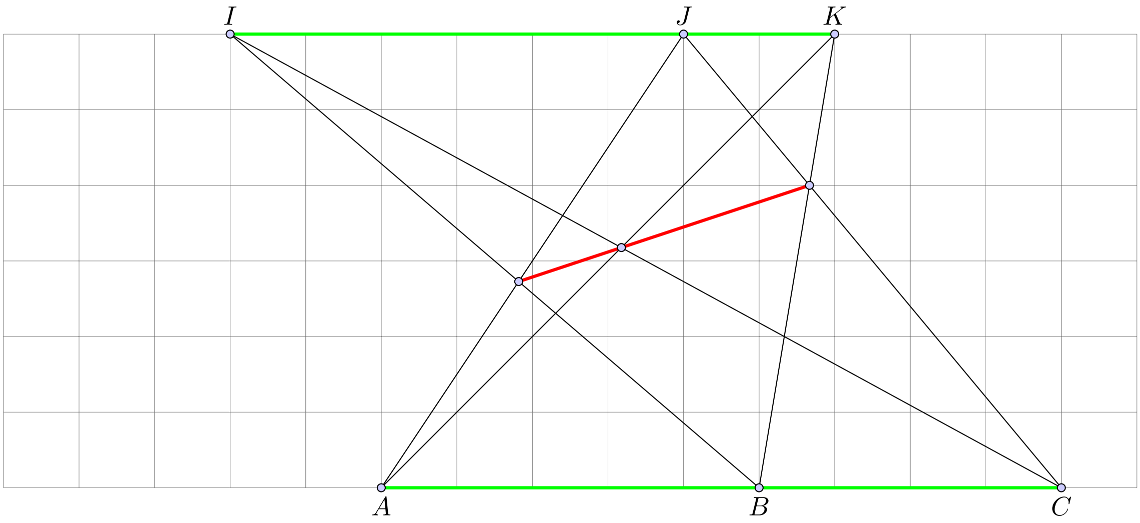
Spezialfall: Die 6 Punkte liegen auf parallelen Geraden (mit Schnittpunkt im Unendlichen.

Wahl der Variablen Wir verwenden keine indizierten Variablen, weil bei viel Rechenarbeit unweigerlich Fehler entstehen. Zudem kann dann WolframAlpha als Rechenknecht verwendet werden!



Die x-Koordinaten der Punkte A, B, C, I, J, K seien entsprechend a, b, c, i, j, k.
Die Koordinaten der 3 Schnittpunkte sind:

$$S_1 = \frac{bj - ai \mid h(b-a)}{b - a + j - i} \quad S_2 = \frac{ck - ai \mid h(c-a)}{c - a + k - i} \quad S_3 = \frac{ck - bj \mid h(c-b)}{c - b + k - j} = \frac{x \mid y}{N}$$

Steigung der Geraden $S_1 \to S_2$:

$$\Delta y = \frac{y_2}{N_2} - \frac{y_1}{N_1} \quad \to \quad \Delta x = \frac{x_2}{N_2} - \frac{x_1}{N_1} \quad \to \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = m_{12} = \frac{y_2 \cdot N_1 - y_1 \cdot N_2}{x_2 \cdot N_1 - x_1 \cdot N_2}$$

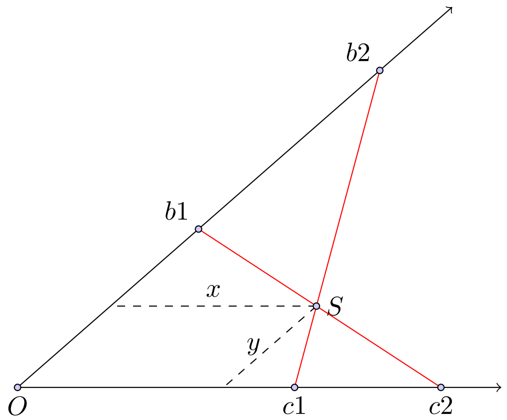
$$\begin{aligned} m_{12} &= h \cdot \frac{(\text{c-a})(\text{b-a} + j - i) - (\text{b-a})(\text{c-a} + k - i)}{(ck - ai)(b - a + j - i) - (bj - ai)(c - a + k - i)} \\ &= h \cdot \frac{a(k-j) - b(k-i) + c(j-i)}{ab(j-i) - ac(k-i) + bc(k-j) \; + \; ij(b-a) - ik(c-a) + jk(c-b)} \end{aligned}$$

