PGCD - PPCM et Nombres premiers

Table des matières

1 PGCD

1.1 Définition - Exemple

Commençons par un exemple :

Exemple 1 :

$$a = 16$$
$$b = -24$$

Diviseur de 16 : $D_{16} = \{-16\,;\,-8\,;\,-4\,;\,-2\,;\,-1\,;\,1\,;\,2\,;\,4\,;\,8\,;\,16\}$

Diviseur de 24 : $D_{24} = \{-24;-12;-8;-6;-4;-3;-2;-1;1;2;3;4;6;8;12;24\}$

Diviseurs commun : $D_{16} \cap D_{24} = \{-8\,;\,-4\,;\,-2\,;\,-1\,;\,1\,;\,2\,;\,4\,;\,8\}$

Le plus grand diviseur commun est 8.

Définition :

Soient a et b deux entiers relatifs, on appelle PGCD$(a\,;\,b)$ le plus grand diviseur commun à a et b.

Exemple 2 :

$$a = 15$$
$$b = 8$$

$$D_{15} = \{1\,;\,3\,;\,5\,;\,15\}$$
$$D_8 = \{1\,;\,2\,;\,4\,;\,8\}$$

$$D_{15} \cap D_8 \;=\; \{1\}$$

Définition :

Si PGCD(a ; b) = 1 alors on dit que a et b sont premiers entre eux.

1.2 Propriété de PGCD

Propriété :

Soient a , b deux entiers relatifs, et soient k un entier naturel :

- PGCD (a, b) = PGCD $(-a, -b)$ = PGCD $(-a, b)$ = PGCD $(a, -b)$
- PGCD $(k \times a \;,\; k \times b) = k \times$PGCD (a, b)
- Si $a > 0$ alors PGCD $(a, b) = a$
- si d = PGCD (a, b) alors PGCD $\left(\dfrac{a}{d} \;;\; \dfrac{b}{d}\right) = 1$

Exemple 3 :

Déterminons :

1. PGCD (1200 ; 500)

$$\text{PGCD } (\underbrace{100}_{k} \times 12 \;;\; \underbrace{100}_{k} \times 5)$$

$$\begin{aligned} &= 100 \times \text{PGCD } (12 \;;\; 5) \\ &= 100 \times 1 \\ &= 100 \end{aligned}$$

2. PGCD (15 ; 70)

$$\begin{aligned} \text{PGCD } (\underbrace{5}_{k} \times 3\,;\, \underbrace{5}_{k} \times 14) & \\ &= 5 \times \text{PGCD } (3\,;\,14) \\ &= 5 \times 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Exercice 1 :

Écrire un algorithme qui demande à l'utilisateur deux entiers ($a \neq 0$ et $b \neq 0$) et qui donne la liste des diviseurs de a et celles de b.

```
Variables : a, b entiers naturels, i entier
begin
    a ← saisir("valeur de a")
    b ← saisir("valeur de b")
    for i allant de 1 à a do
        if a%i = 0 then   // % = le reste de la DE en algorithme
            Afficher(i)
        end
    end
end
```

```python
a = int(input("valeur de a: "))
b = int(input("valeur de b: "))

for i in range(1, a + 1):
    if a % i == 0:
        print(i)
```

Définition :

Soient a et b deux entiers relatifs. On dit que a et b sont premier entre eux si PGCD $(a\,;\,b) = 1$

Exemple 4 :

$$\begin{aligned} a &= 14 \\ b &= 15 \end{aligned} \qquad \text{PGCD } (14\,;\,15) = 1$$

Exercice 2 :

Trouvez tous les couples d'entiers naturels $a, b \in \mathbb{N}$ tels que

$$\begin{cases} a + b \ = \ 256 \\ \text{PGCD } (a \ ; \ b) \ = \ 16 \end{cases}$$

$$\text{PGCD } \left(\frac{a}{16} \ ; \ \frac{b}{16} \right) = 1$$

$$\begin{array}{ll} a \ = \ 32 & D_{32} \ = \ \{1 \ , \ 2 \ , \ 4 \ , \ 8 \ , \ 16 \ , \ 32\} \\ b \ = \ 6 & D_{6} \ = \ \{1 \ , \ 2 \ , \ 3 \ , \ 6\} \end{array}$$

$$\text{PGCD} \ = \ 2$$

$$\frac{a}{2} \ = \ 16 \qquad \frac{b}{2} \ = \ 3 \qquad \text{PGCD } (16 \ ; \ 3) \ = \ 1$$

