02220224574
Abdullah Sevet Eroğlu

Soru 1- Sonlu farklar ve Pascal üçgeni arasında bir ilişki vardır. Pascal üçgeni, binom katsayılarını içeren bir üçgendir. Sonlu farklar ise bir polinomun katsayılarını bulmak için kullanılan bir yöntemdir.

Bir fonksiyonun sonlu farkları alındığında, bu farklar polinom katsayılarını ifade eder. Pascal üçgeni de aynı binom katsayılarını içerir, iki konsept arasında ilişki şu şekildedir;

Birinci dereceden bir polinom düşünelim; $f(x) = a0 + a1x$. Bu polinom sonlu farkları şu şekilde ifade edebilir:

$$\Delta f(x) = a1$$

Δ işareti sonlu farkları temsil eder.

Pascal üçgeninde binom katsayıları şu şekildedir;

$$(a+b)^1 = 1a + 1b$$

Bu durumda, aynı katsayıları ifade eden sonlu farklarla Pascal üçgeni arasında benzerlik bulunmaktadır. Ancak, bu ilişki genel olarak daha yüksek dereceli polinomlar için de geçerli.

örnek

$$\underbrace{\Delta^n f(x)}_{\text{n'inci dereceden sonlu fark}} = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{(-1)^{n-k}}_{\text{uygun işaretleri}} \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{binom katsayılarını}} f(x+kh)$$

→ temsil eder

n = 2 ;

$$\Delta^2 f(x) = \sum_{k=0}^{2} (-1)^{2-k} \binom{2}{k} f(x+kh)$$

$$\Delta^2 f(x) = \binom{2}{0} f(x) - \binom{2}{1} f(x+h) + \binom{2}{2} f(x+2h)$$

Binom katsayılarını açalım ;

$$\Delta^2 f(x) = f(x) - 2f(x+h) + f(x+2h)$$

Bu Δ^2 operatörünün ikinci dereceden bir sonlu farkı ifade ettiğini gösterir. Bu örnek, sonlu farkların ve Pascal üçgenin ilişkisini gösteren genel bir formülle gösterir

02220224574
Abdullah Samet Eroğlu

Soru 2

Newton ileri/geri sonlu fark denklemleri, bir fonksiyonun türevini yaklaşık olarak hesaplamak için kullanılan sonlu farklar yönteminin bir parçasıdır. Bu denklemler, fark operatörlerini kullanarak diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerine yaklaşır.

Şu şekilde türetilir. $f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Burada h küçük bir artış miktarıdır: Bu formül taylor serisi açılımından elde edilir;

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + O(h^3)$$

f(x) terimini çıkarırsak ve h ile bölürsek, ileri fark formulunu elde ederiz. Hata terimi, O(h) olarak gösterilir.

- Newton geri fark denklemi şu şekilde şekilde türetilir:

$$f'(x) \approx \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$$

Burada h küçük bir azalış miktarıdır. Bu formül, Taylor serisi açılımından bulunur;

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - O(h^3)$$

Bu ifadeden f(x) terimi çıkarırsak ve h ile bölünürsek, geri fark formulunu elde ederiz.

örnek

$f(x) = x^2$ $\quad$ x=2 noktasından türevi $f'(2)$ hesaplayalım.

İleri sonlu

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

h'in adım büyüklüğünü $h=0{,}1$

$$f'(2) \approx \frac{f(2+0{,}1)-f(2)}{0{,}1}$$

$$f'(2) \approx \frac{(2+0{,}1)^2-2^2}{0{,}1}$$

$$f'(2) \approx \frac{4{,}41-4}{0{,}1}$$

$$f'(2) \approx 0{,}41$$

Geri Sonlu

$$f'(x) \approx \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$$

$$f'(2) \approx \frac{f(2)-f(2-0{,}1)}{0{,}1}$$

$$f'(2) \approx \frac{2^2-(2-0{,}1)^2}{0{,}1}$$

$$f'(2) \approx \frac{4-3{,}61}{0{,}1}$$

$$f'(2) \approx 0{,}39$$