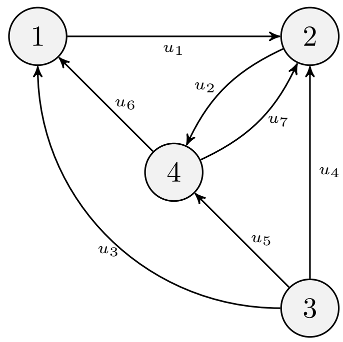
TD R2.07 Graphes

Exercice 1

On considère la représentation du graphe orienté $\mathcal{G} = (E, \mathcal{A})$ suivant.



1. Préciser
   (a) l'ensemble E des sommets.
   (b) l'ordre n du graphe.
   (c) l'ensemble $\mathcal{A}$ des arcs.
   (d) la taille m du graphe.
   (e) la matrice d'adjacence A.
   (f) la matrice d'incidence B.
2. S'agit-il d'un 1-graphe, d'un graphe simple, d'un graphe complet ?
3. Déterminer pour chacun des sommets i $(1 \leq i \leq n)$
   (a) l'ensemble des successeurs Γ_i.

i	Γ_i
1	
2	
3	
4	

   (b) l'ensemble des prédécesseurs Γ_i^{-1}.

i	Γ_i^{-1}
1	
2	
3	
4	

   (c) $\omega^+(i)$, $\omega^-(i)$ et le cocycle $\omega(i)$.

i	$\omega^+(i)$	$\omega^-(i)$	$\omega(i)$
1			
2			
3			
4			

4. $F = \{1, 2\}$. Préciser $\omega^+(F)$, $\omega^-(F)$ et le cocycle $\omega(F)$.

$\omega^+(F)$	$\omega^-(F)$	$\omega(F)$

5. Déterminer les tables des successeurs π et σ (listes de succession).
6. Compléter le tableau suivant (demi-degré extérieur, demi-degré intérieur, degré).

i	$d^+(i)$	$d^-(i)$	$d(i)$
1			
2			
3			
4			
Totaux			

7. Interpréter les totaux $\sum_{i=1}^{n} d^+(i)$, $\sum_{i=1}^{n} d^-(i)$ et $\sum_{i=1}^{n} d(i)$.
8. Préciser Γ_i^2 et Γ_i^3 pour chacun des sommets i.

i	Γ_i	Γ_i^2	Γ_i^3
1			
2			
3			
4			

9. En déduire et interpréter $\Gamma_i^{(0)} = \Gamma_i \cup \Gamma_i^2 \cup ... \cup \Gamma_i^{n-1}$ (on pourra compléter le tableau précédent).

i	Γ_i	Γ_i^2	Γ_i^3	$\Gamma_i^{(0)}$
1				
2				
3				
4				

10. Déterminer la fermeture transitive $\widehat{\Gamma}_i = \{i\} \cup \Gamma_i \cup \Gamma_i^2 \cup ... \cup \Gamma_i^{n-1}$ de chacun des sommets i (on pourra compléter le tableau suivant).

i	Γ_i	Γ_i^2	Γ_i^3	$\Gamma_i^{(0)}$	$\widehat{\Gamma}_i$
1					
2					
3					
4					

11. Le graphe est-il fortement connexe ?
12. Calculer les puissances booléennes A^k $(1 \leq k \leq n-1)$. Les interpréter.
13. En déduire $A \vee A^2 \vee ... \vee A^{n-1}$, puis $I_n \vee A \vee A^2 \vee A^3 \vee ... \vee A^{n-1}$. Interpréter les résultats.
14. Calculer les puissances A^k $(1 \leq k \leq n-1)$. Interpréter.
15. Préciser en indiquant s'il s'agit de chemins (respectivement de circuits) élémentaires ou simples,
    (a) les chemins de longueur $n-1$ allant du sommet 2 au sommet 4,
    (b) les circuits de longueur $n-1$ d'extrémités le sommet 2,

(c) les chemins de longueur n allant du sommet 2 au sommet 4,

(d) les circuits de longueur n d'extrémités le sommet 2.

Pour chacune des questions, reproduire, adapter et compléter le tableau suivant.

	Chemins (ou circuits)	Élémentaire Oui/Non	Simple Oui/Non
1			
...			

16. Préciser les distances $d(i,j)$ entre deux sommets :

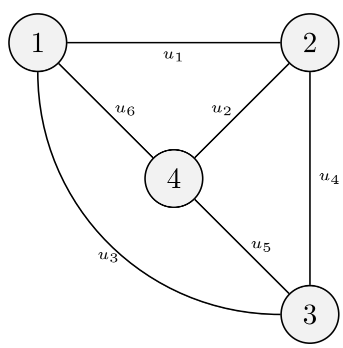
$i \backslash j$	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

17. En déduire les écartements $e(i)$, le rayon, le diamètre et les centres du graphe.

$i \backslash j$	1	2	3	4	$e(i)$

Exercice 2

On considère la représentation du graphe non orienté $\mathcal{G} = (E, \mathcal{A})$ suivant.



