1. Parcial 1

1.1. Día 1— 13-3-18

Recordar definición de norma.

Definición 1.1.1. Si $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d$, defina $||\mathbf{x}||=(\sum_i x_i^2)^{\frac{1}{2}}$

Teorema 1.1.2. *La norma cumple las siguientes propiedades:*
1. $||\mathbf{x}||\geqslant 0$ *y* $||\mathbf{x}||=0 \Longleftrightarrow \mathbf{x}=0$
2. $\forall a\in\mathbb{R}\forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d: ||a\mathbf{x}||=|a|||\mathbf{x}||$
3. $\forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^d: ||\mathbf{x}+\mathbf{y}||\leqslant||\mathbf{x}||+||\mathbf{y}||$

Definición 1.1.3. Dado $x_0\in\mathbb{R}^d$ definimos

$$B(\mathbf{x}_0,r):=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d: ||\mathbf{x}-\mathbf{x}_0||<r\}$$

Definición 1.1.4. Decimos que $C\subseteq\mathbb{R}^d$ es abierto si para todo $\mathbf{x}_0\in C$ existe $r>0$ tal que $B(\mathbf{x}_0,r)\subseteq C$.

Cúales son los abiertos sobre $\mathbb{R}$? Pensaríamos en intervalos abiertos, pero la respuesta correcta es uniones disjuntas contables de intervalos abiertos.

Lema 1.1.5. *Se cumple que:*
1. $\varnothing,\mathbb{R}^d$ *son abiertos*
2. Toda bola es abierta.
3. Dados $C_1,C_2\subseteq\mathbb{R}^d$, *entonces* $C_1\cap C_2$ *es abierto.*
4. La unión de abiertos es abierta y la intersección finita de abiertos es abierta.

Prueba 1. *Para 2., si* $\mathbf{y}\in B(\mathbf{x}_0,r)$ *tenemos* $||\mathbf{x}_0-\mathbf{y}||\leqslant r$. *Tome* $\mathbf{z}\in B(\mathbf{y},r_1)$ *y considere* $||\mathbf{x}_0-r||$. *Vea que*

$$\begin{aligned}||\mathbf{x}_0-\mathbf{z}||&\leqslant||\mathbf{x}_0-\mathbf{y}||+||\mathbf{y}-\mathbf{z}||\\&<||\mathbf{x}_0-\mathbf{y}||+r-||\mathbf{x}_0-\mathbf{y}||=r\end{aligned}$$

Para 3. tome $\mathbf{x}\in C_1\cap C_2$. *Existen* r_1,r_2 *tales que* $B(\mathbf{x},r_1)\subseteq C_1$ *y* $B(\mathbf{x},r_2)\subseteq C_2$. *Sin perdida de generalidad, asuma que* $r_1<r_2$, *entonces* $B(\mathbf{x},r_1)\subseteq B(\mathbf{x},r_2)\subseteq C_2$. *Por lo tanto* $B(\mathbf{x},r_1)\subseteq C_1\cap C_2$.

En 4. tome $\mathbf{x}\in\cup_{i\in I}C_i$, *entonces existe* $j\in[d]:\mathbf{x}\in C_j$. *Tenemos que* C_j *es abierto y por tanto hay una bola adentro de* C_j. *Esta bola está dentro de la unión. Por lo tanto la unión es abierta.*

Ejercicio 1.1.6. Terminar de probar el lema.

Definición 1.1.7. $F\subseteq\mathbb{R}^d$ es cerrado si $F^C:=\mathbb{R}^d\backslash F$ es abierto.

Lema 1.1.8. *Las siguientes son propiedades de cerrados.*
1. $\varnothing,\mathbb{R}^d$ *son cerrados.*
2. La unión finita de cerrados es cerrada.
3. La intersección infinita, inclusive no numerable, de cerrados es cerrada.

Prueba 2. *1. es inmediato de la definición de conjunto cerrado. Como* $\varnothing,\mathbb{R}^d$ *son abiertos, sus complementos son cerrados. Estos son* $\mathbb{R}^d$ *y* $\varnothing$ *respectivamente. Suponga que* $(F_i)_{i\in I}$ *es una familia arbitraria de cerrados. Note que* $(\cap_{i=1}^{\infty}F_i)^C=\cup_{i=1}^{\infty}(F_i)^C$ *es abierto pues* $(F_i)^C$ *es abierto.*

Ejercicio 1.1.9. Terminar de probar el lema.

Definición 1.1.10. Decimos que $\mathbf{x}_0$ es un punto de acumulación de $H\subseteq\mathbb{R}^d$ si existe $(\mathbf{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq H$ tal que $\mathbf{y}_n\to\mathbf{x}_0$.

Ejemplo 1.1.11. El conjunto de los números de la forma $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene como punto de acumulación 0. Sin embargo 0 no es de la forma $\frac{1}{n}$.

Lema 1.1.12. F *es cerrado si y sólo si contiene todos sus puntos de acumulación.*

Prueba 3. *($\Rightarrow$) Suponga que tenemos un conjunto cerrado F y sea x un punto de acumulación de F. Asuma por contradicción que $x \in F^C$. Esto significa que existe $r>0$ tal que $B(x,r) \subseteq F^C$. Esto nos lleva a una contradicción, pues existe $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq F$ tal que $y_n \to x$. O sea existe $n_0 \geqslant 0$ tal que para todo $n>n_0$: $||y_n - x|| < r$.*

($\Leftarrow$) Ahora suponga que F contiene todos sus puntos de acumulación. Suponga que F no es cerrado lo que nos dice que F^C no es abierto. Así, existe un punto $x_0 \in F^C$ tal que no existe $r>0: B(x_0,r) \subseteq F^C$. Decir esto es lo mismo que decir que existe un punto de F que está en $B(x_0,r)$. Luego $\exists y_r \in B(x_0,r) \cap F$. En particular $y_n \in B(x_0,\frac{1}{n}) \cap F$ o sea $||x_0 - y_n|| < \frac{1}{n} \Rightarrow y_n \to x_0$ y así x_0 es un punto de acumulación.

Observación 1.1.13. La siguiente es una prueba, en prosa, distinta del hecho anterior.

($\Rightarrow$) Suponga que F es cerrado, entonces F^C es abierto. Entonces existe un vecindario alrededor de cada punto de F^C contenido dentro de F^C. En otras palabras, cualquier punto fuera de F no es aproximable (no hay un vecindario) por puntos dentro de él. Por contraposición, cualquier punto aproximable de F está en F.

($\Leftarrow$) Ahora suponga que F contiene todos sus puntos de acumulación. Esto nos dice que todo punto fuera de F no es punto de acumulación de F. Viéndolo de otra manera, cualquier punto fuera de F tiene un vecindario enteramente contenido en F^C. Esto nos dice que todo punto de F^C tiene un vecindario dentro de él y por lo tanto F^C es abierto.

Hasta ahora, sólo hemos usado propiedades de la norma y el hecho de que las bolas son abiertas. Las cosas que cumplen la desigualdad triangular no son necesariamente normas, sino distancias. No es necesario estar en un espacio vectorial.

Espacios Métricos

Definición 1.1.14. Dado un conjunto E, una métrica es una función

$$\mathfrak{m}\colon E \times E \to [0,\infty[$$

tal que

1. $\forall x,y \in E$: $\mathfrak{m}(x,y) \geqslant 0$ y $\mathfrak{m}(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.
2. $\forall x,y \in E$: $\mathfrak{m}(x,y) = \mathfrak{m}(y,x)$.
3. $\forall x,y,z \in E$: $\mathfrak{m}(x,y) \leqslant \mathfrak{m}(x,z) + \mathfrak{m}(z,y)$.

Decimos que $(E,\mathfrak{m})$ es un espacio métrico.

Ejemplo 1.1.15. Sea $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$, defina

1. $||\mathbf{x}||_\infty = \sup\{|x_i| : i \in [d]\}$ y $\mathfrak{m}_\infty(\mathbf{x},\mathbf{y}) = ||\mathbf{x}-\mathbf{y}||_\infty$
2. $||\mathbf{x}||_1 = \sum_{i\in[d]} |x_i|$ y $\mathfrak{m}_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) = ||\mathbf{x}-\mathbf{y}||_1$

Veamos que estas funciones en efecto son normas y que las distancias también cumplen la definición de serlo.

Prueba 4. *Sean $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$. Ahora:*

- $||\mathbf{x}||_1 = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i\in[d]} |x_i| = 0 \Longleftrightarrow \forall i \in [d]\colon x_i = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = 0$
- $||a\mathbf{x}||_1 = \sum_{i\in[d]} |ax_i| = |a| \sum_{i\in[d]} |x_i| = |a| ||\mathbf{x}||_1$
- $||\mathbf{x}+\mathbf{y}||_1 = \sum_{i\in[d]} |x_i + y_i| \leqslant \sum_{i\in[d]} |x_i| + |y_i| = ||\mathbf{x}||_1 + ||\mathbf{y}||_1$

Ejercicio 1.1.16. Muestre que la función $||\cdot||_\infty$ también define una norma. Muestre que las métricas inducidas por estas normas en efecto son métricas.

Observación 1.1.17. Del ejercicio anterior, basta mostrar que cualquier norma sobre un e.v. finito-dimensional induce una métrica.

Prueba 5. *Sea (V,N) un e.v. dim. finita con norma N. Sean $x,y,z \in V$, defina $\mathfrak{m}(x,y) = N(x-y)$:*

- $\mathfrak{m}(x,y) = 0 \Longleftrightarrow N(x-y) = 0 \Longleftrightarrow x - y = 0_V \Longleftrightarrow x = y$.
- $\mathfrak{m}(x,y) = N(x-y) = N((-1)(y-x)) = |-1| N(y-x) = N(y-x) = \mathfrak{m}(y,x)$
- $\mathfrak{m}(x,z) = N(x-z) = N(x + (-y+y) - z) \leqslant N(x-y) + N(y-z) = \mathfrak{m}(x,y) + \mathfrak{m}(y,x)$.

Por lo tanto $(V,\mathfrak{m})$ *es un espacio métrico.*

Teorema 1.1.18. $||\cdot||$ *y* $||\cdot||_1$ *son equivalentes.*

Prueba 6. *Note que* $||x||_1 \leqslant d\sup\{|x_i|: i\in[d]\}\leqslant d||x||$ *y elevando a ambos lados al cuadrado la definición de norma Euclídea inmediatamente tenemos* $||x||\leqslant ||x||_1$.

Ejercicio 1.1.19. Pruebe que la norma $||\cdot||_\infty$ y $||\cdot||$ son equivalentes. Más aún muestre que todas las normas sobre $\mathbb{R}^d$ son equivalentes.

1.2. Día 2— 16-3-18

Recuerde que con el concepto de norma podemos definir una distacia. Probar que las normas son equivalentes es lo mismo que lo siguiente.

Ejercicio 1.2.1. Para cualquier norma N sobre $\mathbb{R}^d$, muestre que existen $c_1 = c_1(d), c_2 = c_2(d)$ tales que

$$c_1||\mathbf{x}|| \leqslant N(\mathbf{x}) \leqslant c_2||\mathbf{x}||$$

Continuamos con otro ejemplo de espacio métrico.

Ejemplo 1.2.2. Sea A un conjunto, defina $E:=\{f: A\to\mathbb{R}: f \text{ es acotada}\}$ con $\mathfrak{m}(f,g)=\sup_{x\in A}|f(x)-g(x)|$. Entonces $(E,\mathfrak{m})$ es un espacio métrico.

Prueba 7. *Note que* $\mathfrak{m}(f,g)\geqslant 0$ *y* $\mathfrak{m}(f,g)=0 \iff 0=\sup_{x\in A}|f(x)-g(x)| \iff \forall x\in A 0=|f(x)-g(x)|$. *Además si* $f,g,h\in E$, *se tiene que*

$$\begin{aligned}|f(x)-g(x)| &\leqslant |f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|\\ &\leqslant \mathfrak{m}(f,h)+\mathfrak{m}(h,g)\end{aligned}$$

Así $\mathfrak{m}(f,g)\leqslant\mathfrak{m}(f,h)+\mathfrak{m}(h,g)$

En el ejercicio anterior, es necesario que las funciones sean acotadas. De lo contrario dicho supremo puede no existir. A esta métrica se le conoce como la métrica de convergencia uniforme por lo siguiente.

Ejercicio 1.2.3. Si $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}\subseteq E$, entonces $\mathfrak{m}(f_k,f)\to 0$ si $k\to\infty$ si y sólo si $f_k\to f$ uniformemente.

Conceptos Topológicos

Definición 1.2.4. Sea $(E,\mathfrak{m})$ un espacio métrico. Defina la bola abierta como

$$B(x_0,r)=\{y\in E: \mathfrak{m}(x_0,y)<r\}$$

Diremos que $G\subseteq E$ es abierto si

$$\forall x\in G \exists r>0: B(x,r)\subseteq G$$

De igual forma que en $\mathbb{R}^d$, tenemos las siguientes propiedades.

Lema 1.2.5. *Sea* E *un espacio métrico.*
1. $\emptyset, E$ *son abiertos.*
2. *Si* G_1,G_2 *son abiertos, entonces* $G_1\cap G_2$ *es abierto.*
3. *Si* A *es un conjunto y* G_λ *es abierto para todo* $\lambda\in A$ *entonces* $\cup_{\lambda\in A}G_\lambda$ *es abierto.*

Ejercicio 1.2.6. Adapte la prueba del lema 1.1.5 a este lema.

Definición 1.2.7. Se dice que $F\subseteq E$ es cerrado si $E\backslash F$ es abierto.

Las propiedades de los cerrados son las mismas que en 1.1.8 intercambiando $\mathbb{R}^d$ por E.