Steigung der Geraden $S_1 \to S_3$:

$$\Delta y = \frac{y_3}{N_3} - \frac{y_1}{N_1} \quad \to \quad \Delta x = \frac{x_3}{N_3} - \frac{x_1}{N_1} \quad \to \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = m_{13} = \frac{y_3 \cdot N_1 - y_1 \cdot N_3}{x_3 \cdot N_1 - x_1 \cdot N_3}$$

$$\begin{aligned} m_{13} &= h \cdot \frac{(\text{c-b})(\text{b-a} + j - i) - (\text{b-a})(\text{c-b} + k - j)}{(ck - bj)(b - a + j - i) - (bj - ai)(c - b + k - j)} \\ &= h \cdot \frac{a(k-j) - b(k-i) + c(j-i)}{ab(j-i) - ac(k-i) + bc(k-j) \; + \; ij(b-a) - ik(c-a) + jk(c-b)} \end{aligned}$$

Teilaufgabe für rechnerischen Beweis



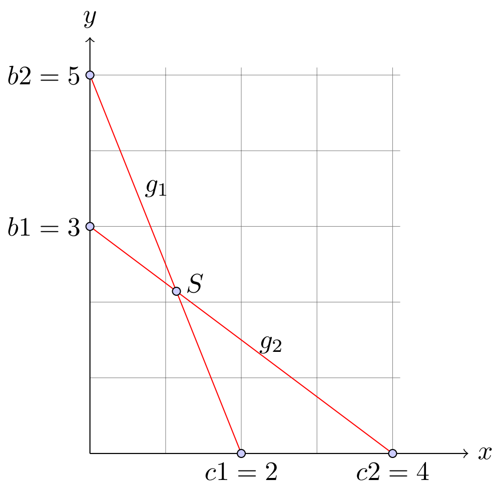
Berechne die schiefwinkligen Koordinaten des Schnittpunkts S mit den Koordinaten-Werten $b1, b2, c1, c2$.
Die Hilfslinien sind parallel zu den Winkelschenkeln.

$$\frac{b_2}{c_1} = \frac{b_2 - y}{x} \quad \text{und} \quad \frac{b_1}{c_2} = \frac{y}{c_2 - x} \qquad \text{;ähnliche Dreiecke}$$

$$\begin{array}{l} b_2x = c_1b_2 - c_1y \\ b_1c_2 - b_1x = c_2y \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} b_2x + c_1y = c_1b_2 \\ b_1x + c_2y = b_1c_2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} b_2 & c_1 & c_1b_2 \\ b_1 & c_2 & b_1c_2 \end{array}\right)$$

$$\boxed{x = \frac{D_x}{D} = \frac{c_1c_2(b_2 - b_1)}{b_2c_2 - b_1c_1}} \qquad \boxed{y = \frac{D_y}{D} = \frac{b_1b_2(c_2 - c_1)}{b_2c_2 - b_1c_1}}$$

Diese Formeln gelten natürlich auch für den Spezialfall des rechten Winkels. Dann sind c_1, c_2 die x-Abschnitte, b_1, b_2 die y-Abschnitte.



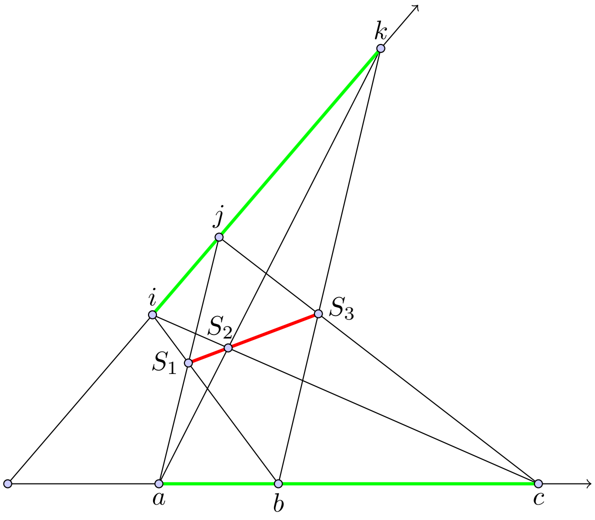
In der analytischen Geometrie geht es hier um den Schnittpunkt zweier Geraden, jeweils gegeben durch die Achsenabschnitte.

$$g_1\colon\ \frac{x}{c_1} + \frac{y}{b_2} = 1 \quad \text{und} \quad g_2\colon\ \frac{x}{c_2} + \frac{y}{b_1} = 1$$

Daraus folgt das genau gleiche lineare Gleichungssystem wie oben!

