Теоретические модели вычислений ДЗ-1 : Регулярные языки и конечные автоматы

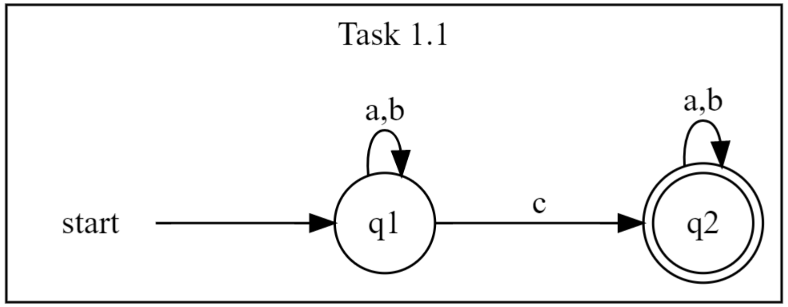
Выполнила студентка группы А-05-19 Абросимова Мария

Май 2022

1 Задание № 1. Построить конечный автомат, распознающий язык

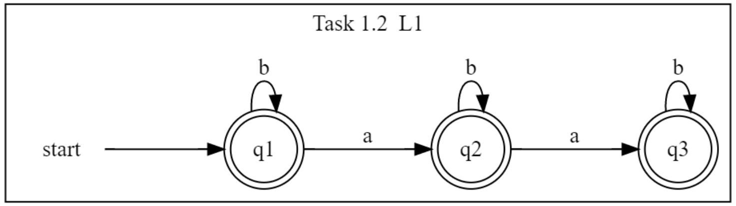
Ответом на данное задание является конечный автомат, распознающий описанный язык. Автомат должен быть детерминированным.

1.1 $\mathbf{L = \{ w \in \{a, b, c\}^* \mid |w|_c = 1 \}}$

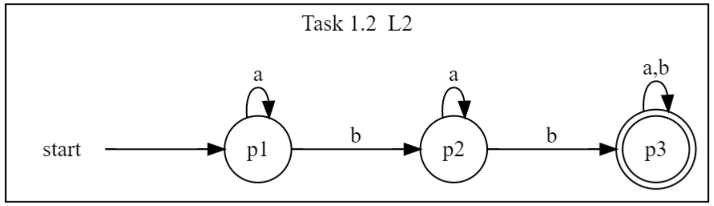


1.2 $\mathbf{L = \{ w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a} \le 2, \mathbf{|w|_b} \ge 2\}$

$L1 = \{w \in \{a, b\}^* | \quad |w|_a \le 2\}$

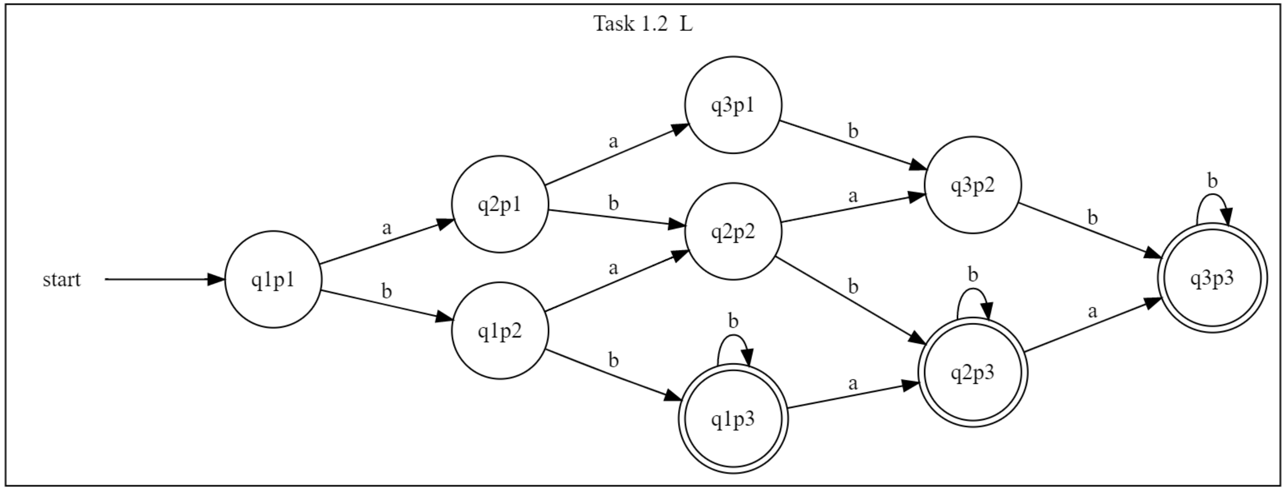


$L2 = \{w \in \{a,b\}^* | \quad |w|_b \geq 2\}$



Переходы

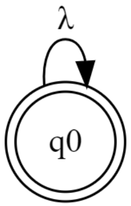
$\delta(q1p1, a) = q2p1 \quad \delta(q1p1, b) = q1p2$
$\delta(q1p2, a) = q2p2 \quad \delta(q1p0, b) = q1p3$
$\delta(q1p3, a) = q2p3 \quad \delta(q1p3, b) = q1p3$
$\delta(q2p1, a) = q3p1 \quad \delta(q2p1, b) = q2p2$
$\delta(q2p2, a) = q3p2 \quad \delta(q2p2, b) = q2p3$
$\delta(q2p3, a) = q3p3 \quad \delta(q2p3, b) = q2p3$
$\delta(q3p1, a) = - \quad \delta(q3p1, b) = q3p2$
$\delta(q3p2, a) = - \quad \delta(q3p2, b) = q3p3$
$\delta(q3p3, a) = - \quad \delta(q3p3, b) = q3p3$



1.3 $\mathbf{L} = \{ \mathbf{w} \in \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}^* \mid |\mathbf{w}|_a \neq |\mathbf{w}|_b \}^*$

Нельзя построить ДКА, так как требуется запоминать количество символов.

1.4 $\mathbf{L} = \{ \mathbf{w} \in \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}^* \mid ww = www\}^*$



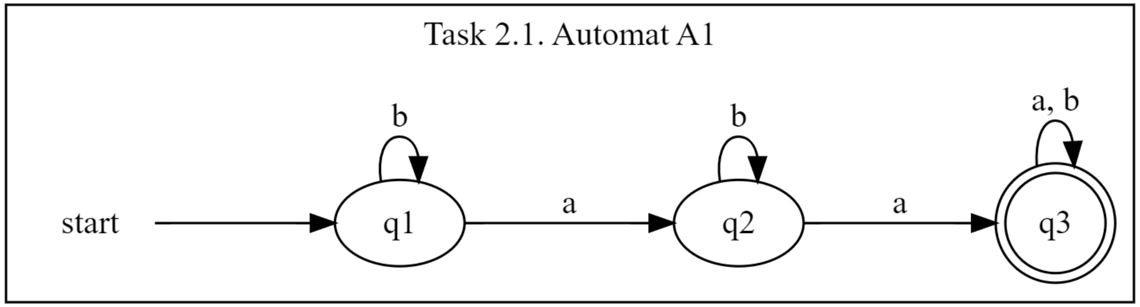
Task 1.4

2 Задание № 2. Построить конечный автомат, используя прямое произведение

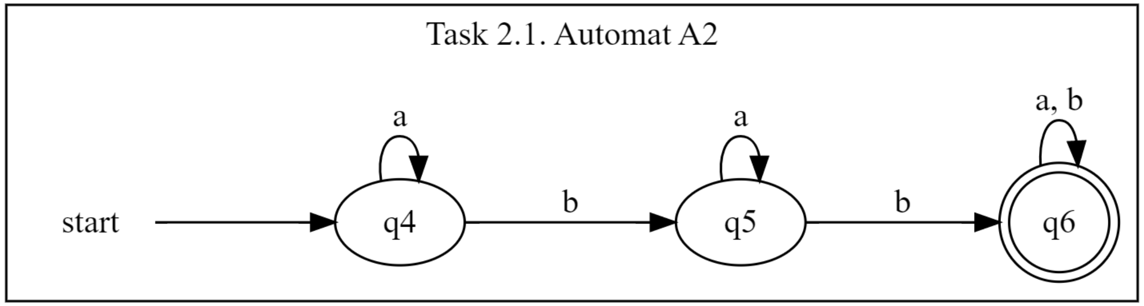
Ответом на данное задание является конечный автомат, распознающий описанный язык. Требуется, чтобы он был построен при помощи прямого произведения ДКА и его свойств.