Definición 1.2.8. Dado $A\subseteq E$, decimos que $x_0\in A$ es un punto interior de A si existe $r>0$ tal que $B(x_0,r)\subseteq A$. Análogamente definimos el interior de A como el conjunto de los puntos interiores de A. Denotamos A^o al interior.

Es importante notar que A^o puede ser vacío.

Lema 1.2.9. *Un conjunto $G \subseteq E$ es abierto si y sólo si $G = G^o$.*

Definición 1.2.10. Decimos que $V \subseteq E$ es un vecindario de $x_0 \in E$ si $x_0 \in V^o$. Es decir, existe $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subseteq V$.

Veamos un hecho interesante sobre abiertos. Sea $G \subseteq A$ con G abierto. Si $x_0 \in G$ existe $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subseteq G \subseteq A$. Luego $x_0 \in A^o$ y $G \subseteq A^o$. Es decir, A^o es el abierto más grande contenido en A. Esto prueba el apartado *2*. del siguiente lema.

Lema 1.2.11. *Sea $A, B \subseteq E$, entonces*
1. A es abierto si y sólo si $A = A^o$.
2. A^o es el abierto más grande contenido en A.
3. Si $A \subseteq B$, entonces $A^o \subseteq B^o$.
4. $(A \cap B)^o = A^o \cap B^o$.

Prueba 8. *Para 4. note que $A^o \cap B^o \subseteq A \cap B$. Luego $A^o \cap B^o \subseteq (A \cap B)^o$. Además $(A \cap B)^o \subseteq A \cap B \subseteq A$. Como $(A \cap B)^o$ es abierto entonces $(A \cap B)^o \subseteq A^o$. De igual forma $(A \cap B)^o \subseteq B^o$.*

1. Suponga que A es abierto, por el apartado *2* tenemos que si G es un subconjunto abierto de A entonces $G \subseteq A^o$. En particular como A es abierto, $A \subseteq A^o$. La otra dirección es inmediata pues A^o es abierto por definición.
3. Observe que por el apartado *2* tenemos que $A^o \subseteq A \subseteq B$ es un subconjunto abierto de B, o sea está contenido en su interior. Así $A^o \subseteq B^o$.

Definición 1.2.12. Se dice que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$ converge a x si $\lim_{n \to \infty} \mathfrak{m}(x_n, x) = 0$. Esto es lo mismo que decir que dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que $\mathfrak{m}(x_n, x) < \varepsilon$ cuando $n \geqslant n_0$. Denotamos $x_n \to x$.

Sea x un punto y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B^C$ tal que $x_n \to x$. Si $x \in B^o$, entonces existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq B$. Pero existe n_0 tal que $x_n \in B(x, r)$ para todo $n \geqslant n_0$.

Definición 1.2.13. Dado $x_0 \in E$, decimos que x_0 está en la frontera de A si para todo $r > 0$ se cumple $B(x_0, r) \cap A \neq \varnothing \neq B(x_0, r) \cap A^C$. En palabras de sucesiones, existen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ y $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A^C$ tales que $x_n \to x_0$ y $y_n \to x_0$. Denotamos la frontera de A como ∂A.

Inmediatamente se sigue que $\partial(A) = \partial(A^C)$.

Definición 1.2.14. Decimos que $x_0 \in E$ está en la adherencia de A si para todo $r > 0$ se cumple $B(x_0, r) \cap A \neq \varnothing$. Definimos la clausura de A como el conjunto de puntos de adherencia de A, denotado por $\overline{A}$. En términos de sucesiones, $x_0 \in \overline{A}$ si y sólo si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_n \to x_0$.

Note que $\mathfrak{m}(x_n, x_0) \to 0$ entonces $\inf\{\mathfrak{m}(x_0, a) : a \in A\} = 0$ pues no existe $r > 0$ tal que $\mathfrak{m}(x_0, a) > r$.

Definición 1.2.15. Dados $A, B \subseteq E$ definimos $\mathfrak{m}(A, B) = \inf\{\mathfrak{m}(x, y) : (x, y) \in A \times B\}$.

Luego, si $x_0 \in \overline{A}$, se tiene $\mathfrak{m}(\{x_0\}, A) = 0$.

Observación 1.2.16. El detalle anterior no es obvio. Más aún es una equivalencia.

($\Rightarrow$) Suponga que x_0 es un punto de adherencia. Entonces $\forall r > 0 : B(x_0, r) \cap A \neq \varnothing$. Ahora sea $y \in B(x_0, r) \cap A$, luego $\mathfrak{m}(\{x_0\}, A) \leqslant \mathfrak{m}(x_0, y) < r$ y como $r > 0$ es arbitrario se sigue que $\mathfrak{m}(\{x_0\}, A) = 0$.
($\Leftarrow$) Ahora suponga que x_0 es un punto tal que $\mathfrak{m}(\{x_0\}, A) = 0$. Entonces $\forall r > 0 \exists y_r \in A : \mathfrak{m}(x_0, y_r) < r$. Así $B(x_0, r) \cap A \neq \varnothing$. Pero entonces cualquier bola abierta centrada en x_0 tendrá intersección no vacía con A por lo que x_0 está en su adherencia.

Ejemplo 1.2.17. Considere $A=\{n\colon n\geqslant 1\}$ y $B=\left\{n+\frac{1}{n}\colon n\geqslant 1\right\}$. Como $\mathfrak{m}(n,n+\frac{1}{n})=|n-(n+\frac{1}{n})|=\frac{1}{n}$ entonces $\mathfrak{m}(A,B)=0$.

Usualmente la mente lo traiciona a uno pues uno piensa en situaciones con conjuntos acotados. El ejemplo anterior muestra que estos conjuntos se tocan en infinito.

Ahora un punto de acumulación es un punto de adherencia sólo que la intersección con A no puede ser trivial. O sea la intersección no puede ser el mismo punto.

Definición 1.2.18. Un punto $x_0\in E$ es un punto de acumulación de A si $(B(x_0,r)\backslash\{x_0\})\cap A\neq\varnothing$ para todo $r>0$. El conjunto de los puntos de acumulación se denota A' Un punto $x_0\in A$ es un punto aislado de A si existe $r>0$ tal que $B(x_0,r)\cap A=\{x_0\}$.

Ejemplo 1.2.19. Considere $A=\{(x,y)\colon y\geqslant 0\}\subseteq\mathbb{R}^2$ con la métrica usual. Encuentre el interior, frontera y adherencia de A.

Vea que $A^o=A\backslash\{(x,y)\colon y=0\}$.
Sea $(x,y)\in A^o$, tome $r=\frac{y}{2}$ y $(z,w)\in B((x,y),r)$. Entonces $||(z,w)-(x,y)||<r=\frac{y}{2}$, así $|w-y|\leqslant\sqrt{(z-x)^2+(w-y)^2}<\frac{y}{2}$. Por lo que

$$
\begin{aligned}
&|w-y|<\frac{y}{2}\\
\Longleftrightarrow&-\frac{y}{2}<w-y<\frac{y}{2}\\
\Longleftrightarrow&0<\frac{y}{2}<w<y
\end{aligned}
$$

Además $\partial(A)=\{(x,0)\colon x\in\mathbb{R}\}$ pues $B((x,0),r)$ contiene $(x,\frac{r}{2}),(x,-\frac{r}{2})$.
Finalmente $\overline{A}=A$.

Ejercicio 1.2.20. Caracterice los puntos de acumulación en términos de sucesiones.

Lema 1.2.21. *Sea $A\subseteq E$. Entonces A es cerrado si y sólo si $A=\overline{A}$.*

Prueba 9. ($\Rightarrow$) *Tenemos $A\subseteq\overline{A}$. Ahora si A es cerrado, A^C es abierto. Entonces dado $x_0\in A^C$, existe $r>0$ tal que $B(x_0,r)\subseteq A^C$. Tome $x_0\in\overline{A}\backslash A$, entonces $B(x_0,r)\cap A\neq\varnothing$. Esto es contradictorio por lo que $\overline{A}\backslash A=\varnothing$ i.e. $A=\overline{A}$.*

($\Leftarrow$) *Sea $x_0\notin\overline{A}$, entonces existe $r>0$ tal que $B(x_0,r)\cap A=\varnothing$. Luego $B(x_0,r)\subseteq A^C=(\overline{A})^C$.*

En general tenemos el siguiente hecho.

Lema 1.2.22. *Dado $A\subseteq E$, $\overline{A}$ es cerrado.*

Prueba 10. *Suponga que $\overline{A}$ no es cerrado. Entonces $(\overline{A})^C$ no es abierto. Entonces existe $x_0\in(\overline{A})^C$ tal que para todo $r>0$ tenemos $B(x_0,r)\subsetneq(\overline{A})^C$. Es decir que existe $y_0\in\overline{A}$ tal que $y_0\in B(x_0,r)$. Como $B(x_0,r)$ es abierto, existe $r_1>0$ tal que $B(y_0,r_1)\subseteq B(x_0,r)$. Además $y_0\in\overline{A}$ entonces $B(y_0,r_1)\cap A\neq\varnothing\Rightarrow B(x_0,r)\cap A\neq\varnothing\Rightarrow x_0\in\overline{A}$, pues r es arbitrario.*

Ejercicio 1.2.23. Sea F cerrado. Si $A\subseteq F$, entonces $\overline{A}\subseteq F$.

Observación 1.2.24. Podemos interpretar el hecho anterior de la siguiente manera. El conjunto de puntos de adherencia de A es el cerrado más pequeño que contiene a A.

Realizar los ejercicios de las notas Santiago Cambronero. Sección 2.2.11(1,2,6,7,11,12,16,17,19,20).

1.3. Día 3— 20-3-18

Definición 1.3.1. Dado $A \subseteq E$ definimos

$$V_r(A) = \{x \in E : \mathfrak{m}(x,A) = \mathfrak{m}(\{x\},A) < r)\}$$

Será que este conjunto es un vecindario de A según nuestra definición 1.2.10 anterior? Tenemos que agarrar una bola y meterla dentro de este conjunto.

Tome $a \in A$, entonces $B(a,r) \subseteq V_r(A)$ pues si $y \in B(a,r) \Rightarrow |y-a| < r$ y por definición de distancia al conjunto $\mathfrak{m}(y,A) < |y-a| < r$ y por lo tanto $V_r(A)$ es un vecindario de A.

Ahora si $A \subseteq E$ es cerrado, $y \notin A$ entonces $\mathfrak{m}(y,A) > 0$. O sea existe $r_0 > 0$ tal que $\mathfrak{m}(y,A) > r_0$ pues de lo contrario $\mathfrak{m}(y,A) = 0$. Entonces $y \notin V_r(A)$ para cualquier $r < r_0$.

Esto también se puede corroborar con la observación 1.2.16, ya que si A es cerrado, $y \in A \iff \mathfrak{m}(y,A) = 0$. Tomando la contrapositiva de la implicación hacia la izquierda tenemos el resultado.

Ejercicio 1.3.2. Si A es cerrado entonces $V_r(A)$ es abierto.

Además $A \subseteq \cap_{r>0} V_r(A)$. Se cumple la igualdad?

Ejercicio 1.3.3. Si A es cerrado entonces $A = \cap_{r>0} V_r(A)$. En caso de que A no sea cerrado, la igualdad es con $\overline{A}$.

Definición 1.3.4. Para un conjunto $F \subseteq E$, decimos que F es denso en E si $\overline{F} = E$.

Definición 1.3.5. Un espacio $(E,\mathfrak{m})$ es separable si contiene un conjunto denso y numerable.

Métricas Inducidas

Vamos a cambiar nuestra notación de espacio de E a X.

Definición 1.3.6. Sea $(X,\mathfrak{m})$ un espacio métrico y $H \subseteq X$. Defina $\mathfrak{m}_H : H \times H \to \mathbb{R}; (h_1,h_2) \mapsto \mathfrak{m}(h_1,h_2)$ es una métrica.

Entonces qué es una bola en H? Vea que $B_H(a,r) = \{y \in H : \mathfrak{m}(a,y) < r\}$ pero esto es $B(a,r) \cap H = \{y \in X : \mathfrak{m}(y,a) < r\}$.

Ahora los abiertos quienes son?

Note que si G es abierto y $g \in G$ entonces existe $r_g > 0$ tal que $B(g,r_g) \subseteq G \Rightarrow \cup_{g \in G} B(g,r_g) \subseteq G$. Luego si G es abierto respecto a $(H,\mathfrak{m}_H)$ entonces

$$\begin{aligned} G &= \cup_{\lambda \in A} B_H(x_\lambda, r_\lambda) \\ &= \cup_{\lambda \in A} (B(x_\lambda, r_\lambda) \cap H) \\ &= H \cap (\cup_{\lambda \in A} (B(x_\lambda, r_\lambda)) \\ &= H \cap G_X \end{aligned}$$

Donde G_X es un abierto pero en el espacio grande.

Lema 1.3.7. *Todo abierto es unión de bolas.*

Observación 1.3.8. Más aún, un conjunto dentro de un espacio métrico es abierto si y sólo si es unión de bolas abiertas.

($\Rightarrow$) Sea $A \subseteq X$ abierto y $a \in A$. Como A es abierto, $\exists r_a > 0 : B(a,r_a) \subseteq A$. Para cualquier $a \in A$ se cumple, por lo que $\cup_{a \in A} B(a,r_a) \subseteq A$. La otra inclusión es inmediata pues por como fue definida, la unión tiene todos los puntos de A. Entonces A es unión de bolas.

($\Leftarrow$) Tenemos que la unión de abiertos es un abierto. En este caso, las bolas son abiertas.