Rechenbeispiel:
S_x = 2*4*(5-3) / (4*5 - 2*3) = 16 / 14 = 8 / 7 ≈ 1.14
S_y = 3*5*(4-2) / (4*5 - 2*3) = 30 / 14 = 15 / 7 ≈ 2.14

Die 6 Punkte liegen auf zwei Geraden. Wahl der Variablen: Wir verwenden keine indizierten Variablen, weil bei viel Rechenarbeit unweigerlich Fehler entstehen. Zudem kann dann WolframAlpha als Rechenknecht verwendet werden!



a, b, c sind x-Koordinaten, i, j, k sind y-Koordinaten (schiefwinklig):

Dann sind die Koordinaten der 3 Schnittpunkte:

$$S_1 = \frac{ab(j-i) \mid ij(b-a)}{bj-ai} = \frac{x_1 \mid y_1}{N_1}$$

$$S_2 = \frac{ac(k-i) \mid ik(c-a)}{kc-ai} = \frac{x_2 \mid y_2}{N_2}$$

$$S_3 = \frac{bc(k-j) \mid jk(c-b)}{kc-bj} = \frac{x_3 \mid y_3}{N_3}$$

Steigung der Geraden $S_1 \to S_2$:

$$\Delta y = \frac{y_2}{N_2} - \frac{y_1}{N_1} \quad \to \quad \Delta x = \frac{x_2}{N_2} - \frac{x_1}{N_1} \quad \to \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = m_{12} = \frac{y_2 \cdot N_1 - y_1 \cdot N_2}{x_2 \cdot N_1 - x_1 \cdot N_2}$$

$$m_{12} = \frac{bj(k-i) - ai(k-j) - ck(j-i)}{ac(k-i) - bc(k-j) - ab(j-i)}$$

Steigung der Geraden $S_1 \to S_3$:

$$\Delta y = \frac{y_3}{N_3} - \frac{y_1}{N_1} \quad \to \quad \Delta x = \frac{x_3}{N_3} - \frac{x_1}{N_1} \quad \to \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = m_{13} = \frac{y_3 \cdot N_1 - y_1 \cdot N_3}{x_3 \cdot N_1 - x_1 \cdot N_3}$$

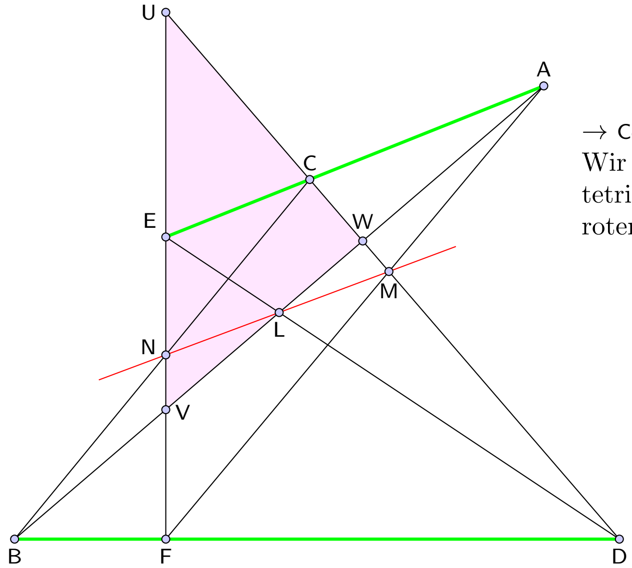
$$m_{13} = \frac{bj(k-i) - ai(k-j) - ck(j-i)}{ac(k-i) - bc(k-j) - ab(j-i)}$$

Die beiden Steigungen sind identisch $\quad \to \quad$ Die Punkte S_1, S_2, S_3 liegen auf einer Geraden.

Hier sind soviele algebraische Umformungen zu machen, dass die Hilfe von WolframAlpha gerechtfertigt ist:

```
Eingabe fuer m12:  (y2*n1-y1*n2)/(x2*n1-x1*n2)
                   where x1=a*b*(j-i), x2=a*c*(k-i),
                         y1=i*j*(b-a), y2=i*k*(c-a),
                         n1=b*j-a*i, n2=k*c-a*i
```

Kürzester Beweis mit Satz von Satz von Menelaus



→ Coxeter: Zeitlose Geometrie, Seite 73.

Wir wenden den Satrz von Menelaus auf die 5 Punktetripel LDE, AMF, BCN und ACE, BDF auf den Seiten des roten Dreiecks an:

$$\frac{LV}{LW} \cdot \frac{DW}{DU} \cdot \frac{EU}{EV} = 1 \qquad \frac{AV}{AW} \cdot \frac{CW}{CU} \cdot \frac{EU}{EV} = 1$$

$$\frac{AV}{AW} \cdot \frac{MW}{MU} \cdot \frac{FU}{FV} = 1 \qquad \frac{BV}{BW} \cdot \frac{DW}{DU} \cdot \frac{FU}{FV} = 1$$

$$\frac{BV}{BW} \cdot \frac{CW}{CU} \cdot \frac{NU}{NV} = 1$$

Dividieren wir das Produkt der linken drei Ausdrücke durch das Produkt der rechten beiden, so erhalten wir nach einer wahren Kürzungsorgie:

$$\frac{LV}{LW} \cdot \frac{MW}{MU} \cdot \frac{NU}{NV} = 1 \quad \rightarrow \quad L, M, N \text{ sind kollinear.}$$