2.1 $L_1 = \{ \mathbf{w} \in \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}^* : \quad |w|_a \leq 2 \wedge |\mathbf{w}|_b \geq 2\}$

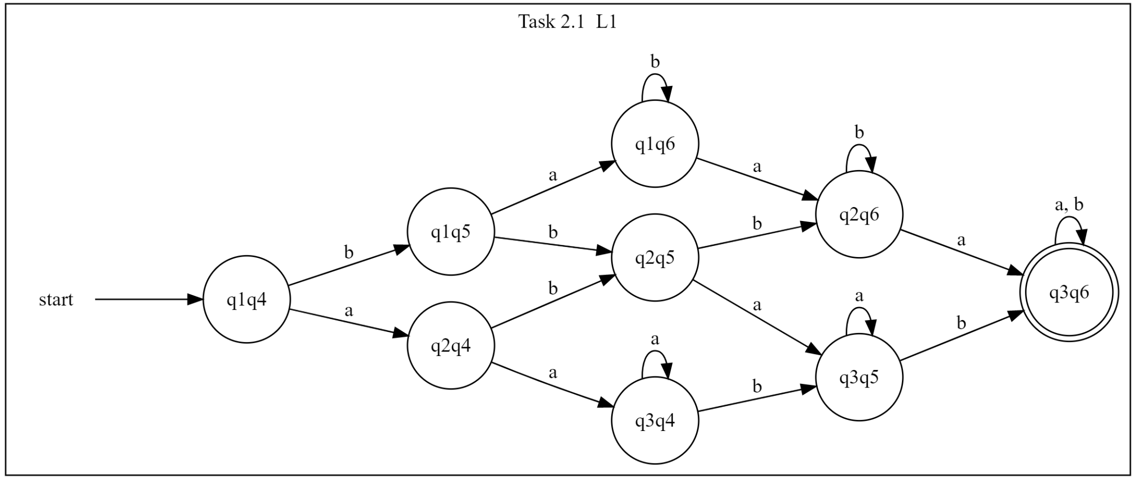
A_1={ w $\in$ {a, b}* : $|w|_a \geq 2\}$



A_2={ w $\in$ {a, b}* : $|w|_b \geq 2\}$

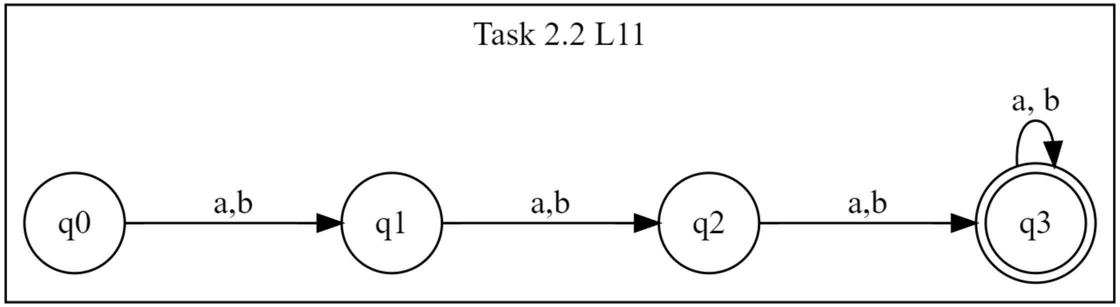


$L_1 = A_1 \times A_2$ $\sum = \{a, b\}$
$Q = \{q1q4, q1q5, q1q6, q2q4, q2q5, q2q6, q3q4, q3q5, q3q6\}$
$S = \{q1q4\}$
$T = \{q3q6\}$

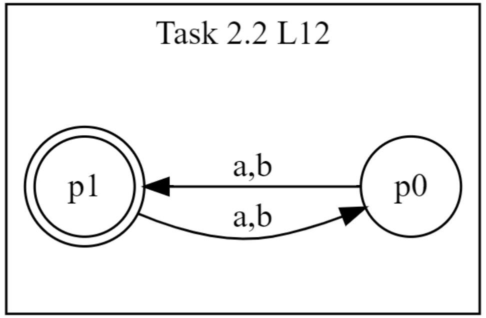


2.2 $L_2 = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w| \geq 3 \wedge |w|$ **нечётное** $\}$

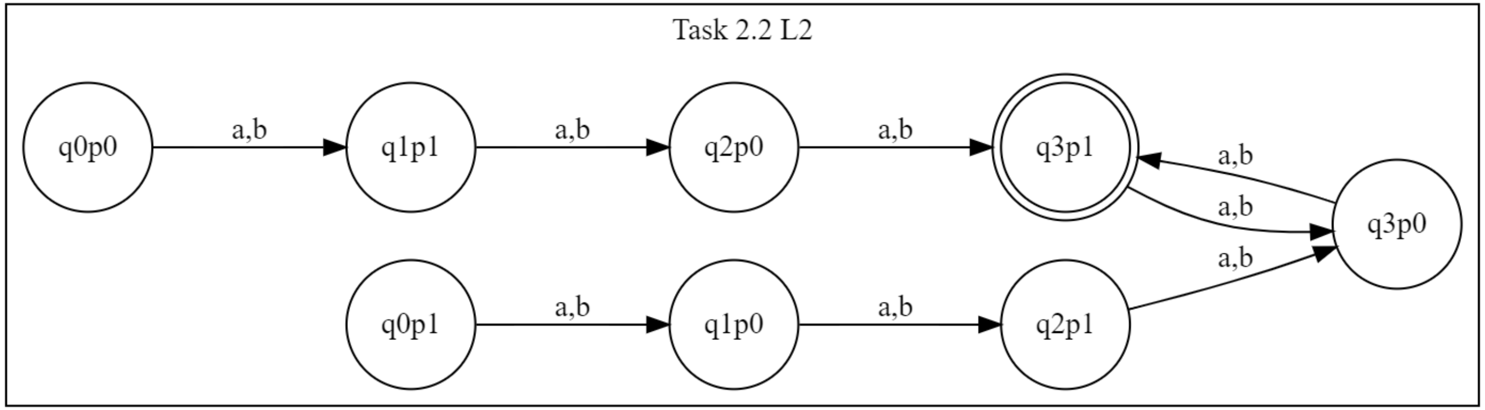
Пусть: $L_{11} = \{w \in \{a,b\}^* | |w| \geq 3 \}$



Пусть: $L_{12} = \{w \in \{a,b\}^* | |w|$ нечётное $\}$

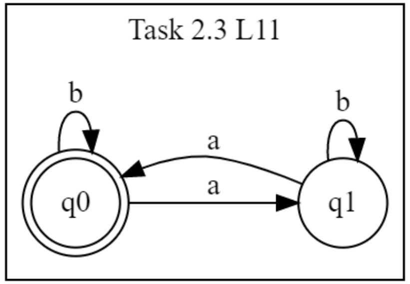


Прямое произведение $L_{11} \cap \mathrm{L}_{12}$.
где $A_{11} = (\sum_1, Q_1, s_1, T_1, \delta_1)$ и $A_{12} = (\sum_2, Q_2, s_2, T_2, \delta_2)$:
$\sum = \sum_1 \bigcup \sum_2 = \{a, b\}$
$Q = Q_1 \times Q_2 = \{q0p0, q0p1, q1p0, q1p1, q2p0, q2p1, q3p0, q3p1\}$
$s =< s_1, s_2 >= q0p0$
$T = T_1 \times T_2 = q3p1$
$\delta(< q1, q2 >, c) =< \delta_1(q_1, c), \delta_2(q_2, c) >$
Переходы
$\delta(q0p0, a) = q1p1 \quad \delta(q0p0, b) = q1p1$
$\delta(q0p1, a) = q1p0 \quad \delta(q0p1, b) = q1p0$
$\delta(q1p0, a) = q2p1 \quad \delta(q1p0, b) = q2p1$
$\delta(q1p1, a) = q2p0 \quad \delta(q1p1, b) = q2p0$
$\delta(q2p0, a) = q3p1 \quad \delta(q2p0, b) = q3p1$
$\delta(q2p1, a) = q3p0 \quad \delta(q2p1, b) = q3p0$
$\delta(q3p0, a) = q3p1 \quad \delta(q3p0, b) = q3p1$
$\delta(q3p1, a) = q3p0 \quad \delta(q3p1, b) = q3p0$

