

## R2.07

### Graphes



Le bon exemple, René MAGRITTE (1898-1967)

## 1 Ordonnancement

## 2 Annexes

# Ordonnancement

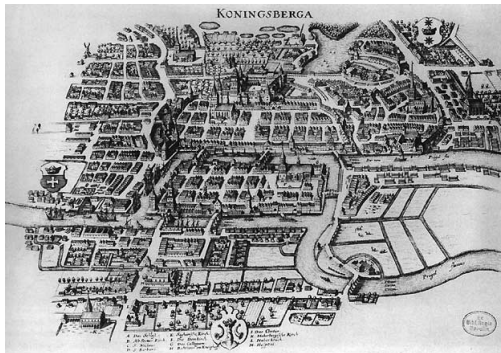
R2.07  
Graphes

Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

Annexes



## Définitions

L'**ordonnancement** concerne la coordination de réalisations importantes comme la construction d'un immeuble, d'un pont, d'un avion, le fonctionnement d'une chaîne de production...

## Définitions

L'**ordonnancement** concerne la coordination de réalisations importantes comme la construction d'un immeuble, d'un pont, d'un avion, le fonctionnement d'une chaîne de production...

L'objectif à atteindre est supposé se décomposer en **tâches** caractérisées par leur durée  $d_i$  et par des contraintes qui les lient à d'autres tâches (postériorité ou antériorité).

## Définitions

L'**ordonnancement** concerne la coordination de réalisations importantes comme la construction d'un immeuble, d'un pont, d'un avion, le fonctionnement d'une chaîne de production...

L'objectif à atteindre est supposé se décomposer en **tâches** caractérisées par leur durée  $d_i$  et par des contraintes qui les lient à d'autres tâches (posteriorité ou antériorité).

La représentation par un graphe d'un problème d'ordonnancement permet une bonne appréhension globale du problème.

## Définitions

L'**ordonnancement** concerne la coordination de réalisations importantes comme la construction d'un immeuble, d'un pont, d'un avion, le fonctionnement d'une chaîne de production...

L'objectif à atteindre est supposé se décomposer en **tâches** caractérisées par leur durée  $d_i$  et par des contraintes qui les lient à d'autres tâches (postériorité ou antériorité).

La représentation par un graphe d'un problème d'ordonnancement permet une bonne appréhension globale du problème.

On étudiera deux représentations possibles : le **graphe potentiels-tâches** et le **graphe potentiels-étapes (graphe PERT)**.

## Le graphe potentiels-tâches (B. Roy 1960)

À partir du projet donné on construit le graphe :

- 1 à chaque tâche  $i$  ( $1 \leq i \leq N$ ), on associe un sommet du graphe.



## Le graphe potentiels-tâches (B. Roy 1960)

À partir du projet donné on construit le graphe :

- 1 à chaque tâche  $i$  ( $1 \leq i \leq N$ ), on associe un sommet du graphe.
- 2 on définit un arc  $(i, j)$  de longueur  $d_i$  si la tâche  $i$  précède la tâche  $j$ .

## Le graphe potentiels-tâches (B. Roy 1960)

À partir du projet donné on construit le graphe :

- 1 à chaque tâche  $i$  ( $1 \leq i \leq N$ ), on associe un sommet du graphe.
- 2 on définit un arc  $(i, j)$  de longueur  $d_i$  si la tâche  $i$  précède la tâche  $j$ .

On ajoute deux sommets  $\alpha$  et  $\omega$  correspondant aux tâches fictives de durée 0 de début et de fin de travaux.

## Le graphe potentiels-tâches (B. Roy 1960)

À partir du projet donné on construit le graphe :

- 1 à chaque tâche  $i$  ( $1 \leq i \leq N$ ), on associe un sommet du graphe.
- 2 on définit un arc  $(i, j)$  de longueur  $d_i$  si la tâche  $i$  précède la tâche  $j$ .

On ajoute deux sommets  $\alpha$  et  $\omega$  correspondant aux tâches fictives de durée 0 de début et de fin de travaux.

On représente le graphe après avoir calculé le rang (ou niveau) de chacun des sommets défini comme étant le nombre d'arcs dans un chemin de cardinalité maximum entre  $\alpha$  et le sommet considéré.

# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

Annexes

## Exemple : construction d'une maison

Code tâche	Tâche	Durée (semaine)	Tâches antérieures
<i>A</i>	Travaux de maçonnerie	7	/
<i>B</i>	Charpente de la toiture	3	<i>A</i>
<i>C</i>	Toiture	1	<i>B</i>
<i>D</i>	Installations sanitaires et électriques	8	<i>A</i>
<i>E</i>	Façade	2	<i>C</i> , <i>D</i>
<i>F</i>	Fenêtres	1	<i>C</i> , <i>D</i>
<i>G</i>	Aménagement de jardin	1	<i>C</i> , <i>D</i>
<i>H</i>	Travaux de plafonnage	3	<i>F</i>
<i>I</i>	Mise en peinture	2	<i>H</i>
<i>J</i>	Emménagement	1	<i>E</i> , <i>G</i> , <i>I</i>

## Fonction rang

Soit un graphe orienté  $(\mathcal{G}, E)$  sans circuit ayant une unique source  $\alpha$  (sommet sans prédécesseur aussi appelé racine du graphe).

## Fonction rang

Soit un graphe orienté  $(\mathcal{G}, E)$  sans circuit ayant une unique source  $\alpha$  (sommet sans prédécesseur aussi appelé racine du graphe).

La fonction **rang** associe aux sommets  $i \in E$  leur rang défini par  $r(\alpha) = 0$  et pour tout  $i \neq \alpha$ ,  $r(i)$  est **le nombre d'arcs dans un chemin de cardinalité maximum entre  $\alpha$  et  $i$ .**

## Fonction rang

### Algorithme

Grphe sans circuit dont le sommet 1 est le seul sommet vérifiant  $\Gamma_1^{-1} = \emptyset$ .

- ❶ Pour tout  $i$  poser  $d_i^- = |\Gamma_1^{-1}|$   
 $k = 0$ ,  $S_0 = \{1\}$ .
- ❷ Remarque :  $S_k$  est l'ensemble des sommets vérifiant  $d_i^- = 0$   
 $S_{k+1} \leftarrow \emptyset$   
Pour tout  $i \in S_k$  faire
  - $r(i) \leftarrow k$
  - Pour tout  $j \in \Gamma_i$ ,  $d_j^- \leftarrow d_j^- - 1$   
Si  $d_j^- = 0$ ,  $S_{k+1} \leftarrow S_{k+1} + i$ .
- ❸  $k \leftarrow k + 1$ . Si  $|S_k| = 0$ , FIN.  
Sinon aller en b).

# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

Annexes

## Exemple : rang

Code Tâches	Tâches anté.	Tâches											Rang						
		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	1	2	3	4	5	6	7
A	/																		
B	A	1																	
C	B		1																
D	A	1																	
E	C, D			1	1														
F	C, D			1	1														
G	C, D			1	1														
H	F						1												
I	H								1										
J	E, G, I					1		1		1									



# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

Annexes

## Exemple : rang 1

Code Tâches	Tâches anté.	Tâches											Rang						
		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	1	2	3	4	5	6	7
A	/												0						
B	A	1											1						
C	B		1										1						
D	A	1											1						
E	C, D			1	1								2						
F	C, D			1	1								2						
G	C, D			1	1								2						
H	F					1							1						
I	H								1				1						
J	E, G, I					1		1		1			3						
													A						

# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

Annexes

## Exemple : rang 2

Code Tâches	Tâches anté.	Tâches											Rang						
		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	1	2	3	4	5	6	7
<del>A</del>	/												0						
<del>B</del>	A	<del>1</del>											1	0					
C	B		1										1	1					
<del>D</del>	A	<del>1</del>											1	0					
E	C, D			1	1								2	2					
F	C, D			1	1								2	2					
G	C, D			1	1								2	2					
H	F					1							1	1					
I	H								1				1	1					
J	E, G, I					1		1		1			3	3					
													<del>A</del>	<del>B</del>					
														<del>D</del>					

# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

Annexes

## Exemple : rang 3

Code Tâches	Tâches anté.	Tâches											Rang						
		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	1	2	3	4	5	6	7
<del>A</del>	/												0						
<del>B</del>	A	<del>1</del>											1	0					
<del>C</del>	B		<del>1</del>										1	1	0				
<del>D</del>	A	<del>1</del>											1	0					
E	C, D			1	<del>1</del>								2	2	1				
F	C, D			1	<del>1</del>								2	2	1				
G	C, D			1	<del>1</del>								2	2	1				
H	F						1						1	1	1				
I	H								1				1	1	1				
J	E, G, I					1		1		1			3	3	3				
													A	B	C				
														D					

# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

Annexes

## Exemple : rang 4

Code Tâches	Tâches anté.	Tâches											Rang						
		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	1	2	3	4	5	6	7
A	/												0						
B	A	1											1	0					
C	B		1										1	1	0				
D	A	1											1	0					
E	C, D			1	1								2	2	1	0			
F	C, D			1	1								2	2	1	0			
G	C, D			1	1								2	2	1	0			
H	F					1							1	1	1	1			
I	H								1				1	1	1	1			
J	E, G, I					1		1		1			3	3	3	3			
													A	B	C	E			
														D		F			
																G			

# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

Annexes

## Exemple : rang 5

Code Tâches	Tâches anté.	Tâches											Rang						
		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	1	2	3	4	5	6	7
<del>A</del>	/												0						
<del>B</del>	A	<del>1</del>											1	0					
<del>C</del>	B		<del>1</del>										1	1	0				
<del>D</del>	A	<del>1</del>											1	0					
<del>E</del>	C, D			<del>1</del>	<del>1</del>								2	2	1	0			
<del>F</del>	C, D			<del>1</del>	<del>1</del>								2	2	1	0			
<del>G</del>	C, D			<del>1</del>	<del>1</del>								2	2	1	0			
<del>H</del>	F						<del>1</del>						1	1	1	1	0		
<del>I</del>	H								1				1	1	1	1	1		
<del>J</del>	E, G, I					<del>1</del>		<del>1</del>		1			3	3	3	3	1		
													<del>A</del>	<del>B</del>	<del>C</del>	<del>E</del>	<del>H</del>		
														<del>D</del>		<del>F</del>			
																<del>G</del>			

# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

Annexes

## Exemple : rang 6

Code Tâches	Tâches anté.	Tâches											Rang						
		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	1	2	3	4	5	6	7
A	/												0						
B	A	<del>1</del>											1	0					
C	B		<del>1</del>										1	1	0				
D	A	<del>1</del>											1	0					
E	C, D			<del>1</del>	<del>1</del>								2	2	1	0			
F	C, D			<del>1</del>	<del>1</del>								2	2	1	0			
G	C, D			<del>1</del>	<del>1</del>								2	2	1	0			
H	F						<del>1</del>						1	1	1	1	0		
I	H								<del>1</del>				1	1	1	1	1	0	
J	E, G, I					<del>1</del>		<del>1</del>			1		3	3	3	3	1	1	
													A	B	C	E	H	I	
														D		F			
																G			

# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

Annexes

## Exemple : rang 7

Code Tâches	Tâches anté.	Tâches											Rang						
		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	1	2	3	4	5	6	7
A	/												0						
B	A	<del>1</del>											1	0					
C	B		<del>1</del>										1	1	0				
D	A	<del>1</del>											1	0					
E	C, D			<del>1</del>	<del>1</del>								2	2	1	0			
F	C, D			<del>1</del>	<del>1</del>								2	2	1	0			
G	C, D			<del>1</del>	<del>1</del>								2	2	1	0			
H	F						<del>1</del>						1	1	1	1	0		
I	H								<del>1</del>				1	1	1	1	1	0	
J	E, G, I					<del>1</del>		<del>1</del>		<del>1</del>			3	3	3	3	1	1	0
													A	B	C	E	H	I	J
														D		F			
																G			

# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

Annexes

## Exemple : rang et tâches immédiatement postérieures (successeurs)

Code Tâches	Tâches anté.	Tâches											Rang							Tâches post.
		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	1	2	3	4	5	6	7	
A	/												0							B, D
B	A	<del>1</del>											1	0						C
C	B		<del>1</del>										1	1	0					E, F, G
D	A	<del>1</del>											1	0						E, F, G
E	C, D			<del>1</del>	<del>1</del>								2	2	1	0				J
F	C, D			<del>1</del>	<del>1</del>								2	2	1	0				H
G	C, D			<del>1</del>	<del>1</del>								2	2	1	0				J
H	F						<del>1</del>						1	1	1	1	0			I
I	H								<del>1</del>				1	1	1	1	1	0		J
J	E, G, I					<del>1</del>		<del>1</del>		<del>1</del>			3	3	3	3	1	1	0	/
													A	B	C	E	H	I	J	
														D		F				
																G				



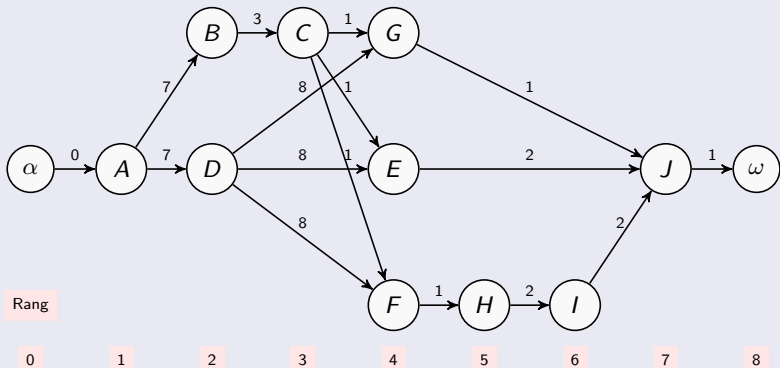
# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan  
Ordonnancement  
Annexes

## Exemple : construction d'une maison



## Date au plus tôt et durée minimale du projet

La date commençant à la date 0, on cherche un ordonnancement qui minimise la durée totale du travail, donc la date de fin de travaux.

## Date au plus tôt et durée minimale du projet

La date commençant à la date 0, on cherche un ordonnancement qui minimise la durée totale du travail, donc la date de fin de travaux. Pour qu'une tâche puisse commencer, il est nécessaire que toutes les tâches qui la relie à la tâche de début du projet soient réalisées.

## Date au plus tôt et durée minimale du projet

La date commençant à la date 0, on cherche un ordonnancement qui minimise la durée totale du travail, donc la date de fin de travaux.

Pour qu'une tâche puisse commencer, il est nécessaire que toutes les tâches qui la relient à la tâche de début du projet soient réalisées.

La **date au plus tôt**  $t_i$  de début de la tâche  $i$  est  $t_i = \max_{j \in \Gamma_i^{-1}} (t_j + d_j)$

(longueur du plus long chemin de  $\alpha$  à  $i$ ).

# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

Annexes

## Date au plus tôt et durée minimale du projet

La date commençant à la date 0, on cherche un ordonnancement qui minimise la durée totale du travail, donc la date de fin de travaux.

Pour qu'une tâche puisse commencer, il est nécessaire que toutes les tâches qui la relient à la tâche de début du projet soient réalisées.

La **date au plus tôt**  $t_i$  de début de la tâche  $i$  est  $t_i = \max_{j \in \Gamma_i^{-1}} (t_j + d_j)$

(longueur du plus long chemin de  $\alpha$  à  $i$ ).

La **durée minimale du projet**  $t_\omega$  est donc la longueur du plus long chemin de  $\alpha$  à  $\omega$ .

## Date au plus tard et tâches critiques

La **date au plus tard**  $T_i$  pour commencer la tâche  $i$  est  $T_i = \min_{j \in \Gamma_i} (T_j - d_i)$ .

## Date au plus tard et tâches critiques

La **date au plus tard**  $T_i$  pour commencer la tâche  $i$  est  $T_i = \min_{j \in \Gamma_i} (T_j - d_i)$ .

On note alors la **marge totale de la tâche**  $i$  :  $m_i = T_i - t_i$ .

## Date au plus tard et tâches critiques

La **date au plus tard**  $T_i$  pour commencer la tâche  $i$  est  $T_i = \min_{j \in \Gamma_i} (T_j - d_i)$ .

On note alors la **marge totale de la tâche**  $i$  :  $m_i = T_i - t_i$ .

Les tâches dont la marge totale est nulle seront appelées les **tâches critiques**.



## Date au plus tard et tâches critiques

La **date au plus tard**  $T_i$  pour commencer la tâche  $i$  est  $T_i = \min_{j \in \Gamma_i} (T_j - d_i)$ .

On note alors la **marge totale de la tâche**  $i$  :  $m_i = T_i - t_i$ .

Les tâches dont la marge totale est nulle seront appelées les **tâches critiques**.

Si un retard est pris sur une des tâches critiques, la durée minimale du projet sera augmentée d'autant.

## Date au plus tard et tâches critiques

La **date au plus tard**  $T_i$  pour commencer la tâche  $i$  est  $T_i = \min_{j \in \Gamma_i} (T_j - d_i)$ .

On note alors la **marge totale de la tâche**  $i$  :  $m_i = T_i - t_i$ .

Les tâches dont la marge totale est nulle seront appelées les **tâches critiques**.

Si un retard est pris sur une des tâches critiques, la durée minimale du projet sera augmentée d'autant.

Remarque : à chaque tâche  $i$  est associé un nombre  $t_i$  qui peut être considéré comme un potentiel.

## Date au plus tard et tâches critiques

La **date au plus tard**  $T_i$  pour commencer la tâche  $i$  est  $T_i = \min_{j \in \Gamma_i} (T_j - d_i)$ .

On note alors la **marge totale de la tâche**  $i$  :  $m_i = T_i - t_i$ .

Les tâches dont la marge totale est nulle seront appelées les **tâches critiques**.

Si un retard est pris sur une des tâches critiques, la durée minimale du projet sera augmentée d'autant.

Remarque : à chaque tâche  $i$  est associé un nombre  $t_i$  qui peut être considéré comme un potentiel.

Un **chemin critique** est un chemin le plus long constitué de tâches critiques représentant la durée d'exécution minimale du projet.

## Algorithme de recherche des dates au plus tôt

- 1 Poser  $t_\alpha = 0$ .
- 2 Prendre les sommets  $j$  par rang croissant et faire  $t_j = \max_{i \in \Gamma_j^{-1}} (t_i + d_i)$ .

# Ordonnancement

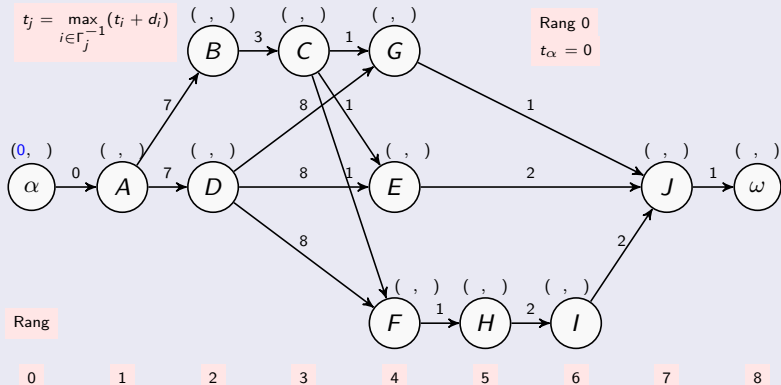
R2.07  
Graphes

Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan  
Ordonnancement

Annexes

## Exemple : dates au plus tôt



# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

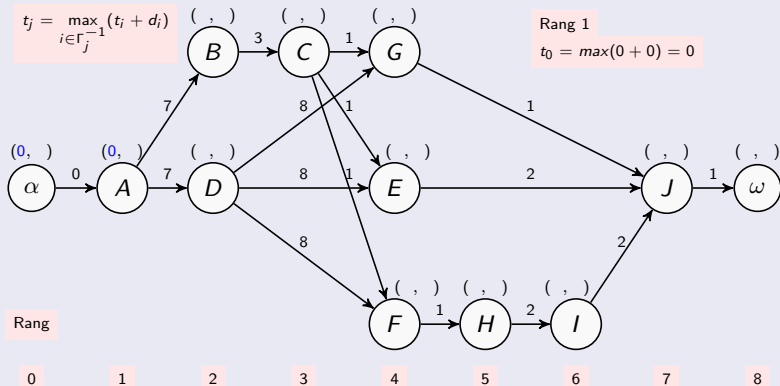
Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

