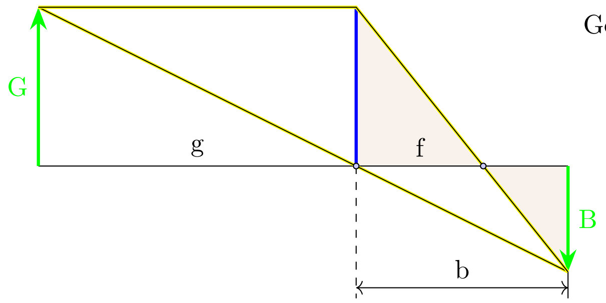
Linsenformel in der Geometrie

2025-Mai, GeoLinsenFormel.tex

Linsenformel

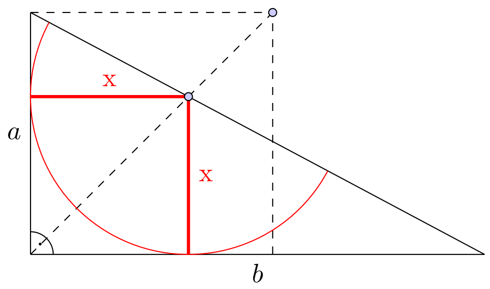


Gegenstandsweite g, Bildweite b, Brennweite f:

$$\frac{B}{G} = \frac{b}{g} = \frac{b-f}{f} \qquad \text{;ähnliche Dreiecke}$$

$$\frac{b}{g} = \frac{b}{f} - 1 \quad \to \quad \frac{b}{g} + 1 = \frac{b}{f} \quad \to \quad \frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

Einbeschriebenes Quadrat = einbeschriebener Halbkreis

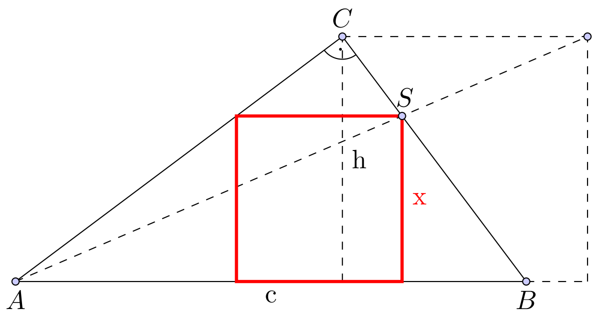


$ax + bx = ab$;Flächen-Addition

$(a - x) : x = a : b$;ähnliche Dreiecke

$$\boxed{x = \frac{ab}{a+b} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

Einbeschriebenes Quadrat



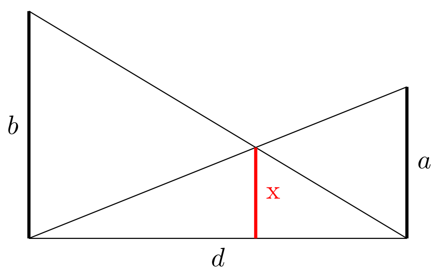
Konstruktion mit Hilfsquadrat

Ähnlichkeitspunkt A

$c : h = x : (h - x)$;ähnliche Dreiecke

$$\boxed{x = \frac{ch}{c+h} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{c} + \frac{1}{h}}$$

Leiter-Schnittpunkt



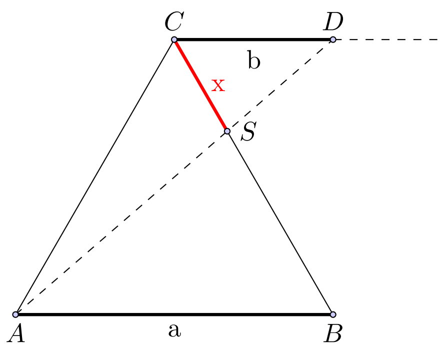
ähnliche Dreiecke mit Grundlinien a und b.

$\to$ d wird geteilt im Verhältnis $a : b$.

$\to a : d = x : d\frac{b}{a+b}$.

$$\boxed{x = \frac{ab}{a+b} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

Gleichseitiges Dreieck mit Spitzen-Parallele



Gleichseitiges Dreieck ABC.

Parallele zu AB durch C.

;ähnliche Dreiecke ABS und CDS, BC=a.

$$\boxed{x = \frac{ab}{a+b} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

Summe teilt Produkt Erster Ansatz

Gesucht sind 2 natürliche Zahlen, deren Summe ihr Produkt teilt. Man bestimme alle derartige Zahlen.
Anders ausgedrückt: $\frac{ab}{a+b} = c$ ganzzahlig lösen.
Wenn man die Lösungen nach a und b ordnet, wird die Aufzählung unbequem. Die geniale Idee besteht darin, die Aufzählung nach c zu ordnen!

$$\frac{ab}{a+b} = c \quad \rightarrow \quad c < a \quad \text{und} \quad c < b.$$

Zähler und Nenner durch a dividieren $\rightarrow c < b$. Zähler und Nenner durch b dividieren $\rightarrow c < a$.
Jetzt macht es Sinn, die (positiven) Differenzen $(a-c)$ und $(b-c)$ zu betrachten:
$(a-c)\cdot(b-c) = ab - ac - bc + c^2$;ac+bc=ab
$(a-c)\cdot(b-c) = c^2$;Das heisst, man betrachtet die Faktorzerlegungen von c^2

```
c=1:     1*1  -->  (a,b) = 2,2          c=5:  1*25  -->   6,30
c=2:     1*4  -->  (a,b) = 3,6                5*5   -->  10,10
         2*2  -->  (a.b) = 4,4          c=6:  1*36  -->   7,42
c=3:     1*9  -->  (a,b) = 4,12               2*18  -->   8,24
         3*3  -->  (a,b) = 6,6                3*12  -->   9,18
c=4:     1*16 -->  (a,b) = 5,20               4*9   -->  10,15
         2*8  -->  (a,b) = 6,12               6*6   -->  12,12
         4*4  -->  (a,b) = 8,8
```

Summe teilt Produkt Zweiter Ansatz

1. Damit der Bruch $\frac{ab}{a+b}$ gekürzt werden kann, müssen a und b einen gemeinsamen Faktor haben. Sind sie nämlich teilerfremd, kann der Bruch nicht gekürzt werden!
   Daraus folgt für $\frac{ab}{a+b}$ teilbar: $a = kn, \quad b = km \quad \rightarrow \quad k \cdot \frac{nm}{n+m}$ ganzzahlig.

2. Damit $k \cdot \frac{nm}{n+m}$ ganzzahlig wird, muss $k = p(n+m)$ sein.
   Also wird
   $$(a,b,c) = pn(n+m),\ pm(n+m),\ pnm$$
   Mit dieser Formel erhalten wir für $c = 6$:
   ```
   p  n  m
   1  1  6    -->    ( 7,42,6)
   2  1  3    -->    ( 8,24,6)
   3  1  2    -->    ( 9,18,6)
   1  2  3    -->    (10,15,6)
   6  1  1    -->    (12,12,6)
   ```

3. Mit dieser Überlegungen ist es einfach, das Verhältnis $a : b$ vorzugeben: $a : b$ sei $5 : 6$
   $a = 5k,\ b = 6k \quad \rightarrow \quad \frac{ab}{a+b} = \frac{30k}{11} \quad \rightarrow \quad k = 11 \quad \rightarrow \quad (a,b,c) = (55,66,30)$
   Oder direkt mit der Formel $(p,n,m) = (1,5,6) \quad \rightarrow \quad (55,66,30)$