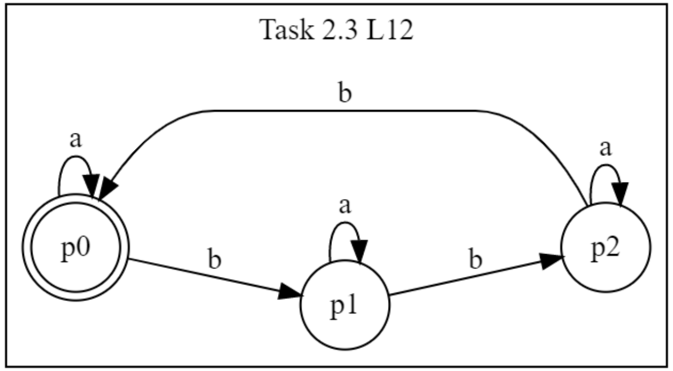


2.3 L_3 = { $w \in$ {a,b}*| |w|$_a$ чётно $\wedge$ $|w|_b$ кратно трём }

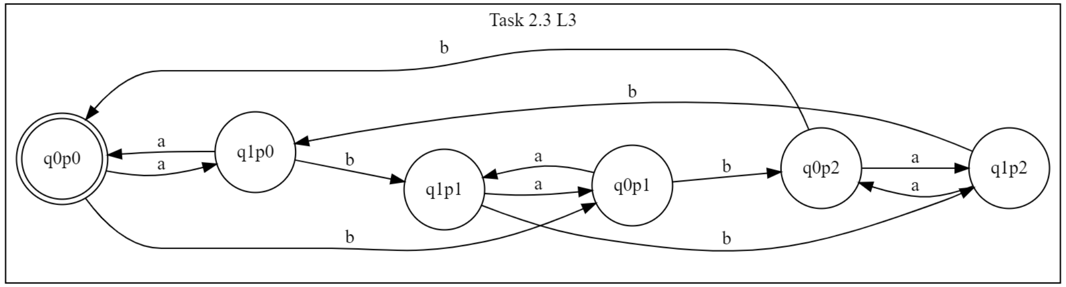
Пусть: $L_{11} = \{w \in \{a,b\}* || w|_a$чётно $\}$



Пусть: $L_{12} = \{w \in \{a,b\}* || w|_b$ кратно трём $\}$

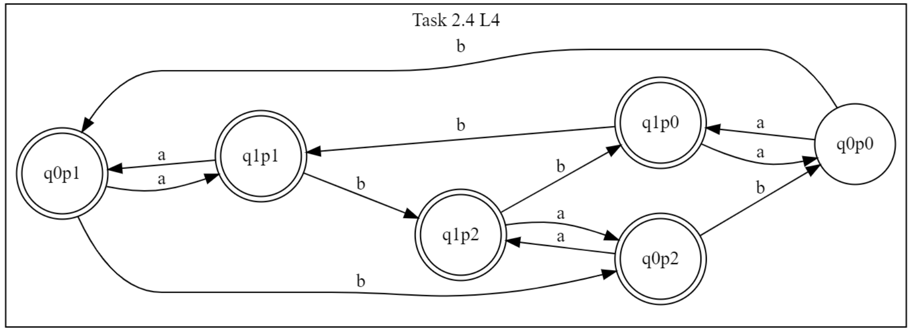


Прямое произведение автоматов $L_3 = L_{11} \cap L_{12}$.



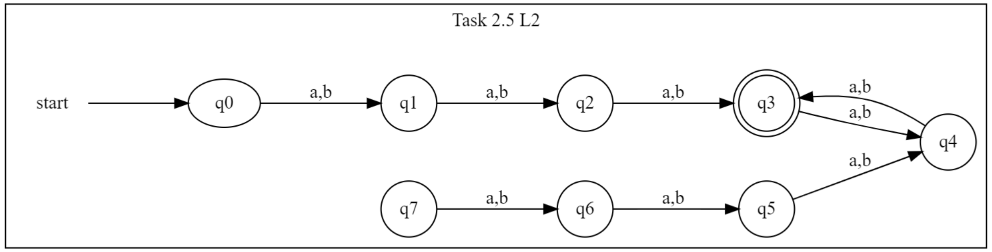
2.4 $L_4 = \overline{L_3}$

$\sum = \sum_1 \bigcup \sum_2 = \{a, b\}$
$Q = Q_1 \times Q_2 = \{q0p0, q0p1, q0p2, q1p0, q1p1, q1p2\}$
$s =< s_1, s_2 >= q0p0$
$T = T_1 \times T_2 = q0p1, q0p2, q1p0, q1p1, q1p2$
$\delta(< q1, q2 >, c) =< \delta_1(q_1, c), \delta_2(q_2, c) >$

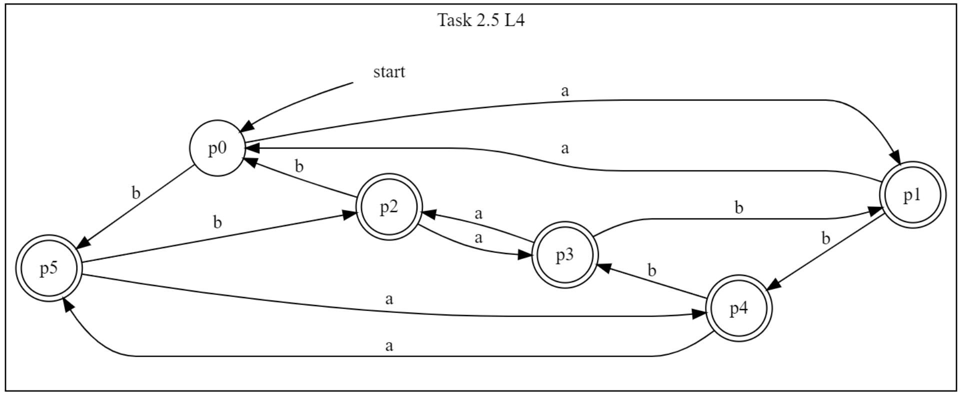


2.5 $L_5 = L_2 \setminus L_3$

$L_5 = L_2 \setminus L_3 = L_2 \cap \overline{L_3} = L_2 \times \overline{L_3} = L_2 \times \mathrm{L}_4$
Переобозначим вершины в автоматах для удобства
L_2:



L_4:



$\sum = \sum_1 \bigcup \sum_2 = \{a, b\}$
$Q = Q_1 \times Q_2 =$
$\{q0p0, \quad q0p1, \quad q0p2, \quad q0p3, \quad q0p4, \quad q1p5,$
$q1p0, \quad q1p1, \quad q1p2, \quad q1p3, \quad q1p4, \quad q1p5,$
$q2p0, \quad q2p1, \quad q2p2, \quad q2p3, \quad q2p4, \quad q2p5,$
$q3p0, \quad q3p1, \quad q3p2, \quad q3p3, \quad q3p4, \quad q3p5,$
$q4p0, \quad q4p1, \quad q4p2, \quad q4p3, \quad q4p4, \quad q4p5,$
$q5p0, \quad q5p1, \quad q5p2, \quad q5p3, \quad q5p4, \quad q5p5,$
$q0p0, \quad q6p1, \quad q6p2, \quad q6p3, \quad q6p4, \quad q6p5,$
$q7p0, \quad q7p1, \quad q7p2, \quad q7p3, \quad q7p4, \quad q7p5\}$
$s =< s_1, s_2 >= q0p0$
$T = T_1 \times T_2 = q3p5, q3p2, q3p3, q3p4, q3p1$
$\delta(< q1, q2 >, c) =< \delta_1(q_1, c), \delta_2(q_2, c) >$

Переходы δ

$\delta(q0p0, a) = q1p1 \quad \delta(q0p0, b) = q1p5$
$\delta(q0p1, a) = q1p0 \quad \delta(q0p1, b) = q1p4$
$\delta(q0p2, a) = q1p3 \quad \delta(q0p2, b) = q1p0$
$\delta(q0p3, a) = q1p2 \quad \delta(q0p3, b) = q1p1$
$\delta(q0p4, a) = q1p5 \quad \delta(q0p4, b) = q1p3$
$\delta(q0p5, a) = q1p4 \quad \delta(q0p5, b) = q1p2$

$\delta(q1p0, a) = q2p1 \quad \delta(q1p0, b) = q2p5$

$\delta(q1p1, a) = q2p0 \quad \delta(q1p1, b) = q2p4$
$\delta(q1p2, a) = q2p3 \quad \delta(q1p2, b) = q2p0$
$\delta(q1p3, a) = q2p2 \quad \delta(q1p3, b) = q2p1$
$\delta(q1p4, a) = q2p5 \quad \delta(q1p4, b) = q2p3$
$\delta(q1p5, a) = q2p4 \quad \delta(q1p5, b) = q2p2$

