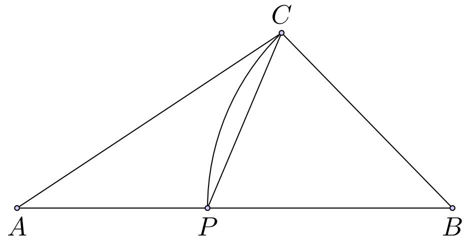
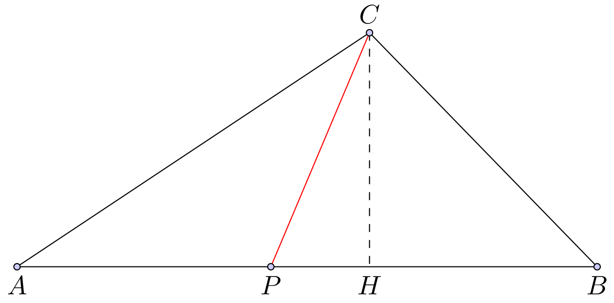
Aufgabenstellung: Geometrische Denkaufgaben, 2. Teil, Nr. 9



`Ungleichseitiges Dreieck` ABC:
`AB = 48,  AC = 35,  BC = 27;`
`BP = BC.`

Ist CP = AP ?

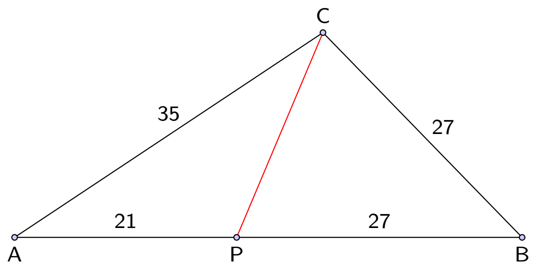
Variante mit Höhenabschnitt



$$\Delta B = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 = 48^2 + 27^2 - 35^2 = 1808$$
$$\overline{BH} = \frac{\Delta B}{2c} = \frac{1808}{2 \cdot 48} = 18.8333333$$
$$\overline{PH} = \overline{BP} - \overline{BH} = 8.1666666$$
$$\overline{CH}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BH}^2 = 374.30555555$$
$$\overline{CP}^2 = \overline{PH}^2 + \overline{CH}^2 = 440.9999998$$
$$\overline{CP} = \sqrt{441} = 21$$

Scheint bis auf Taschenrechner-Genauigkeit zu stimmen! Wow!

Kontrolle mit Satz von Steward: $p^2 = \lambda_a\, a^2 + \lambda_b\, b^2 - \lambda_a \lambda_b\, c^2$



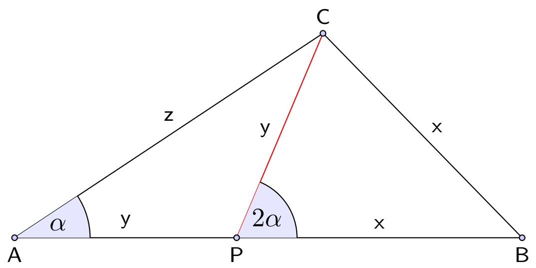
$\lambda_a = \frac{21}{48} \qquad \lambda_b = \frac{27}{48}$

$$\overline{CP}^2 = \frac{21 \cdot 27^2 + 27 \cdot 35^2}{48} - 21 \cdot 27 = 1008 - 567 = 441$$

$\overline{CP} = \sqrt{441} = 21$;stimmt genau!

Wie hat Herr Eigenmann 1970 diese ganzzahlige Lösung gefunden ?

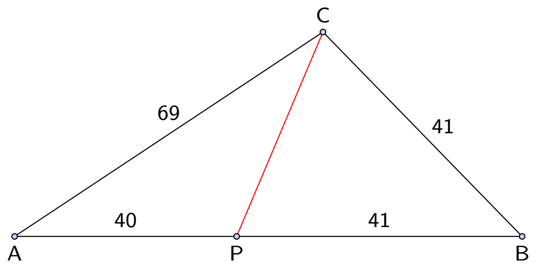
Suche von ganzzahligen Lösungen



Man muss 2 gleichseitige Dreiecke so finden, dass der Basiswinkel des (x,y)-Dreiecks doppelt so gross wie jener des (y,z)-Dreiecks ist.
Das ist heute mit einem kleinen Program leicht möglich, vor 50 Jahren vermutlich einiges schwieriger.
$\cos A = z/2y, \quad \cos P = y/2x$
Es muss gelten: $2\cos^2\alpha - 1 = \cos 2\alpha$

Mein JULIA-Programm liefert: (x,y,z) = (8,2,3) / (27,21,35) / (64,68,119) / (125,70,112) / (125,155,279) / ...

Beispiel mit $CP \approx AP$



$\lambda_a = \frac{40}{81} \qquad \lambda_b = \frac{41}{81}$

$$\overline{CP}^2 = \frac{40 \cdot 41^2 + 41 \cdot 69^2}{81} - 40 \cdot 41 = 1600.01$$

$\overline{CP} = \sqrt{1600.01} = 40.00015$;stimmt fast!