Lema 1.3.9. *Todo abierto en $(H,\mathfrak{m}_H)$ es de la forma $G \cap H$ con G abierto en $(X,\mathfrak{m})$.*

Queremos responder la misma pregunta para cerrados. Cómo son los cerrados en $(H,\mathfrak{m}_H)$?

Sea F cerrado en $(H,\mathfrak{m}_H)$ entonces $H \backslash F$ es abierto en $(H,\mathfrak{m}_H)$. Luego, existe G abierto en $(X,\mathfrak{m})$ tal que $H \backslash F = G \cap H$. Tomando complementos tenemos que $F = H \backslash (G \cap H) = H \cap G^C$. O sea que un cerrado en H es la intersección de un cerrado original con el espacio H.

Continuidad

Para poder hablar de la noción de continuidad necesitamos dos espacios métricos.

Definición 1.3.10. Sean $(X,\mathfrak{m}),(Y,\mathfrak{m}')$ dos espacios métricos y $f\colon X\to Y$. Se dice que $\lim_{x\to a} f(x)=\ell\in Y$ si para todo $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que $0<\mathfrak{m}(a,x)<\delta\Rightarrow\mathfrak{m}'(\ell,f(x))<\varepsilon$. Además f es continua en a si $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Observe que es necesario que f esté definida en a para hablar de continuidad. Ahora, una caracterización por bolas es la siguiente. Si f es continua en a entonces para todo $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que $f(B(a,\delta))\subseteq B(f(a),\varepsilon)$. Además $\lim_{x\to a} f(x)=\ell$ si y sólo si $f(B(a,\delta)\backslash\{a\})\subseteq B(\ell,\varepsilon)$.

Ejemplo 1.3.11. Dado $x_0\in X$ defina $f(x)=\mathfrak{m}(x,x_0)$, entonces $\mathfrak{m}(f(x),f(a))=|\mathfrak{m}(x,x_0)-\mathfrak{m}(a,x_0)|\leqslant\mathfrak{m}(x,a)$. De hecho f es Lipschitz y por tanto es continua.

Ejercicio 1.3.12. De igual forma si $A\subseteq X$ es un conjunto, $f(x)=\mathfrak{m}(x,A)$ es continua. Pruebe y utilice el hecho: $\mathfrak{m}(x,A)-\mathfrak{m}(y,A)\leqslant\mathfrak{m}(x,y)$.

Definición 1.3.13. Una función $f\colon X\to Y$ se dice Lipschitz si existe $\lambda>0$ tal que $\mathfrak{m}(f(x),f(y))\leqslant\lambda\mathfrak{m}(x,y)$. Toda función Lipschitz es continua.

El siguiente teorema es la caracterización topológica de continuidad.

Sea $G\subseteq Y$ abierto y considere $f^{-1}(G)=\{x\in X\colon f(x)\in G\}$. Tome $x_0\in f^{-1}(G)$, existe $r>0$ tal que $B(x_0,r)\subseteq f^{-1}(G)$? Es decir existe $r>0$ tal que $x\in B(x_0,r)$ entonces $f(x)\in G$?

Como G es abierto, existe $\varepsilon>0$ tal que $B(f(x_0),\varepsilon)\subseteq G$. Luego si f es continua, existe $\delta>0$ tal que $f(B(x_0,\delta))\subseteq B(f(x_0),\varepsilon)\subseteq G$.

Las funciones continuas mandan abiertos de vuelta en abiertos, por imagen inversa.

Teorema 1.3.14. *Si $f\colon X\to Y$ es continua y $G\subseteq Y$ es abierto entonces $f^{-1}(G)$ es abierto en X.*

Observe que las imagenes directas no preservan esta propiedad. Es decir, si $G_1\subseteq X$ es abierto, no es siempre cierto que $f(G_1)$ es abierto.

De hecho el teorema anterior es una equivalencia.

Teorema 1.3.15. *Sea $f\colon X\to Y$, son equivalentes:*
1. f es continua
2. $f^{-1}(G)$ para todo $G\subseteq Y$ abierto.
3. $f^{-1}(F)$ es cerrado para todo $F\subseteq Y$ cerrado.
4. $f(\overline{B})\subseteq\overline{f(B)}$ para todo $B\subseteq X$. Donde la primera cerradura es respecto a X y la segunda respecto a Y.

Prueba 11. *(2 $\Rightarrow$ 1) Dado $\varepsilon>0$ y $x_0\in X$, $B(f(x_0),\varepsilon))\Rightarrow f^{-1}[B(f(x_0),\varepsilon)]$ es abierto. Así $\exists\delta>0$ tal que $B(x_0,\delta)\subseteq f^{-1}[B(f(x_0),\varepsilon)]\Rightarrow f(B(x_0,\delta))\subseteq B(f(x_0),\varepsilon)$*

Ejercicio 1.3.16. Mostar que *4* es equivalente a alguna característica anterior.

Teorema 1.3.17. *Sea $f\colon X\to Y$, f es continua en a si y sólo si para cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X$ tal que $x_n\to a$ se tiene que $f(x_n)\to f(a)$.*

Prueba 12. *Considere $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$, dado $\varepsilon>0$ hay que mostrar que existe n_0 tal que $\mathfrak{m}(f(x_0),f(a))<\varepsilon$ para todo $n\geqslant n_0$. Sabemos que para todo $\eta>0$ existe m_0 tal que $\mathfrak{m}(x_n,a)<\eta$ si $n\geqslant m_0$. Además existe η_0 tal que $\mathfrak{m}(x_n,a)<\eta_0\Rightarrow\mathfrak{m}(f(x_n),f(a))<\varepsilon$. Luego si $n\geqslant m_0$, entonces $\mathfrak{m}(x_n,a)<\eta_0\Rightarrow\mathfrak{m}(f(x_n),f(a))<\varepsilon$.*

Por otro lado asuma que f no es continua, o sea existe $\varepsilon>0$ tal que para todo δ existe un x_δ que cumple $\mathfrak{m}(x_\delta,a)<\delta$ y $\mathfrak{m}(f(x_0),f(a))\geqslant\varepsilon$. En particular si $\delta=\frac{1}{n}$ existe x_n tal que $\mathfrak{m}(x_n,a)<\frac{1}{n}$ y $\mathfrak{m}(f(x_n),f(a))\geqslant\varepsilon$. Esto nos da una contradicción porque tenemos $f(x_n)$ no converge a $f(a)$.

Verificar continuidad es lo mismo que verificarlo para sucesiones. Recuerde además que la sucesión no puede ser escogida, debe ser arbitraria.

La siguiente definición nos va a servir en algún momento.

Definición 1.3.18. Una función $f\colon X\to Y$ es un homeomorfismo si f es biyectiva y f y su inversa son continuas.

Estas funciones preservan abiertos. Sin embargo, estas funciones no preservan bolas.

Definición 1.3.19. Una función $f\colon X\to Y$ es una isometría si es sobreyectiva y $\mathfrak{m}'(f(x),f(y))=\mathfrak{m}(x,y)$.

Será cierto que las isometrías son inyectivas? En efecto, por un argumento de kernel se obtiene el resultado.

Ejercicio 1.3.20. Una isometría es un homeomorfismo.

Compacidad

Sea $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ continua. Qué propiedades tiene esta función? Es uniformemente continua, alcanza puntos extremos, manda intervalos en intervalos. Estos intervalos son los compactos de $\mathbb{R}$.

Definición 1.3.21. Un conjunto $C\subseteq X$ es compacto si toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq C$ tiene una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $x_{n_k}\to c\in C$.

Bajo esta definición todo compacto es cerrado pues todos los puntos de adherencia son límites de sucesiones y no hay otro lugar que caer para los puntos de adherencia que en C.

Note que si $x_{n_k}\to c$ entonces c es un punto de adherencia de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ahora tome $c\in\overline{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}}$, tome $n_2>n_1$ y $x_{n_1}\in B(c,1)\cap(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En general $x_{n_k}\in B(c,\frac{1}{k})\cap(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, esta sucesión converge a c. Ahora yo quiero que mi sucesión conste de puntos distintos. Si queremos que $x_{n_1}\neq x_{n_2}$, tome $x_{n_2}\in B(c,r)$ con $r<\text{mín}\{\frac{1}{2},\mathfrak{m}(x_{n_1},c)\}$ entonces $x_{n_1}\neq x_{n_2}$.

En general, cuando $n_k>n_{k-1}$, $x_{n_k}\in B(c,r)\cap(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $r<\text{mín}\{\frac{1}{k},\mathfrak{m}(c,x_{n_1}),\cdots,\mathfrak{m}(c,x_{n_{k-1}})\}$.

Definición 1.3.22. Decimos que una colección $\mathcal{U}=\{U_\alpha\colon \alpha\in A\}$ de abiertos de X cubre C si $C\subseteq\cup_{\alpha\in A}U_\alpha$.

Lema 1.3.23. *Sea $C\subseteq X$ compacto y $\mathcal{U}$ un cubrimiento de C. Entonces existe $\varepsilon>0$ tal que para todo $x\in C$ existe $\alpha\in A$ que satisface $B(x,\varepsilon)\subseteq U_\alpha$.*

Aquí el ε nos sirve para todos U_α's.

Prueba 13. *Asuma que el resultado es falso, o sea que para todo epsilon puedo encontrar un x tal que $B(x,\varepsilon)$ no está contenido en todos los U_α. Van a haber pedazos en U_α pero no completamente.*

Mejor dicho, para todo n existe $x_n\in C$ tal que $B(x_n,\frac{1}{n})\subsetneq U_\alpha$ para todo $\alpha\in A$. Sabemos que existe $x_{n_k}\to c_0\in C$. Existe un α tal que $c_0\in U_\alpha$.

Todavía no hemos usado la hipótesis acerca de $\mathcal{U}$ como cubrimiento. Vea que como U_α es abierto podemos tomar $\varepsilon>0$ tal que $B(c_0,\varepsilon)\subseteq U_\alpha$. Basta ver que las bolas anteriores las podemos meter en esta nueva bola para obtener una contradicción, pues según nuestra hipótesis por contradicción no podemos meter las bolas anteriores en un U_α.

Sea n_0 tal que $\mathfrak{m}(x_n,c_0)<\frac{\varepsilon}{2}$ y $\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n\geqslant n_0$. Entonces $B(x_n,\frac{1}{n})\subseteq B(c_0,\varepsilon)$ Esto pues $y\in B(x_n,\frac{1}{n})\Rightarrow\mathfrak{m}(y,c_0)\leqslant\mathfrak{m}(y,x_n)+\mathfrak{m}(x_n,c_0)<\frac{1}{n}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$.

1.4. Día 4— 22-3-18

Primera sesión de ejercicios

Ejercicio 1.4.1 (2.2.11.1.b Santiago Cambronero)**.** Sea $A=\{(x,e^x)\colon x\in\mathbb{Q}\}$. Es A acotado? Cerrado? Abierto? Encuentre $A^o,\overline{A}$ y $\partial(A)$.

Ejercicio 1.4.2 (2.2.11.7. Santiago Cambronero)**.** Mostrar que $\overline{A}$ es el menor cerrado que contiene a A

Ejercicio 1.4.3 (2.2.11.7.a Santiago Cambronero)**.** Si $A\subseteq B$ entonces $\overline{A}\subseteq\overline{B}$

Ejercicio 1.4.4 (2.2.11.7.b Santiago Cambronero)**.** Mostrar $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

Ejercicio 1.4.5 (2.2.11.7.c Santiago Cambronero)**.** Mostrar $\overline{A\cap B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}$

Ejercicio 1.4.6 (2.2.11.12 Santiago Cambronero)**.** Mostrar $A\subseteq\mathbb{R}$ es abierto $\iff A=\cup_i I_i$ con I_i intervalos abiertos. La unión es disjunta.

Ejercicio 1.4.7 (2.2.11.16.a Santiago Cambronero)**.** Si A es abierto, entonces $A\subseteq(\overline{A})^o$. Encuentre un ejemplo donde la inclusión es estricta.

Ejercicio 1.4.8 (2.2.11.16.b Santiago Cambronero)**.** Si A es cerrado, entonces $\overline{(A^o)}\subseteq A$.

1.5. Día 5— 3-4-18

Retomando un ejemplo anterior, para $c \in (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nos interesa lo que pasa en la cola. El comportamiento de esta sucesión se determina no por una cantidad finita de puntos sino por los últimos infinitos puntos. Tome $x_{n_1} \in B(c,1)$ y $\varepsilon_2 = \text{mín}\left\{\frac{1}{2}, \mathfrak{m}(c,x_{n_1})\right\}$. Sea $x_{n_2} \in B(c,\varepsilon_2)$.

Lo primero que hay que hacer es asumir que el conjunto $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ sea infinito. Si fuera finito, la sucesión sólo toma 10 puntos. Es agarrar sucesiones constantes y cada una de estas nos da un punto de acumulación. No aproximándolo, sino repitiéndolo. Llega un momento donde puedo hacer el segundo paso finitas veces, el de escoger el ε_2.

Bajo esta nueva hipótesis con $x_{n_1} \neq c$, sea $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_2} \in B(c,\varepsilon_2)$. Iterando el proceso existe $n_k > n_{k-1} > \cdots > n_1$ tal que $x_{n_k} \in B(c,\varepsilon_k)$ con $\varepsilon_k = \text{mín}\left\{\frac{1}{k}, \mathfrak{m}(c,x_{n_1}), \cdots, \mathfrak{m}(c,x_{n_k})\right\}$. Esto me asegura el proceso de escoger una sucesión donde todos los elementos son distintos.

Recordamos la siguiente definición 1.3.21 de conjuntos compactos.