$\delta(q2p0, a) = q3p1 \quad \delta(q2p0, b) = q3p5$
$\delta(q2p1, a) = q3p0 \quad \delta(q2p1, b) = q3p4$
$\delta(q2p2, a) = q3p3 \quad \delta(q2p2, b) = q3p0$
$\delta(q2p3, a) = q3p2 \quad \delta(q2p3, b) = q3p1$
$\delta(q2p4, a) = q3p5 \quad \delta(q2p4, b) = q3p3$
$\delta(q2p5, a) = q3p4 \quad \delta(q2p5, b) = q3p2$

$\delta(q3p0, a) = q4p1 \quad \delta(q3p0, b) = q4p5$
$\delta(q3p1, a) = q4p0 \quad \delta(q3p1, b) = q4p4$
$\delta(q3p2, a) = q4p3 \quad \delta(q3p2, b) = q4p0$
$\delta(q3p3, a) = q4p2 \quad \delta(q3p3, b) = q4p1$
$\delta(q3p4, a) = q4p5 \quad \delta(q3p4, b) = q4p3$
$\delta(q3p5, a) = q4p4 \quad \delta(q3p5, b) = q4p2$

$\delta(q4p0, a) = q3p1 \quad \delta(q4p0, b) = q3p5$
$\delta(q4p1, a) = q3p0 \quad \delta(q4p1, b) = q3p4$
$\delta(q4p2, a) = q3p3 \quad \delta(q4p2, b) = q3p0$
$\delta(q4p3, a) = q3p2 \quad \delta(q4p3, b) = q3p1$
$\delta(q4p4, a) = q3p5 \quad \delta(q4p4, b) = q3p3$
$\delta(q4p5, a) = q3p4 \quad \delta(q4p5, b) = q3p2$

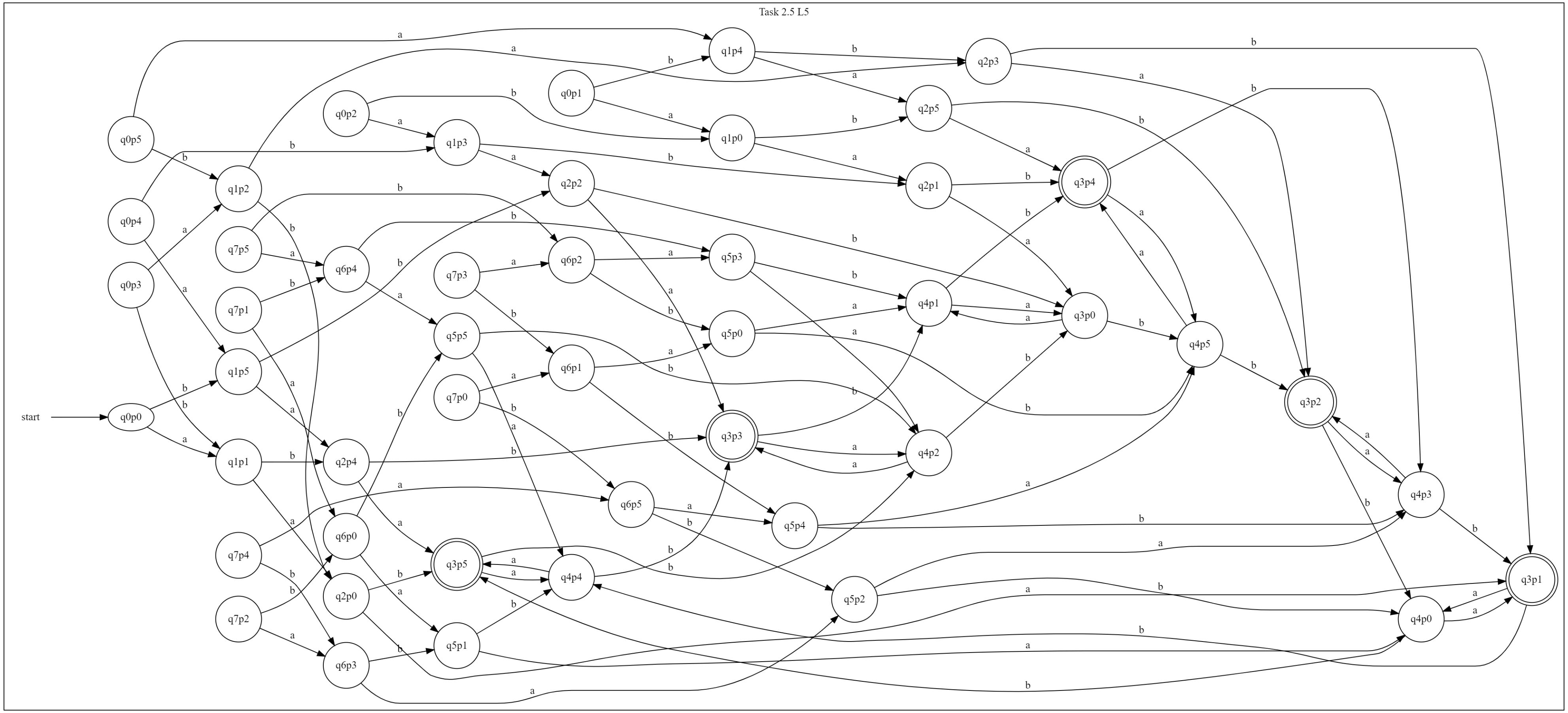
$\delta(q5p0, a) = q4p1 \quad \delta(q5p0, b) = q4p5$
$\delta(q5p1, a) = q4p0 \quad \delta(q5p1, b) = q4p4$
$\delta(q5p2, a) = q4p3 \quad \delta(q5p2, b) = q4p0$
$\delta(q5p3, a) = q4p2 \quad \delta(q5p3, b) = q4p1$
$\delta(q5p4, a) = q4p5 \quad \delta(q5p4, b) = q4p3$
$\delta(q5p5, a) = q4p4 \quad \delta(q5p5, b) = q4p2$

$\delta(q5p0, a) = q4p1 \quad \delta(q5p0, b) = q4p5$
$\delta(q5p1, a) = q4p0 \quad \delta(q5p1, b) = q4p4$
$\delta(q5p2, a) = q4p3 \quad \delta(q5p2, b) = q4p0$

$$\begin{array}{ll}
\delta(q5p3, a) = q4p2 & \delta(q5p3, b) = q4p1 \\
\delta(q5p4, a) = q4p5 & \delta(q5p4, b) = q4p3 \\
\delta(q5p5, a) = q4p4 & \delta(q5p5, b) = q4p2
\end{array}$$

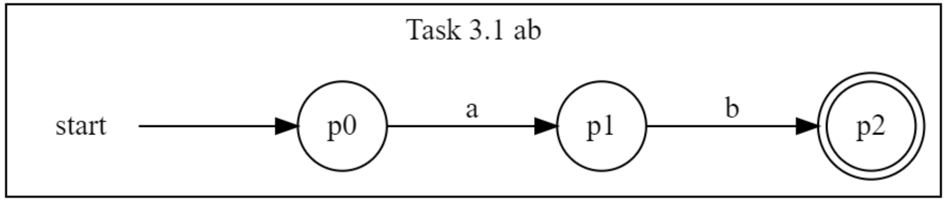
$$\begin{array}{ll}
\delta(q6p0, a) = q5p1 & \delta(q6p0, b) = q5p5 \\
\delta(q6p1, a) = q5p0 & \delta(q6p1, b) = q5p4 \\
\delta(q6p2, a) = q5p3 & \delta(q6p2, b) = q5p0 \\
\delta(q6p3, a) = q5p2 & \delta(q6p3, b) = q5p1 \\
\delta(q6p4, a) = q5p5 & \delta(q6p4, b) = q5p3 \\
\delta(q6p5, a) = q5p4 & \delta(q6p5, b) = q5p2
\end{array}$$

