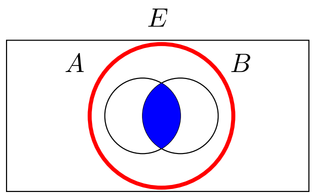
Algèbre de Boole

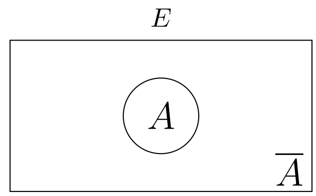
Table des matières

1 Présentation

Soit A et b deux parties d'un ensemble E



$A \cap B$ (l'intersection)
$A \cup B$ (l'union) A union B



$$A \cup \overline{A} = E$$
$$A \cap \overline{A} = \varnothing$$

Propositions logiques	Notations ensemblistes	Algèbre de Boole
$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$	$A \cap B = B \cap A$	$a \cdot b = b \cdot a$
$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$	$A \cup B = B \cup A$	$a + b = b + a$
$P \wedge \neg P \Leftrightarrow F$ (Faux)	$A \cap \overline{A} = \varnothing$	$a \cdot \overline{a} = 0$
$P \vee \neg P \Leftrightarrow V$ (Vrai)	$A \cup \overline{A} = E$	$a + \overline{a} = 1$

2 Définition et exemples

Définition :

Soit E un ensemble muni de trois opérations (E contient 0 et 1) :

- $\left.\begin{array}{l} E \times E \longrightarrow E \\ (a,b) \longmapsto a+b \end{array}\right\}$ Loi de composition interne (binaire)
- $\left.\begin{array}{l} E \times E \longrightarrow E \\ (a,b) \longmapsto a \cdot b \end{array}\right\}$ Loi de composition interne (binaire)
- $\left.\begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ a \longmapsto \overline{a} \end{array}\right\}$ (N'est pas binaire)

$E = \{1, 2, 3\}$
$E \times E = \{(1,1); (1,2); (1,3); (2,1) \ldots\}$

(Le $\times$ est une croix et non multiplication)

$E \times E =$ représente l'ensemble des couples possibles

On dit que $(E, +, \cdot, \overline{})$ est une algèbre de Boole si les propriétés suivantes sont vérifiées :

$\forall\, a, b, c \in E$:

(1) $a + b = b + a$	Commutativité de la loi $+$
(2) $a \cdot b = b \cdot a$	Commutativité de la loi $\cdot$
(3) $a + 0 = a$	0 est un élément neutre pour la loi $+$
(4) $a \cdot 1 = a$	1 est un élément neutre pour la loi $\cdot$
(5) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	Distributivité de $\cdot$ par rapport à $+$
(6) $a + b \cdot c = (a + b) \cdot (a + c)$	Distributivité de $+$ par rapport à $\cdot$
(7) $a + \overline{a} = 1$	
(8) $a \cdot \overline{a} = 0$	

En outre, on supposera que :

$(a + b) + c = a + (b + c)$	Associativité de $+$
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	Associativité de $\cdot$

$+ =$ Ou
$\cdot =$ Et

Exemple 1 :

$E \ = \ \{0,1\}$

La table d'addition

a	b	$a+b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

La table de multiplication

a	b	$a \cdot b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

La table des opérations complémentaires

a	$\overline{a}$	$a+\overline{a}$
0	1	1
1	0	1

$(E, +, \cdot, \overline{})$ est une algèbre de Boole

Vérifions $a \cdot (b+c) \ = \ a \cdot b + a \cdot c$ (le **(5)**) :

a	b	c	$b+c$	$a \cdot (b+c)$	$a \cdot b$	$a \cdot c$	$a \cdot b + a \cdot c$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1
				$\underbrace{}_{\mathrm{I}}$			$\underbrace{}_{\mathrm{II}}$

I est II sont identiques, donc :

$a \cdot (b+c) \ = \ a \cdot b + a \cdot c$

3 Propriétés

3.1 Idempotente

Proposition 1 :

(1) $\forall\, a \in E \quad : \quad a + a \;=\; a$

(2) $\forall\, a \in E \quad : \quad a \cdot a \;=\; a$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\textbf{(1)}\ a &= a + 0 \quad (3) \\
&= a + (a \cdot \overline{a}) \quad (8) \\
&= (a + a) \cdot (a + \overline{a}) \quad (6) \\
&= (a + a) \cdot 1 \quad (7) \\
&= a + a \quad (4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\textbf{(2)}\ a &= a \cdot 1 \quad (4) \\
&= a \cdot (a + \overline{a}) \quad (7) \\
&= a \cdot a + a \cdot \overline{a} \quad (5) \\
&= a \cdot a + 0 \quad (8) \\
&= a \cdot a \quad (3)
\end{aligned}$$