1. Préciser
   (a) l'ensemble E des sommets.
   (b) l'ordre n du graphe.
   (c) l'ensemble $\mathcal{A}$ des arêtes.
   (d) la taille m du graphe.
   (e) la matrice d'adjacence.
   (f) la matrice d'incidence B.
2. S'agit-il d'un graphe simple, d'un graphe complet ?
3. Déterminer pour chacun des sommets i $(1 \leq i \leq n)$

(a) l'ensemble des successeurs (ou des voisins) Γ_i.

i	Γ_i
1	
2	
3	
4	

(b) le cocycle $\omega(i)$.

i	$\omega(i)$
1	
2	
3	
4	

4. $F = \{1, 2\}$. Préciser le cocycle $\omega(F)$.
5. Déterminer les tables des successeurs π et σ (listes de succession).
6. Compléter le tableau suivant

i	$d(i)$
1	
2	
3	
4	
Total	

7. Interpréter le total $\sum_{i=1}^{n} d(i)$.
8. Déterminer $\Gamma_i^{(0)} = \Gamma_i \cup \Gamma_i^2 \cup ... \cup \Gamma_i^{n-1}$ $(1 \leq i \leq n)$ et en déduire la fermeture transitive $\widehat{\Gamma}_i = \{i\} \cup \Gamma_i \cup \Gamma_i^2 \cup ... \cup \Gamma_i^{n-1}$ de chacun des sommets i (on pourra compléter le tableau précédent).

i	Γ_i	Γ_i^2	Γ_i^3	$\Gamma_i^{(0)}$	$\widehat{\Gamma}_i$
1					
2					
3					
4					

9. Le graphe est-il connexe ?
10. Calculer les puissances booléennes A^k $(1 \leq k \leq n-1)$. Les interpréter.
11. En déduire $A \vee A^2 \vee ... \vee A^{n-1}$, puis $I_n \vee A \vee A^2 \vee A^3 \vee ... \vee A^{n-1}$. Interpréter les résultats.
12. Calculer les puissances A^k $(1 \leq k \leq n-1)$. Interpréter.
13. Préciser en indiquant s'il s'agit de chaînes (respectivement de cycles) élémentaires ou simples,
    (a) les chaînes de longueur $n-1$ d'extrémités le sommet 2 et le sommet 4.
    (b) les cycles de longueur $n-1$ d'extrémités le sommet 2.

    Pour chacune des questions, reproduire, adapter et compléter le tableau suivant.

	Chaînes (ou cycles)	Élémentaire Oui/Non	Simple Oui/Non
1			
...			

14. Préciser les distances $d(i,j)$ entre deux sommets :

$i\backslash j$	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

15. En déduire les écartement $e(i)$, le rayon, le diamètre et les centres du graphe.

$i\backslash j$	1	2	3	4	$e(i)$

Exercice 3

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On note $\mathcal{G} = (E, \mathcal{A})$ le graphe ayant A pour matrice d'adjacence.

1. S'agit-il d'un graphe orienté ?
2. Quel est l'ordre n de $\mathcal{G}$? On note $E = \{1, 2, ..., n\}$.
3. Quelle est la taille m de de $\mathcal{G}$? On note $\mathcal{A} = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$.
4. Représenter le graphe $\mathcal{G}$.
5. Compléter le tableau suivant (demi-degré extérieur, demi-degré intérieur, degré).

i	$d^+(i)$	$d^-(i)$	$d(i)$
1			
2			
...			
Totaux			

6. Interpréter les totaux $\sum_{i=1}^{n} d^+(i)$, $\sum_{i=1}^{n} d^-(i)$ et $\sum_{i=1}^{n} d(i)$.
7. Préciser la matrice d'incidence.
8. Déterminer les tables des successeurs π et σ (listes de succession).
9. Calculer les premières puissances de A ($1 \leq i \leq n$).
10. Que peut-on en déduire ?

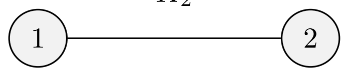
Exercice 4

Construire un graphe non orienté d'ordre n ($2 \leq n \leq 5$) dont les sommets sont tous de degré 3, si c'est possible.

Exercice 5

Représenter les graphes de Kuratowski K_3, K_4 et K_5.

K_2

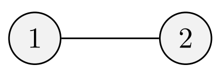


Exercice 6

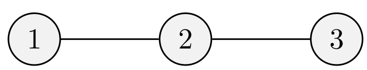
Les arbres d'ordre n, $1 \leq n \leq 3$ sont les suivants (à un isomorphisme près) :

$\boxed{n = 1}$

$\boxed{n = 2}$



$\boxed{n = 3}$



Préciser les arbres d'ordre n, $4 \leq n \leq 5$.

Exercice 7

Algorithme de détermination des classes de connexité

Donnée : Un graphe $\mathcal{G}$ et un sommet a de $\mathcal{G}$.
Résultat : L'ensemble des sommets de la classe de connexité de a dans $\mathcal{G}$.

1. Marquer a en bleu
2. **Tant que** il reste des sommets marqués en bleu faire
   choisir un sommet y marqué en bleu
   si tous les voisins du sommet y sont déjà marqués
   - **alors** marquer le sommet y en rouge

- **sinon**
  choisir un sommet z parmi les voisins non encore marqués du sommet y
  marquer le sommet z en bleu

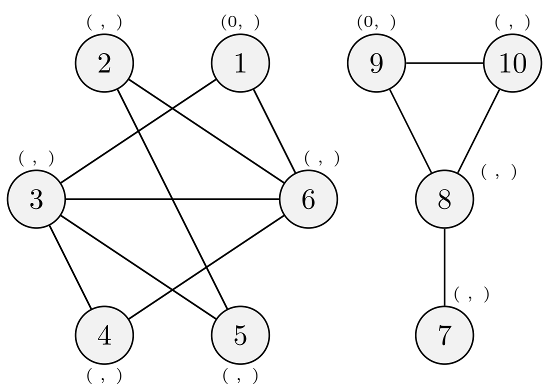
3. Retourner l'ensemble des sommets marqués

Stratégies possibles pour le choix de y :
- *premier marqué en bleu, premier choisi* : *parcours en largeur* de la classe de connexité (algorithme Breadth first search),
- *dernier marqué en bleu, premier choisi* : *parcours en profondeur* de la classe de connexité (algorithme Depth first search).