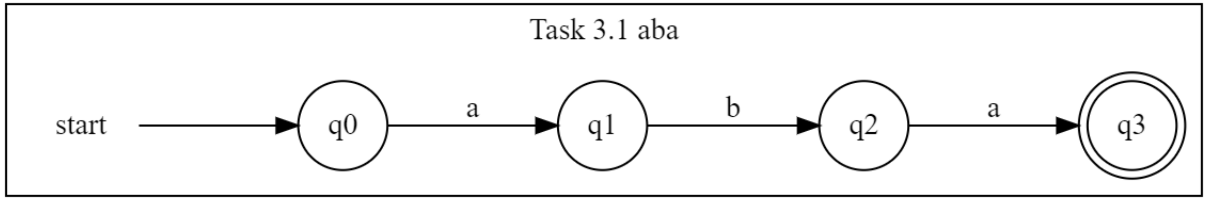
$$\begin{array}{ll}
\delta(q7p0, a) = q6p1 & \delta(q7p0, b) = q6p5 \\
\delta(q7p1, a) = q6p0 & \delta(q7p1, b) = q6p4 \\
\delta(q7p2, a) = q6p3 & \delta(q7p2, b) = q6p0 \\
\delta(q7p3, a) = q6p2 & \delta(q7p3, b) = q6p1 \\
\delta(q7p4, a) = q6p5 & \delta(q7p4, b) = q6p3 \\
\delta(q7p5, a) = q6p4 & \delta(q7p5, b) = q6p2
\end{array}$$

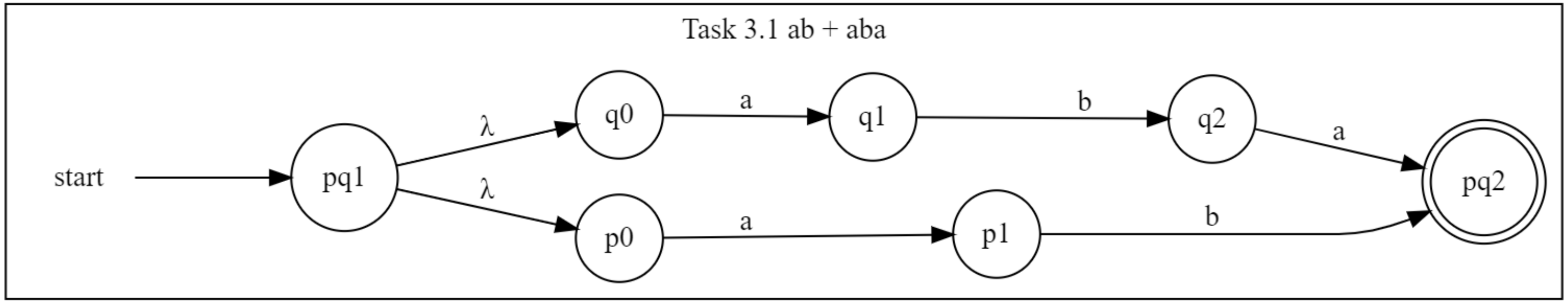

Task 2.5 L5
start
q0p0
q0p1
q0p2
q0p3
q0p4
q0p5
q1p0
q1p1
q1p2
q1p3
q1p4
q1p5
q2p0
q2p1
q2p2
q2p3
q2p4
q2p5
q3p0
q3p1
q3p2
q3p3
q3p4
q3p5
q4p0
q4p1
q4p2
q4p3
q4p4
q4p5
q5p0
q5p1
q5p2
q5p3
q5p4
q5p5
q6p0
q6p1
q6p2
q6p3
q6p4
q6p5
q7p0
q7p1
q7p2
q7p3
q7p4
q7p5

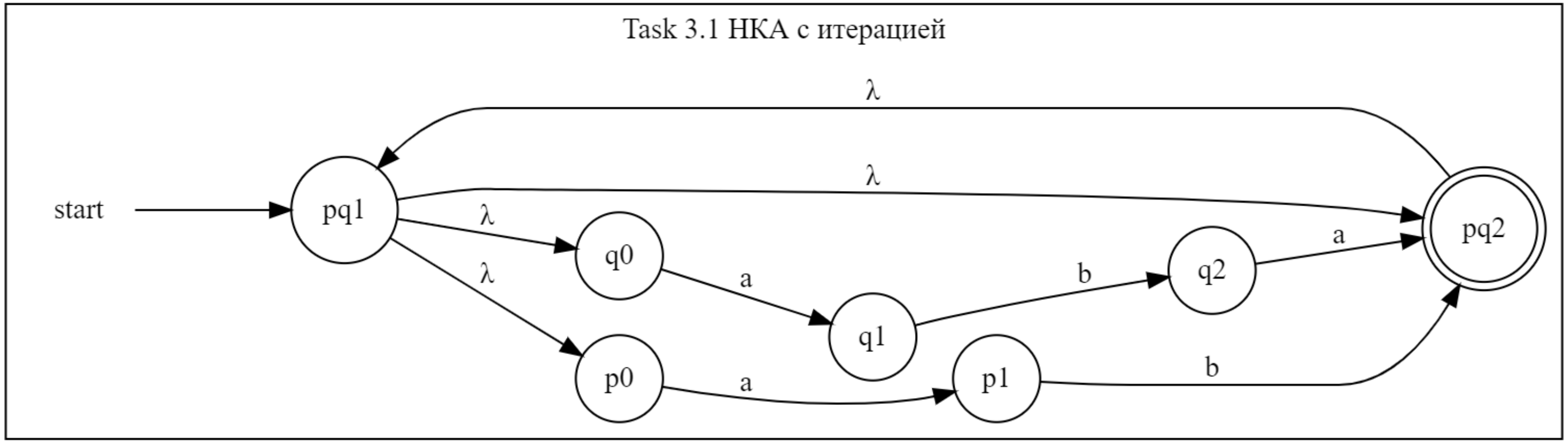
3 Задание №3. Построить минимальный ДКА по регулярному выражению