3.2 Éléments unité (1) et neutre (0)

Proposition 2 :

(1) $\forall\, a \in E \quad : \quad a + 1 \;=\; 1$

(2) $\forall\, a \in E \quad : \quad a \cdot 0 \;=\; 0$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\textbf{(1)}\ a + 1 &= a + (a + \overline{a}) \\
&= (a + a) + \overline{a} \\
&= a + \overline{a} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\textbf{(2)}\ a \cdot 0 &= a \cdot (a \cdot \overline{a}) \\
&= (a \cdot a) \cdot \overline{a} \\
&= a \cdot \overline{a} \\
&= 0
\end{aligned}$$

3.3 Absorption

Proposition 3 :

$$\forall\, a, b \in E \quad : \quad a + a \cdot b = a$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} a + a \cdot b &= a \cdot 1 + a \cdot b \\ &= a \cdot (1 + b) \\ &= a \cdot 1 \\ &= a \end{aligned}$$

3.4 Lois de De Morgan

Proposition 4 :

$$\forall\, a, b \in E \quad : \quad \begin{aligned} \overline{a + b} &= \overline{a} \cdot \overline{b} \\ \overline{a \cdot b} &= \overline{a} + \overline{b} \end{aligned}$$

Exercice 1 :

Soit $(E, +, \cdot, \overline{})$ une algèbre de Boole :

1) Simplifier les expressions suivantes :

   a) $F(a, b, c) = a \cdot b + a \cdot b \cdot c + \overline{a} \cdot b$

$$\begin{aligned} F(a, b, c) &= a \cdot b + a \cdot b \cdot c + \overline{a} \cdot b \\ &= b \cdot (a + a \cdot c + \overline{a}) \\ &= b \cdot (a + \overline{a} + a \cdot c) \\ &= b \cdot (1 + a \cdot c) \\ &= b \cdot 1 \\ &= b \end{aligned}$$

   b) $F(a, b, c) = a \cdot b + \overline{a} \cdot b \cdot c + \overline{a} \cdot c$

$$
\begin{aligned}
F(a,b,c) &= a\cdot b+\overline{a}\cdot b\cdot c+\overline{a}\cdot c \\
&= b\cdot(a+\overline{a}\cdot c)+\overline{a}\cdot c \\
&= b\cdot(a+c)+\overline{a}\cdot c \\
&= b\cdot a+b\cdot c+\overline{a}\cdot c
\end{aligned}
$$

2) Donner la négation de :

- $F(a,b,c) \;=\; a\cdot b+b\cdot\overline{c}$

$$
\begin{aligned}
\overline{F(a,b,c)} &= \overline{a\cdot b+b\cdot\overline{c}} \\
&= \overline{a\cdot b}\cdot\overline{b\cdot\overline{c}} \\
&= (\overline{a}+\overline{b})\cdot(\overline{b}+\overline{\overline{c}}) \\
&= (\overline{a}+\overline{b})\cdot(\overline{b}+c)
\end{aligned}
$$

Exercice 2 :

Soit $({\color{red}E},{\color{red}+},{\color{red}\cdot},\overline{})$ une algèbre de Boole :

Simplifier :

1) $a+\overline{a}\cdot b$

$$
\begin{aligned}
a+\overline{a}\cdot b &= (a+\overline{a})\cdot(a+b) \quad {\color{red}(6)} \\
&= 1\cdot(a+b) \quad {\color{red}(7)} \\
&= a+b \quad {\color{red}(4)}
\end{aligned}
$$

2) $\overline{a}\cdot\overline{b}+a\cdot\overline{b}+b$

$$
\begin{aligned}
\overline{a}\cdot\overline{b}+a\cdot\overline{b}+b &= (\overline{a}+a)\cdot\overline{b}+b \quad {\color{red}(5)} \\
&= 1\cdot\overline{b}+b \quad {\color{red}(7)} \\
&= \overline{b}+b \quad {\color{red}(7)} \\
&= 1 \quad {\color{red}(7)}
\end{aligned}
$$

3) $a\cdot b+a\cdot b\cdot c+a\cdot\overline{b}$

$$\begin{aligned}
a \cdot b + a \cdot b \cdot c + a \cdot \overline{b} &= a \cdot (b + b \cdot c + \overline{b}) \quad (5)\\
&= a \cdot (b + \overline{b} + b \cdot c) \quad (1)\\
&= a \cdot (1 + b \cdot c) \quad (7)\\
&= a \cdot 1 \quad (4)\\
&= a \quad (4)
\end{aligned}$$

Exercice 3 :

Soit $(E, +, \cdot, \overline{})$ une algèbre de Boole :

Simplifier :

