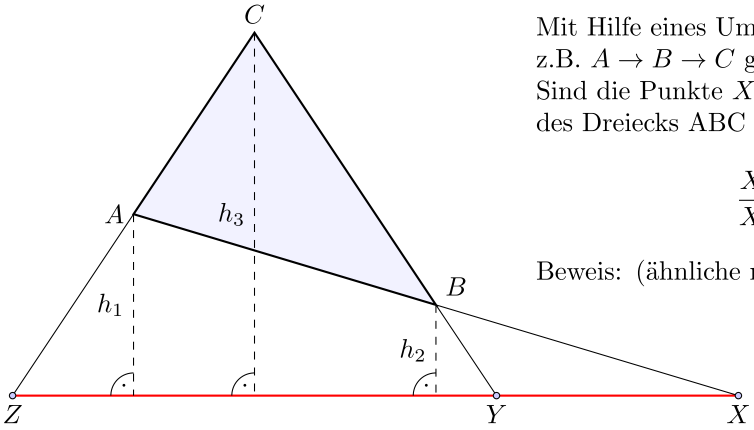
Satz von Menelaus

(→Coxeter: Zeitlose Geometrie 3.4) 2025-Feb, GeoMenelaus.tex

Menelaus3: (Alle 3 Dreiecksseiten verlängert)



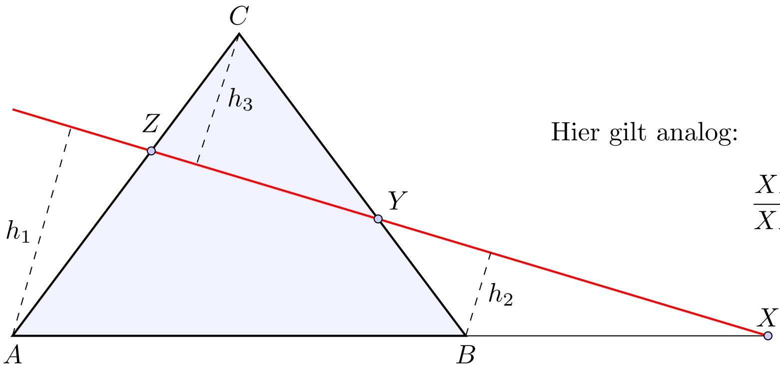
Mit Hilfe eines Umlaufsinnes des Dreiecks,
z.B. $A \to B \to C$ gilt:
Sind die Punkte X, Y, Z auf den verlängerten Seiten des Dreiecks ABC kollinear, dann gilt:

$$\frac{XA}{XB} \cdot \frac{YB}{YC} \cdot \frac{ZC}{ZA} = 1.$$

Beweis: (ähnliche rechtwinklige Dreiecke)

$$\frac{h_1}{h_2} \cdot \frac{h_2}{h_3} \cdot \frac{h_3}{h_1} = 1.$$

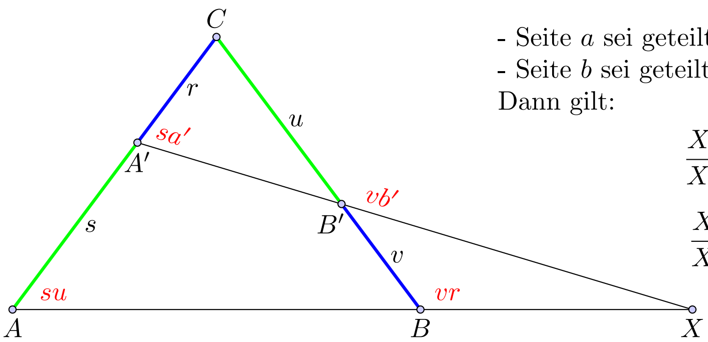
Menelaus1: (Nur 1 Dreiecksseite verlängert)



Hier gilt analog:

$$\frac{XA}{XB} \cdot \frac{YB}{YC} \cdot \frac{ZC}{ZA} = 1.$$

Menelaus2



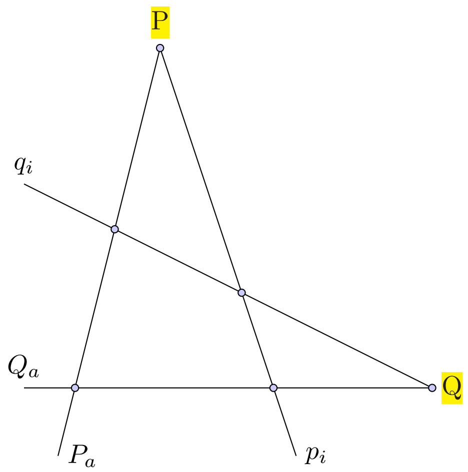
- Seite a sei geteilt im Verhältnis $u : v$, a'=u+v
- Seite b sei geteilt im Verhältnis $r : s$, b'=r+s

Dann gilt:

$$\frac{XA}{XB} = \frac{s \cdot u}{v \cdot r} = \frac{cross(A)}{cross(B)} \qquad \text{;Menelaus1}$$

$$\frac{XA'}{XB'} = \frac{s(u+v)}{v(r+s)} = \frac{bigCross(A)}{bigCross(B)} \qquad \text{;Menelaus3}$$

Winkel-Menelaus (2 sich schneidende Winkel)



Es gilt: $P_a \cdot q_i = Q_a \cdot p_i = P_a + Q_a - 1$

Aus je 2 Verhältnissen können die andern beiden berechnet werden.

$$p_i = \frac{P_a + Q_a - 1}{Q_a}, \quad q_i = \frac{P_a + Q_a - 1}{P_a} \qquad \text{;Aussen} \to \text{innen}$$

$$Q_a = \frac{P_a - 1}{p_i - 1} \quad \to \quad q_i = Q_a \cdot \frac{p_i}{P_a} \qquad \text{;Sonne1} \to \text{Sonne2}$$

$$P_a = \frac{p_i}{p_i + q_i - p_i q_i}, \quad Q_a = \frac{q_i}{p_i + q_i - p_i q_i} \qquad \text{;innen} \to \text{Aussen}$$

Von den beiden Sonnen P und Q gehen je ein äusserer und ein innerer Strahl aus. Die Verhältnisse auf jedem Strahl: (Sonne - äusserer Punkt) / (Sonne - innerer Punkt) ≥ 1 seien P_a, p_i, Q_a, q_i.