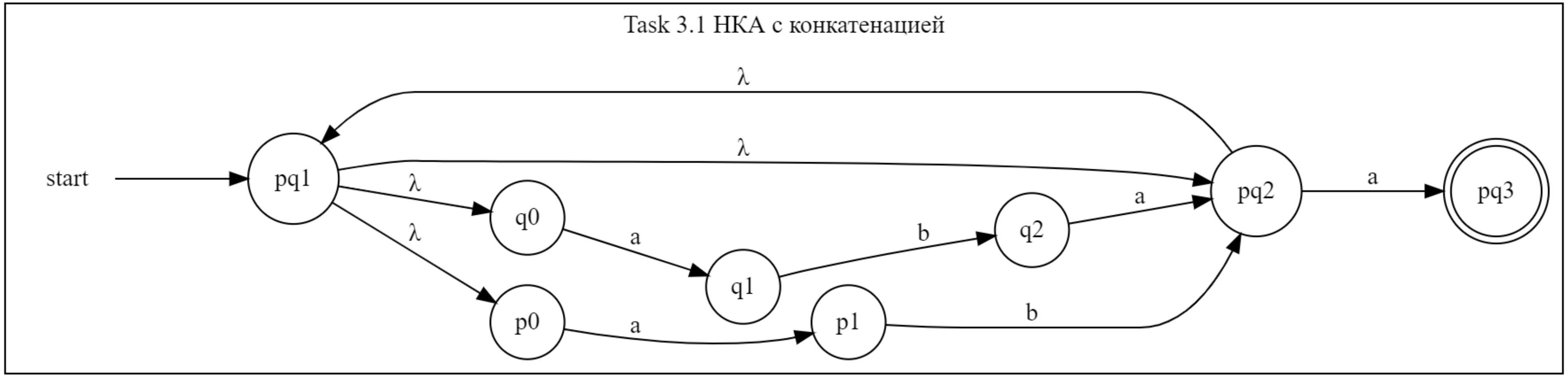
3.1 $(ab + aba)^*a$



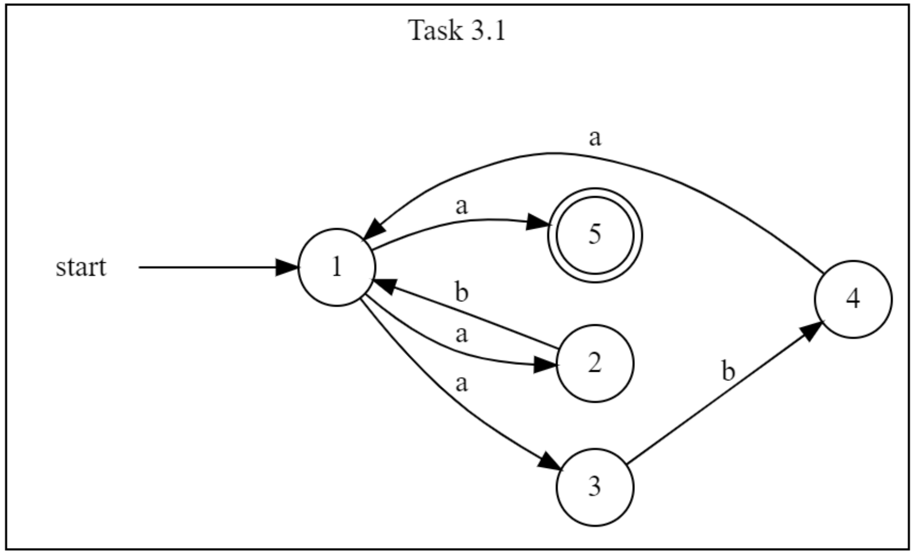




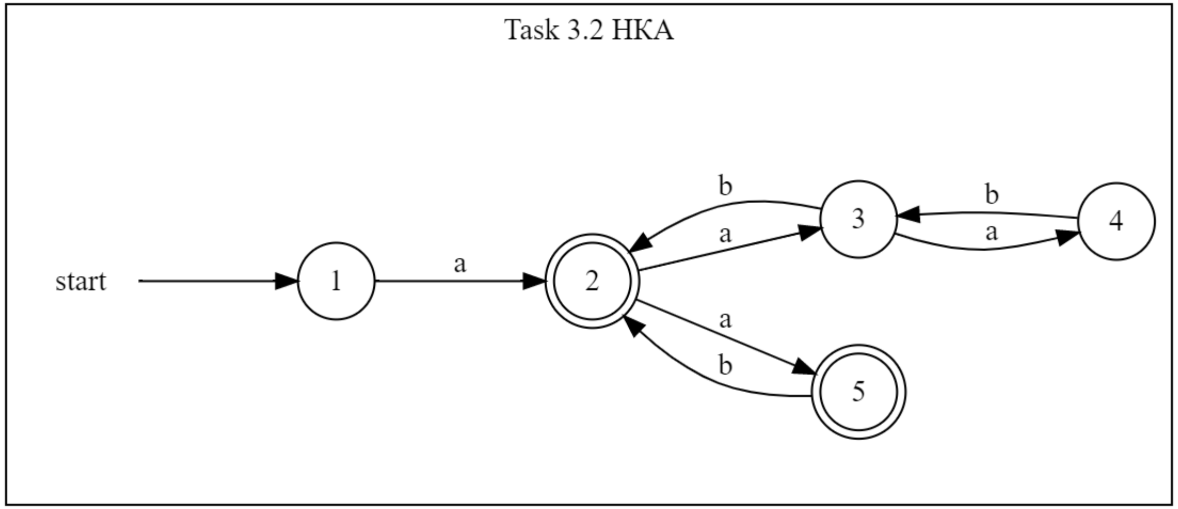


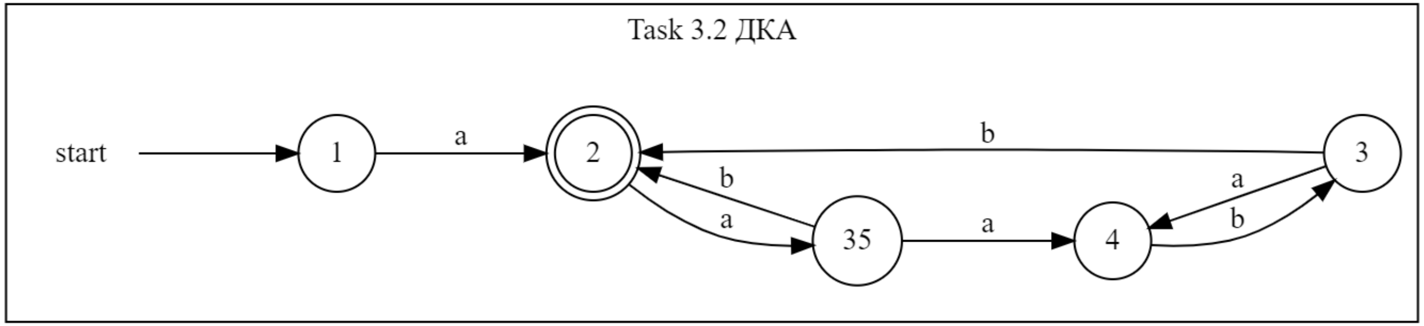


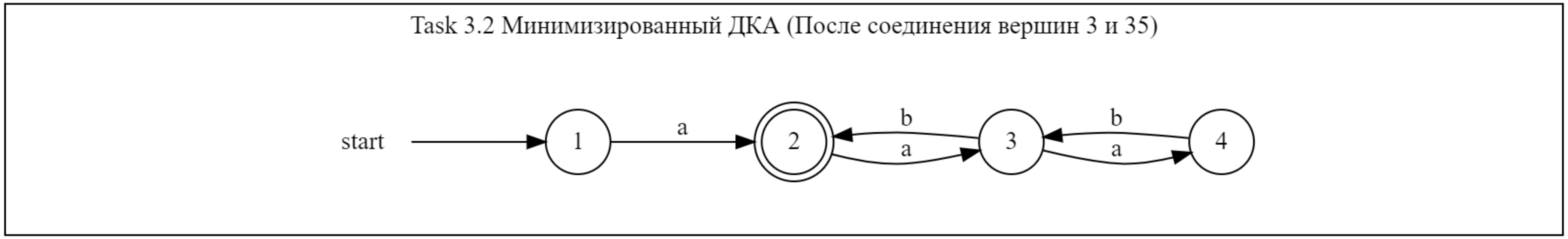
После удаления λ-переходов:


