma \vdash M$ 
  ... | lemma $\vdash \alpha$  { $M = M$ } { $N = N$ }  $M \sim N$   $\Gamma \vdash M$ 

```

```

Cxt : Set
Cxt = List V
 $\_, \_$  : Cxt  $\rightarrow$  V  $\rightarrow$  Cxt - extbackslashg1q
 $\_, \_$  =  $\lambda x y \rightarrow y :: x$ 

```

```

data  $\_ \vdash \_$  ( $\Gamma$  : Cxt):  $\Lambda \rightarrow \text{Set where}$ 
   $\vdash v$  : { $x$  : V}  $\rightarrow x \in \Gamma$   $\rightarrow \Gamma \vdash v x$ 
   $\vdash \cdot$  : { $M N$  :  $\Lambda$ }  $\rightarrow \Gamma \vdash M \rightarrow \Gamma \vdash N \rightarrow \Gamma \vdash M \cdot N$ 
   $\vdash \lambda$  : { $x$  : V}{ $M$  :  $\Lambda$ }  $\rightarrow \Gamma, x \vdash M \rightarrow \Gamma \vdash \lambda x M$ 

```

```

lemmaWeakening $\vdash$  : { $\Gamma \Delta$  : Cxt}{ $M$  :  $\Lambda$ }
   $\rightarrow \Gamma \subseteq \Delta \rightarrow \Gamma \vdash M \rightarrow \Delta \vdash M$ 

```

```

lemmaWeakening $\vdash ++$  : { $\Gamma$  : Cxt}{ $M$  :  $\Lambda$ }
   $\rightarrow \Gamma ++ \Gamma \vdash M \rightarrow \Gamma \vdash M$ 

```

```

lemmaWeakening $\vdash \in ::$  : { $x$  : V}{ $\Gamma$  : Cxt}{ $M$  :  $\Lambda$ }
   $\rightarrow x \in \Gamma \rightarrow \Gamma, x \vdash M \rightarrow \Gamma \vdash M$ 

```

```

lemma $\# \vdash$  : { $x$  : V}{ $\Gamma$  : Cxt}{ $M$  :  $\Lambda$ }
   $\rightarrow x \# M \rightarrow \Gamma, x \vdash M \rightarrow \Gamma \vdash M$ 

```

```

data  $\_ \triangleright \_$  :  $\Lambda \rightarrow \Lambda \rightarrow \text{Set where}$ 
   $\triangleright \beta$  : { $M N$  :  $\Lambda$ }{ $x$  : V}
     $\rightarrow \lambda x M \cdot N \triangleright M \bullet \iota < + (x, N)$ 

```

```

lemma $\vdash \triangleright$  : { $\Gamma$  : Cxt}{ $M N$  :  $\Lambda$ }
   $\rightarrow \Gamma \vdash M \rightarrow M \triangleright N \rightarrow \Gamma \vdash N$ 

```

```

lemma $\vdash \triangleright$  { $\Gamma$ } ( $\vdash \cdot$   $\lambda x M$  { $N$ } ( $\vdash \lambda$  { $x$ } { $M$ }  $\Gamma, x \vdash M$ )  $\Gamma \vdash N$ )
  = lemma $\vdash \sigma M$  { $\iota < + (x, N)$ } { $\Gamma, x$ } { $\Gamma$ } { $M$ }
   $\Gamma, x \vdash M$ 
  ( $\rightarrow < + x (\rightarrow \hookrightarrow \{ \Gamma \} \{ \Gamma \} \text{id})$   $\Gamma \vdash N$ )

```

```

lemma $\vdash \iota$   $\Gamma \vdash M \bullet \iota$ 
  = lemmaWeakening $\vdash ++$  (lemma $\vdash \sigma ++$   $\Gamma \vdash M \bullet \iota (\rightarrow \hookrightarrow \text{id})$ )

```