Appliquer l'algorithme de détermination des composantes connexes suivant un parcours

1. en largeur (algorithme Breadth first search : BFS),
2. en profondeur (algorithme Depth first search : DFS).

Les sommets de départ sont les sommets 1 puis 9.
Le sommet z est choisi suivant l'ordre croissant des numéros de sommet.
Pour chaque sommet, on précisera le numéro de l'itération où le sommet est coloré en bleu, ainsi que celui de l'itération où il est coloré en rouge.



On reproduira et complétera le tableau suivant avec le numéro de l'itération, puis on représentera l'arbre associé au parcours.

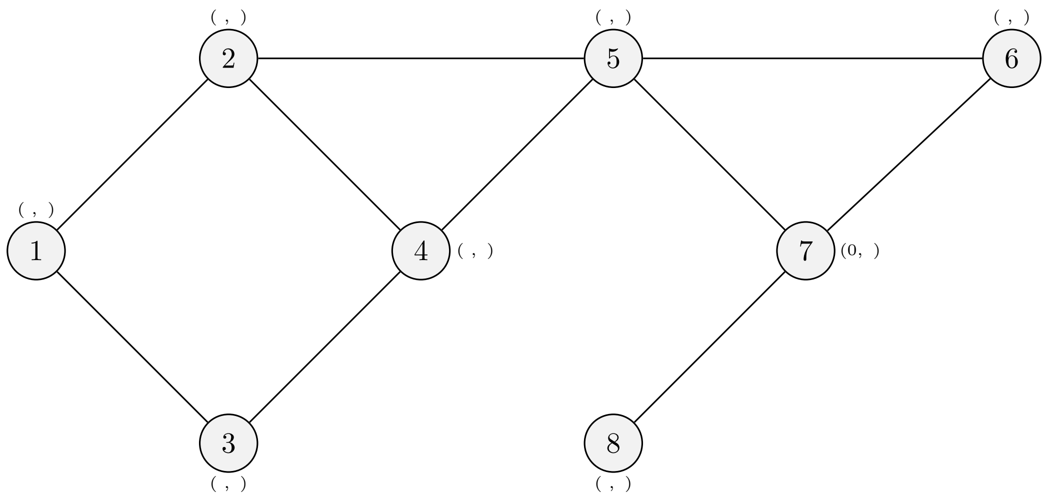
sommet	coloration en bleu	coloration en rouge
1	0	
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9	0	
10		

Exercice 8

Appliquer l'algorithme de détermination des composantes connexes suivant un parcours

1. en largeur (algorithme Breadth first search : BFS),
2. en profondeur (algorithme Depth first search : DFS).

Le sommet de départ est le sommet 7.
Le sommet z est choisi suivant l'ordre croissant des numéros de sommet.
Pour chaque sommet, on précisera le numéro de l'itération où le sommet est coloré en bleu, ainsi que celui de l'itération où il est coloré en rouge.



On reproduira et complétera le tableau suivant avec le numéro de l'itération, puis on représentera l'arbre associé au parcours.

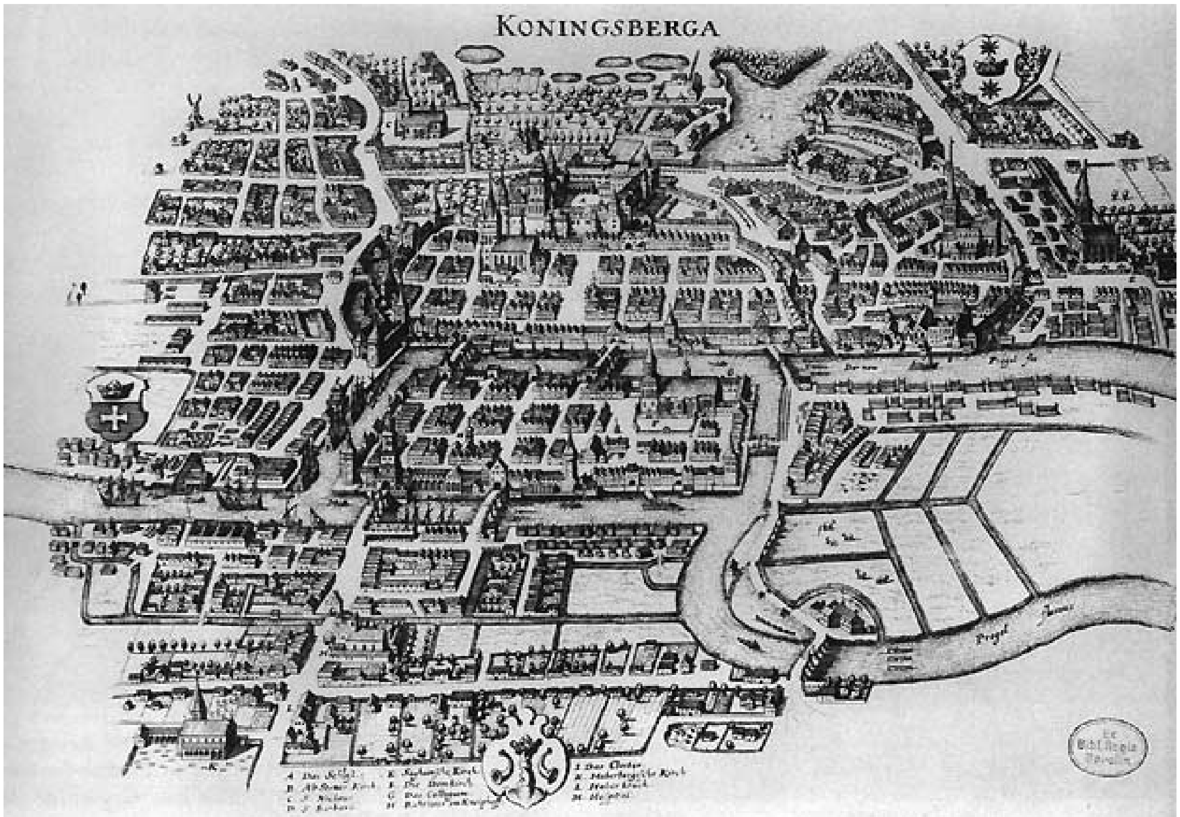
sommet	coloration en bleu	coloration en rouge
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7	0	
8		

