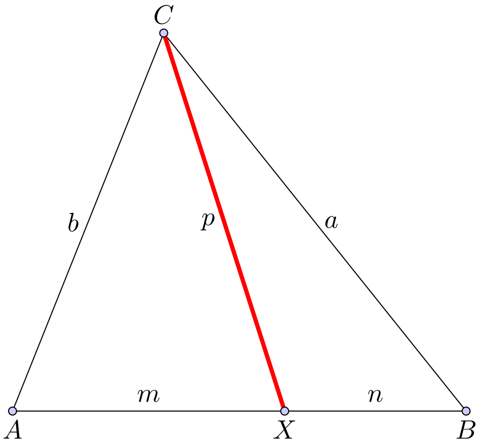
Der Satz von Steward



Der Satz von Steward erlaubt es, die Länge einer beliebigen Transversale p im Dreieck zu berechnen:

$$p^2 = a^2 \cdot \tfrac{m}{c} + b^2 \cdot \tfrac{n}{c} - m \cdot n$$

oder mit $\lambda_a = \frac{m}{c}$ und $\lambda_b = \frac{n}{c}$:

$$p^2 = \lambda_a\, a^2 + \lambda_b\, b^2 - \lambda_a \lambda_b\, c^2$$

Die zweite Variante ist einfacher zu memorieren und dann günstig, wenn das Verhältnis $m : n$ einfach ist.

Herleitung
Berechnet man den Höhenabschnitt p_c (rechtwinklige Projektion von p auf c) auf 2 Arten, nämlich einmal im Dreieck AXC und einmal im Dreieck XBC, dann erhält man:

$$p_c = \frac{p^2 + m^2 - b^2}{2m} \quad \text{und} \quad -p_c = \frac{p^2 + n^2 - a^2}{2n}$$

Durch Addition der beiden Gleichungen und anschliessende Umformung erhält man mit $m+n = c$ das Resultat.

Beispiel Seitenhalbierende

$$\lambda_a = \lambda_b = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad 2p = \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$$

Beispiel Winkelhalbierende
Die Winkelhalbierende teilt die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten:
$\rightarrow \quad \lambda_a = \frac{b}{a+b}$ und $\lambda_b = \frac{a}{a+b}$

$$\begin{aligned} w^2 &= \frac{b}{a+b}a^2 + \frac{a}{a+b}b^2 - \frac{ab}{(a+b)^2}c^2 = \frac{b(a+b)a^2 + a(a+b)b^2 - abc^2}{(a+b)^2} \\ &= \frac{ab\left[a(a+b) + b(a+b) - c^2\right]}{(a+b)^2} = \frac{ab\left[(a+b)^2 - c^2\right]}{(a+b)^2} \end{aligned}$$

Also wird schlussendlich:

$$w^2 = ab\left[1 - \left(\frac{c}{a+b}\right)^2\right] = ab \cdot \frac{(a+b)^2 - c^2}{(a+b)^2}$$

In Worten: $w^2 =$ (Produkt der anliegenden Seiten) * Korrekturfaktor.

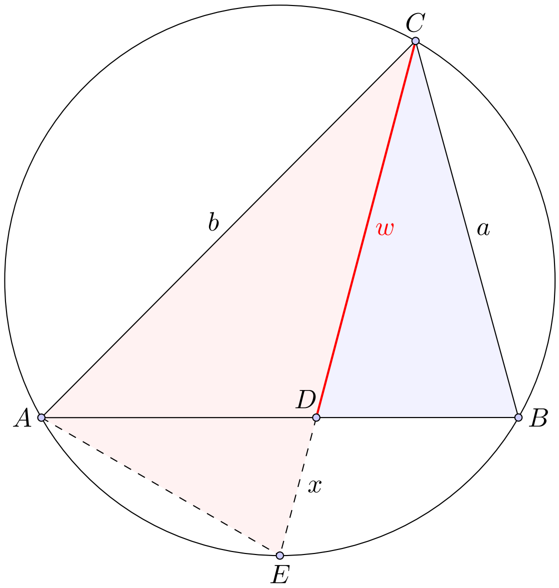
Je grösser die anliegenden Seiten im Verhältnis zur Gegenseite sind, desto kleiner wird der Korrekturfaktor.

oder weil $(a+b)^2 - c^2 = (a+b+c)(a+b-c)$ wird

$$w^2 = \frac{4ab}{(a+b)^2} \cdot s(s-c)$$

a `und` b `sind die anliegenden Seiten,` c `die gegenüberliegende Seite.`

Winkelhalbierende: direkte Herleitung



Das rote und blaue Dreieck sind ähnlich: (WWW)

$$\frac{a}{w} = \frac{w+x}{b} \quad \rightarrow \quad ab = w^2 + wx \quad \rightarrow \quad wx = ab - w^2$$

Mit $AD = c \cdot \frac{b}{a+b}$ und $DB = c \cdot \frac{a}{a+b}$ wird:

$$AD \cdot DB = wx \qquad \text{;Sehnensatz}$$

$$\frac{c^2}{(a+b)^2} \cdot ab = ab - w^2$$

$$w^2 = ab\left[1 - \left(\frac{c}{a+b}\right)^2\right]$$

$w^2 =$ (Produkt der anliegenden Seiten) $\cdot (1 - k^2)$ mit $k = \dfrac{\text{Gegenseite}}{\text{Summe der anliegenden Seiten}}$