Annexes

## Exemple : dates au plus tôt



# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

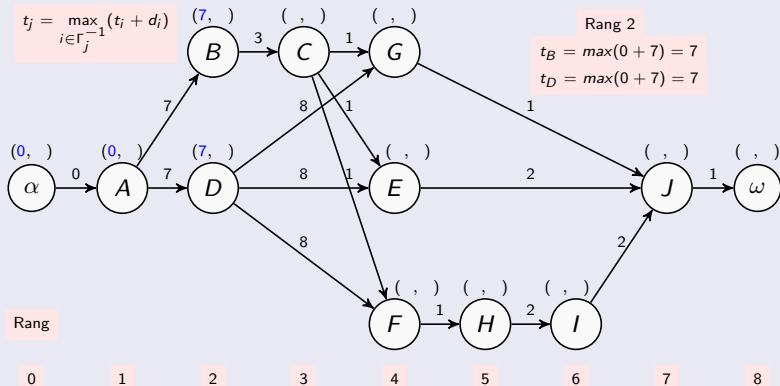
Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

Annexes

## Exemple : dates au plus tôt



# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

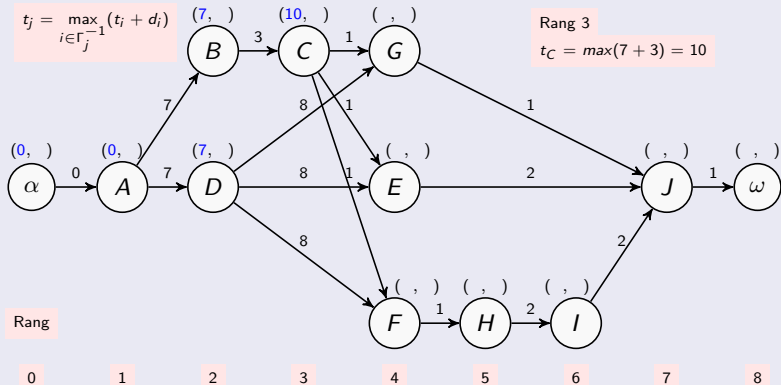
Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

Annexes

## Exemple : dates au plus tôt





# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

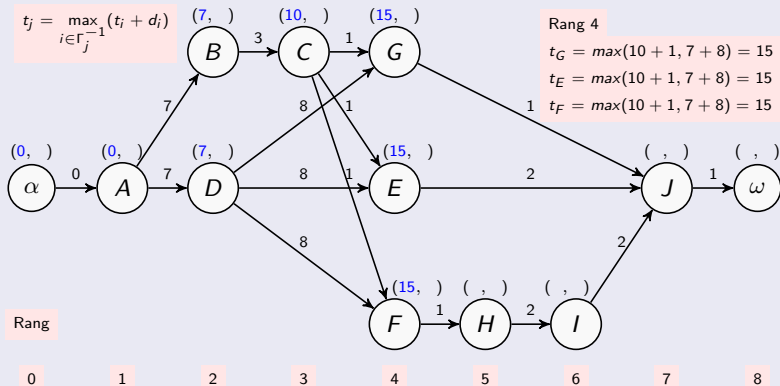
Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

Annexes

## Exemple : dates au plus tôt



# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

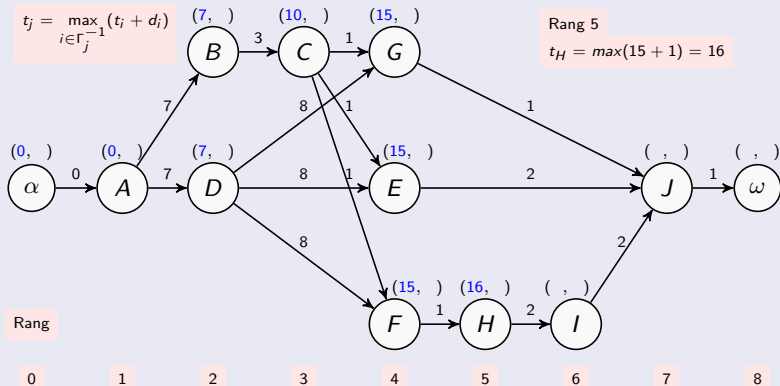
Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

Annexes

## Exemple : dates au plus tôt



# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

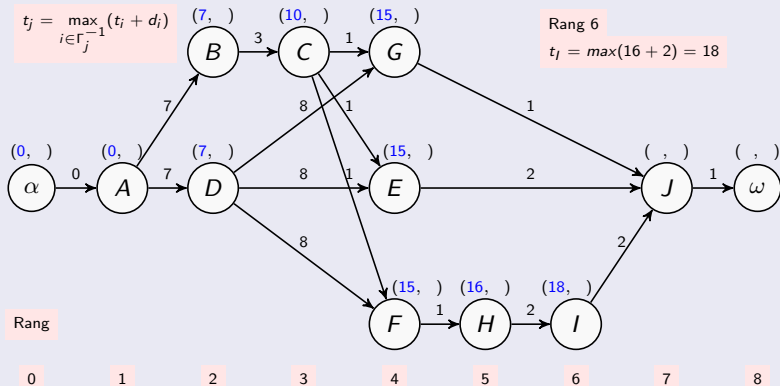
Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

Annexes

## Exemple : dates au plus tôt



# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

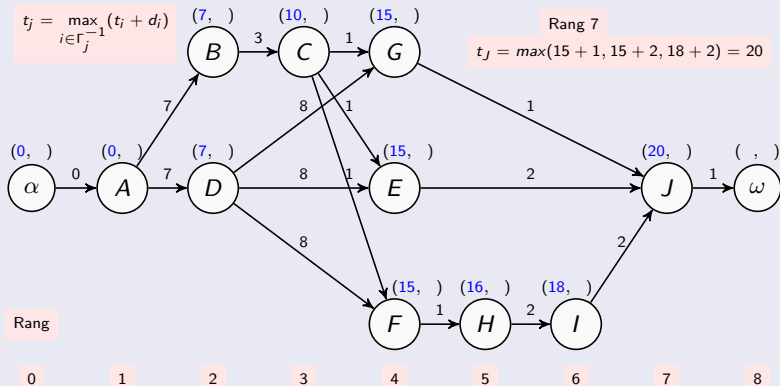
Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

Annexes

## Exemple : dates au plus tôt



# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

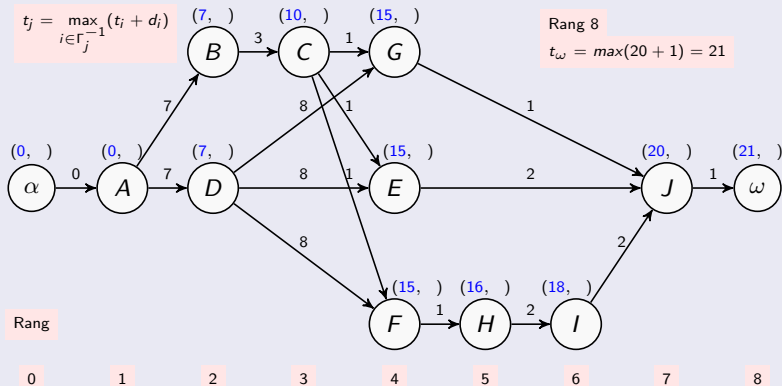
Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

Annexes

## Exemple : dates au plus tôt



# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

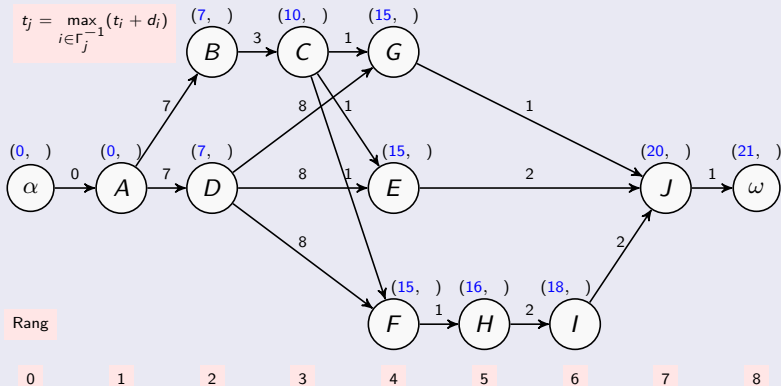
Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

Annexes

## Exemple : dates au plus tôt



## Algorithme de recherche des dates au plus tard

- 1 Poser  $T_\omega = t_\omega$ .
- 2 Prendre les sommets  $i$  par rang décroissant et faire  
$$T_i = \min_{j \in \Gamma_i} (T_j - d_i).$$

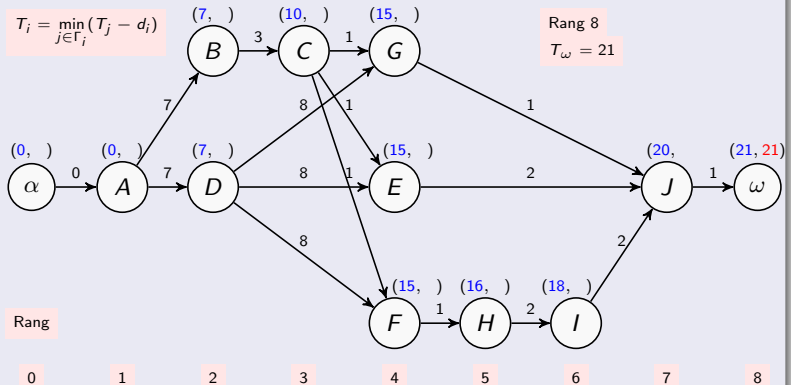
# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan  
Ordonnancement  
Annexes

## Exemple : dates au plus tard





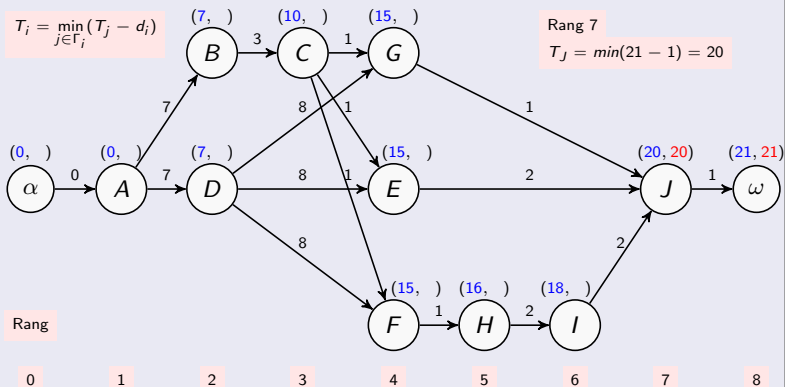
# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan  
Ordonnancement  
Annexes