Exercice 9

Les graphes K_3, K_4 et K_5 sont-ils eulériens, semi-eulériens ?
Préciser une chaîne eulérienne ou un cycle eulérien le cas échéant.

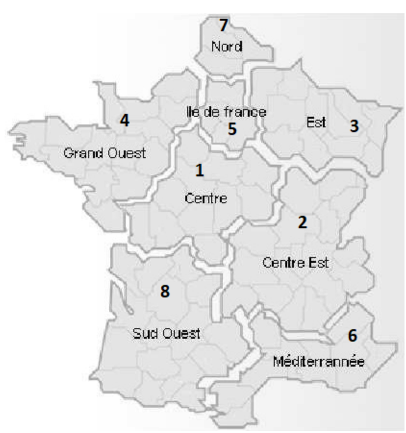
Exercice 10

Est-il possible de se promener dans Königsberg en passant par chacun des sept ponts une fois et une seule ?



Exercice 11

Dans le cadre du projet de redécoupage des 22 régions métropolitaines pour le 1er janvier 2 016, une partition possible est donnée ci-dessous.



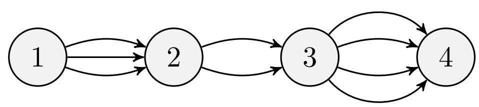
1. Existe-t-il un moyen de parcourir la France en passant une et une seule fois par chacune des frontières entre les régions données par la carte ? Si tel est le cas, donner un parcours.

2. Peut-on faire de même en revenant à son point de départ ? Si tel est le cas, donner un parcours.

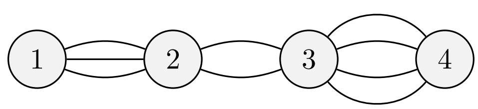
Numéro	Région	Acronyme
1	CENTRE	C
2	CENTRE-EST	CE
3	EST	E
4	GRAND-OUEST	GO
5	ILE-DE-FRANCE	IDF
6	MÉDITERRANNÉE	M
7	NORD	N
8	SUD-OUEST	SO

Exercice 12

1. Un piéton se promène de la rive gauche 1 à la rive droite 4 en passant par les deux petites îles 2 et 3 en empruntant les ponts au hasard.
   Quel est le nombre total de trajets possibles ?
   Indication : on pourra d'une part faire le calcul directement et d'autre part utiliser la matrice d'ajacence du graphe orienté suivant.



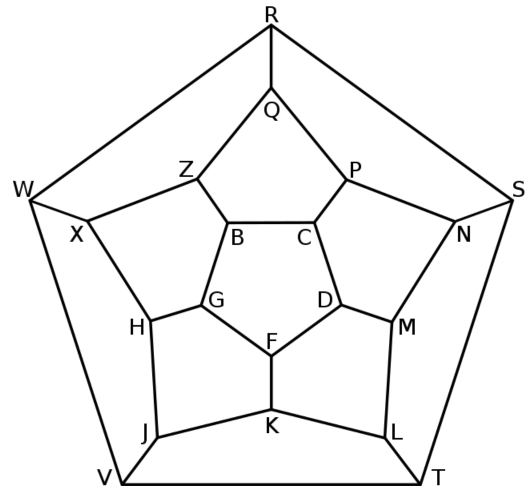
2. Le piéton se promène à présent en empruntant les ponts au hasard et en faisant éventuellement demi-tour.
   De combien de manières peut-il arriver de la rive gauche à la rive droite en empruntant exactement k ponts ($3 \leq k \leq 5$).
   Indications
   (a) On pourra utiliser la matrice d'ajacence A du graphe non orienté suivant.