Definición 1.5.1. Un conjunto C se dice compacto si dada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C$ existe $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq C$ que converge a un punto de C.

Por la construcción tenemos la siguiente equivalencia.

Lema 1.5.2. *Un conjunto C es compacto si y sólo si para cualquier $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C$ se cumple $\cap_{k\in\mathbb{N}} \overline{\{x_n : n > k\}} \neq \varnothing$.*

Lema 1.5.3. *Sea C un conjunto compacto y $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ un cubrimiento por abiertos de C. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x \in C$ existe $\alpha_0 \in A$ tal que $B(x,\varepsilon) \subseteq U_{\alpha_0}$.*

Teorema 1.5.4. *Sea $C \subseteq X$, entonces C es compacto si y sólo si para todo cubrimiento por abiertos $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ de C existen $(\alpha_i)_{i\in[m]} \subseteq A$ tal que $C \subseteq \cup_{i\in[m]} U_{\alpha_i}$.*

Prueba 14. ($\Rightarrow$) *Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha\in A\}$ tal que $C \subseteq \cup_{\alpha\in A} U_\alpha$. Sea $\varepsilon > 0$ según el lema anterior. Tome $x_1 \in C$, así existe α_1 tal que $B(x,\varepsilon) \subseteq U_{\alpha_1}$.*

Si $C \subseteq U_{\alpha_1}$, estamos listos. De lo contrario tome $x_2 \in C \setminus U_{\alpha_1} \subseteq C \setminus B(x_1,\varepsilon)$. Al escogerlo fuera de U_{α_1} ya sé que la distancia $\mathfrak{m}(x_1,x_2)$ es mayor a ε. Tome α_2 tal que $B(x_2,\varepsilon) \subseteq U_{\alpha_2}$. En el caso de que $C \subseteq U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2}$, tenemos el resultado.

De lo contrario existe $x_3 \in C \setminus (U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2})$. En otras palabras $\mathfrak{m}(x_3,x_1) \geqslant \varepsilon, \mathfrak{m}(x_3,x_2) \geqslant \varepsilon, \mathfrak{m}(x_2,x_1) \geqslant \varepsilon$. Esto contradice que esta sucesión sea convergente, contradiciendo la condición de Cauchy.

Si iteramos este proceso, podemos encontrar $x_{k+1} \in C \setminus (\cup_{i\in[k]} U_{\alpha_i})$ y $\mathfrak{m}(x_i,x_j) \geqslant \varepsilon$ para $i,j \in [k+1], i \neq j$. Si este proceso acaba, significa que existe m tal que $C \subseteq \cup_{i\in[m]} U_{\alpha_i}$. En el caso contrario construimos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C$ tal que $\mathfrak{m}(x_i,x_j) \geqslant \varepsilon$ si $i \neq j$ y esto es una contradicción.

Esto pues $\varepsilon \leqslant \mathfrak{m}(x_i,x_j) \leqslant \mathfrak{m}(x_i,c) + \mathfrak{m}(x_j,c)$ lo que nos dice que no pueden haber subsucesiones convergentes, contradiciendo la definición de compacidad.

($\Leftarrow$) *Asuma que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C$ no tiene una subsucesión convergente. Defina $U_k = X \setminus (\overline{\{x_n : n \geqslant k\}})$. Note que $C \subseteq \cup_{k\in\mathbb{N}} U_k = X \setminus (\cap_{k\in\mathbb{N}} \overline{\{x_n : n \geqslant k\}})$. y este conjunto es X. Luego, por compacidad, existen $k_1 < \cdots < k_m$ tales que $C \subseteq \cup_{i\in[m]} U_{k_i}$. Al unir todos, como van creciendo, es lo mismo que poner el más grande. O sea $C \subseteq U_{k_m} = X \setminus (\overline{\{x_n : n \geqslant k_m\}})$ y esto es una contradicción pues $x_n \in C$.*

En los textos se toma la siguiente deinición de compacidad.

Definición 1.5.5. Dado $\mathcal{U} = \left\{\widetilde{U}_\alpha : \alpha \in A\right\}$ con $\widetilde{U}_\alpha$ abierto respecto a C. Diremos que C es compacto si existen $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ tal que $C = \cup_{i\in[m]} \widetilde{U}_{\alpha_i}$.

Recuerde que como $\widetilde{U}_\alpha$ es abierto respecto a C, existe U_α abierto en X tal que $\widetilde{U}_\alpha = U_\alpha \cap C$.

Ejercicio 1.5.6. La definición anterior coincide con la definición 1.3.21.

Veamos en $\mathbb{R}$, cuáles son los conjuntos compactos? En $[0,1]$ una sucesión dentro de este conjunto tiene una subsucesión convergente por Bolzano-Weierstraß.

Primero veremos un resultado, las funciones continuas mandan compactos en compactos.

Prueba 15. *Sea $f : X \to Y$ continua y $K \subseteq X$ compacto. Defina $K_1 = f(K)$. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha\in A\}$ un cubrimiento de K. Así $K_1 \subseteq \cup_{\alpha\in A} \Rightarrow f^{-1}(K_1) \subseteq \cup_{\alpha\in A} f^{-1}(U_\alpha)$.*

Recuerde que $c \in f^{-1}(f(K)) \iff f(c) \in f(K) \Rightarrow k \in K$ entonces $f(k) \in f(K) \Rightarrow K \subseteq f^{-1}(f(K))$.

Esto nos dice que $K \subseteq f^{-1}(f(K)) \subseteq \cup_{\alpha\in A} f^{-1}(U_\alpha)$. Como K es compacto, existen $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ tales que $K \subseteq \cup_{i\in[m]} f^{-1}(U_{\alpha_i}) \Rightarrow f(K) \subseteq \cup_{i\in[m]} f(f^{-1}(U_{\alpha_i}))$. Entonces $f(K) = K_1$ y $\cup_{i\in[m]} f(f^{-1}(U_{\alpha_i})) \subseteq \cup_{i\in[m]} U_{\alpha_i}$ nos da el resultado.

Ejercicio 1.5.7. Sea $f\colon X \to Y$ y $\tilde{K} \subseteq X, K \subseteq Y$. Pruebe que $\tilde{K} \subseteq f^{-1}(f(\tilde{K}))$ y $f(f^{-1}(K)) \subseteq K$. Se cumple la igualdad cuando f es inyectiva y sobreyectiva respectivamente.

Teorema 1.5.8. *Dado $(X,\mathfrak{m})$ un espacio métrico. Las siguientes aseveraciones son equivalentes.*
1. X es compacto.
2. Dados $\{F_\alpha\colon \alpha\in A\}$ con F_α cerrados tal que para todos $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ se tiene $\cap_{i\in[m]} F_{\alpha_i} \neq \emptyset \Rightarrow \cap_{\alpha\in A} F_\alpha \neq \emptyset$.

Prueba 16. *Probamos 1.$\Rightarrow$2. por contradicción. Suponga que la conclusión es falso o sea existe $\{F_\alpha\colon \alpha\in A\}$ tal que $\cap_{\alpha\in A} F_\alpha = \emptyset \Rightarrow \cup_{\alpha\in A} X\backslash F_\alpha = X$. Luego $\{X\backslash F_\alpha\colon \alpha\in A\}$ es un cubrimiento de X. Así existen $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ tal que $X = \cup_{i\in[m]} X\backslash F_{\alpha_i} \Rightarrow \cap_{i\in[m]} F_{\alpha_i} = \emptyset$. Esto es una contradicción.*

Definición 1.5.9. Un espacio $(X,\mathfrak{m})$ es acotado si para todo $x_0 \in X$ existe $r > 0$ tal que $B(x_0,r) \supseteq X$. O equivalentemente, existe M tal que $\mathfrak{m}(x,y) \leqslant M$ para todos los $x,y \in X$.

De manera análoga $B \subseteq X$ es acotado si $(B,\mathfrak{m}_B)$ es acotado. O sea para cualquier $x_0 \in X$ existe $r > 0$ tal que $B \subseteq B(x_0,r)$.

Será que un conjunto compacto es acotado? Si C es compacto $C \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} B(x_0,n)$. Por compacidad existen $n_1 < n_2 < \cdots < n_m$ tales que $C \subseteq \cup_{n\in[m]} B(x_0,n) = B(x_0,n_m)$.

Lema 1.5.10. *Si $C \subseteq X$ es compacto, entonces C es cerrado y acotado.*

Considere $C = \times_{i\in[d]} [a_i,b_i] \subseteq \mathbb{R}^d$ con la métrica euclídea. Si C no es compacto, existe $\mathcal{U} = \{U_\alpha\colon \alpha\in A\}$ tal que $C \subsetneq \cup_{i\in[m]} U_{\alpha_i}$ para todo $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$.

INSERTAR FIG5.1

Divida el rectángulo en 2^d rectángulos de la forma $\times_{j\in[d]} \left[c_j^i, d_j^i\right]$, $i \in \left[2^d\right]$. Donde $\left[c_j^i, d_j^i\right]$ es de la forma $\left[a_j, \frac{a_i+b_i}{2}\right]$ ó $\left[\frac{a_i+b_i}{2}, b_j\right]$. Por hipótesis existe un $i_0 \in \left[2^d\right]$ tal que $C_1 = \times_{j\in[d]} \left[c_j^{i_0}, d_j^{i_0}\right]$ tal que no puede ser cubierto por una cantidad finita de U_α's. Iterando el proceso $C_k = \times_{j\in[d]} \left[c_j^k, d_j^k\right]$ con $\left[c_j^k, d_j^k\right] \supseteq \left[c_j^{k+1}, d_j^{k+1}\right]$ y $|d_j^k - c_j^k| = \frac{b_j - a_j}{2^k}$. Por el teorema 1.5.8 de los intervalos encajados existe $z_j = \cap_{k\in\mathbb{N}} \left[c_j^k, d_j^k\right] \Rightarrow \cap_{k\in\mathbb{N}} C_k = \{(z_1,\cdots,z_{algo})\}$. Como $z \in C$, existe $\beta \in A\colon z \in U_\beta$. Como U_β es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(z,\varepsilon) \subseteq U_\beta$

INSERTAR FIG5.2

Si $\frac{\sqrt{d}\sup_{i\in[d]}|b_i - a_i|}{2^k} < \varepsilon$ entonces $C_k \subseteq B(z,\varepsilon) \subseteq U_\beta$.

Lema 1.5.11. *Si $C_1 \subseteq C_2$ con C_2 compacto y C_1 cerrado entonces C_1 es compacto.*

Ejercicio 1.5.12. Muestre el lema anterior.

Como $\times_{i\in[d]} \{a_i,b_i\}$ es compacto, si C es cerrado y acotado existe n tal que $C \subseteq \times_{i\in[d]} [-n,n]$ tenemos que C es compacto. Con esto probamos el teorema de Heine-Borel.

Teorema 1.5.13 (Heine-Borel)**.** *Sea $C \subseteq \mathbb{R}^d$ con la métrica euclídea. Entonces C es compacto si y sólo si C es cerrado y acotado.*

1.6. Día 6— 5-4-18

Completitud

Definición 1.6.1. Sea $(X,\mathfrak{m})$ un espacio métrico y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X$. Decimos que la sucesión es de Cauchy si para todo $\varepsilon>0$ existe n_0 tal que $\mathfrak{m}x_n,x_m<\varepsilon$ cuando $n,m\geqslant n_0$.

Ahora al igual que en $\mathbb{R}$ se cumple que:

Lema 1.6.2. *Toda sucesión convergente es de Cauchy y toda sucesión de Cauchy es acotada.*

Definición 1.6.3. Decimos que $(X,\mathfrak{m})$ es completo si toda sucesión de Cauchy en X es convergente en X.

Ejemplo 1.6.4. Sea $X=\{f\colon [a,b]\to\mathbb{R}\colon f$ es continua$\}$ con la métrica $\mathfrak{m}_\infty=\sup_{x\in[a,b]}\{|f(x)-g(x)|\}=||f-g||_\infty$. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy.

Dado $\varepsilon>0$ existe n_0 tal que $||f_n-f_m||_\infty\leqslant\varepsilon$, ahora con $x\in[a,b]$, $|f_n(x)-f_m(x)|\leqslant||f_n-f_m||<\varepsilon$ si $m,n\geqslant n_0$. Defina $f=\lim_{n\to\infty}f_n$, si $x\in[a,b]$ existe n_1 tal que $|f(x)-f_m(x)|<\varepsilon$ para $m\geqslant n$. Note que

$$|f(x)-f_m(x)|\leqslant|f(x)-f_n(x)|+|f_m(x)-f_n(x)|$$

El primer término es pequeño pues $f_n\to f$ puntualmente y el segundo término pues $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy, esto nos permite empequeñecer independiente del x.

De esta manera, si $m,n\geqslant n_0$ y $m,n\geqslant n_1$ entonces $|f(x)-f_n(x)|\leqslant 2\varepsilon$ para $n\geqslant \max\{n_0,n_1\}$. Esto prueba coonvergencia uniforme, lo que implica que f además es continua.

Considere un subconjunto cerrado C de un espacio completo X. Será cierto que toda sucesión convergente en C converge en C?

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq C\subseteq X$, como X es completo tenemos que $x_n\to y\in X$. Como C es cerrado, se tiene que y está en C, toda sucesión convergente en C converge a un límite dentro de C.

Esto prueba el lema siguiente:

Lema 1.6.5. *Sea $(X,\mathfrak{m})$ un espacio completo, $C\subseteq X$ con C cerrado. Entonces C con métrica inducida es un espacio completo. Además si $(C,\mathfrak{m}_C)$ es completo, entonces es cerrado en X.*

Prueba 17. *Suponga que C es completo, entonces toda sucesión de Cauchy es convergente dentro C. De esta manera toda sucesión convergente es C converge dentro de C que es la definición de ser cerrado.*

Habrá alguna relación entre completitud y compacidad?