$$\text{PGCD } \left(\frac{a}{16} \ ; \ \frac{b}{16} \right) = 1 \qquad \frac{a}{16} \ + \ \frac{b}{16} \ = \ \frac{256}{16} \ = \ 16$$

$$\begin{cases} \text{PGCD } \left(\frac{a}{16} \ ; \ \frac{b}{16} \right) \ = \ 1 \\ \frac{a}{16} \ + \ \frac{b}{16} \ = \ 16 \end{cases}$$

$$\left(\frac{a}{16} \ ; \ \frac{b}{16} \right) \ \in$$
$$\{(1 , 15) ; (3 , 13) ; (5 , 11) ; (7 , 9) ; (9 , 7) ; (11 , 5) ; (13 , 3) ; (15 , 1) ; (1 , 15)\}$$

$$(a \ ; \ b) \ \in \ \{(16 \ , \ 240) \ ; \ (48 \ , \ 208) \ ; \ \ldots\}$$

2 Algorithme d'Euclide

Exemple 5 :

$$\begin{aligned} a &= 400 \\ b &= 360 \end{aligned} \qquad \begin{array}{r|l} 400 & 360 \\ \cline{2-2} 40 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 360 & 40 \\ \cline{2-2} 0 & 9 \end{array}$$

Le PGCD (400 ; 360) est le dernier reste non nul

$$\text{PGCD }(400\,;\,360) = 40$$

Exercice 3 :

Calculer :

1. PGCD (200 ; 90)

$$\begin{array}{r|l} 90 & 200 \\ \cline{2-2} 90 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 200 & 90 \\ \cline{2-2} 20 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 90 & 20 \\ \cline{2-2} 10 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 20 & 10 \\ \cline{2-2} 0 & 2 \end{array}$$

$$\text{PGCD }(200\,;\,90) = 10$$

2. PGCD (436 ; 228)

$$\begin{array}{r|l} 436 & 228 \\ \cline{2-2} 208 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 228 & 208 \\ \cline{2-2} 20 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 228 & 20 \\ \cline{2-2} 8 & 11 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 228 & 8 \\ \cline{2-2} 4 & 28 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 228 & 4 \\ \cline{2-2} 0 & 57 \end{array}$$

$$\text{PGCD }(436\,;\,228) = 4$$

3. PGCD (2022 ; 2003)

$$\begin{array}{r|l} 2022 & 2003 \\ \cline{2-2} 19 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2003 & 19 \\ \cline{2-2} 8 & 105 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 19 & 8 \\ \cline{2-2} 3 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 1 \\ \cline{2-2} 0 & 2 \end{array}$$

$$\text{PGCD }(2022\,;\,2003) = 1$$

3 PPCM

Commençons par un exemple

Exemple 6 :

$a = 6$

$b = 8$

Multiples positifs non nuls de 6 :

$$M_6 = \{6 , 12 , 18 , 24 , 30 , 36 , \ldots\}$$

Multiples positifs non nuls de 8 :

$$M_8 = \{8 , 16 , 24 , 32 , 40 , \ldots\}$$

Multiples communs :

$$M_6 \cap M_8 = \{24 , 48 , 72 , 96 , \ldots\} = M_{24}$$

PPCM (6 ; 8) = 24

Définition :

Soient a et b deux entiers non nuls. On appelle PPCM (a ; b) le plus petit multiple commun de a et b strictement positif.

Remarque 1 :

PPCM $(6\,;\,8) = 24$

PGCD $(6\,;\,8) = 2$

$$\text{PGCD } (6\,;\,8) \times \text{PPCM } (6\,;\,8) \;=\; 6 \times 8$$

$$\text{PPCM } (6\,;\,8) \;=\; \frac{6 \times 8}{\text{PGCD } (6\,;\,8)}$$

Remarque 2 :

$a \neq 0$

$b \neq 0$

$$\text{PPCM } (a\,;\,b) \;=\; \frac{a \times b}{\text{PGCD } (a\,;\,b)}$$

Exercice 4 :

Calculer PPCM $(64\,;\,48)$:

$$\begin{array}{r|l} 64 & 48 \\ \hline 16 & 1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 48 & 16 \\ \hline 0 & 3 \end{array}$$

$$\text{PGCD } (64\,;\,48) \;=\; 16$$

$$\text{PPCM } (64\,;\,48) \;=\; \frac{64 \times 48}{16} \;=\; \frac{3,072}{16} \;=\; 192$$

4 Nombres premiers

4.1 Définition - Exemple

Définition :

Un entier naturel est premier s'il admet exactement deux diviseurs, 1 et lui-même.