   (b) $A^4 = \begin{pmatrix} 117 & 0 & 174 & 0 \\ 0 & 233 & 0 & 232 \\ 174 & 0 & 436 & 0 \\ 0 & 232 & 0 & 320 \end{pmatrix}$; $A^5 = \begin{pmatrix} 0 & 699 & 0 & 696 \\ 699 & 0 & 1394 & 0 \\ 0 & 1394 & 0 & 1744 \\ 696 & 0 & 1744 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 13

Cycle hamiltonien
Hamilton a introduit la notion de cycle hamiltonien dans le jeu du voyage fermé du monde (*icosian game*) qu'il a créé en 1859. La terre est représentée par un dodécaèdre régulier (polyèdre à 12 faces pentagonales). Les 20 sommets représentent 20 villes par lesquelles il faut passer une fois et une seule en passant par les arêtes et en revenant à son point de départ. Il s'agit donc de rechercher un cycle hamiltonien dans le graphe suivant.
Le problème a-t-il une solution ?



Rupert Clayton, By, SA

Exercice 14

Algorithme de Welsh-Powell

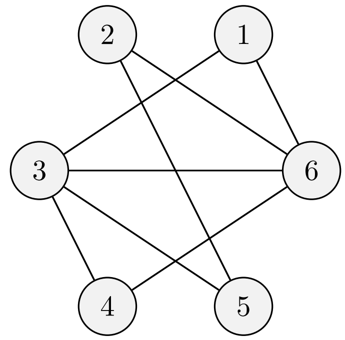
On note L la liste des sommets s_i classés suivant l'ordre décroissant de leur degré :
$d(s_1) \geq d(s_2) \geq d(s_3) \geq ... \geq d(s_n)$.

Initialisation :
L : liste des sommets dans l'ordre décroissant du degré
couleur $= 0$

Tant que $L \neq \emptyset$ faire
    couleur=couleur+1
    couleur(s) = couleur
    Pour tout t dans L faire
        Si $t \notin \Gamma_s$
            couleur(t)=couleur
            $\Gamma_s = \Gamma_s \cup \Gamma_t$
        Fin si
    Fin faire
    Retirer les sommets colorés de L
Fin faire

Il s'agit d'attribuer au premier sommet s_i non encore coloré la plus petite couleur non déjà affectée aux sommets s_1, ..., s_{i-1} déjà colorés, ainsi qu'à tous les sommets non adjacents.

Exemple

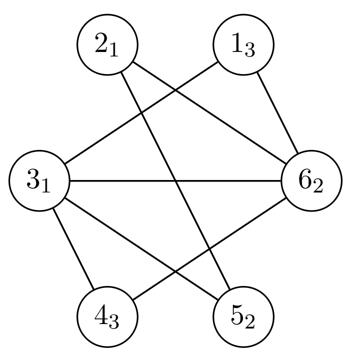


Sommet	degré	Γ
1	2	{3,6}
2	2	{5,6}
3	4	{1,4,5,6}
4	2	{3,6}
5	2	{2,3}
6	4	{1,2,3,4}

Liste des sommets suivant l'ordre décroissant des degrés choisie et l'ordre croissant des numéros de sommet :

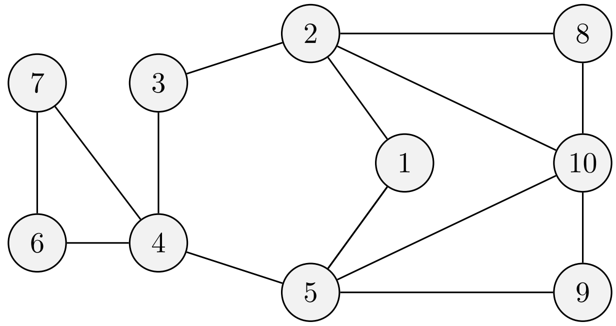
$\boxed{L = (3, 6, 1, 2, 4, 5)}$

Couleur	3	6	1	2	4	5
C_1	C_1	.	.	C_1	.	.
C_2	x	C_2	.	x	.	C_2
C_3	x	x	C_3	x	C_3	x



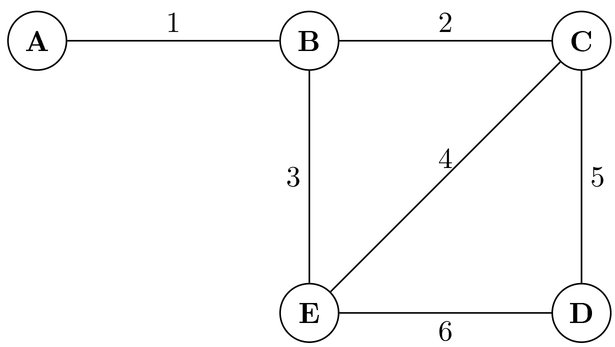
Application

Appliquer l'algorithme de Welsh-Powell pour colorer les sommets du graphe $\mathcal{G}$ suivant.
On prendra une liste des sommets suivant l'ordre décroissant des degrés et l'ordre croissant des numéros de sommet.
En déduire le nombre chromatique.



Exercice 15

On souhaite colorer les arêtes du graphe $\mathcal{G}$ suivant.



1. Construire le graphe adjoint $\mathcal{G}'$ obtenu en échangeant les arêtes et les sommets (deux sommets de $\mathcal{G}'$ sont adjacents si et seulement si les arêtes correspondantes dans $\mathcal{G}$ sont adjacentes).
2. Appliquer l'algorithme de Welsh-Powell pour colorer les sommets de $\mathcal{G}'$.
3. En déduire l'indice chromatique $q(\mathcal{G})$ de $\mathcal{G}$.
4. Représenter graphiquement.