Vea que $\mathbb{R}$ es completo pero no es compacto. Por otra parte, si X es compacto y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X$ es de Cauchy existe $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}\subseteq(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge. O sea $x_{n_k}\to y\in X$, entonces $\mathfrak{m}(x_n,y)\leqslant\mathfrak{m}(x_n,x_{n_k})+\mathfrak{m}(x_{n_k},y)$. Esto nos dice que $\mathfrak{m}(x_n,y)\to 0$ y por tanto $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

Lema 1.6.6. *Sea $(X,\mathfrak{m})$ un espacio compacto, entonces $(X,\mathfrak{m})$ es completo.*

Ejercicio 1.6.7. Completar los detalles de la prueba anterior.

Aún si completitud no implica directamente compacidad, podemos encontrar una propiedad que junto a completitud nos de compacidad. A esto se le conoce como estar totalmente acotado.

Definición 1.6.8. Un espacio métrico $(X,\mathfrak{m})$ se dice ser totalmente acotado o paracompacto si $\forall\varepsilon>0$ existen $y_1,\cdots,y_n\in X\colon X\subseteq\cup_{i\in[m]}B(y_i,\varepsilon)$.

Ejemplo 1.6.9. Tome $X=\mathbb{N}$ y $\mathfrak{m}(m,n)=m\neq n?1\colon 0$, la métrica discreta. Entonces X es acotado pero no totalmente acotado. Esto pues el ε de la definición puede ser menor a 1 y la cantidad de bolas no es contable sino finita.

Teorema 1.6.10. *En un espacio totalmente acotado, toda sucesión poseé una subsucesión de Cauchy.*

Prueba 18. *Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X$, entonces como X es compacto existen $y_1,\cdots,y_m$ tal que*
$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X\subseteq\cup_{i\in[m]}B(y_i,1)$$
Si la sucesión no tiene infinitos puntos, el resultado es inmediato pues tenemos subsucesiones constantes. Sin perdida de generalidad podemos asumir que $\{x_n: n\in\mathbb{N}\}$ tiene cardinalidad infinita. Entonces existe z_1 tal que $B(z_1,1)$ contiene infinitos de la sucesión.

Sea $(x_{n,1})_{n\in\mathbb{N}}\subseteq B(z_1,1)$ y $\{x_{n,1}: n\geqslant 1\}$ tiene cardinalidad infinita. Si iteramos este proceso, tenemos que $(x_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}\subseteq B(z_k,\frac{1}{k})$ es una sucesión de cardinalidad infinita. De esta manera extraemos la subsucesión $(x_{n,k+1})_{n\in\mathbb{N}}\subseteq B(z_{k+1},\frac{1}{k+1})$. Note que $\mathfrak{m}(x_{n,k},x_{m,k})\leqslant\frac{2}{k}$.

Tome la sucesión $(x_{k,k})_{k\in\mathbb{N}}$ y note que $\mathfrak{m}(x_{k,k},x_{\ell,\ell})\leqslant\frac{2}{k}$.

Aplicamos un argumento diagonal, creamos muchas sucesiones y así construimos una matriz de sucesiones. De aquí lléndonos por la diagonal podemos agarrar esta.

La otra dirección de la implicación también es cierta.

Lema 1.6.11. *Sea $(X,\mathfrak{m})$ un espacio métrico. Entonces X es totalmente acotado si y sólo si toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X$ poseé una subsucesión de Cauchy.*

Prueba 19. *Suponga que X no es totalmente acotado, entonecs existe $\varepsilon>0$ tal que X no se puede cubrir con una cantidad finita de bolas con radio ε. Tome $y_1\in X$, entonces $X\subsetneq B(y_1,\varepsilon)$. Sea $y_2\in X\backslash B(y_1,\varepsilon)$. Como $X\subsetneq B(y_1,\varepsilon)\cup B(y_2,\varepsilon)$. En general tome*
$$y_k\in X\backslash\left(\cup_{j\in[k-1]}B(y_j,\varepsilon)\right)$$
Entonces $\mathfrak{m}(y_k,y_\ell)\geqslant\varepsilon$, o sea la sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no puede tener una subsucesión de Cauchy.

Teorema 1.6.12. *Dado un espacio métrico $(X,\mathfrak{m})$. Se tiene que C es compacto si y sólo si completo y totalmente acotado.*

Compleción de un espacio

Sea $(X,\mathfrak{m})$ un espacio. Tome $(x_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X$ sucesiones de Cauchy. Vea que
$$\mathfrak{m}(x_m,y_m)\leqslant\mathfrak{m}(x_m,x_n)+\mathfrak{m}(x_n,y_n)+\mathfrak{m}(y_m,y_n)$$
Y a su vez, podemos hacer lo mismo con $\mathfrak{m}(x_n,y_n)$. Entonces
$$|\mathfrak{m}(x_m,y_m)-\mathfrak{m}(x_n,y_n)|\leqslant\mathfrak{m}(x_n,x_m)+\mathfrak{m}(y_n,y_m)$$
Sabemos que dado $\varepsilon\geqslant 0$, existe n_0 tal que cuando $m,n\geqslant n_0$:
$$\mathfrak{m}(x_n,x_m)<\frac{\varepsilon}{2}$$
$$\mathfrak{m}(y_n,y_m)<\frac{\varepsilon}{2}$$
Así $(\mathfrak{m}(x_m,y_m))_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy.

Definimos
$$\mathfrak{m}^{\#}((x_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}})=\lim_{m\to\infty}\mathfrak{m}(x_m,y_m)$$
Sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy, como $\mathfrak{m}(x_m,y_m)\leqslant\mathfrak{m}(x_m,z_m)+\mathfrak{m}(z_m,y_m)$ al tomar limites se tiene que
$$\begin{aligned}\mathfrak{m}^{\#}((x_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}})\leqslant&\,\mathfrak{m}^{\#}((x_n)_{n\in\mathbb{N}},(z_n)_{n\in\mathbb{N}})\\&+\mathfrak{m}^{\#}((z_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}})\end{aligned}$$
Esto nos dice que $\mathfrak{m}^{\#}$ es una semimétrica ya que no cumple definición positiva.

1.7. Día 7— 10-4-18

Retomamos de la clase pasada las sucesiones. Vamos a definir clases de equivalencia para tratar bien la métrica.

Diremos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ están relacionadas si
$$\mathfrak{m}^{\#}((x_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}})=\lim_{m\to\infty}\mathfrak{m}(x_m,y_m)=0$$
Es evidente que esta relación es de equivalencia.

Ejercicio 1.7.1. Verificar que la relación anterior en efecto es de equivalencia.

Consideramos un nuevo espacio, si $\mathcal{R}$ es la relación anterior definimos:

$$X^{\#}=\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X:\ (x_n)\text{ es de Cauchy}\}\big/\mathcal{R}$$

Tome $\mathfrak{m}^{\#}\colon X^{\#}\times X^{\#}\to\mathbb{R}\colon ([x],[y])\mapsto \mathfrak{m}^{\#}([x],[y])=\mathfrak{m}^{\#}((x_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}})$. Necesitamos verificar que $\mathfrak{m}^{\#}$ está bien definida.

Prueba 20. *Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{R}(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{R}(y'_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Como*

$$\lim_{m\to\infty}\mathfrak{m}(x_m,y_m)=\mathfrak{m}^{\#}((x_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}})$$

Entonces tenemos que probar

$$\lim_{m\to\infty}\mathfrak{m}(x_m,y_m)=\lim_{m\to\infty}\mathfrak{m}(x'_m,y'_m)$$

Pero observe que

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}(x_m,y_m)&\leqslant\mathfrak{m}(x_m,x'_m)+\mathfrak{m}(x'_m,y_m)\\&\leqslant\mathfrak{m}(x_m,x'_m)+\mathfrak{m}(x'_m,y'_m)+\mathfrak{m}(y_m,y'_m)\end{aligned}$$

Por lo tanto $\lim_{m\to\infty}\mathfrak{m}(x_m,y_m)\leqslant\lim_{m\to\infty}\mathfrak{m}(x'_m,y'_m)$ entonces por simetría se cumple lo pedido.

Ejercicio 1.7.2. Verifique que $(X^{\#},\mathfrak{m}^{\#})$ es un espacio métrico.

Vamos a ver que este nuevo espacio es completo y que además X es denso en él.

Lema 1.7.3. *Existe una inyección de X en $X^{\#}$.*

Prueba 21. *Considere $i\colon X\to X^{\#}\colon x\mapsto[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ con $x_n=x$. Esta sucesión es de Cauchy pues es constante. La función i es inyectiva, tome $x\neq y$ elementos de X. Tenemos que*

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}(x,y)&=\lim_{m\to\infty}\mathfrak{m}(x,y)\\&=\mathfrak{m}^{\#}((x_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}})\\&=\mathfrak{m}^{\#}([(x_n)_{n\in\mathbb{N}}],[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}])\end{aligned}$$

Por lo que $\mathfrak{m}(x,y)=\mathfrak{m}^{\#}(i(x),i(y))$

Más aún, i preserva distancias pero no es una isometría ya que no cumple sobreyectividad.

Ahora, $i(X)$ es la copia de X dentro de $X^{\#}$. Queremos ver que este conjunto es denso dentro de $X^{\#}$ o sea $\overline{i(X)}=X^{\#}$.

Prueba 22. *Considere $\underline{y}=[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]$, dado $\varepsilon>0$ existe n_0 tal que $m,\ell\geqslant n_0$ entonces $\mathfrak{m}(y_m,y_\ell)<\varepsilon\Rightarrow$ $\lim_{m\to\infty}\mathfrak{m}(y_m,y_\ell)\leqslant\varepsilon$. Pero esto es igual a $\mathfrak{m}^{\#}((y_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_\ell)_{n\in\mathbb{N}})=\mathfrak{m}^{\#}(\underline{y},i(y_\ell))$. Es decir, cuando $\ell\geqslant n_0$ se cumple $\mathfrak{m}^{\#}(\underline{y},i(y_\ell))\leqslant\varepsilon$ y por lo tanto $i(X)$ es denso en $X^{\#}$.*

Queremos ver que $X^{\#}$ es un espacio completo, es decir queremos agarrar una sucesión aquí o sea una sucesión de sucesiones. Queremos encontrar una nueva sucesión para la cual la nuestra original converge. Primero aproximamos toda sucesión con elementos de X, esto nos dará una nueva sucesión y esta debe converger a la que construimos.

Prueba 23. *Sea $(\underline{y}^n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X^{\#}$, tome $y_n\in X$ tal que $\mathfrak{m}^{\#}(\underline{y}^n,i(y_n))<\frac{1}{n}$. Ahora vea que*

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}(y_m,y_n)&=\mathfrak{m}^{\#}(i(y_m),i(y_n))\\&\leqslant\mathfrak{m}^{\#}(i(y_m),\underline{y}^m)+\mathfrak{m}^{\#}(\underline{y}^m,\underline{y}^n)\\&+\mathfrak{m}^{\#}(\underline{y}^n,i(y_n))\\&\leqslant\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+\mathfrak{m}^{\#}(\underline{y}^m,\underline{y}^n)\end{aligned}$$

Por lo que si $(\underline{y}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $X^{\#}$ entonces $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy en X. Finalmente, vamos a probar que $(\underline{y}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ conver a $[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]=\underline{y}$. Es decir que $\lim_{n\to\infty}(\underline{y}^n,\underline{y})=0$. Vea que

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}^{\#}(\underline{y}^n,\underline{y})&\leqslant\mathfrak{m}^{\#}(\underline{y}^n,i(y_n))+\mathfrak{m}^{\#}(i(y_n),\underline{y})\\&\leqslant\frac{1}{n}+\mathfrak{m}^{\#}(i(y_n),\underline{y})\end{aligned}$$

Por construcción se cumple que $\mathfrak{m}^{\#}(i(y_n),\underline{y})\to0$ cuando $n\to\infty$.

Ejercicio 1.7.4. Refine el último detalle de la prueba anterior.

Lo que acabamos de probar es lo siguiente:

Teorema 1.7.5. *Dado un espacio métrico* $(X,\mathfrak{m})$*, existe un espacio métrico* $(X^{\#},\mathfrak{m}^{\#})$ *completo y una función inyectiva* $i\colon X\to X^{\#}$ *tal que* $\mathfrak{m}(x,y)=\mathfrak{m}^{\#}(i(x),i(y))$ *y se cumple que* $i(X)$ *es denso en* $X^{\#}$*.*

Ahora considere $(Y,\mathfrak{m}')$ completo y $j\colon X\to Y$ que satisface $\mathfrak{m}(x,y)=\mathfrak{m}'(j(x),j(y))$. Vamos a construir una función inyectiva $\theta\colon X^{\#}\to Y$ que preserva distancias. En cierto sentido, $X^{\#}$ es el espacio completo más pequeño que contiene a X.

Lo que haremos es lo siguiente, primero vamos a definir una función en todo $X^{\#}$ para ello la definimos primero en $i(X)$. Una vez hecho esto, como $i(X)$ es denso podemos extender la definición mediante límites. Lo que queda el límite, es lo que vale.