Task 3.1
start
1
2
3
4
5
a
a
b
a
a
b

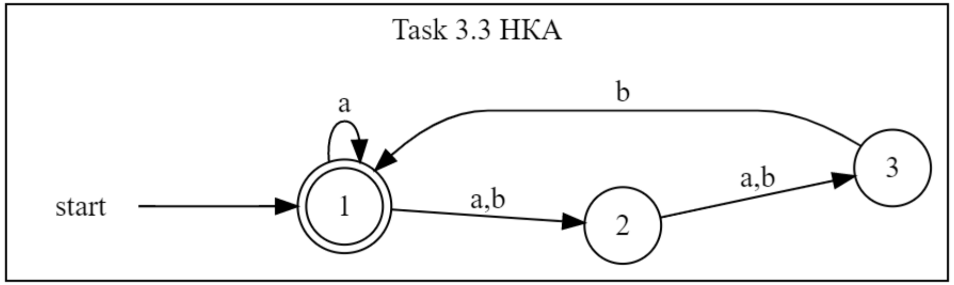
3.2 $a(a(ab)^*b)^*(ab)^*$


Task 3.2 НКА
start
1
a
2
b
a
3
b
a
4
a
b
5


Task 3.2 ДКА
start
1
a
2
b
3
b
a
a
b
35
a
4

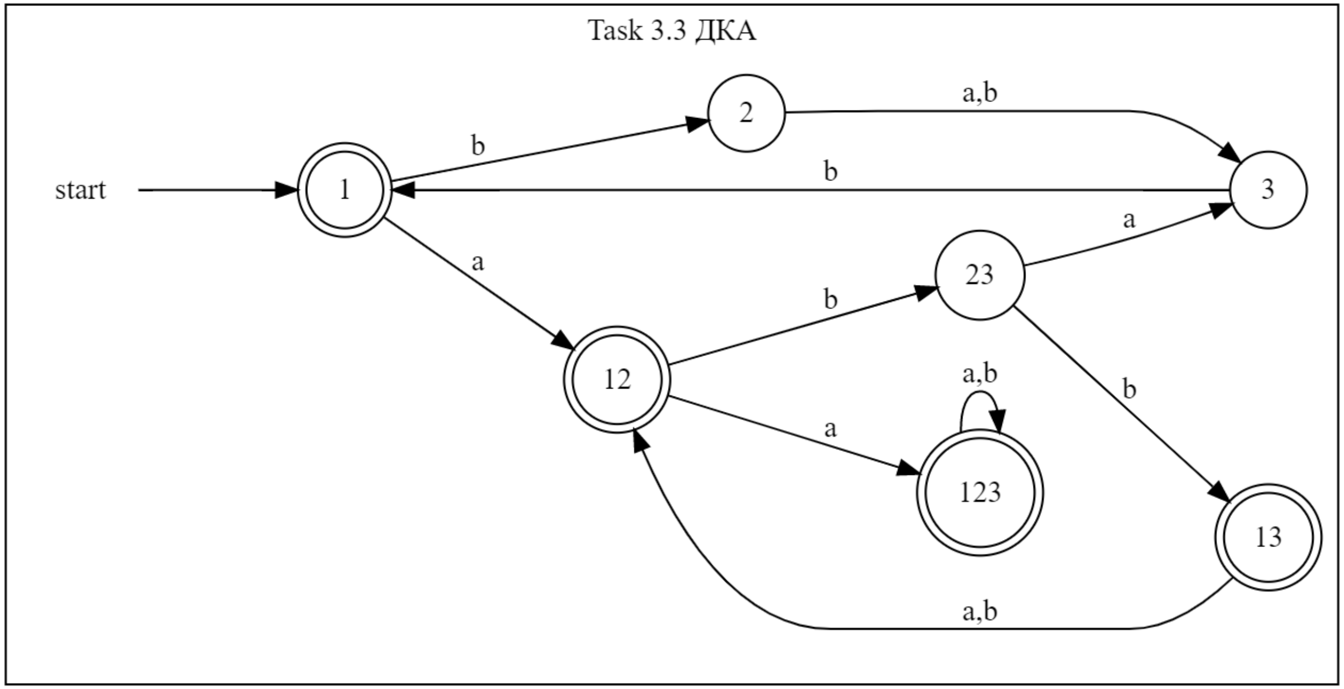


3.3 $(a + (a + b)(a + b)b)^*$



Переходы

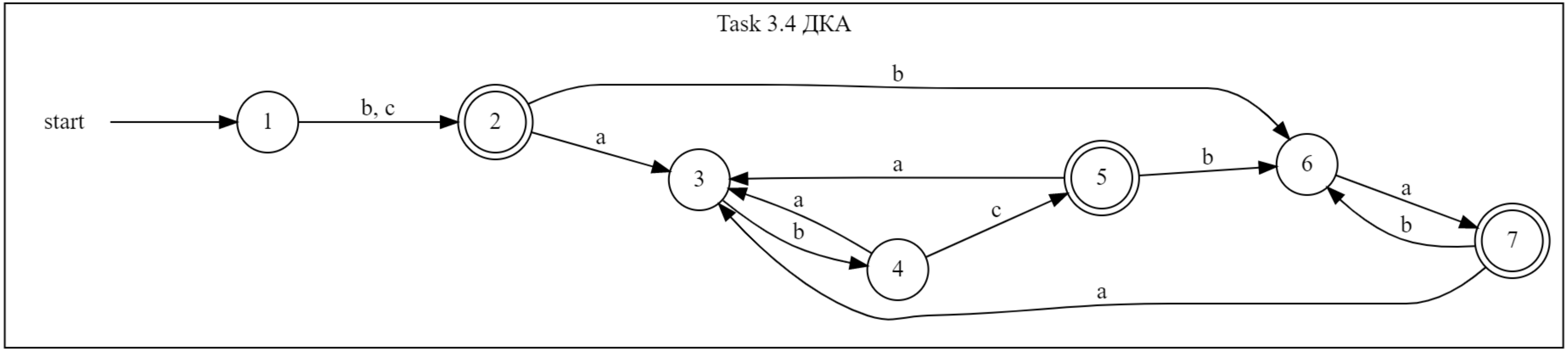
$\delta(1, a) = 12 \qquad \delta(1, b) = 2$
$\delta(12, a) = 123 \qquad \delta(12, b) = 23$
$\delta(2, a) = 3 \qquad \delta(2, b) = 3$
$\delta(123, a) = 123 \qquad \delta(123, b) = 123$
$\delta(23, a) = 3 \qquad \delta(23, b) = 13$
$\delta(3, a) = - \qquad \delta(3, b) = 1$
$\delta(13, a) = 12 \qquad \delta(13, b) = 12$



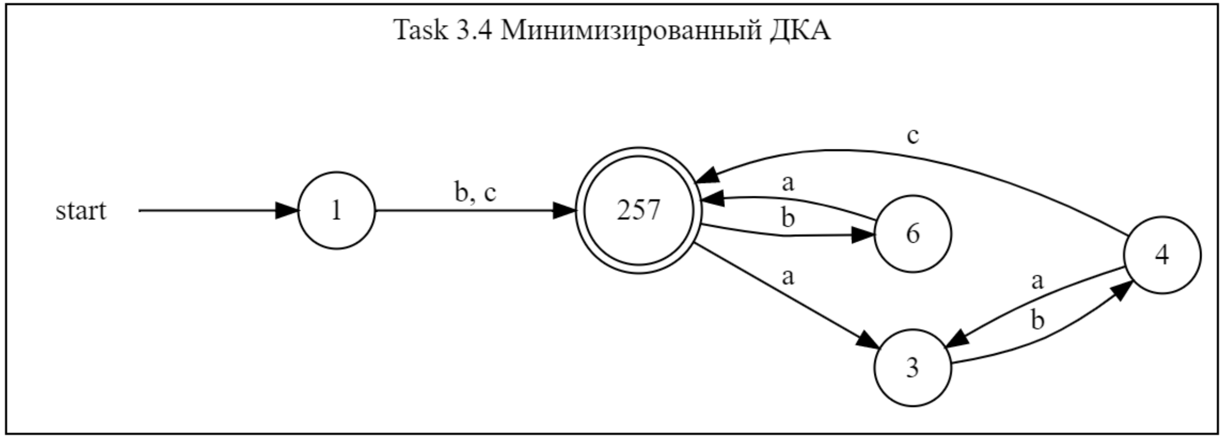
Классы эквивалентности:
k0:{1,12,123,13} {23,2,3}
k1:{1,12} {123,13} {23} {3} {2}
k2:{1} {12} {123} {13} {23} {3} {2}

Таким образом, построенный автомат минимален.