## Exemple : dates au plus tard



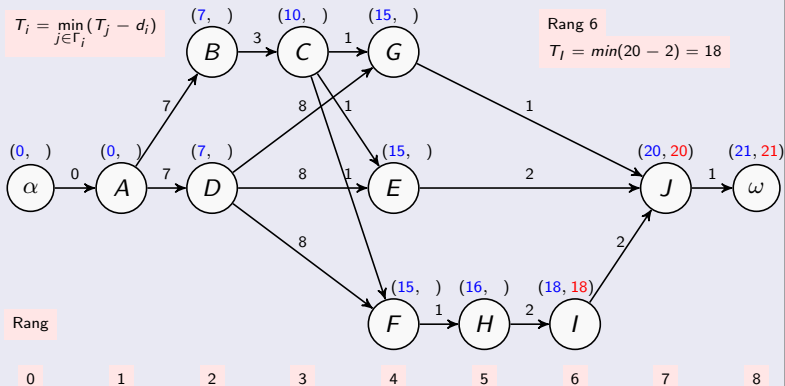
# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan  
Ordonnancement  
Annexes

## Exemple : dates au plus tard



# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

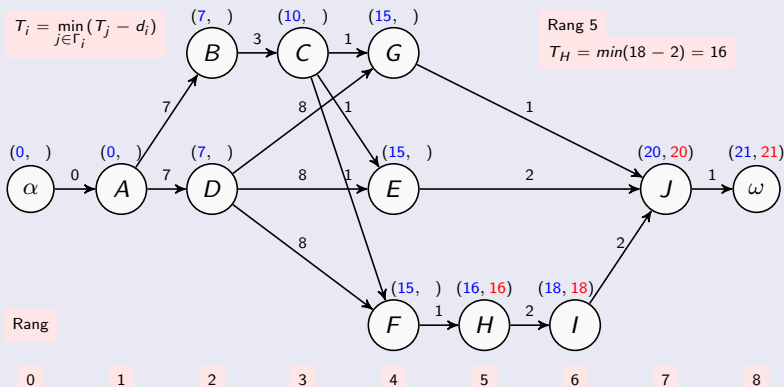
Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

Annexes

## Exemple : dates au plus tard



# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

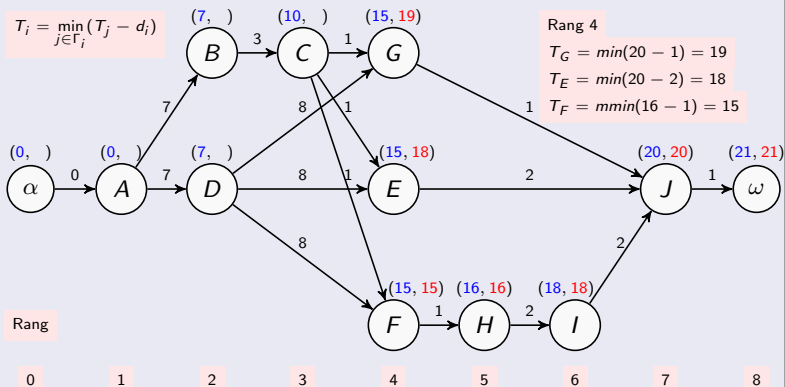
Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

Annexes

## Exemple : dates au plus tard



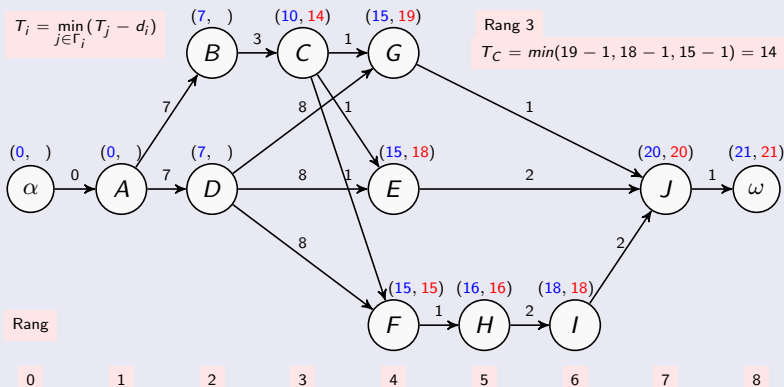
# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan  
Ordonnancement  
Annexes

## Exemple : dates au plus tard



# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

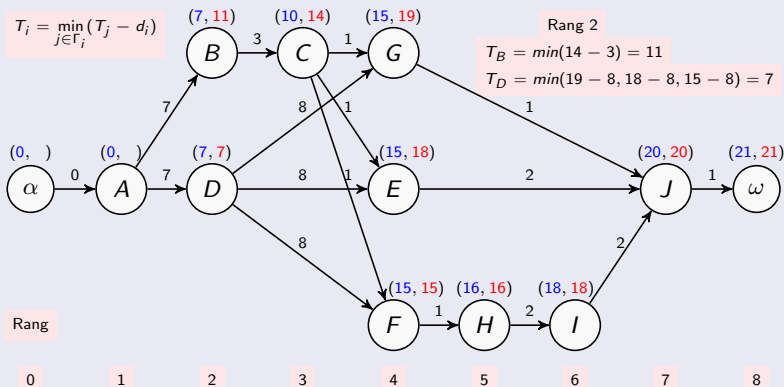
Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

Annexes

## Exemple : dates au plus tard



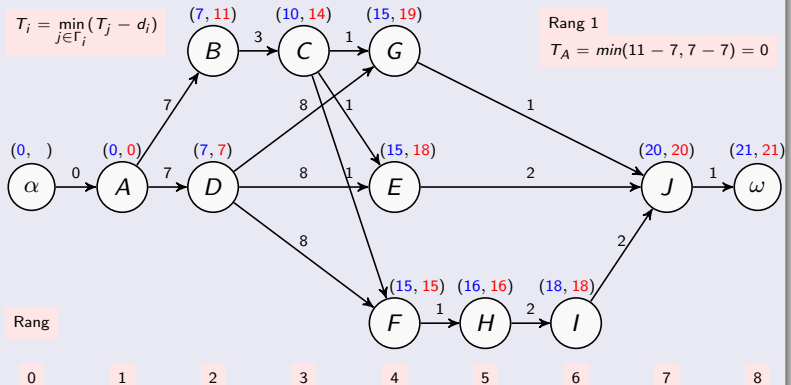
# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan  
Ordonnancement  
Annexes

## Exemple : dates au plus tard



# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

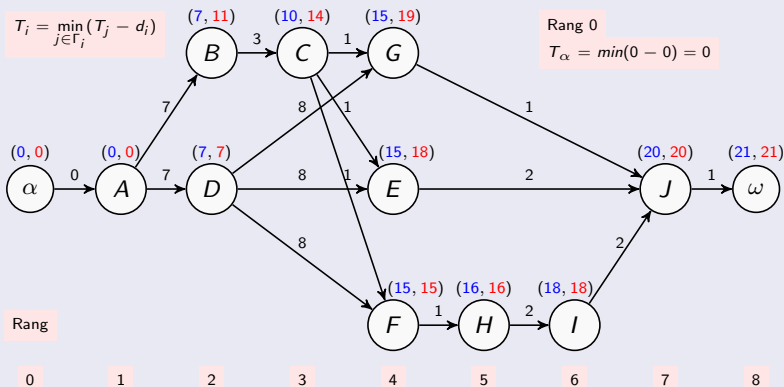
Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

Annexes

## Exemple : dates au plus tard





# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

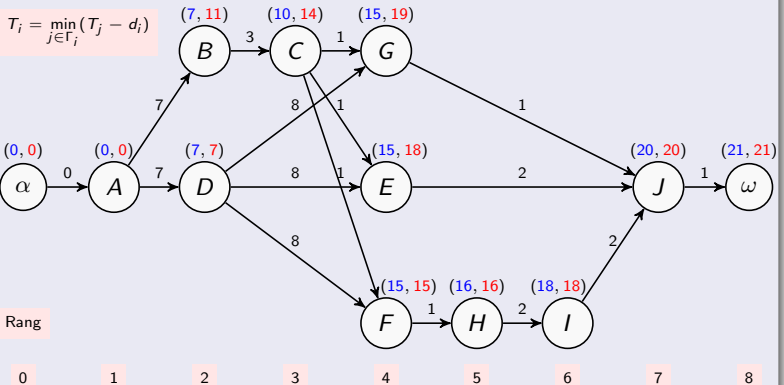
Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

Annexes

## Exemple : dates au plus tard



# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

Annexes

## Exemple : marge totale

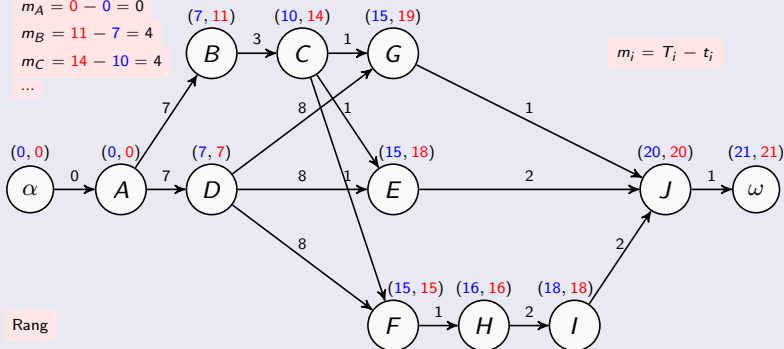
$$m_A = 0 - 0 = 0$$

$$m_B = 11 - 7 = 4$$

$$m_C = 14 - 10 = 4$$

...

$$m_i = T_i - t_i$$



Rang

0

1

2

3

4

5

6

7

8

Tâche	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Marge totale	0	4	4	0	3	0	4	0	0	0

# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

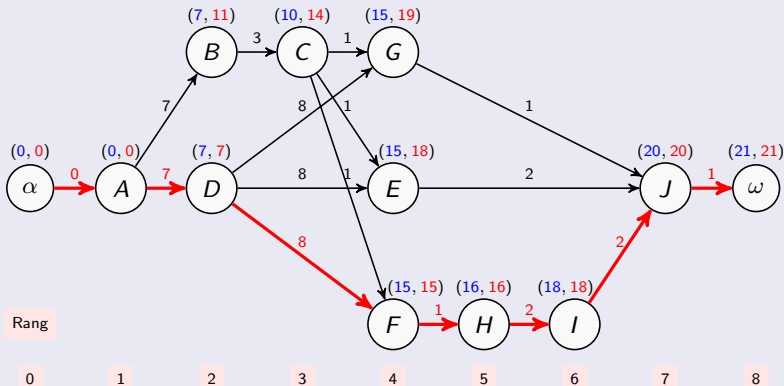
Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

Annexes

## Exemple : chemin critique



Il y a un seul chemin critique :  $\alpha \rightarrow A \xrightarrow{7} D \xrightarrow{8} F \xrightarrow{1} H \xrightarrow{2} I \xrightarrow{2} J \xrightarrow{1} \omega$ .

# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

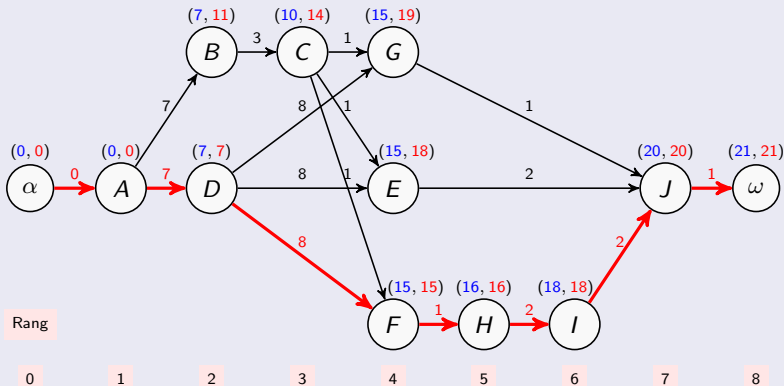
Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

Annexes

## Exemple : chemin critique



Il y a un seul chemin critique :  $\alpha \rightarrow A \xrightarrow{7} D \xrightarrow{8} F \xrightarrow{1} H \xrightarrow{2} I \xrightarrow{2} J \xrightarrow{1} \omega$ .  
Durée minimale du projet : 21 semaines.

# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

Annexes

## Graphe potentiel-étapes (graphe PERT, Malcolm, Roseboom, Clark et Fazar, 1959)

Dans cette représentation, les tâches sont les arcs du graphe potentiel-étapes ou graphe PERT : Programme Evaluation and Research Task.

## Graphe potentiel-étapes (graphe PERT, Malcolm, Roseboom, Clark et Fazar, 1959)

Dans cette représentation, les tâches sont les arcs du graphe potentiel-étapes ou graphe PERT : Programme Evaluation and Research Task.

Le début  $i$  et la fin  $j$  d'une tâche sont des **étapes du projet** (sommets du graphe).

# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

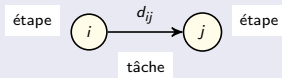
Annexes

## Graphe potentiel-étapes (graphe PERT, Malcolm, Roseboom, Clark et Fazar, 1959)

Dans cette représentation, les tâches sont les arcs du graphe potentiel-étapes ou graphe PERT : Programme Evaluation and Research Task.

Le début  $i$  et la fin  $j$  d'une tâche sont des **étapes du projet** (sommets du graphe).

La longueur de chaque arc est la durée  $d_{ij}$  de la tâche  $(i, j)$  correspondante.



# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

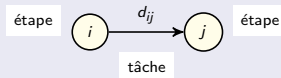
Annexes

## Graphe potentiel-étapes (graphe PERT, Malcolm, Roseboom, Clark et Fazar, 1959)

Dans cette représentation, les tâches sont les arcs du graphe potentiel-étapes ou graphe PERT : Programme Evaluation and Research Task.

Le début  $i$  et la fin  $j$  d'une tâche sont des **étapes du projet** (sommets du graphe).

La longueur de chaque arc est la durée  $d_{ij}$  de la tâche  $(i, j)$  correspondante.



On définit aussi une **étape début de projet** et une **étape fin de projet**.



# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

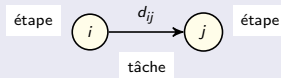
Annexes

## Graphe potentiel-étapes (graphe PERT, Malcolm, Roseboom, Clark et Fazar, 1959)

Dans cette représentation, les tâches sont les arcs du graphe potentiel-étapes ou graphe PERT : Programme Evaluation and Research Task.

Le début  $i$  et la fin  $j$  d'une tâche sont des **étapes du projet** (sommets du graphe).

La longueur de chaque arc est la durée  $d_{ij}$  de la tâche  $(i, j)$  correspondante.



On définit aussi une **étape début de projet** et une **étape fin de projet**. Chaque étape est définie par un ensemble de tâches ayant déjà été effectuées.

# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

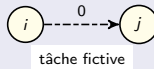
Plan

Ordonnancement

Annexes

## Grappe potentiel-étapes : tâches fictives

Des tâches fictives de durée nulle doivent parfois être introduites pour préciser les précédences.



# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

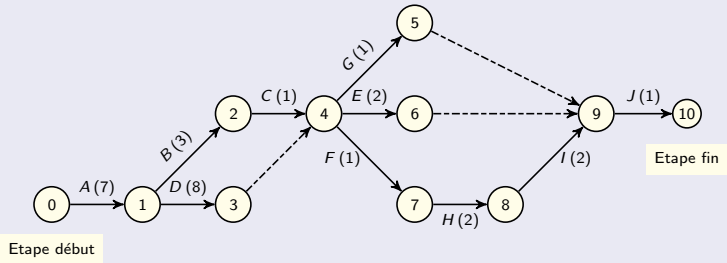
Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

Annexes

## Grphe potentiel-étapes : exemple



Rang

1

2

3

4

5

6

7

## Algorithme de recherche des dates au plus tôt de réalisation de l'étape $i$

- 1 Poser  $t_0 = 0$  (0 : étape début).
- 2 Prendre les sommets  $i$  par rang croissant et faire  $t_j = \max_{i \in \Gamma_j^{-1}} (t_i + d_{ij})$ .

# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

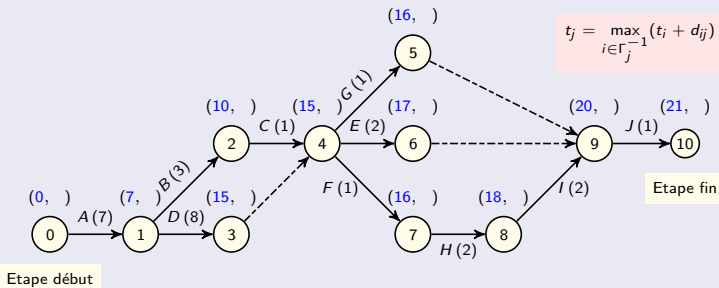
Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

Annexes

## Graphes potentiel-étapes : exemple (dates au plus tôt)



Rang	0	1	2	3	4	5	6	7
------	---	---	---	---	---	---	---	---

# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

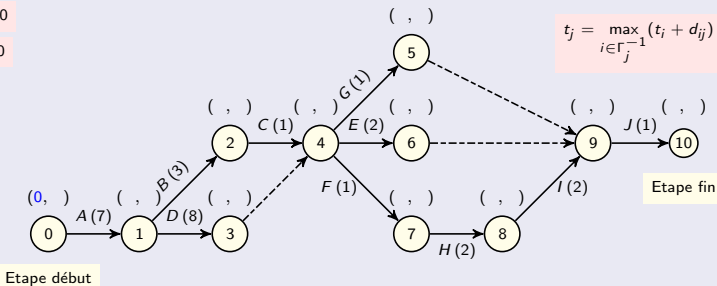
Annexes

## Graphe potentiel-étapes : exemple (dates au plus tôt)

Rang 0

$t_0 = 0$

$$t_j = \max_{i \in \Gamma_j^{-1}} (t_i + d_{ij})$$



Rang :

0

1

2

3

4

5

6

7

# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

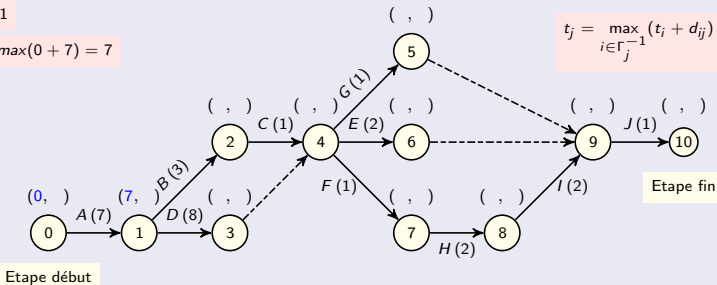
Annexes

## Graphe potentiel-étapes : exemple (dates au plus tôt)

Rang 1

$$t_1 = \max(0 + 7) = 7$$

$$t_j = \max_{i \in \Gamma_j^{-1}} (t_i + d_{ij})$$



Rang :

0

1

2

3

4

5

6

7

# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

Annexes

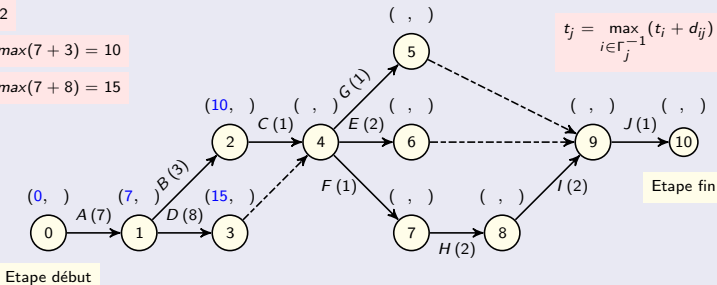
## Graphe potentiel-étapes : exemple (dates au plus tôt)

Rang 2

$$t_2 = \max(7 + 3) = 10$$

$$t_3 = \max(7 + 8) = 15$$

$$t_j = \max_{i \in \Gamma_j^{-1}} (t_i + d_{ij})$$



Rang :	0	1	2	3	4	5	6	7
--------	---	---	---	---	---	---	---	---



# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

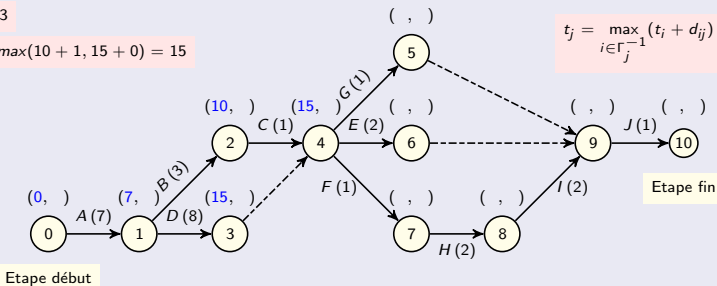
Annexes

## Graphe potentiel-étapes : exemple (dates au plus tôt)

Rang 3

$$t_4 = \max(10 + 1, 15 + 0) = 15$$

$$t_j = \max_{i \in \Gamma_j^{-1}} (t_i + d_{ij})$$



Rang :