Prueba 24. *Dado* $x\in X$*, definimos* $\theta(i(x))=j(x)$*. Ya conocemos la función* j*, pero por qué se preservan las distancias con* θ*? Note que*

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}'(\theta(i(x)),\theta(i(y))) &= \mathfrak{m}'(j(x),j(y))\\ &= \mathfrak{m}(x,y)\\ &= \mathfrak{m}^{\#}(i(x),i(y))\end{aligned}$$

Es decir $\theta\colon i(X)\to Y: x\mapsto j(x)$ *preserva distancias y por tanto inyectiva.*

Dada $\underline{y}$*, existe una sucesión* $(i(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que*

$$\lim_{n\to\infty}\mathfrak{m}^{\#}(\underline{y},i(y_n))=0$$

Tome $\theta(\underline{y})=\lim_{n\to\infty}(\theta(i(y_n)))=\lim_{n\to\infty}j(y_n)$*. Como* j *es continua, para que el límite exista basta que* y_n *sea convergente. Entonces si probamos que* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tenemos el resultado.*

Note que $\mathfrak{m}'(j(y_n),j(y_m))=\mathfrak{m}^{\#}(i(y_n),i(y_m))=\mathfrak{m}(y_n,y_m)$*. Como* $(i(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *es de Cauchy, tenemos que* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $(j(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *son de Cauchy. Por lo tanto* $\lim_{n\to\infty}j(y_n)$ *existe.*

Ejercicio 1.7.6. Muestre que θ está bien definida y que preserva distancias.

Conexidad

Definición 1.7.7. Un espacio $(X,\mathfrak{m})$ es disconexo si existen A,B abiertos no vacíos tal que $X=A\cup B$ con $A\cap B=\varnothing$. El espacio $(X,\mathfrak{m})$ es conexo si no es disconexo.

Insertar FIG 7.1

Entonces ser conexo y tener $X=A\cup B$ con A,B abiertos entonces A es vacío o todo el espacio y B vice-versa.

Note además, si $(X,\mathfrak{m})$ es disconexo con $X=A\cup B$. Entonces A es abierto y por lo tanto $X\setminus A$ es cerrado. Pero por construcción $B=X\setminus A$ y por tanto B es cerrado y abierto. Análogamente A es abierto y cerrado.

Lema 1.7.8. *Un espacio* $(X,\mathfrak{m})$ *es conexo si y sólo si los únicos conjuntos abiertos y cerrados son* X *y* $\varnothing$*.*

Definición 1.7.9. Decimos que $E\subseteq X$ es conexo si $(E,\mathfrak{m}_E)\leqslant(X,\mathfrak{m})$ es un espacio conexo.

De forma equivalente, si E es disconexo $E=A'\cup B'$ disjuntos y abiertos en $(E,\mathfrak{m}_E)$ no vacíos. Es decir, existen $A,B\subseteq X$ abiertos tales que $E=(E\cap A)\cup(E\cap B)$ con $A\cap E\neq\varnothing$ y $E\cap B\neq\varnothing$. Luego si E es conexo, A,B abiertos disjuntos con $E\subseteq A\cup B$, entonces $E\subseteq A$ ó $E\subseteq B$.

Ejemplo 1.7.10. $E=\{x\}$, $x\in X$ es conexo.

Ejemplo 1.7.11. $I=]a,b[\subseteq\mathbb{R}$ es conexo.

Sean A,B abiertos disjuntos no vacíos de manera que podamos ver $I=(I\cap A)\cup(I\cap B)$. Tome $(s,t)\in(I\cap A)\times(I\cap B)$. Por definición de intervalo $[s,t]\subseteq I$. Insertar FIG 7.2

Sea $u = \sup(A \cap [s,t])$ y tenemos que $u \in I$. Entonces está en A ó en B.

1. Si $u \in A$ entonces existe $\delta > 0$ tal que $]u-\delta, u+\delta[\subseteq A$. Vea que $u \neq t$, u está en A y $t \in B$. Luego $u < t$ y por tanto existe $\delta_1 > 0$ tal que $[u, u+\delta_1] \subseteq A \cap [s,t]$. Esto contradice que u es el sup.
2. Si $u \in B$, entoces $s < u$. Como B es abierto existe $\delta_2 > 0$ tal que $]u-\delta_2, u+\delta_2[\subseteq B$. Entonces $]u-\delta_2, u] \subseteq [s,t]$. Finalmente $w \in A \cap [s,t]$ tal que $u - \delta_2 < w \leqslant u$. Esto es una contradicción pues hay un punto en la intersección.

Lema 1.7.12. *Sean $(X,\mathfrak{m}),(Y,\mathfrak{m}')$ espacios métricos y $f\colon X \to Y$ continua. Si $E \subseteq X$ es conexo entonces $f(E)$ es conexo.*

Prueba 25. *Sean A,B abiertos disjuntos tales que*

$$f(E) = (f(E) \cap A) \cup (f(E) \cap B)$$
$$\Rightarrow E = (f^{-1}(A) \cap E) \cup (f^{-1}(B) \cap E)$$

Pero si E es conexo, uno de los dos debe ser vacío y otro todo el espacio. Entonces $E \subseteq f^{-1}(A)$ ó $E \subseteq f^{-1}(B)$ lo que implica que $f(E) \subseteq A$ ó $f(E) \subseteq B$. Entonces uno de los pedazos es vacío y el otro es $f(E)$. Por lo tanto $f(E)$ es conexo.

Ejemplo 1.7.13. $\mathbb{R}^d$ es conexo.

Sean $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$, tome $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^d, t \mapsto (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}$. Esta función es continua. Entonces diremos que el segmento de recta entre $\mathbf{x},\mathbf{y}$ es $f([0,1]) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d\colon \mathbf{z} = (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}, t \in [0,1]\} = [\mathbf{x},\mathbf{y}]$.
Ahora si $\mathbb{R}^d$ fuese disconexo, existen A y B abiertos disjuntos no vacíos tales que $\mathbb{R}^d = A \cup B$. Tome $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in A \times B$, entonces $[\mathbf{x},\mathbf{y}] = ([\mathbf{x},\mathbf{y}] \cap A) \cup ([\mathbf{x},\mathbf{y}] \cap B)$. Esto es una contradicción pues el segmento de recta $[\mathbf{x},\mathbf{y}]$ es conexo por el lema anterior.

Lema 1.7.14. *Sea $(U_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una colección de conjuntos conexos. Si $\cap_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \neq \varnothing$, entonces $U = \cup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$ es conexo.*

Prueba 26. *Sea $x \in \cap_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$. Tome A,B abiertos tales que $U = (U \cap A) \cup (U \cap B)$. Sin perdida de generalidad $x \in U \cap A$, o sea $x \in A$. Vea que $U \cap B \neq \varnothing \iff (\cup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha) \cap B \neq \varnothing$. Entonces existe β_0 tal que $U_{\beta_0} \cap B \neq \varnothing$. Además $x \in U_{\beta_0} \cap A$ pues x está en la intersección. Por lo tanto $E_{\beta_0} = (E_{\beta_0} \cap A) \cup (E_{\beta_0} \cap b)$. Esto es una contradicción por qué?*

Definición 1.7.15. Una curva o camino entre $x,y \in X$ es una función $f\colon [0,1] \to X$ continua tal que $(f(0),f(1)) = (x,y)$. Un espacio es conexo por caminos o arcoconexo si dados dos puntos $x,y \in X$, existe un camino entre x,y.

INSERTAR FIG 7.3

Lema 1.7.16. *Todo espacio conexo por caminos es conexo.*

Prueba 27. *Sea X un espacio conexo por caminos pero asuma a manera de contradicción que X no es conexo. Así existen $A,B \subseteq X$ abiertos, disjuntos, no vacíos de manera que $X = A \cup B$. Tome $(a,b) \in A \times B$.*

Como X es conexo por caminos, existe $\gamma\colon [0,1] \to X$ continua tal que $(\gamma(0),\gamma(1)) = (a,b)$.

Note que $\gamma^{-1}(A)$ y $\gamma^{-1}(B)$ son disjuntos de $[0,1]$ y su unión es $[0,1]$ por definición de función. Como γ es continua, son abiertos y como $(0,1) \in \gamma^{-1}(A) \times \gamma^{-1}(B)$.

Así hemos encontrado una desconexión de $[0,1]$ en abiertos, disjuntos, no vacíos. Esto es una contradicción pues este conjunto es conexo y por lo tanto nuestra suposición de que X no era conexo está errada. Por lo tanto X es conexo.

Ejercicio 1.7.17. Si $E \subseteq \mathbb{R}^d$ y E es conexo y abierto, entonces E es conexo por caminos.

INSERTAR FIG7.4

1.8. Día 8— 12-4-18

Segunda sesión de ejercicios

Ejercicio 1.8.1 (2.2.11.22 Santiago Cambronero)**.** Sea E un espacio métrico separable y $(U_i)_{i\in I}$ familia de abiertos no vacíos, disjuntos por parejas. Mostrar que I es contable

Ejercicio 1.8.2 (2.3.4.19 Santiago Cambronero)**.** Sea $f,g\colon E\to E'$ continuas y $f(x)=g(x)$ para $x\in D$ donde D es denso en E. Mostrar que $f(x)=g(x)$ para $x\in E$.

Ejercicio 1.8.3. Sea E' completo y $f\colon D\to E'$ uniformemente continua en D con $\overline{D}=E$. Demuestre que existe una única extensión de f hacia E. Muestre además que es uniformemente continua.

Ejercicio 1.8.4. Sean $A,B\subseteq E$ disjuntos. Si A es cerrado y B compacto entonces $\mathfrak{m}(A,B)>0$. Muestre que el resultado es falso si sólo se pide que ambos sean cerrados.

1.9. Día 9— 17-4-18

Ejemplo 1.9.1. Considere el conjunto $D=[-1,0]\times\{0\}\cup\left\{(x,\sin\left(\frac{1}{x}\right))\colon x\in[0,1]\right\}$. Veamos que D es conexo.

Asuma que $D=A\cup B$ con A,B abiertos disjuntos. Vamos a probar que alguno contiene a $(0,0)$ y por tanto contiene toda la curva.
Asuma que $(0,0)\in A$. A partir de aquí $D_1=[-1,0]\times\{0\}$ lo podemos ver como $\{(-t,0)\colon t\in[0,1]\}$. Esto es la imagen de $[0,1]$ bajo $\varphi(t)=(-t,0)$, una parametrización continua. Como $D_1\subseteq A\cup B$ y D_1 es conexo, entonces $D_1\subseteq A$. Además D_1 es abierto y puedo meter una bola en él.
Entonces vamos a mostrar que existe un n_0 tal que $(\frac{1}{\pi n},\sin(\pi n))=(\frac{1}{\pi n},0)\in A$ cuando $n\geqslant n_0$. Esto se sigue de que existe $r>0$ tal que $B((0,0),r)\subseteq A$ entonces tiene un punto de acumulación.
Por último, vemos que A contiene a $\left\{(x,\sin\left(\frac{1}{x}\right))\colon x\in[0,1]\right\}$.

Ejercicio 1.9.2. Verifique el último paso del ejemplo anterior.

Ejercicio 1.9.3. Muestre que no existe $\varphi\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ continua tal que $\varphi(0)=(0,0)$ y $\varphi(1)=(\frac{1}{\pi},0)$.

Categorías de Baire

Definición 1.9.4. Dado un espacio $(X,\mathfrak{m})$, decimos que $A\subseteq X$ es denso en ninguna parte si $X\backslash\overline{A}$ es denso en X.

Lo que esto significa es que $X\backslash\overline{A}\cap B(x,r)\neq\varnothing$. Esto es equivalente a $X\backslash\overline{A}\cap B(x,r)\neq\varnothing$ para $x\in\overline{A}$. A la vez podemos ver esto como $(\overline{A})^o=\varnothing$.

Esto es una forma de decir que el conjunto es muy pequeño, en el sentido que no le podemos meter bolas adentro. Qué conjuntos se pueden construir a partir de conjuntos pequeños? Por ejemplo $\mathbb{Q}$ está hecho de conjuntos pequeños, pero uniéndolos obtenemos un conjunto denso.

Podemos construir abiertos con conjuntos pequeños? La respuesta nos la da Baire, no es posible construir abiertos a partir de conjuntos pequeños. Pero sólo en espacios completos.

Definición 1.9.5. Un conjunto A es de primera categoría si es unión contable de conjuntos densos en ninguna parte. Cualquier conjunto que no sea de primera catergoría, es de segunda categoría.

Ahora, en un espacio completo todos los espacios son de segunda categoria. Note que sí es posible escribir conjuntos abiertos como uniones no contables de conjuntos de primera categoría, pues un conjunto es unión de los conjuntos unitarios que contienen a sus elementos.

Teorema 1.9.6 (Categorías de Baire)**.** *Sea $(X,\mathfrak{m})$ completo, si $D\subseteq X$ es abierto, entonces D es de segunda categoría.*

Precisamos un lema más antes de proseguir con la prueba del teorema.

Lema 1.9.7. *Sea* $(X,\mathfrak{m})$ *completo y* $G_n \subseteq X$ *abierto y denso para* $n \geqslant 1$*. Entonces* $\cap_{n\geqslant 1} G_n$ *es denso.*

Prueba 28. *Sea* A *un abierto, entonces existe* $x_1 \in A \cap G_1$ *pues* G_1 *es abierto. Como* A, G_1 *son abiertos, existe* $r_1 > 0$ *tal que*

$$B_1 = B(x_1, r_1) \subseteq A \cap G_1$$

Al ser B_1 *abiertos entonces podemos repetir el mismo proceso pero con* G_2*. Así existen* $x_2 \in X, r_2 > 0$ *tal que* $B(x_2, r_2) \subseteq B_1 \cap G_2$*. Sin perdida de generalidad podemos tomar* $r_2 < \frac{r_1}{2}$*. Montando esta sucesión podemos garantizar que los puntos se van acercando más. Estamos generando una sucesión de Cauchy y como el espacio es completo, va a tener un límite. Observe que*

$$B_2 = B(x_2, \frac{r_2}{2}) \subseteq \overline{B_2} \subseteq A \cap G_1 \cap G_2$$

Pero este procedimiento nos lleva a la cantidad finita, la completitud nos lleva a coger todos. La clausura es para asegurar que los límites caen donde deben de caer.