3.4 $(b + c)((ab)^*c + (ba)^*)^*$

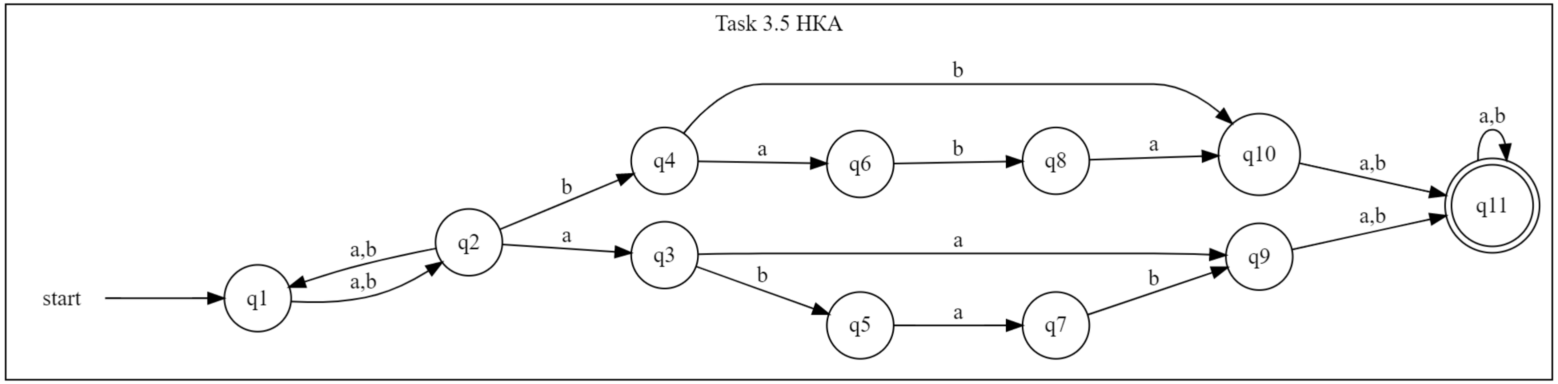


Task 3.4 ДКА
start
b, c
b
a
a
b
a
b
c
a
b
a
1
2
3
4
5
6
7

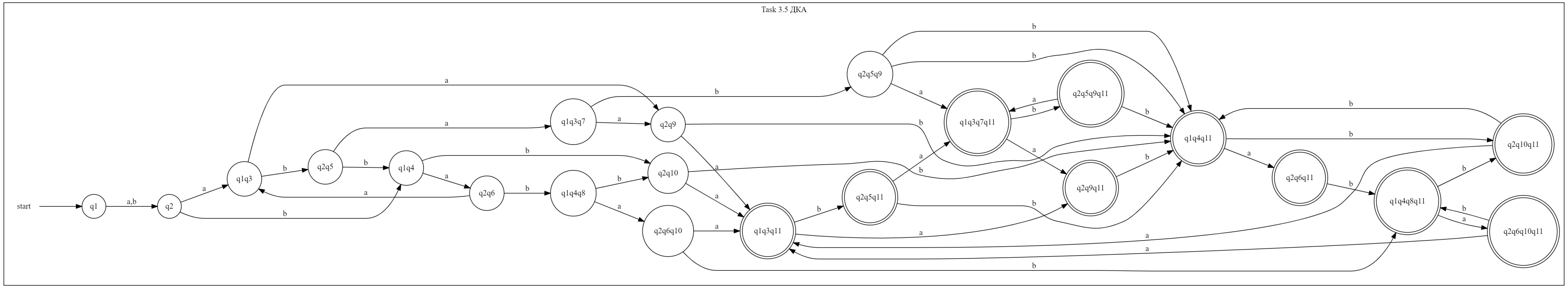


Task 3.4 Минимизированный ДКА
start
b, c
c
a
b
a
a
b
1
257
6
4
3

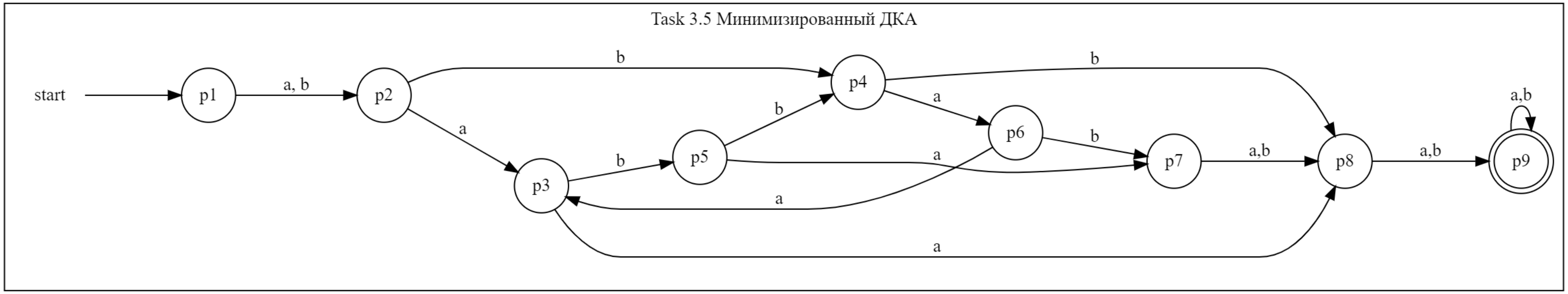
3.5 $(a+b)^+(aa+abab+bb+baba)(a+b)^+$



Эквивалентный ДКА:



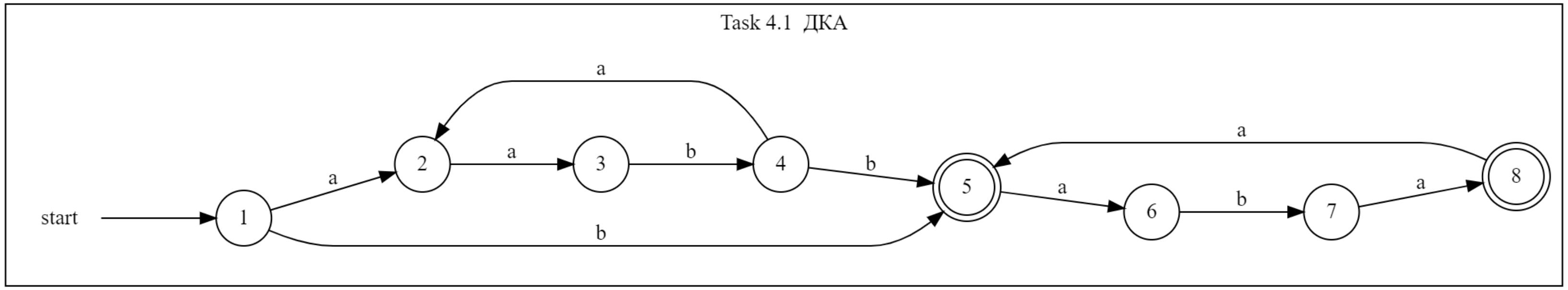
Минимизированный ДКА:


Task 3.5 Минимизированный ДКА
start
p1
a, b
p2
b
a
p3
b
p5
b
p4
a
p6
b
a
a
p7
a,b
p8
b
a
a,b
p9
a,b

4 Задание №4. Определить является ли язык регулярным или нет.

4.1 $L = \{(aab)^n b(aba)^m \mid \mathbf{n} \geq 0, m \geq 0\}$

Построим ДКА



Таким образом, язык является регулярным.

4.2 $L = \{uaav | u \in \{a,b\}^*, v \in \{a,b\}^* |u|_b \geq |u|_a\}$

Доказывать будем методом от противного. Предположим, что язык регулярен . Используем лемму о разрастании. Рассмотрим некоторое слово $w = b^n aaa^n, |w| = 2n + 2 \geq n$.
$w = xyz, |y| \neq 0, |xy| \leq n :$
$x = b^i, y = b^j, z = b^{n-i-j}aaa^n$
$i + j \leq n, j \neq 0$
$w = xy^k z = b^i b^{lj} b^{n-i-j} aaa^n$
Пусть $l = 0$, тогда: $w = b^{n-j}aaa^n \notin L, j \neq 0$
Лемма не выполняется, следовательно, исходное предположение неверно, язык не является регулярным

4.3 $L = \{a^m w | w \in \{a,b\}^*, 1 \leq |w|_b \leq m\}$

Используем лемму о разрастании
Предположим, что язык регулярен. Рассмотрим некоторое слово $w = a^n b^n, |w| = 2n \geq n$.
$w = xyz, |y| \neq 0, |xy| \leq n :$
$x = a^i, y = a^j, z = a^{n-i-j}b^n$
$i + j \leq n, j \neq 0$
$w = xy^k z = a^i a^{lj} a^{n-i-j} b^n$
Пусть $l = 0$, тогда: $w = a^{n-j}b^n \notin L, j \neq 0$

Лемма не выполняется, следовательно, исходное предположение неверно, язык не является регулярным

4.4 $L = \{a^k b^m a^n | k = n \vee m > 0\}$

Используем лемму о разрастании
Предположим, что язык регулярен. Рассмотрим некоторое слово $w = a^n b a^n, |w| = 2n + 1 \geq n$.
$w = xyz, |y| \neq 0, |xy| \leq n:$
$x = a^i, y = a^j, z = a^{n-i-j} b a^n$
$i + j \leq n, j \neq 0$
$w = xy^k z = a^i a^{lj} a^{n-i-j} b a^n$
Пусть $l = 2$, тогда: $w = a^{n+j} b a^n \notin L, j \neq 0$
Лемма не выполняется, следовательно, исходное предположение неверно, язык не является регулярным

4.5 $L = \{ucv | u \in \{a, b\}^*, v \in \{a, b\}^*, u \neq v^R\}$

Используем лемму о разрастании
Предположим, что язык регулярен.
Рассмотрим некоторое слово
$w = (ab)^n c(ab)^n = \alpha_1\alpha_2...\alpha_n...\alpha_{2n}...\alpha_{4n}\alpha_{4n+1}, |w| = 4n + 1 \geq n.$
$w = xyz, |y| \neq 0, |xy| \leq n:$
$x = \alpha_1\alpha_2...\alpha_i, y = \alpha_{i+1}\alpha_{i+2}...\alpha_{i+j}, z = \alpha_{i+j+1}\alpha_{i+j+2}...\alpha_{4n+1}c(ab)^n$
$i + j \leq n, j \neq 0$
$w = xy^l z = (\alpha_1\alpha_2...\alpha_i)(\alpha_{i+1}\alpha_{i+2}...\alpha_{i+j})^l(\alpha_{i+j+1}\alpha_{i+j+2}...\alpha_{4n+1}c(ab)^n)$

Пусть $l = 2$, тогда: $w = (\alpha_1\alpha_2...\alpha_i)(\alpha_{i+1}\alpha_{i+2}...\alpha_{i+j})^2(\alpha_{i+j+1}\alpha_{i+j+2}...\alpha_{4n+1}c(ab)^n) \notin L, j \neq 0$
Лемма не выполняется, следовательно, исходное предположение неверно, язык не является регулярным