Tarea 4

Edgar Robles, B45818

Pregunta 1

Teorema (Relaciones de Dualidad). 1. *Si v_k es el k-ésimo vector propio de norma 1 asociado a λ_k de la matriz $\frac{1}{n}XX^t$ entonces*

$$u_k = \frac{X^t v_k}{\sqrt{n\lambda_k}}$$

es el k-ésimo vector propio de norma 1 asociado a λ_k de la matriz $\frac{1}{n}X^tX$

2. *Si u_k es el k-ésimo vector propio de norma 1 asociado a λ_k de la matriz $\frac{1}{n}X^tX$ entonces*

$$v_k = \frac{Xu_k}{\sqrt{n\lambda_k}}$$

es el k-ésimo vector propio de norma 1 asociado a λ_k de la matriz $\frac{1}{n}XX^t$

La parte 1 fue hecha en clase. Para la parte 2, sea u_k el vector propio de norma 1 asociado a λ_k de la matriz $\frac{1}{n}X^tX$. Entonces se tiene que

$$\frac{1}{n}X^tXu_k = \lambda_k u_k.$$

Si multiplicamos por X a ambos lados por la izquierda obtenemos que

$$X(\frac{1}{n}X^tXu_k) = \frac{1}{n}XX^tXu_k = \lambda_k Xu_k.$$

Es decir, agrupando

$$\frac{1}{n}(XX^t)(Xu_k) = \lambda_k(Xu_k),$$

por lo que Xu_k es un vector propio de XX^t asociado a λ_k.

Si queremos normalizar este vector,

$$\left\|X^t u_k\right\|^2 = (X^t u_k)^t(X^t u_k) = u_k XX^t u_k = n\lambda_k v_k^t v_k = n\lambda_k \|v_k\| = n\lambda_k,$$

tomando la raíz cuadrada obtenemos que

$$\left\|X^t u_k\right\| = \sqrt{n\lambda_k}.$$

Entonces,

$$v_k = \frac{Xu_k}{\sqrt{n\lambda_k}}$$

es un vector propio de norma 1 de $\frac{1}{n}XX^t$ asociado al valor propio de λ_k.

Pregunta 2

Teorema. *El rango de las matrices* $\frac{1}{n}X^tX$ *y* $\frac{1}{n}XX^t$ *es a lo sumo* m *y los últimos* $n-m$ *valores propios de* $\frac{1}{n}XX^t$ *son nulos.*

Como X tiene la forma $n \times m$ con $n > m$, entonces se debe cumplir que si $f_i \in \mathbb{R}^m$ es la fila en la posición i, entonces deben haber al menos $n-m$ filas que son linealmente dependientes. Esto se debe a que, si suponemos que existen m filas $\{f_{\sigma_1}, \ldots f_{\sigma_m}\}$ l.i., entonces estas forman una base de $\mathbb{R}^m$, por lo que podrían representar cualquier fila no en la base.

Por esta razón, $\dim\ker(X) \geq n-m$. Por el teorema de rango nulidad, tenemos que

$$\operatorname{rank}(X) = \dim(\mathbb{R}^n) - \dim\ker(X),$$

y por ende $\operatorname{rank}(X) \leq m$.

Notemos que si tomamos $u \in \ker(X^tX)$ entonces $X^tXu = 0$. Entonces si multiplicamos ambos lados por u^t por la izquierda,

$$u^tX^tXu = u^t0 = 0.$$

Es decir,

$$0 = u^tX^tXu = (Xu)^t(Xu) = \|Xu\|^2$$

entonces $\|Xu\| = 0$ y por ende $Xu = 0$, por lo que $u \in \ker(X)$ y por ende $\ker(X^tX) \subseteq \ker(X)$.

Ahora, si $u \in \ker(X)$, entonces $Xu = 0$ y entonces $X^tXu = X^t0 = 0$ y por ende $u \in \ker(X^tX)$. Por lo que se concluye que $\ker(X) \subseteq \ker(X^tX)$ y por ende $\ker(X) = \ker(X^tX)$.

De manera análoga, sea $u \in \ker(XX^t)$, entonces $XX^tu = 0$. Si multiplicamos ambos lados por u^t obtenemos que $u^tXX^tu = 0$ y por ende

$$0 = u^tXX^tu = (X^tu)^t(X^tu) = \left\|X^tu\right\|^2.$$

Entonces, $X^tu = 0$ y por ende $u \in \ker(X^t)$. De la misma manera, $u \in \ker(X^t)$ significa que $X^tu = 0$ y por ende $XX^tu = 0$, entonces $u \in \ker(XX^t)$ y por ende $\ker(X^t) = \ker(XX^T)$.

Ahora, por el teorema de rango-nulidad tenemos que

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(X^tX) &= \dim(\mathbb{R}^n) - \dim\ker(X^tX)\\ &= n - \dim\ker(X)\\ &\leq n - m,\end{aligned}$$

ahora, para probar igualdad primero necesitamos probar que $n-m = \dim\ker(X) - \dim\ker(X^t)$:

Tenemos que $dim(\mathbb{R}^n) = \operatorname{rank}(X) + \dim\ker(X)$ y $\dim(\mathbb{R}^m) = \operatorname{rank}(X^t) + \dim\ker(X^t)$, además sabemos que $\operatorname{rank}(X) = \operatorname{rank}(X^t)$. Entonces, si restamos uno del otro,

$$n - m = \dim\ker(X) - \dim\ker(X^t)$$

o en otra forma,

$$\dim\ker(X^t) = m - n + \dim\ker(X).$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{rank}(XX^t) &= \dim(\mathbb{R}^m) - \dim\ker(X^t) \\
&= m - (m - n + \dim\ker(X)) \\
&= n - \dim\ker(X) \\
&= \dim(\mathbb{R}^n) - \dim\ker(X^t X) \\
&= \operatorname{rank}(X^t X).
\end{aligned}$$

Eso quiere decir que $\operatorname{rank}(XX^t) = \operatorname{rank}(X^t X) = m$.

Sean $\beta_1, \ldots \beta_k$ los valores propios no nulos de la matriz XX^t. Suponga a modo de contradicción que XX^t tiene $m+1$ valores propios no nulos. Entonces, se cumple que cada vector propio $v_1, \ldots v_{m+1}$ asociado a cada valor propio es linealmente independiente. Entonces $\{v_1, \ldots v_n\} \subseteq \operatorname{Im}\left\{XX^t\right\}$, por lo que $\operatorname{rank}(XX^t) \geq m+1$, pero en el otro ejercicio concluimos que $\operatorname{rank}(XX^t) \leq m$, por lo que llegamos a una contradicción, entonces los últimos $n-m$ valores propios deben ser nulos.