Exercice 16

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

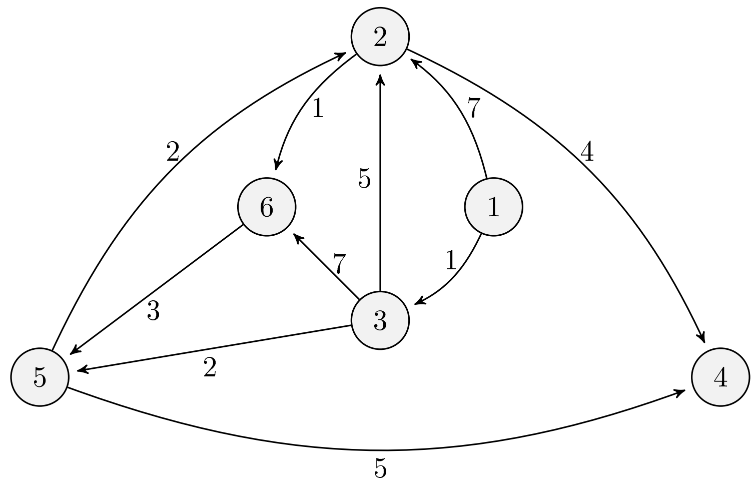
On note $\mathcal{G} = (E, \mathcal{A})$ le graphe non orienté ayant A pour matrice d'adjacence.

1. Quel est l'ordre n de $\mathcal{G}$. On note $E = \{1, 2, ..., n\}$.
2. Quelle est la taille m de de $\mathcal{G}$. On note $\mathcal{A} = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$.
3. Représenter le graphe $\mathcal{G}$.
4. Appliquer l'algorithme de Welsh-Powell pour colorer les sommets de $\mathcal{G}$.
   On prendra la liste des sommets suivant l'ordre décroissant des degrés et l'ordre croissant des sommets.

5. Est-ce qu'on a obtenu une coloration optimale ?

Exercice 17

On considère le graphe $\mathcal{G} = (E, \mathcal{A})$ avec $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
et $\mathcal{A} = \{[(1,2),7], [(1,3),1], [(2,4),4], [(2,6),1], [(3,2),5], [(3,5),2], [(3,6),7], [(5,2),2], [(5,4),5], [(6,5),3]\}$.



1. Déterminer l'ensemble des successeurs de chaque sommet.
   Reproduire et compléter le tableau suivant :

i	Γ_i
1	
2	
3	
4	
5	
6	

2. Déterminer la longueur du chemin le plus court du sommet 1 à chacun des sommets par l'algorithme de Moore-Dijkstra. On précisera également un chemin associé. Les résultats seront présentés dans les tableaux :

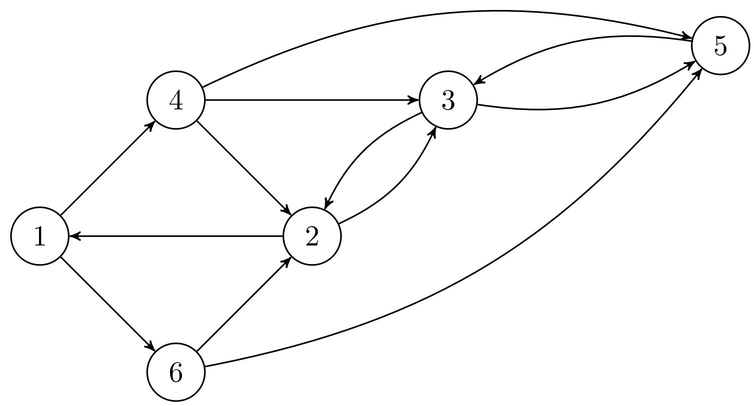
i	$\overline{S}$	Γ_i	$\overline{S} \cap \Gamma_i$	1	2	3	4	5	6
1									
...									

Synthèse						
Sommet	1	2	3	4	5	6
Chemin le plus court et longueur du plus court chemin	1-1 0					

3. Appliquer l'algorithme de Floyd.
4. En déduire la fermeture transitive de chaque sommet.
5. Le graphe est-il fortement connexe ?

Exercice 18

On considère le graphe $\mathcal{G} = (E, \mathcal{A})$ avec $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
et $\mathcal{A} = \{(1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 5), (4, 2), (4, 3), (4, 5), (5, 3), (6, 2), (6, 5)\}$.
Les arcs sont valués par le nombre 1.



1. Déterminer l'ensemble des successeurs de chaque sommet.
2. Déterminer la longueur du chemin le plus court du sommet 1 à chacun des sommets par l'algorithme de Moore-Dijkstra. On précisera également un chemin associé. Les résultats seront présentés dans les tableaux :

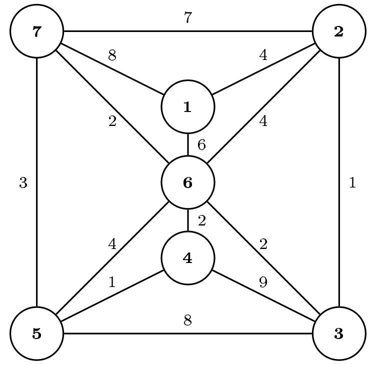
i	$\overline{S}$	Γ_i	$\overline{S} \cap \Gamma_i$	1	2	3	4	5	6
1									
...									

Synthèse						
Sommet	1	2	3	4	5	6
Chemin le plus court et longueur du plus court chemin	1-1 0					

3. Appliquer l'algorithme de Floyd.
4. Le graphe est-il fortement connexe ?
5. En déduire les distances $d(i, j)$, les écartements, ainsi que le diamètre, le rayon et les centres du graphe.