Iteramos este proceso y así existen $x_n \in X$*,* $r_n > 0$ *tales que*

$$B_n = B(x_n, r_n) \quad y$$

$$\begin{aligned} B_n \subseteq \overline{B_n} &\subseteq B_{n-1} \cap G_n \\ &\subseteq A \cap G_1 \cap \cdots \cap G_n \end{aligned}$$

Note que al agarrar el x_n*, él está en* B_n *que esta contenido en todos los* B_k*'s anteriores. Así* $x_n \in B_i$ *para* $i \in [n]$*. En otras palabras, si* $m < n$ *entonces* $x_m, x_n \in B(x_m, r_m)$ *y así* $\mathfrak{m}(x_m, x_n) < r_m \leqslant \frac{r_1}{2^m}$*. Entonces* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es de Cauchy, sea* $x = \lim_{n\to\infty} x_n$*. Vea que*

$$\{x_n : n \geqslant m\} \subseteq B_m \Rightarrow B_m$$

$$\Rightarrow x \in \overline{\{x_n : n \geqslant m\}} \subseteq \overline{B_m} \subseteq B_{m-1} \subseteq G_{m-1} \cap A$$

De aquí retomamos el teorema 1.9.6.

Prueba 29. *Sean* A_n *conjuntos densos en ninguna parte y tome* $G_n = X \backslash \overline{A_n}$*. Vea que* G_n *es abierto y denso por definición. Entonces*

$$\begin{aligned} G \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n \neq \varnothing \Rightarrow G \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (X \backslash \overline{A_n}) &\neq \varnothing \\ = G \cap X \backslash (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}) \end{aligned}$$

Arzelá-Ascoli

Definición 1.9.8. Dada una familia $\mathcal{F} = (f_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ de funciones, $(X,\mathfrak{m}), (Y,\mathfrak{m}')$ espacios métricos y $f_\alpha : X \to Y$, se dice ser equicontinua en x_0 si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\mathfrak{m}(x, x_0) < \delta \Rightarrow \mathfrak{m}'(f_\alpha(x), f_\alpha(x_0)) < \varepsilon$ para $\alpha \in \mathcal{A}$.

Una familia es equicontinua en X si es equicontinua en todo punto de X.

Observe que el mismo δ sirve para todas las funciones.

Lema 1.9.9. *Sea* $(X,\mathfrak{m})$ *completo y* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de funciones equicontinuas. Si* $D \subseteq X$ *es denso y* $\lim_{n\to\infty} f_n(d)$ *existe para cualquier* $d \in D$*, entonces* f_n *converge en* X *a una función continua.*

Para qué sirve completitud? Para probar el paso intermedio de que la sucesión es Cauchy. Por lo tanto va a existir el límite.

Prueba 30. *Basta probar que* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *es de Cauchy para* $x \in X$*. Ahora dado* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que para todo* $n \geqslant 1$ *se cumple*

$$\mathfrak{m}(x, x_0) < \delta \Rightarrow \mathfrak{m}'(f_n(x), f_n(x_0))$$

Queremos probar que $\mathfrak{m}(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon$ *para* $x \in X$*. Nosotros sabemos esto pero para* $d \in D$ *el denso. Entonces la densidad nos permite meter alguien en la bola de* x_0*.*

Tome $d \in D \cap B(x_0,\delta)$, sabemos que $(f_n(d))_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Es decir, existe N tal que cuando $m,n \geqslant N$ tenemos que $\mathfrak{m}'(f_n(d),f_m(d)) < \varepsilon$. Luego cuando $m,n \geqslant N$

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}'(f_n(x_0),f_m(x_0)) &\leqslant \mathfrak{m}'(f_n(x_0),f_n(d))\\ &+\mathfrak{m}'(f_n(d),f_m(d))\\ &+\mathfrak{m}'(f_m(x_0),f_m(d)) < 3\varepsilon\end{aligned}$$

Sea $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ entonces $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{m}'(f_n(x),f_n(x_0)) = \mathfrak{m}'(f(x),f(x_0))$. Tomando limites obtenemos el resultado.

Note que no es necesario que todo el espacio sea completo no es necesario, sino que $\overline{(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}}$ sea completo. Por ejemplo si $\overline{(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}}$ es compacto. En $\mathbb{R}$ basta que sea acotada, aquí una sucesión equicontinua y acotada cumple todo lo anterior.

En compactos la equicontinuidad nos garantiza que si tenemos convergencia puntual, tenemos convergencia uniforme.

Lema 1.9.10. *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ equicontinua. Si $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $x \in K$ compacto, entonces f_n converge uniformemente en K.*

Prueba 31. *Sean $x_0 \in K$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que por equicontinuidad*

$$\mathfrak{m}(x,x_0) < \delta \Rightarrow \mathfrak{m}'(f_n(x),f_n(x_0)) < \varepsilon$$

Reescribimos esto con bolas

$$x \in B(x_0,\delta,\mathfrak{m}) \Rightarrow f(x) \in B(f(x_0),\varepsilon,\mathfrak{m}')$$

Queremos probar que la distancia entre $f_n(x_0)$ y $f(x_0)$ es menor que ε arbitrario. Hay convergencia puntual pero $n \geqslant N(x_0)$. Como hay puntual N varía, la equicontinuidad entra haciendo que la distancia entre $f_n(x_0)$ y $f(x_0)$ sea menor que un montón de cosas. Dos están acotadas por equicontinuidad y una por convergencia puntual. Ahora tenemos un problema pues sólo se puede dentro de las bolas. Reducimos a un número finito de bolas gracias a compacidad y esto nos da el resultado.

Note que $\cup_{x_0\in K} B(x_0,\delta)$ es un cubrimiento por abiertos de K. Entoces existen $(x_k)_{k\in[n]}$ con $K \subseteq \cup_{k\in[n]} B(x_k,\delta_{x_k})$. Además existe N tal que cuando $n \geqslant N$ y $k \in [n]$:

$$\mathfrak{m}'(f_n(x_k),f(x_k)) < \varepsilon$$

Si $x \in K$, entonces existe k_0 tal que $x \in B(x_{k_0},\delta_{x_{k_0}})$. Luego tenemos

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}'(f_n(x),f(x)) &\leqslant \mathfrak{m}'(f_n(x),f_n(x_{k_0}))\\ &+\mathfrak{m}'(f_n(x_0),f(x_{k_0}))\\ &+\mathfrak{m}'(f(x_{k_0}),f(x)) < 3\varepsilon\end{aligned}$$

Pues $\mathfrak{m}'(f(x_{k_0}),f(x)) = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{m}'(f_n(x_{k_0}),f_n(x)) \leqslant \varepsilon$.

Teorema 1.9.11 (Arzelá-Ascoli)**.** *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ equicontinua con X separable. Suponga que para cada $x \in X$ se cumple que $\overline{(f_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ es compacto. Entonces existe $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ subsucesión convergente en X a una función continua f y la convergencia es uniforme en compactos.*

Prueba 32. *Sea $D = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ denso en X, que existe por separabilidad. Basta probar que existe f_{n_k} tal que $f_{n_k}(x_i)$ converge para todo $i \geqslant 1$. Sabemos que $\overline{(f_n(x_1))_{n\in\mathbb{N}}}$ es compacto, entonces existe una subsucesión $f_{1,n}$ de f_n tal que $f_{1,n}(x_1)$ es convergente.*

De igual forma $(f_{1,n}(x_2))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{(f_n(x_2))_{n\in\mathbb{N}}}$, entonces existe una subsucesión $f_{2,n}$ tal que $(f_{2,n}(x_2))_{n\in\mathbb{N}}$ y $(f_{2,n}(x_2))_{n\in\mathbb{N}}$. Al iterar este proceso existe una sucesucesión $f_{k+1,n}$ de $f_{k,n}$ tal que $f_{k+1,n}(x_{k+m}),\cdots,f_{k+1,n}(x_1)$ convergen. Ahora tome $f_{n,n}$ que es subsucesión de $(f_{k,n})_{k\in\mathbb{N}}$ siempre que $n = k$. Entonces $f_{n,m}(x_\ell)$ converge si $\ell,n \geqslant k$. Usando los dos lemas anteriores se sigue el resultado.

Corolario 1.9.12. *Sean $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ equicontinuas tal que X es separable. Si $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada para todo x entonces existe $f_{n,k}$ que converge en el sentido del teorema anterior.*

Ejemplo 1.9.13. Sea $K \subseteq \mathbb{R}^d$ compacto y $\mathcal{C}(K,\mathbb{R}) = \{f \colon K \to \mathbb{R} \colon f \quad \text{es continua}\}$. Entonces $(\mathcal{C}(K,\mathbb{R}),\mathfrak{m}_\infty)$ es un espacio métrico.

Lema 1.9.14. *Sea $F\subseteq\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$, entonces F es compacto si y sólo si F es cerrado, acotado y equicontinuo.*

Prueba 33. $(\Rightarrow)$ *Hay que verificar que $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ es equicontinua. Por contradicción asuma que existe $\varepsilon>0$ y $\mathbf{x}_0\in K$ tal que existen $\mathbf{y}_n,\alpha_n$ con*

$$||\mathbf{y}_n-\mathbf{x}_0||<\frac{1}{n}\wedge|f_{\alpha_n}(\mathbf{y}_n)-f_{\alpha_n}(\mathbf{x}_0|\geqslant\varepsilon$$

Como $(f_{\alpha_n})_{n\in\mathbb{N}}\subseteq F$, entonces existe n_k tal que $f_{\alpha_{n_k}}\xrightarrow[k\to\infty]{}f$ en norma infinito. Es decir

$$\sup_{\mathbf{x}\in K}|f_{\alpha_{n_k}}(\mathbf{x})-f(\mathbf{x})|\xrightarrow[k\to\infty]{}0$$

Pero $f_{\alpha_{n_k}}(x_0)\xrightarrow[k\to\infty]{}f(x_0)$ y $f_{\alpha_{n_k}}(y_{n_k})\xrightarrow[k\to\infty]{}f(x_0)$. Esto es una contradicción. por qué?

$(\Leftarrow)$ *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq F$. Como F es acotado existe $M>0$ tal que $||f||_\infty\leqslant M$ para $f\in F$. Entonces $\sup_{\mathbf{x}\in K}|f_n(\mathbf{x})|\leqslant M$. Esto inmediatamente nos dice que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es acotado.*

Veamos que las bolas cerradas no son compactas. Considere $\overline{B(0,1)}=\{f\in\mathcal{C}(K,\mathbb{R})\colon \sup_{x\in K}|f(x)|\leqslant 1\}$. Sea $f_n(x)=0$ cuando $0\leqslant x\leqslant 1-\frac{1}{n}$ y $f(x)=nx-n-1$ si $1-\frac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1$. Entonces $\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)|=1$. Pero

$$|f_n(x)-f_n(1)|=|nx-n+1-1|=n|x-1|$$

Siempre que $1-\frac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f_n(1)|<\varepsilon &\iff |x-1|\leqslant\varepsilon\\ &\iff |x-1|\leqslant\frac{\varepsilon}{n}\end{aligned}$$

Esto contradice la independencia del δ y por tanto no es equicontinua.

1.10. Día 10— 19-4-18

Stone-Weierstrass

Sea $(X,\mathfrak{m})$ espacio compacto y $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ con la métrica $\mathfrak{m}_\infty(f,g)=||f-g||_\infty=\sup_{x\in X}|f(x)-g(x)|$.

Lema 1.10.1. *El espacio $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ es completo.*

Vamos a estudiar condiciones para que un espacio sea denso en el espacio mencionado anteriormente. Ahora recuerde que definimos el máximo y mínimo entre dos funciones f,g como

$$f\vee g(x)=\frac{1}{2}(f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|)$$
$$f\wedge g(x)=\frac{1}{2}(f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|)$$

Ahora, qué necesitamos para que un espacio sea cerrado por máximos y mínimos. Necesitamos que sea cerrado por valores absolutes esencialmente. Vamos a tomar un espacio vectorial cerrado por valores absolutos, un retículo, y esto veremos que es denso en el espacio de funciones continuas.

Definición 1.10.2. Sea $\mathcal{R}\subseteq\mathcal{C}(X)$, decimos que $\mathcal{R}$ es un retículo si $\mathcal{R}$ es un subespacio vectorial tal que $f,g\in\mathcal{R}\Rightarrow f\vee g,f\wedge g\in\mathcal{R}$.

Teorema 1.10.3. *Sea $(X,\mathfrak{m})$ completo, $\mathcal{R}\subseteq\mathcal{C}(X)$ es un retículo que satisface que para $x,y\in X,a,b\in\mathbb{R}$ existe $f\in\mathcal{R}$ tal que $(f(x),f(y))=(a,b)$ entonces tenemos $\mathcal{R}$ es denso en $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$.*

Prueba 34. *Tome $f\in\mathcal{C}(X)$ y dados $x,y\in X$ existe $h_{x,y}\in\mathcal{R}$ tal que*

$$h_{x,y}(x)=f(x)\quad h_{x,y}(y)=f(y)$$

Fije $x\in X$. La función

$$g_x(z)=h_{x,y}(z)-f(z)$$

al evaluarla en y nos da 0. Dado $\varepsilon>0$, existe δ_y tal que

$$\mathfrak{m}(z,y)<\delta_y\Rightarrow|g_x(z)-g_x(y)|<\varepsilon$$

Por lo tanto tenemos

$$\begin{aligned} z\in B(y,\delta_y) &\Rightarrow -\varepsilon < g_x(z) < \varepsilon \\ &\Rightarrow h_{x,y}(z) - f(z) < \varepsilon \\ &\Rightarrow h_{x,y}(z) < f(z)+\varepsilon \end{aligned}$$

Como la colección de las bolas $B(y,\delta_y)$ forma un cubrimiento por abiertos de X, entonces podemos reducir a $y_1,\cdots,y_m$ tales que $X\subseteq \cup_{i\in[m]} B(y_i,\delta_{y_i})$. Sea $h_x(z) = (\wedge_{i\in[m]} h_{x,y_i})(z)$ entonces $h_x(z) < f(z)+\varepsilon$ para $z\in X$. Esto ocurre pues $h_x(z) \leqslant h_{x,y_i}(z)$ en $B(y_i,\delta_{y_i})$.

