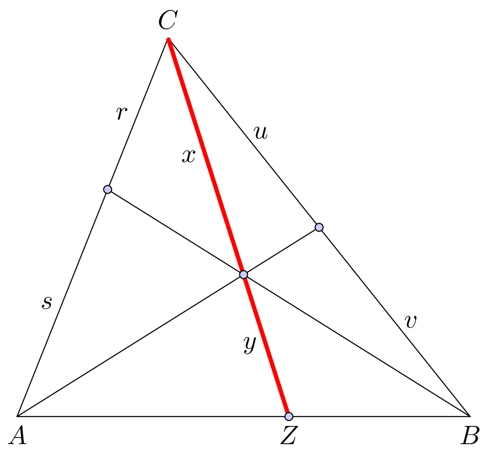
Geometrische Addition zweier Brüche



- CA sei geteilt im Verhältnis $r : s$
- CB sei geteilt im Verhältnis $u : v$
- wie verhält sich dann $x \;:\; y$ auf der Zwischen-Transversale ?

Mit CEVA2 ist $\frac{AZ}{ZB} = su : vr$

Gemäss Menelaus2b ist dann:

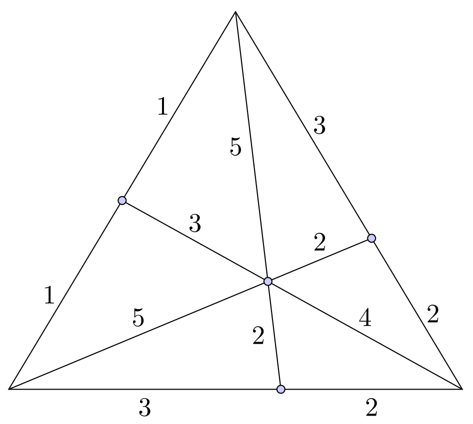
$$\frac{x}{y} = \frac{u}{v} \cdot \frac{su + vr}{su} = \frac{u}{v}\left(1 + \frac{vr}{su}\right) = \frac{r}{s} + \frac{u}{v}$$

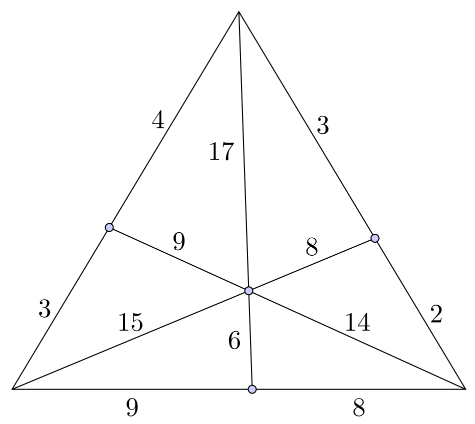
Satz MeneCeva: Die Summe der Teilungs-Verhältnisse zweier Seiten ist gleich dem Teilungs-Verhältnis der Zwischen-Transversale.

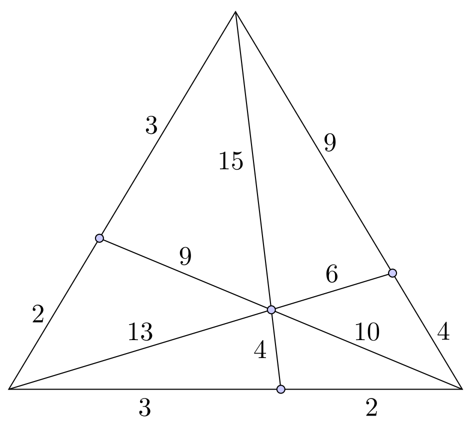
Ist das nicht ein wunderschön symmetrisches Resultat ?

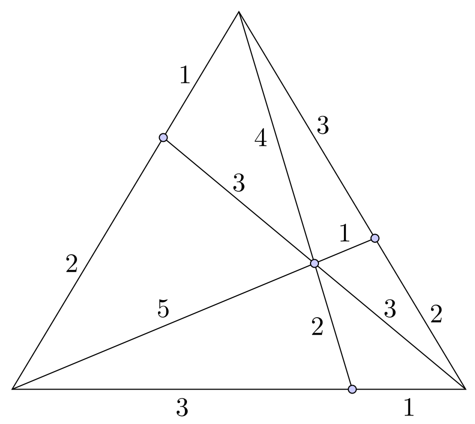
Beispiele mit Verhältniszahlen

Bitte nie vergessen, dass immer Paare von Verhältniszahlen angeschrieben sind! Man darf nicht Zahlen auf verschiedenen Geraden vergleichen.