1) $F(a,b,c) = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} + a \cdot \overline{b} \cdot c + \overline{a} \cdot \overline{b} + a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}$

$$\begin{aligned}
F(a,b,c) &= \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} + a \cdot \overline{b} \cdot c + \overline{a} \cdot \overline{b} + a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}\\
&= \overline{b} \cdot (\overline{a} \cdot \overline{c} + a \cdot c + \overline{a} \cdot \overline{b} + a \cdot \overline{c}) \quad (5)\\
&= \overline{b} \cdot (\overline{a} \cdot \overline{c} + a \cdot (c + \overline{c}) \cdot \overline{b} + \overline{a}) \quad (5)\\
&= \overline{b} \cdot (\overline{a} \cdot \overline{c} + a \cdot 1 + \overline{a}) \quad (7)\\
&= \overline{b} \cdot (\overline{a} \cdot \overline{c} + a + \overline{a}) \quad (4)\\
&= \overline{b} \cdot (\overline{a} \cdot \overline{c} + a + 1) \quad (7)\\
&= \overline{b} \cdot 1 \quad (4)\\
&= \overline{b} \quad (4)
\end{aligned}$$

2) $G(a,b,c) = (a + b) \cdot (\overline{b} + c) \cdot (\overline{c} + a)$

$$\begin{aligned}
G(a,b,c) &= (a + b) \cdot (\overline{b} + c) \cdot (\overline{c} + a)\\
&= (a + b) \cdot [\overline{b} \cdot \overline{c} + \overline{b} \cdot a + c \cdot \overline{c} + c \cdot a\\
&= (a + b) \cdot (\overline{b} \cdot \overline{c} + \overline{b} \cdot a + c \cdot a)\\
&= a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} + a \cdot \overline{b} + a \cdot c + 0 + 0 + a \cdot b \cdot c\\
&= a \cdot (\overline{b} \cdot \overline{c} + \overline{b} + c + b \cdot c)\\
&= a \cdot (\overline{b} \cdot (\overline{c} + 1) + (1 + b) \cdot c)\\
&= a \cdot (\overline{b} + c)
\end{aligned}$$

Problème :

Albert et Catherine organisent une soirée pour les membres de leur club informatique.
Ils décident que pour être invité, il faut :

- Être ami d'Albert et de Catherine.

Ou :

- Ne pas être ami d'Albert mais ami de Catherine.

Ou :

- Ne pas être ami de Catherine mais jouer au bridge.

Pour un membre quelconque, on défini les variables booléens suivants :

- a = 1 S'il est ami d'Albert.
- b = 1 S'il joue au bridge.
- c = 1 S'il est ami de Catherine.

1. Écrire la fonction booléenne $F(a, b, c)$ qui traduit qu'un membre de club est invité :

$$F(a,b,c) \;=\; a \cdot c \;+\; \overline{a} \cdot c \;+\; \overline{c} \cdot b$$

2. a. Alain est ami d'Albert. Est-il Invité ?

$$a \;=\; 1$$

$$\begin{aligned} F(1,b,c) &= 1 \cdot c \;+\; 0 \cdot c \;+\; b \cdot \overline{c} \\ &= c \;+\; b \cdot \overline{c} \\ &= (c+b) \cdot (c+\overline{c}) \\ &= c+b \end{aligned}$$

Alain n'est pas forcement invité.

b. Fabrice n'est pas ami d'Albert mais joue au bridge. Est-il invité ?

$$a = 0 \quad ; \quad b = 1$$

$$\begin{aligned} F(0,1,c) &= 0 + c + 1 \cdot \overline{c} \\ &= c + \overline{c} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Fabrice est invité.

3. Simplifier $F(a,b,c)$. Conclure.

$$\begin{aligned} F(a,b,c) &= a \cdot c \ + \ \overline{a} \cdot c \ + \ b \cdot \overline{c} \\ &= (a + \overline{a}) \cdot c + b \cdot \overline{c} \\ &= (c + b) \cdot (c + \overline{c}) \\ &= c + b \end{aligned}$$

Conclusion : La condition qu'un membre sera invité est s'il est ami de Catherine ou s'il joue au bridge, indépendamment d'être ami d'Albert.

4 Tableau de Karnaugh

Dans ce paragraphe, on ne considère que des variables booléennes qui prennent les valeurs 0 et 1.