Exercice 19

On considère le graphe $\mathcal{G} = (E, \mathcal{A})$ défini par $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
et $\mathcal{A} = \{[\{1, 2\}, 4], [\{1, 6\}, 6], [\{1, 7\}, 8], [\{2, 3\}, 1], [\{3, 4\}, 9], [\{3, 5\}, 8], [\{3, 6\}, 2], [\{4, 5\}, 1], [\{4, 6\}, 2],$
$[\{5, 6\}, 4], [\{5, 7\}, 3], [\{6, 2\}, 4], [\{6, 7\}, 2], [\{7, 2\}, 7]\}$.



1. Déterminer l'ensemble des voisins de chaque sommet.
2. Déterminer la longueur du *chemin* (chaîne ici) le plus court du sommet 1 à chacun des sommets par l'algorithme de Moore-Dijkstra. On précisera également une chaîne associée. Les résultats seront présentés dans les tableaux :

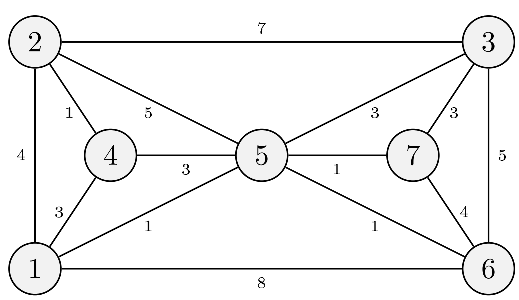
i	$\overline{S}$	Γ_i	$\overline{S} \cap \Gamma_i$	1	2	3	4	5	6	7
1										
...										

Synthèse							
Sommet	1	2	3	4	5	6	7
Chaîne la plus courte et longueur de la plus courte chaîne	1-1 0						

3. Appliquer l'algorithme de Floyd.
4. Le graphe est-il connexe ?

Exercice 20

On considère le graphe $\mathcal{G} = (E, \mathcal{A})$ défini par $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
et $\mathcal{A} = \{[\{1,2\},4], [\{1,4\},3], [\{1,5\},1], [\{1,6\},8], [\{2,3\},7], [\{2,4\},1], [\{2,5\},5], [\{3,5\},3], [\{3,6\},5], [\{3,7\},3], [\{4,5\},3], [\{5,6\},1], [\{5,7\},1], [\{6,7\},4]\}$.



Déterminer un arbre recouvrant en utilisant l'algorithme de

1. Kruskal,
2. Prim (sommet de départ : 1).

On précisera le poids minimum obtenu.

Indication

Algorithme de Kruskal

Soit $\mathcal{G} = (E, \mathcal{A})$ un graphe connexe.
Ordonner les arêtes dans l'ordre des poids croissants.

1. Initialisation : $T = \{\alpha_1\}$
2. Lecture de la liste des arêtes
   A l'étape k, si α_k ne forme pas de cycle avec les arêtes de T alors l'arête est prise :
   $T \leftarrow T \cup \{\alpha_k\}$.
   Passage à l'arête suivante.

L'arbre $\mathcal{T} = (E, T)$ obtenu est de poids minimum.

Algorithme de Prim

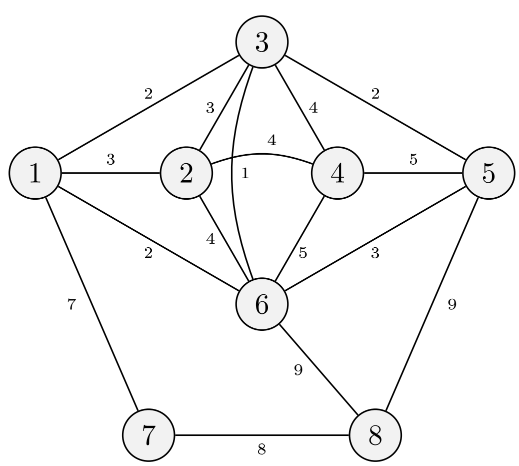
Soit $\mathcal{G} = (E, \mathcal{A})$ un graphe connexe.

1. Initialisation : $T = \emptyset$ et $S = \{i_1\}$ (un sommet)
2. Répéter
   (a) Trouver toutes les arêtes de $\mathcal{A}$ qui relient un sommet de S et un sommet de $\overline{S}$.
   (b) Parmi celles-ci, choisir une arête de poids le plus petit possible.
   (c) Ajouter à T cette arête et le sommet correspondant à S.
3. S'arrêter dès que tous les sommets de E sont dans S.
4. Retourner T.

L'arbre $\mathcal{T} = (E, T)$ obtenu est de poids minimum.

Exercice 21

On considère le graphe $\mathcal{G} = (E, \mathcal{A})$ défini par $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
et $\mathcal{A} = \{[\{1,2\},3], [\{1,3\},2], [\{1,6\},2], [\{1,7\},7], [\{2,3\},3], [\{2,4\},4], [\{2,6\},4], [\{3,4\},4],$
$[\{3,5\},2], [\{3,6\},1], [\{4,5\},5], [\{4,6\},5], [\{5,6\},3], [\{5,8\},9], [\{6,8\},9], [\{7,8\},8]\}$.



Déterminer un arbre recouvrant en utilisant l'algorithme de

1. Kruskal,
2. Prim (sommet de départ : 1).

On précisera le poids minimum obtenu.