0

1

2

3

4

5

6

7

# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

Annexes

## Graphe potentiel-étapes : exemple (dates au plus tôt)

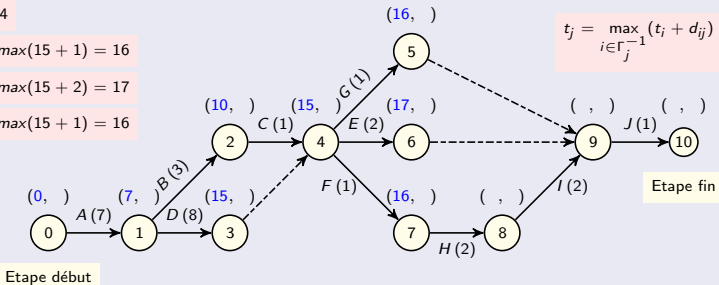
Rang 4

$$t_5 = \max(15 + 1) = 16$$

$$t_6 = \max(15 + 2) = 17$$

$$t_7 = \max(15 + 1) = 16$$

$$t_j = \max_{i \in \Gamma_j^{-1}} (t_i + d_{ij})$$



Rang :	0	1	2	3	4	5	6	7
--------	---	---	---	---	---	---	---	---

# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

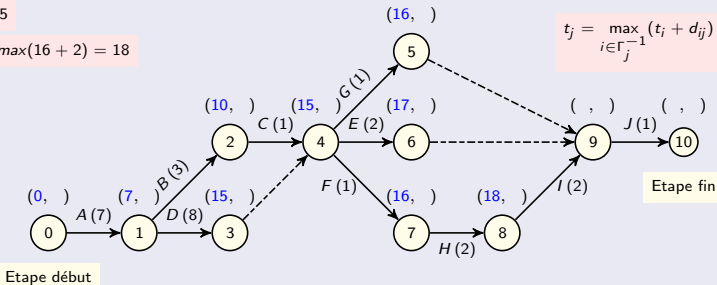
Annexes

## Graphe potentiel-étapes : exemple (dates au plus tôt)

Rang 5

$$t_8 = \max(16 + 2) = 18$$

$$t_j = \max_{i \in \Gamma_j^{-1}} (t_i + d_{ij})$$



Rang :

0

1

2

3

4

5

6

7

# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

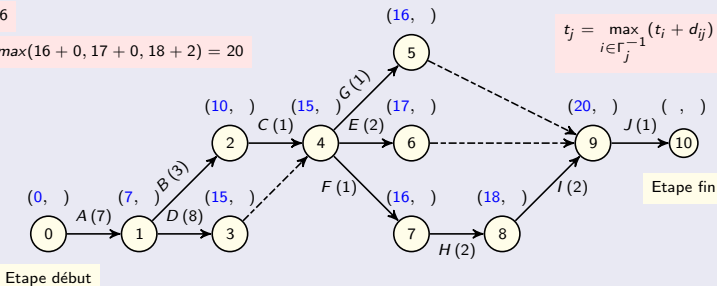
Annexes

## Graphe potentiel-étapes : exemple (dates au plus tôt)

Rang 6

$$t_9 = \max(16 + 0, 17 + 0, 18 + 2) = 20$$

$$t_j = \max_{i \in \Gamma_j^{-1}} (t_i + d_{ij})$$



Rang :	0	1	2	3	4	5	6	7
--------	---	---	---	---	---	---	---	---

# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

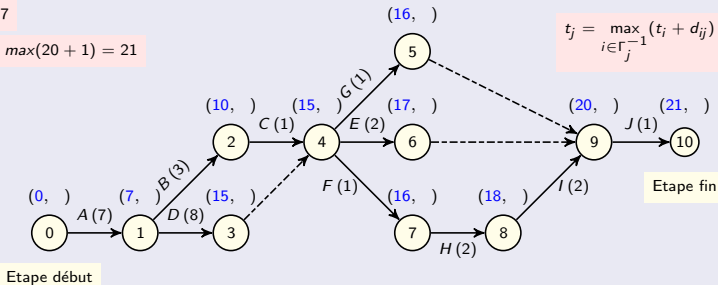
Annexes

## Graphe potentiel-étapes : exemple (dates au plus tôt)

Rang 7

$$t_{10} = \max(20 + 1) = 21$$

$$t_j = \max_{i \in \Gamma_j^{-1}} (t_i + d_{ij})$$



Rang :	0	1	2	3	4	5	6	7
--------	---	---	---	---	---	---	---	---

# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

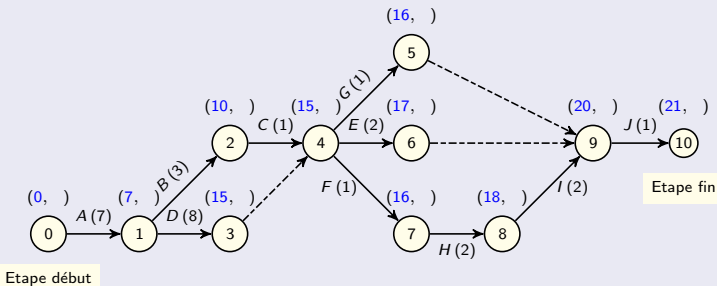
Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

Annexes

## Graphes potentiel-étapes : exemple (dates au plus tôt)



Rang :	0	1	2	3	4	5	6	7
--------	---	---	---	---	---	---	---	---

## Algorithme de recherche des dates au plus tard de réalisation de l'étape $j$

- 1 Poser  $T_N = t_N$  ( $N$  : étape fin).
- 2 Prendre les sommets  $j$  par rang décroissant et faire  
$$T_i = \min_{j \in \Gamma_i} (T_j - d_{ij}).$$

# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

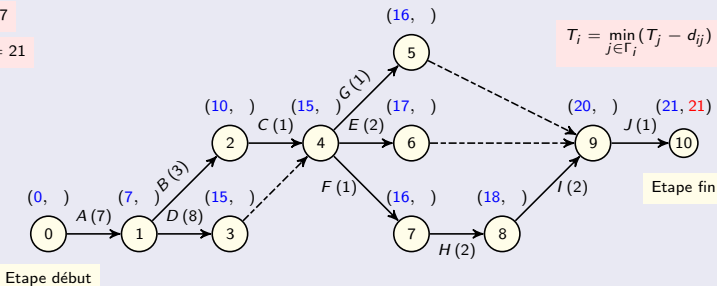
Annexes

## Graphe potentiel-étapes : exemple (dates au plus tard)

Rang 7

$T_{10} = 21$

$$T_i = \min_{j \in \Gamma_i} (T_j - d_{ij})$$



Rang

0

1

2

3

4

5

6

7



# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

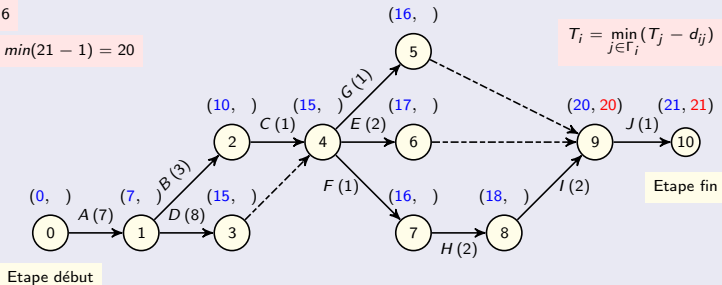
Annexes

## Graphe potentiel-étapes : exemple (dates au plus tard)

Rang 6

$$T_9 = \min(21 - 1) = 20$$

$$T_i = \min_{j \in \Gamma_i} (T_j - d_{ij})$$



Rang

0

1

2

3

4

5

6

7

# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

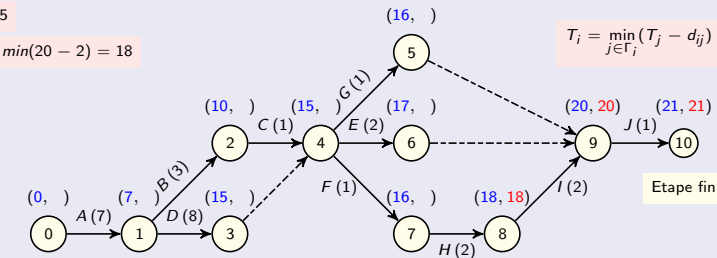
Annexes

## Graphe potentiel-étapes : exemple (dates au plus tard)

Rang 5

$$T_8 = \min(20 - 2) = 18$$

$$T_i = \min_{j \in \Gamma_i} (T_j - d_{ij})$$



Etape début

Etape fin

Rang	0	1	2	3	4	5	6	7
------	---	---	---	---	---	---	---	---

# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

Annexes

## Graphe potentiel-étapes : exemple (dates au plus tard)

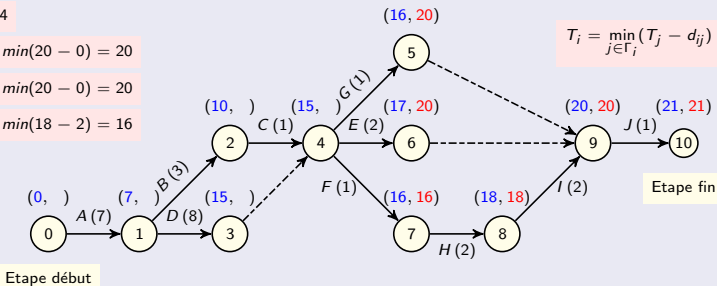
Rang 4

$$T_5 = \min(20 - 0) = 20$$

$$T_6 = \min(20 - 0) = 20$$

$$T_7 = \min(18 - 2) = 16$$

$$T_i = \min_{j \in \Gamma_i} (T_j - d_{ij})$$



Rang	0	1	2	3	4	5	6	7
------	---	---	---	---	---	---	---	---

# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

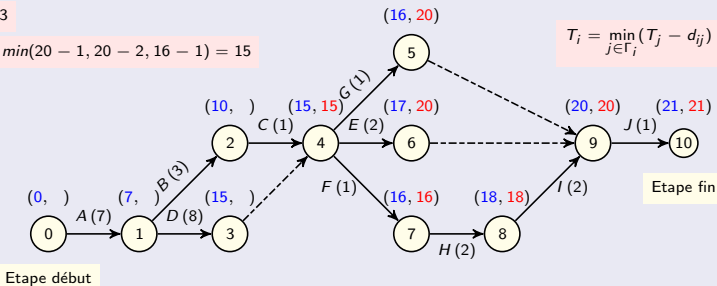
Annexes

## Graphe potentiel-étapes : exemple (dates au plus tard)

Rang 3

$$T_4 = \min(20 - 1, 20 - 2, 16 - 1) = 15$$

$$T_i = \min_{j \in \Gamma_i} (T_j - d_{ij})$$



Rang

0

1

2

3

4

5

6

7

# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

Annexes

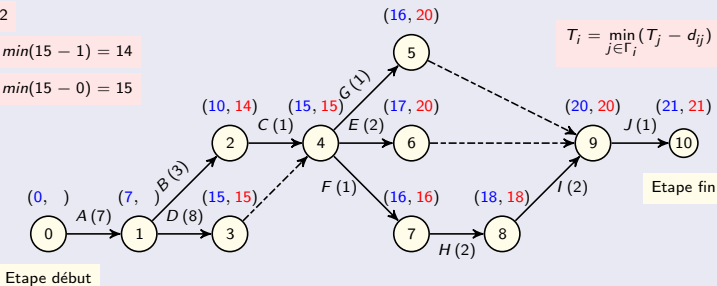
## Graphe potentiel-étapes : exemple (dates au plus tard)

Rang 2

$$T_2 = \min(15 - 1) = 14$$

$$T_3 = \min(15 - 0) = 15$$

$$T_i = \min_{j \in \Gamma_i} (T_j - d_{ij})$$



Rang	0	1	2	3	4	5	6	7
------	---	---	---	---	---	---	---	---

# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

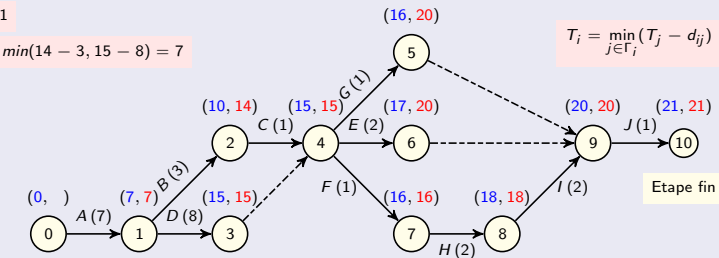
Annexes

## Graphe potentiel-étapes : exemple (dates au plus tard)

Rang 1

$$T_1 = \min(14 - 3, 15 - 8) = 7$$

$$T_i = \min_{j \in \Gamma_i} (T_j - d_{ij})$$



Rang

0

1

2

3

4

5

6

7

# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

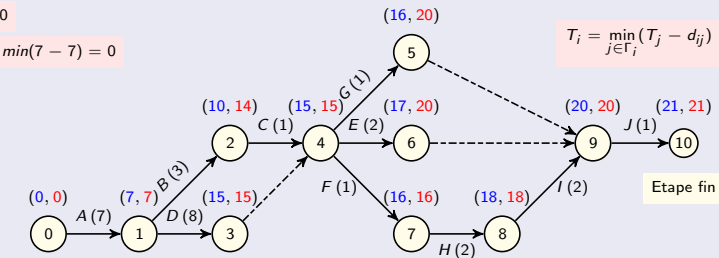
Annexes

## Graphe potentiel-étapes : exemple (dates au plus tard)

Rang 0

$$T_0 = \min(7 - 7) = 0$$

$$T_i = \min_{j \in \Gamma_i} (T_j - d_{ij})$$



Rang

0

1

2

3

4

5

6

7

# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

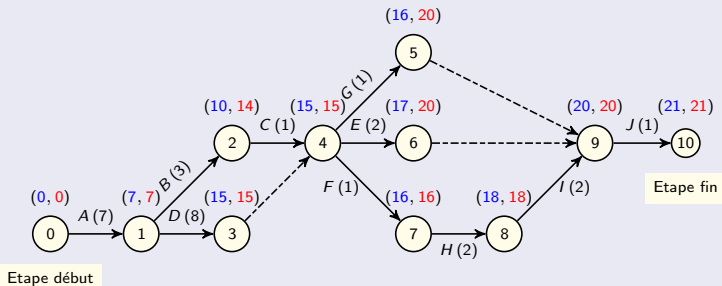
Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

Annexes

## Graphe potentiel-étapes : exemple (dates au plus tard)



Rang	0	1	2	3	4	5	6	7
------	---	---	---	---	---	---	---	---



## Graphe potentiel-étapes : marge totale

Dans le graphe potentiel-étapes, la **marge totale de la tâche  $(i,j)$**  est donnée par  $m_{ij} = T_j - t_i - t_{ij}$ .

# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

Annexes

## Graphe potentiel-étapes : exemple (marge totale)

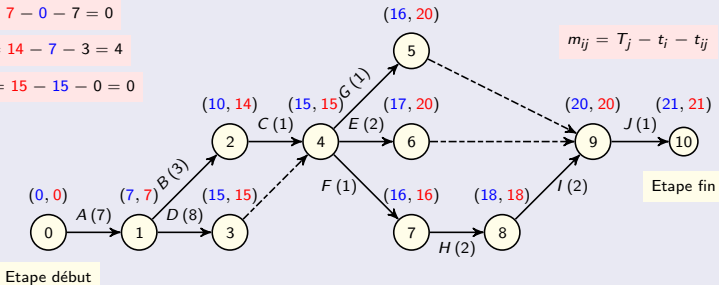
$$m_A = 7 - 0 - 7 = 0$$

$$m_B = 14 - 7 - 3 = 4$$

$$m_{34} = 15 - 15 - 0 = 0$$

...

$$m_{ij} = T_j - t_i - t_{ij}$$



Rang	0	1	2	3	4	5	6	7						
Tâche		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	(3, 4)	(5, 9)	(6, 9)
Marge totale		0	4	4	0	3	0	4	0	0	0	0	4	3

# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

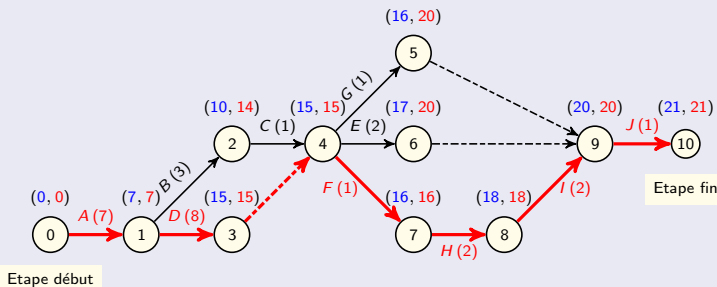
Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

Annexes

## Graphes potentiel-étapes : exemple (chemin critique)



Rang

0

1

2

3

4

5

6

7

Il y a un seul chemin critique :  $0 \xrightarrow{A(7)} 1 \xrightarrow{D(8)} 3 \xrightarrow{F(1)} 4 \xrightarrow{H(2)} 7 \xrightarrow{I(2)} 8 \xrightarrow{J(1)} 9 \xrightarrow{J(1)} 10$ .

# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

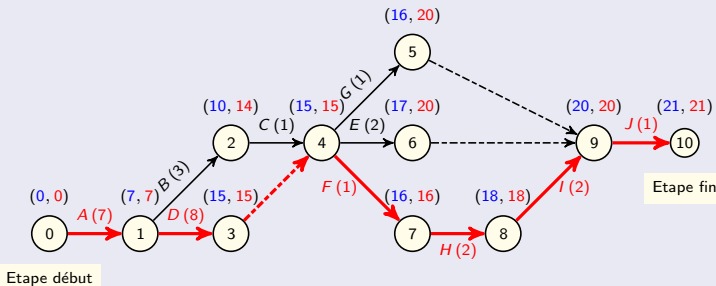
Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

Annexes

## Graphes potentiel-étapes : exemple (chemin critique)



Rang	0	1	2	3	4	5	6	7
------	---	---	---	---	---	---	---	---

Il y a un seul chemin critique :  $0 \xrightarrow{A(7)} 1 \xrightarrow{D(8)} 3 \xrightarrow{F(1)} 4 \xrightarrow{H(2)} 7 \xrightarrow{I(2)} 8 \xrightarrow{J(1)} 9 \xrightarrow{J(1)} 10$ .  
Durée minimale du projet : 21 semaines.

# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

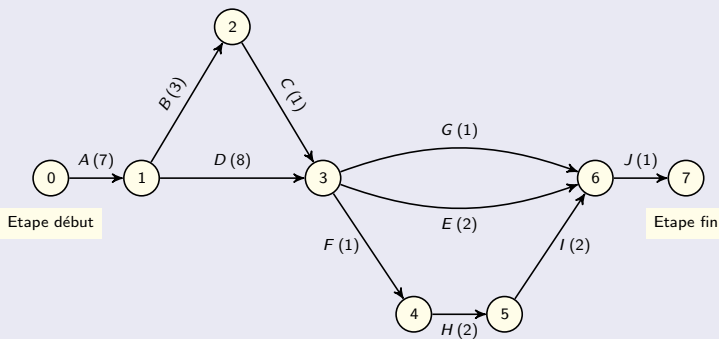
Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

Annexes

## Graphe potentiel-étapes : exemple (deuxième version)



Rang

1

2

3

4

5

6

7

# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

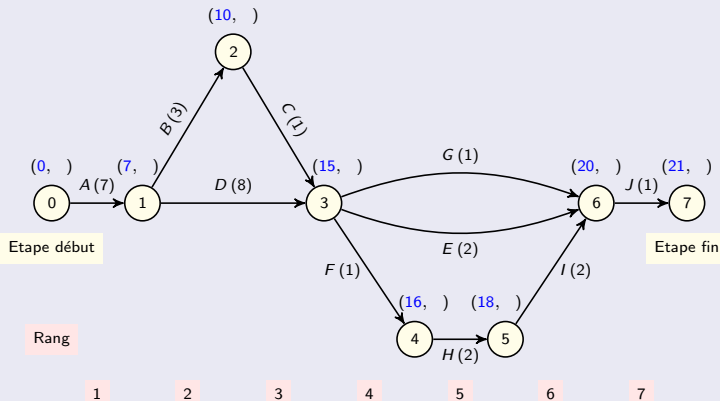
Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