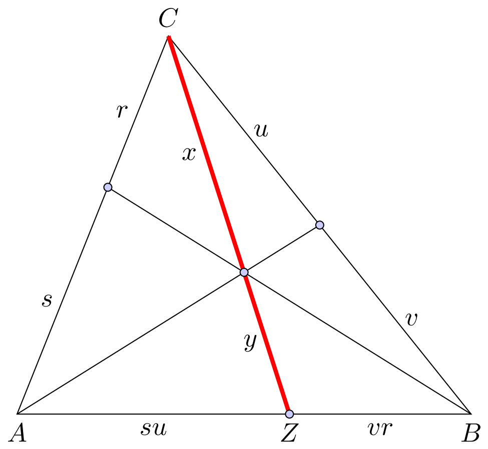






Man bemerkt, dass die Summe der Verhältniszahlen bei allen 3 Transversalen konstant ist, sofern man das Transversalen-Verhältnis nicht kürzt (nach MeneCeva).
Dies ist eine Folge des Satzes von CEVA.
Beispiel: 15+4 = 13+6 = 10+9 = 19

Satz über die Transversalen-Verhältnisse



Es sei das Transversalen-Verhältnis $v(Ct) = \frac{x}{x+y} \leq 1$.
Dann gilt:

$$\boxed{\textbf{Meneceva2:}\ v(At) + v(Bt) + v(Ct) = 2}$$

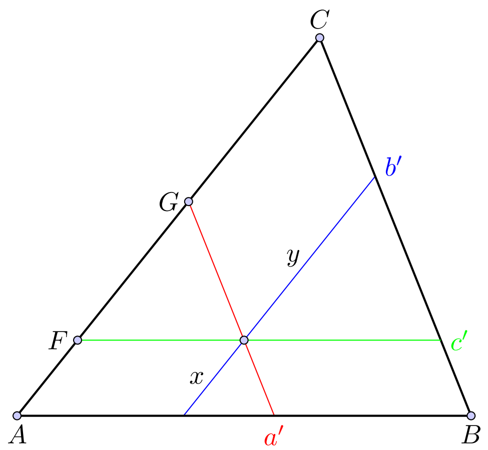
Wählt man den Transversalen-Schnittpunkt immer näher an einer Dreiecks-Seite, so sieht man, das der Satz stimmen kann!

1. Beweis: algebraisch (Mit CEVA2 wird: $AZ : BZ = su : vr$)

$$\begin{aligned} v'(Ct) &= \frac{r}{s} + \frac{u}{v} = \frac{rv+us}{sv} \quad &\rightarrow \quad v(Ct) &= \frac{rv+us}{rv+us+sv} \\ v'(Bt) &= \frac{v}{u} + \frac{vr}{su} = \frac{vs+vr}{su} \quad &\rightarrow \quad v(Bt) &= \frac{vs+vr}{vs+vr+su} \\ v'(At) &= \frac{su}{vr} + \frac{s}{r} = \frac{su+sv}{vr} \quad &\rightarrow \quad v(At) &= \frac{su+sv}{su+sv+vr} \end{aligned}$$

$$v(Ct) + v(Bt) + v(At) = \frac{rv+us}{rv+us+sv} + \frac{vs+vr}{vs+vr+su} + \frac{su+sv}{su+sv+vr} = \frac{2(rv+us+sv)}{rv+us+sv} = 2$$

2. Beweis: geometrisch



a', b', c' sind die Parallelen zu den entsprechenden Seiten durch den Transversalen-Schnittpunkt.

Damit ist $v(At) = \frac{a'}{a} \quad v(Bt) = \frac{b'}{b} \quad v(Ct) = \frac{c'}{c}$

$x = b - AG = b \cdot (1 - \frac{a'}{a})$

$y = b - CF = b \cdot (1 - \frac{c'}{c})$

$x + y = b' = b \cdot (2 - \frac{a'}{a} - \frac{c'}{c})$

$\frac{b'}{b} = 2 - \frac{a'}{a} - \frac{c'}{c}$

$$\boxed{\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} = 2 = v(At) + v(Bt) + v(Ct)}$$