Exemple 7 :

$$\mathbb{P} = \{2\,;\,3\,;\,5\,;\,7\,;\,11\,;\,13\,;\,17\,;\,19\,;\,23\,;\,29\,;\,31\,;\,37\,;\,41\,;\,\ldots\}$$

4.2 Critère pour reconnaitre un nombre premier

Commençons par un exemple

Exemple 8 :

$$n = 103$$

$$\sqrt{103} \simeq 10\,,\,14$$

On cherche les nombres premiers inférieurs à 10 , 14

$$\{2\,;\,3\,;\,5\,;\,7\}$$

Divisons 103 par 2 ; 3 ; 5 ; et 7

$$\begin{array}{r|l} 103 & 2 \\ \cline{2-2} \color{red}{1} & 51 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 103 & 3 \\ \cline{2-2} \color{red}{1} & 34 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 103 & 5 \\ \cline{2-2} \color{red}{3} & 20 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 103 & 7 \\ \cline{2-2} \color{red}{5} & 14 \end{array}$$

Donc 103 est premier (car les restes ne sont pas 0)

Critère :

P premier ?

- On cherche d'abord les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{P}$
- Si P n'est divisible par aucun nombre de la liste précédente, alors P est premier.

Exercice 5 :

Les nombres suivants sont-ils premiers ?

a) P = 177

$$\sqrt{177} = 13,304$$

$$\{2\,;\,3\,;\,5\,;\,7\,;\,11\,;\,13\}$$

$$\begin{array}{r|l} 177 & 3 \\ \hline 0 & 59 \end{array}$$

177 n'est pas premier car il est divisible par 3

b) P = 139

$$\sqrt{139} = 11,78$$

$$\{2\,;\,3\,;\,5\,;\,7\,;\,11\}$$

$$\begin{array}{r|l} 139 & 2 \\ \hline 1 & 69 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 139 & 3 \\ \hline 1 & 46 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 139 & 5 \\ \hline 4 & 27 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 139 & 7 \\ \hline 6 & 19 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 139 & 11 \\ \hline 7 & 12 \end{array}$$

139 est un nombre premier

5 Décomposition en facteurs premiers

Commençons par un exemple :

$$\mathbb{P} = \{2\,;\,3\,;\,5\,;\,7\,;\,11\,;\,13\,;\,17\,\ldots\}$$
$$n = 350$$

On le divise par les nombres premiers

350	2
175	5
35	5
7	7
1	

$$350 = 2^1 \times 5^2 \times 7^1$$

Exemple 9 :

$m = 360$

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1$$

360	2
180	2
90	2
45	5
9	3
3	3
1	

$$360 = 2^3 \times 5^1 \times 3^2$$

5.1 Propriété

Tout entier naturel n peut s'écrire sous la forme :

$$n = P_1^{x1} \quad P_2^{x2} \quad \ldots \quad P_r^{xr}$$

avec $P_1 < P_2 < \ldots < P_r$ sont des nombres premiers et $x1\,,\,\ldots\,xr \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

5.2 Application

Exemple 10 :

PGCD (350 ; 360) $= 2^1 \times 5^1 = 10$

350	2
175	5
35	5
7	7
1	

$350 = 2^1 \times 5^2 \times 7^1$

360	2
180	2
90	2
45	5
9	3
3	3
1	

$360 = 2^3 \times 5^1 \times 3^2$

Règle :

Pour déterminer le PGCD $(m\,;\,n)$:

- On décompose m et n en facteurs primaires.
- On prend les bases communes avec le plus petit exposant.
- On effectue leur produit.

(S'il n'y a pas de base commune : le PGCD = 1)

Exercice 6 :

Écrire un programme (en Python) qui décompose un entier en facteurs primaires :

```python
def prime_factors(n):
    factors = []
    divisor = 2

    while n > 1:
        while n % divisor == 0:
            factors.append(divisor)
            n //= divisor
        divisor += 1

    return factors

```

```python
# Demande à l'utilisateur d'entrer un entier
num = int(input("Entrez un entier positif : "))

if num <= 0:
    print("Veuillez entrer un entier positif.")
else:
    factors = prime_factors(num)
    print(f"Les facteurs premiers de {num} sont :", factors)
```