Annexes

## Exemple : dates au plus tôt (deuxième version)



# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

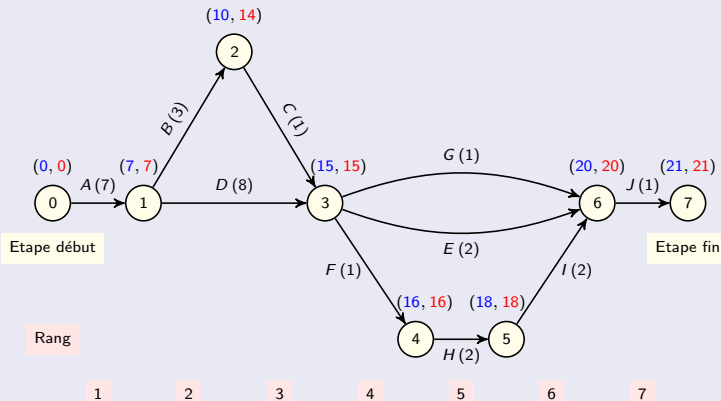
Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

Annexes

## Exemple : dates au plus tard (deuxième version)



# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

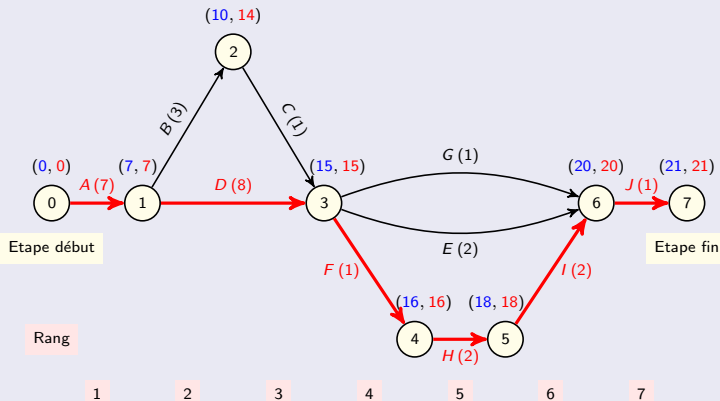
Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

Annexes

## Exemple : chemin critique (deuxième version)





## Comparaison des deux types de graphe

Il s'agit de la même logique sous deux formes différentes.

## Comparaison des deux types de graphe

Il s'agit de la même logique sous deux formes différentes.

Ceci dit, en potentiels-étapes, on n'a pas besoin de tâches fictives pour assurer la cohérence logique du projet.

## Comparaison des deux types de graphe

Il s'agit de la même logique sous deux formes différentes.

Ceci dit, en potentiels-étapes, on n'a pas besoin de tâches fictives pour assurer la cohérence logique du projet.

La modélisation potentiels-étapes est très proche d'une représentation par diagramme de Gantt (chaque arc correspond à une barre du diagramme).

## Comparaison des deux types de graphe

Il s'agit de la même logique sous deux formes différentes.

Ceci dit, en potentiels-étapes, on n'a pas besoin de tâches fictives pour assurer la cohérence logique du projet.

La modélisation potentiels-étapes est très proche d'une représentation par diagramme de Gantt (chaque arc correspond à une barre du diagramme).

La formulation potentiels-étapes peut générer moins de sommets, mais le graphe potentiels-étapes peut devenir illisible si de nombreuses tâches fictives apparaissent.

# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

Annexes

## Remarque : tâches parallèles

Code tâche	Durée (semaine)	Tâches antérieures
<i>A</i>	10	/
<i>B</i>	5	<i>A</i>
<i>C</i>	11	<i>A</i>
<i>D</i>	4	<i>B, C</i>

# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

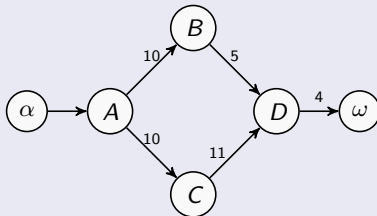
Plan

Ordonnancement

Annexes

Remarque : tâches parallèles

Grappe  
potentiels-tâches



# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

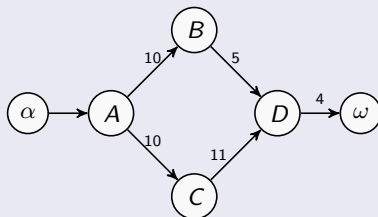
Plan

Ordonnancement

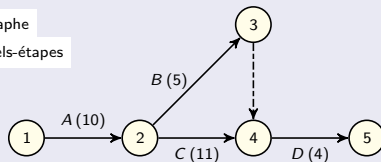
Annexes

## Remarque : tâches parallèles

Graphe  
potentiels-tâches



Graphe  
potentiels-étapes



# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

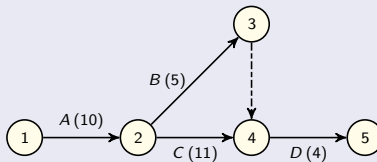
Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

Annexes

Remarque : tâches parallèles





# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

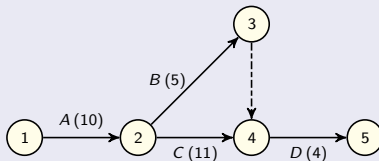
Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

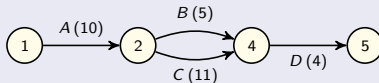
Ordonnancement

Annexes

Remarque : tâches parallèles



ou encore



# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

Annexes

## Tâches fictives : exemple

Code tâche	Durée (semaine)	Tâches antérieures
<i>A</i>	10	/
<i>B</i>	5	<i>A</i>
<i>C</i>	11	<i>A</i>
<i>D</i>	4	<i>B, C</i>
<i>E</i>	3	<i>C</i>
<i>F</i>	13	<i>D, E</i>

# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

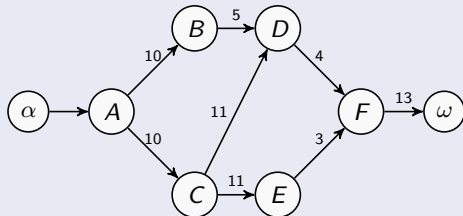
Plan

Ordonnancement

Annexes

## Tâches fictives : exemple

Grphe  
potentiels-tâches



# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

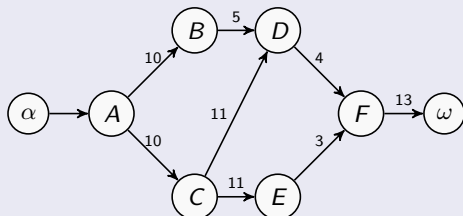
Plan

Ordonnancement

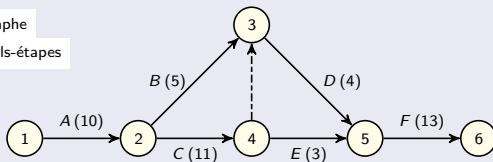
Annexes

## Tâches fictives : exemple

Graphe  
potentiels-tâches



Graphe  
potentiels-étapes



# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

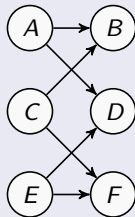
Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

Annexes

## Tâches fictives : autre exemple



Graphe

potentiels-tâches

# Ordonnancement

R2.07  
Graphes

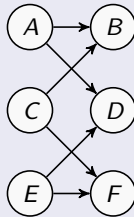
Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

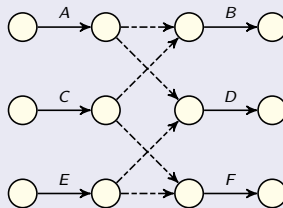
Ordonnancement

Annexes

## Tâches fictives : autre exemple



Graphe  
potentiels-tâches



Graphe  
potentiels-étapes

# Annexes

R2.07  
Graphes

Département  
Informatique  
IUT de  
Saint-Dié

Plan

Ordonnancement

Annexes

## Historique

## Historique

La théorie des graphes est apparue avec le problème des ponts de Königsberg au 18ème siècle.

Les développements ont débuté dans les années 1960 avec les travaux du mathématicien français Claude Berge (1926-2002).



## Bibliographie et webographie

## Bibliographie et webographie

- 1 Théorie des graphes de Olivier Cogis et Claudine Robert Vuibert

## Bibliographie et webographie

- 1 Théorie des graphes de Olivier Cogis et Claudine Robert Vuibert
- 2 Les graphes par l'exemple de F. Droesbeke, M. Hallin et C. Lefevre - Ellipses

## Bibliographie et webographie

- 1 Théorie des graphes de Olivier Cogis et Claudine Robert Vuibert
- 2 Les graphes par l'exemple de F. Droesbeke, M. Hallin et C. Lefevre - Ellipses
- 3 Graphes et algorithmes de Michel Gondran et Michel Minoux Eyrolles

## Bibliographie et webographie

- 1 Théorie des graphes de Olivier Cogis et Claudine Robert Vuibert
- 2 Les graphes par l'exemple de F. Droesbeke, M. Hallin et C. Lefevre - Ellipses
- 3 Graphes et algorithmes de Michel Gondran et Michel Minoux Eyrolles
- 4 Méthodes mathématiques pour l'informatique de Jacques Vélú Dunod

## Bibliographie et webographie

## Bibliographie et webographie

- 1 La recherche numéro 441 (mai 2010)

## Bibliographie et webographie

- 1 La recherche numéro 441 (mai 2010)
- 2 Les maths cent théorèmes de Roger Beslon et Daniel Lignon  
Le Polygraphe, éditeur



## Bibliographie et webographie

- 1 La recherche numéro 441 (mai 2010)
- 2 Les maths cent théorèmes de Roger Beslon et Daniel Lignon  
Le Polygraphe, éditeur
- 3 Introduction à la théorie des graphes de Jean-Manuel Mény  
CRDP Lyon

## Bibliographie et webographie

- 1 La recherche numéro 441 (mai 2010)
- 2 Les maths cent théorèmes de Roger Beslon et Daniel Lignon  
Le Polygraphe, éditeur
- 3 Introduction à la théorie des graphes de Jean-Manuel Mény  
CRDP Lyon
- 4 L'ordonnancement de Patrick Esquirol et Pierre Lopez  
ECONOMICA