Exercice 22

Ordonnancement
Après l'obtention de leur diplôme, trois amis décident de créer un jeu vidéo nommé « escape game ».
Les différentes tâches de la réalisation de ce projet sont décrites dans le tableau suivant.

Nom simplifié de la tâche	Description de la tâche	Durée en jours	Tâches précédentes
A	Choix du matériel et achats	1	F
B	Fabrication du matériel	5	A
C	Inauguration	1	E
D	Livraison du matériel	1	B, G
E	Mise en place du matériel et essais	5	D, H
F	Recherche des énigmes	4	-
G	Recherche des locaux	9	-
H	Rédaction du scénario complet	5	F

1. **Méthode Potentiels-tâches**
   (a) Déterminer le rang (ou le niveau) de chacun des sommets (tâches), ainsi que le tableau des successeurs de chaque sommet (tâches postérieures).
   Reproduire et compléter le tableau suivant.

Code Tâches	Tâches antérieures	Tâches								Rang							Tâches postérieures
		A	B	C	D	E	F	G	H	1	2	3	4	5	6	7	
A	F																
B	A																
C	E																
D	B, G																
E	D, H																
F	/																
G	/																
H	F																

   (b) Construire le graphe d'ordonnancement du projet (méthode Potentiels-tâches) en incluant les dates au plus tôt et au plus tard.
   Calculer la marge totale de chacune des tâches.
   Reproduire et compléter le tableau suivant.

Tâche i	Date au plus tôt t_i	Date au plus tard T_i	Marge totale m_i
α			
A			
B			
C			
D			
E			
F			
G			
H			
ω			

Indication : la marge totale de la tâche i est $m_i = T_i - t_i$.

(c) Donner les chemins critiques et la durée minimale du projet.

(d) Un célèbre animateur accepte d'assister à l'inauguration si elle a lieu 15 jours après le lancement du projet. Les tâches A, B, C, D, E ont une durée incompressible. De quelle(s) tâche(s) doit-on réduire la durée pour que l'inauguration puisse avoir lieu le jour fixé ?

2. **Méthode Potentiels-étapes (PERT)**
Construire le graphe d'ordonnancement du projet en incluant les dates au plus tôt et au plus tard des étapes, ainsi que la durée minimale du projet.
Calculer la marge totale de chacune des tâches, puis préciser les chemins critiques.
Reproduire et compléter les tableaux suivants en les complétant si besoin.

Etape i	Date au plus tôt t_i	Date au plus tard T_i
0		
1		
2		
...		

Tâche (i, j)	Date au plus tôt t_i	Date au plus tard T_j	Marge totale m_{ij}
A			
B			
C			
D			
E			
F			
G			
H			
...			

Indication : la marge totale de la tâche (i, j) est $m_{ij} = T_j - t_i - t_{ij}$.

Sources : d'après le BTS Services informatiques aux organisations (SIO) Polynésie mai 2019

Exercice 23

Ordonnancement

Une entreprise s'intéresse à un procédé de construction d'un produit nouveau. Ce procédé fait intervenir un certain nombre d'opérations. Leur durée et les contraintes auxquelles elles sont soumises sont données dans le tableau suivant :

Opérations	Durées	Contraintes « ... doit être réalisée ... »
A	30	/
B	5	après A
C	12	après A
D	17	après A
E	4	après B et C
F	3	après C
G	14	après E et F
H	8	après D

On souhaite déterminer un ordonnancement des opérations qui minimise la durée d'exécution du procédé de construction.

1. **Méthode Potentiels-tâches**

   (a) Déterminer le rang (ou le niveau) de chacun des sommets (opérations ou tâches), ainsi que le tableau des successeurs de chaque sommet (opérations ou tâches postérieures). Reproduire et compléter le tableau suivant.

Code	Tâches	Tâches								Rang					Tâches
tâches	antérieures	A	B	C	D	E	F	G	H	1	2	3	4	5	postérieures
A	/														
B	A														
C	A														
D	A	1													
E	B, C														
F	C														
G	E, F														
H	D														

   (b) Construire le graphe d'ordonnancement du projet (méthode Potentiels-tâches) en incluant les dates au plus tôt et au plus tard.
   Calculer la marge totale de chacune des tâche.
   Reproduire et compléter le tableau suivant.

Tâche i	Date au plus tôt t_i	Date au plus tard T_i	Marge totale m_i
α			
A			
B			
C			
D			
E			
F			
G			
H			
ω			

   Indication : la marge totale de la tâche i est $m_i = T_i - t_i$.

   (c) Donner les chemins critiques et la durée minimale du projet.

2. **Méthode Potentiels-étapes (PERT)**
   Construire le graphe d'ordonnancement du projet en incluant les dates au plus tôt et au plus tard des étapes, ainsi que la durée minimale du projet.
   Calculer la marge totale de chacune des tâches, puis préciser les chemins critiques.
   Reproduire et compléter les tableaux suivants en les complétant si besoin.

Etape i	Date au plus tôt t_i	Date au plus tard T_i
0		
1		
2		
...		

Tâche (i, j)	Date au plus tôt t_i	Date au plus tard T_j	Marge totale m_{ij}
A			
B			
C			
D			
E			
F			
G			
H			
...			

   Indication : la marge totale de la tâche (i, j) est $m_{ij} = T_j - t_i - t_{ij}$.

Source : Les graphes par l'exemple de F. Droesbeke, M. Hallin et C. Lefevre - Ellipses