Note que $h_x(x) = f(x)$, tome $g(z) = h_x(z) - f(z)$. Como $g(x)=0$, existe δ_x tal que

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}(x,z) < \delta_x &\Rightarrow |g(z)-g(x)| < \varepsilon \\ &\iff -\varepsilon < h_x(z) - f(z) < \varepsilon \\ &\iff -\varepsilon + f(z) < h_x(z), \quad z\in B(x,\delta_x) \end{aligned}$$

Por compacidad existen $x_1,\cdots,x_\ell$ tales que $X\subseteq \cup_{i\in[\ell]} B(x_i,\delta_{x_i})$. Esto nos dice que $-\varepsilon + f(z) < h_{x_i}(z) \leqslant h(z), z\in B(x_i,\delta_{x_i})$. Sea $h = \vee_{i\in[\ell]} h_{x_i} \Rightarrow f(z)-\varepsilon < h_x(z)$ para cualquier $z\in X$. Escoja $z\in X$, tiene que existe x_i tal que $h(z) = h_{x_i}(z)$ y en ese punto $h(z) = h_{x_i}(z) < f(z)+\varepsilon$. Así encontramos alguien en el retículo que está a distancia ε de cualquier función.

Definición 1.10.4. Un álgebra A es un espacio vectorial con un producto $\circ\colon A^2 \to A\colon (x,y)\mapsto x\circ y$ que es bilineal y asociativo. Decimos que A tiene unidad si existe $\mathit{1}\in A$ tal que $\mathit{1}x = x\mathit{1} = x$. Además A es un álgebra normada si $||xy|| \leqslant ||x||||y||$ y $||\mathit{1}||=1$ si A tiene unidad.

Ejemplo 1.10.5. $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ es un álgebra normada con unidad donde $(f\circ g)(x) = f(x)g(x)$.

Basta ver que

$$\sup_{z\in X} |f(z)g(z)| \leqslant \sup_{z\in X} |f(z)| \sup_{z\in X} |g(z)|$$

Y esto es equivalente a $||fg||_\infty \leqslant ||f||_\infty ||g||_\infty$.

Cuál es la relación entre las álgebras y los retículos? Vamos a ver que las álgebras contienen el valor absoluto de sus elementos y así ver que es un retículo.

Si $A\subseteq X$ con X un espacio normado y una métrica inducida por la norma. Tome dos sucesiones convergentes, entonces el producto ($\circ$ del álgebra)de ellas converge al producto de sus límites.

Ejercicio 1.10.6. Corrobore el hecho anterior.

Lema 1.10.7. *Sea $A\subseteq \mathcal{C}(X)$ un álgebra normada con unidad. Entonces $\overline{A}$ es un retículo.*

Ejercicio 1.10.8. Verifique que $\overline{A}$ es un álgebra normada con unidad.

Proseguimos con la prueba del lema 1.10.7.

Prueba 35. *Basta probar que si $h\in\overline{A}$ entonces $|h|\in\overline{A}$. Como $||h||_\infty = c \Rightarrow h(z)\in[-c,c]$ para $z\in X$. Al ser $g(t)=|t|$, con $g\colon[-c,c]\to\mathbb{R}$, continua, dado n existe un polinomio $p_n(t)$ tal que $||g-p_n||_\infty < \frac{1}{n}$. Esto es equivalente a $\sup_{z\in X}|g(z)-p_n(z)| < \frac{1}{n}$. Esto nos dice que $||z|-p_n(z)| < \frac{1}{n}$ para $z\in[-c,c]$ entonces $||h(y)|-p_n(h(y))| < \frac{1}{n}$ con $y\in X$.*

Falta ver que p_n está en el álgebra, pero esto se sigue de que

$$\begin{aligned} p_n(h(y)) &= a_0 + a_1 h(y) + \cdots + a_m (h(y))^m \\ &= \left(a_0 \mathit{1} + a_1 h + a_2 h\circ h + \cdots + a_m \underbrace{h\circ h\circ\cdots\circ h}_{m veces} \right)(y) \end{aligned}$$

Teorema 1.10.9 (Stone-Weierstrass)**.** *Sea $(X,\mathfrak{m})$ compacto y $A\subseteq\mathcal{C}(X)$ un álgebra normada tal que $x\neq y \Rightarrow \exists h\in A$ tal que $h(x)\neq h(y)$ y $\mathit{1}\in A$ entonces tenemos que A es denso en $\mathcal{C}(X)$.*

Prueba 36. *Sabemos que $\overline{A}$ es un retículo. Falta probar que dados $x,y \in X$ y $a,b \in \mathbb{R}$ existe $h_1 \in A$ tal que $(h_1(x),h_1(y)) = (a,b)$. Considere el sistema*

$$\alpha h(x) + \beta = a \quad \alpha h(y) + \beta = b$$

Este sistema tiene solución pues la siguiente matriz tiene determinante no nulo.

$$\begin{pmatrix} h(x) & 1 \\ h(y) & 1 \end{pmatrix} = |h(x) - h(y)| \neq 9$$

La última condición del teorema se conoce como separación de puntos. En otras palabras tenemos la siguiente definición.

Definición 1.10.10. Decimos que $h \in \mathcal{C}(X)$ separa puntos si para $x \neq y$, se cumple que $h(x) \neq h(y)$.

1.11. Día 11— 24-4-18

Nos interesan los números complejos pues nos interesan las funciones trigonométricas. Es más fácil ver estas funciones como las partes reales e imaginarias de e^{iz}.

La diferencia entre el teorema siguiente y 1.10.9 es cerradura por conjugados complejos.

Teorema 1.11.1 (Stone-Weierstrass)**.** *Sea X espacio métrico compacto y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ subálgebra que satisface:*
1. Tiene unidad,
2. Separa puntos: si $x \neq y$ entonces existe $f \in \mathcal{A}$: $f(x) \neq f(y)$,
3. $f \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{f} \in \mathcal{A}$
Entonces $\mathcal{A}$ es denso en $\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$.

Prueba 37. *Sea $f: X \to \mathbb{C}$ con $f = f_1 + if_2$. Recuerde que $\overline{f} = f_1 - if_2$. Luego se cumple que*

$$\frac{1}{2}(f + \overline{f}) = f_1 = \operatorname{Re}(f) \in \mathcal{A}$$
$$\frac{-i}{2}(f - \overline{f}) = f_2 = \operatorname{Im}(f) \in \mathcal{A}$$

Así $f_1,f_2 \in \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$. Vamos a probar que $\mathcal{A}_1 = \overline{\mathcal{A} \cap \mathcal{C}(X,\mathbb{R})} = \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$. Este conjunto es una subálgebra con unidad 1 la función constante. Basta probar que separa puntos.

Tome $x \neq y$, existe $f \in \mathcal{C}(X,\mathcal{C})$ tal que

$$f_1(x) + if_2(x) = f(x) \neq f(y) = f_1(y) + if_2(y)$$

Entonces $f_1(x) \neq f_1(y)$ ó $f_2(x) \neq f_2(y)$. Por el teorema 1.10.9 se encuentra lo buscado.

Tome $h \in \mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ con $h = h_1 + ih_2$. Sabemos que existen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}},(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}_1$ tales que $f_n \to h_1, g_n \to h_2$ en $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$. Entonces $h_n = f_n + ig_n \in \mathcal{A}$ converge a $h \in \mathcal{C}(X,\mathbb{C})$.

Ejemplo 1.11.2. Recuerde que $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$ y considere $p(e^{iz}) = \sum_{n=-k}^{k} c_n (e^{iz})^n$. Observe que esto es $\sum_{n=-k}^{k} c_n e^{izn}$ y $e^{-izn} = \overline{e^{izn}}$ entonces $c_k e^{izn} + c_{-k} e^{izn} = a_k \sin(kz) + b_k \cos(kz)$ con $(a_k,b_k) = (c_k + c_{-k}, i(c_k - c_{-k}))$. Por lo tanto

$$p(e^{izn}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \sin(kz) + b_k \cos(kz)$$

Separa puntos pues $e^{iz} \neq e^{iw}$ tomando $p(x) = x$ tenemos el resultado.

El ejemplo anterior nos dice que los polinomios trigonométricos son densos en $\mathcal{C}(\partial B(0,1),\mathbb{C})$. Sea $X = \{f: [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}: f(-\pi) = f(\pi)\}$, note que $[-\pi,\pi] \xrightarrow{e^{iz}} \partial B(0,1)$. Vea que $\partial B(0,1)$ y X son isométricos.

Tercera Sesión de Ejercicios

Ejercicio 1.11.3 (2.4. Joseph Varilly)**.** Mostrar que el complemento del conjunto de Cantor es abierto y denso.

FIG11.1

Ejercicio 1.11.4 (2.9. Joseph Varilly)**.** Mostrar que el conjunto $\{z\}\cup\{z_n : n\in\mathbb{N}\}$ es compacto donde $z_n\to z$.

Ejercicio 1.11.5 (2.15. Joseph Varilly)**.** Un subconjunto $K\subseteq\mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si toda función en él es acotada.

Ejercicio 1.11.6 (2.4.6.17. Santiago Cambronero)**.** Si $f: K\to\mathbb{R}$ es continua, K compacto, conexo, entonces $f(K)=[\text{mín}_{x\in K}(f(x)),\text{máx}_{x\in K}(f(x))]$.

Ejercicio 1.11.7 (2.4.6.23. Santiago Cambronero)**.** Si E es compacto, toda sucesión en E con un solo punto de acumulación es convergente.

1.12. Día 12— 3-5-18

Cuarta Sesión de Ejercicios

Ejercicio 1.12.1 (2.4.6.6. Santiago Cambronero)**.** Sea $f: [0,1]\to[0,1]$ continua. Muestre que f tiene al menos un punto fijo.

Ejercicio 1.12.2 (2.4.6.7. Santiago Cambronero)**.** Sea $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ diferenciable y $|f'(x)|\leqslant 1$. Se concluye que f es una contracción? Más aún, qué pasa si $|f'(x)|<1$.

Teorema 1.12.3 (Banach, 1922)**.** *Sea $(X,\mathfrak{m})$ un espacio métrico completo y $f: X\to X$ una contracción. Esto es, f es λ-Lipschitz con $0<\lambda<1$. Entonces f tiene un único punto fijo.*

Prueba 38. *En efecto, considere $x_0\in X$ y sea $x_{n+1}=f(x_n)$. Note que por definición de contracción y por inducción tenemos lo siguiente:*

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}(x_{n+2},x_{n+1}) &\leqslant \lambda\mathfrak{m}(x_{n+1},x_n)\\ &\leqslant \lambda^2\mathfrak{m}(x_n,x_{n-1})\\ &\vdots\\ &\leqslant \lambda^n\mathfrak{m}(x_{n+1-n},x_{n-n})\\ &=\lambda^n\mathfrak{m}(x_1,x_0)\end{aligned}$$

Entonces para $n>m$ aplicando desigualdad triangular y el hecho anterior resulta en:

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}(x_n,x_m) &\leqslant \sum_{i=m}^{n-1}\mathfrak{m}(x_{i+1},x_i)\\ &\leqslant \sum_{i=m}^{n-1}\lambda^i\mathfrak{m}(x_1,x_0)\\ &\leqslant \mathfrak{m}(x_1,x_0)\sum_{i=m}^{\infty}\lambda^i\\ &=\mathfrak{m}(x_1,x_0)\left(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i-\left(\frac{1-\lambda^m}{1-\lambda}\right)\right)\\ &=\mathfrak{m}(x_1,x_0)\left(\frac{1}{1-\lambda}-\left(\frac{1-\lambda^m}{1-\lambda}\right)\right)\\ &=\frac{\lambda^m\mathfrak{m}(x_1,x_0)}{1-\lambda}\end{aligned}$$

Como esta expresión tiende a 0 *pues* $\lambda<1$ *se sigue que* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es de Cauchy y por tanto* $x_n\to x\in X$*. Ahora vea que*

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1}=\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(\lim_{n\to\infty} x_n)\Rightarrow x=f(x)$$

Así este es el punto fijo de f*.*

Ahora suponemos que existen x*,*y *puntos fijos de* f*. Entonces tenemos que*

$$\begin{aligned}\lambda\mathfrak{m}(f(x),f(y)) &= \lambda\mathfrak{m}(x,y)\\ &\geqslant \mathfrak{m}(f(x),f(y))\\ &\Longleftrightarrow \mathfrak{m}(f(x),f(y))=0 \Longleftrightarrow x=y\end{aligned}$$

Se sigue que sólo hay un punto fijo.

Ejercicio 1.12.4 (2.4.6.12. Santiago Cambronero)**.** Sea E completo y $f: E\to E$. Si $f^k=\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{k\text{ veces}}$ es contractiva entonces f tiene un único punto fijo.

Ejercicio 1.12.5. Polinomios de Bernstein.