Notizen zur Dreiecks-Berechnung

Tipp1: Immer zuerst die Figur mit Bleistift konstruieren. Dies ist dann zugleich die Analysis-Figur!
-Vorteil: Alle Berechnungen sind sehr leicht überprüfbar.
-Vorteil: besseres Verständnis für die Aufgabe!

Tipp2: Formeln nicht mit Buchstaben lernen, sondern seiten-invariant!

Cosinussatz

Achtung: symmetrisch zu einem gewählten Winkel
$c^2 = a^2 + b^2 - \underbrace{2ab \cdot \cos(a, b)}$;=erweiterter Pythagoras
Pythagoras-Korrektur: (Doppelprodukt der anliegenden Seiten) · (Cosinus des Zwischenwinkels).

Cosinussatz: Höhenabschnittfassung

Achtung: Höhenabschnitte sind rationale Grössen (bei rationalen Seiten)
$a_b = (a^2 + b^2 - c^2)\ /\ 2b$;Höhenabschnitt negativ wenn ausserhalb des Dreiecks!
(Summe der Quadrate der anliegenden Seiten) - (Quadrat der gegenüberliegenden Seite)
/ (2 * Höhenabschnitt-Seite).

Umkreis (Sinussatz)

Umkreisdurchmesser $2R = \dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = \dfrac{\text{Seite}}{\sin(\text{Gegenwinkel})} = \dfrac{\text{Produkt 2er Seiten}}{\text{Höhe auf dritte Seite}}$

Umkreisradius $R = \dfrac{ab}{2h_c} = \dfrac{abc}{4F}$

Inkreis,Ankreise

$F = r \cdot s = r_a \cdot (s-a) = r_b \cdot (s-b) = r_c \cdot (s-c) =$ Ankreisradius $* (s -$ berührende Seite $)$

Dreiecks-Fläche

$2F = ab \cdot \sin(a, b)$ oder $2F = \dfrac{abc}{U_d}$
$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ....Formel des Heron: $s = (a+b+c)/2$
$16F^2 = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$ ....symmetrisch
$16F^2 = (2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$ ....punktbezogen!

Seitenhalbierende

Mit a, b als anliegende Seiten und c als Gegenseite wird: $s = \sqrt{\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}c^2}$

Winkelhalbierende

Die Winkelhalbierende teilt die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten!
Mit a, b als anliegende Seiten und c als Gegenseite wird: $w^2 = ab\left[1 - \left(\frac{c}{a+b}\right)^2\right]$

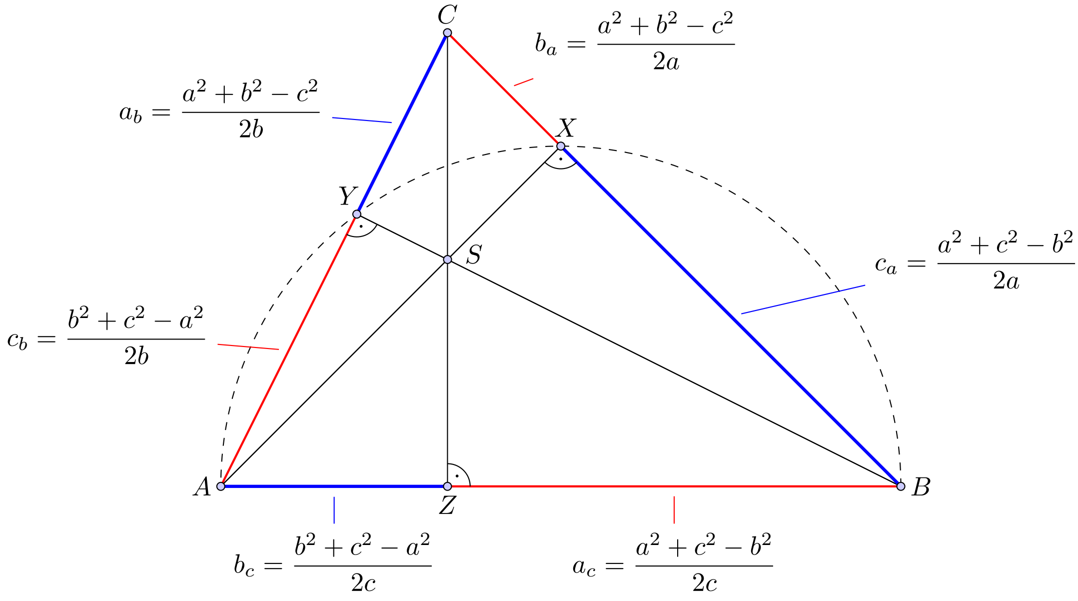
Gleichseitiges Dreieck (b,s,s): $b_s = b^2/2s$

Parallelogramm (b,h,l): Diagonalen $d_{1,2} = \sqrt{b^2 + l^2 \pm 2lb_l}$ mit $b_l = \sqrt{b^2 - h^2}$

Sehnenviereck: Satz des Ptolemäus

In einem Sehnenviereck ist das Produkt der Diagonalen gleich der Summe der Produkte der Längen gegenüberliegender Seiten: $ac + bd = ef$.

Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks



Die Höhenabschnitte eines schiefwinkligen Dreiecks sind einfach zu berechnen. Man beachte, dass die *Höhenabschnitte* (=Projektion einer Seite auf die andere) *rationale* Grössen sind (wenn die Dreiecksseiten rational sind)!
Errichtet man den Thaleskreis über einer Seite, so liefert der Sekantensatz

$$a_b \cdot b = b_a \cdot a \quad \text{und analog für jede Seite}$$

Der Satz von Ceva $\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1$ stimmt natürlich auch hier, weil die beiden Höhenabschnitte, die einem Dreieckspunkt anliegen, den gleichen Zähler haben.

Die *Höhen-Teilstücke*, wie zum Beispiel CS und SZ sind relativ schwierig zu berechnen. Für das Verhältnis der Höhen-Teilstücke gilt (mit Satz MeneCeva):

$$\frac{CS}{SZ} = \frac{a_b}{c_b} + \frac{b_a}{c_a} = \frac{\Delta C \cdot 2c^2}{\Delta A \cdot \Delta B}$$

Dabei gilt für die Winkel-Charakteristik Δ(Dreieckspunkt):

Summe der Quadrate der anliegenden Seiten - Quadrat der gegenüberliegenden Seite