4.1 Présentation et convention

a \ $b \cdot c$	$\overline{b}\,\overline{c}$	$\overline{b}\,c$	$b\,c$	$b\,\overline{c}$
	00	01	11	10
$\overline{a}$ 0				
a 1				

4.2 Cas d'une seule variable

- $F(a, b, c) \;=\; a$

a \ $b \cdot c$	$\overline{b}\,\overline{c}$	$\overline{b}\,c$	$b\,c$	$b\,\overline{c}$
	00	01	11	10
$\overline{a}$ 0				
a 1	1	1	1	1

- $F(a, b, c) \;=\; b$

a \ $b \cdot c$	$\overline{b}\,\overline{c}$	$\overline{b}\,c$	$b\,c$	$b\,\overline{c}$
	00	01	11	10
$\overline{a}$ 0			1	1
a 1			1	1

- $F(a, b, c) \;=\; c$

$b \cdot c$ / a	$\overline{b}\,\overline{c}$ 00	$\overline{b}\,c$ 01	$b\,c$ 11	$b\,\overline{c}$ 10
$\overline{a}$ 0		1	1	
a 1		1	1	

4.3 Cas de deux variables

- $F(a, b, c) \ = \ a \cdot c$

$b \cdot c$ / a	$\overline{b}\,\overline{c}$ 00	$\overline{b}\,c$ 01	$b\,c$ 11	$b\,\overline{c}$ 10
$\overline{a}$ 0				
a 1		1	1	

Exercice 4 :

Dresser les tableaux de Karnaugh de :

- $F(a, b, c) \ = \ a \cdot \overline{c}$

$b \cdot c$ / a	$\overline{b}\,\overline{c}$ 00	$\overline{b}\,c$ 01	$b\,c$ 11	$b\,\overline{c}$ 10
$\overline{a}$ 0				
a 1	1			1

- $F(a, b, c) \ = \ b \cdot c$

$b \cdot c$ \ a	$\overline{b}\,\overline{c}$ 00	$\overline{b}\,c$ 01	$b\,c$ 11	$b\,\overline{c}$ 10
$\overline{a}$ 0			1	
a 1			1	

4.4 Cas du produit de trois variables

- $F(a,b,c) \;=\; \overline{a} \cdot b \cdot \overline{c}$

$b \cdot c$ \ a	$\overline{b}\,\overline{c}$ 00	$\overline{b}\,c$ 01	$b\,c$ 11	$b\,\overline{c}$ 10
$\overline{a}$ 0				1
a 1				

4.5 Cas d'une expression quelconque

- $F(a,b,c) \;=\; a \cdot b \cdot c \;+\; a \cdot b \;+\; b \cdot c \cdot \overline{a}$

$b \cdot c$ \ a	$\overline{b}\,\overline{c}$ 00	$\overline{b}\,c$ 01	$b\,c$ 11	$b\,\overline{c}$ 10
$\overline{a}$ 0			1	
a 1			1	1

- $F(a,b,c) \;=\; a \cdot \overline{b} \cdot c \;+\; \overline{a} \cdot b \cdot c \;+\; b \cdot c \;+\; a \cdot c$

$b \cdot c$ / a	$\overline{b}\,\overline{c}$ 00	$\overline{b}\,c$ 01	$b\,c$ 11	$b\,\overline{c}$ 10
$\overline{a}$ 0			1	
a 1		1	1	

- $F(a,b,c) \;=\; \overline{a}\cdot b\cdot \overline{c} \;+\; b\cdot \overline{c} \;+\; \overline{a}\cdot \overline{b}\cdot c \;+\; b\cdot \overline{c}$

$b \cdot c$ / a	$\overline{b}\,\overline{c}$ 00	$\overline{b}\,c$ 01	$b\,c$ 11	$b\,\overline{c}$ 10
$\overline{a}$ 0		1		1
a 1				1

5 Règle de simplification

Règle :

On regroupe d'abord les 1 adjacents en ensembles de 8, si cela est possible. Sinon, on passe à des regroupements de 4. Si cela n'est pas possible, on passe à des regroupements de 2. Enfin, si aucun regroupement plus grand n'est possible, on effectue des regroupements de 1.

Exemple :

a \ $b \cdot c$	$\overline{b}\,\overline{c}$ 00	$\overline{b}\,c$ 01	$b\,c$ 11	$b\,\overline{c}$ 10
$\overline{a}$ 0	**1**	**1**		
a 1	**1**	**1**	**1**	

$$F(a,b,c) = \overline{b} + ac$$

a \ $b \cdot c$	$\overline{b}\,\overline{c}$ 00	$\overline{b}\,c$ 01	$b\,c$ 11	$b\,\overline{c}$ 10
$\overline{a}$ 0	**1**			
a 1	**1**	**1**	**1**	**1**

$$F(a,b,c) = a + \overline{b}\overline{c}$$

a \ $b \cdot c$	$\overline{b}\,\overline{c}$ 00	$\overline{b}\,c$ 01	$b\,c$ 11	$b\,\overline{c}$ 10
$\overline{a}$ 0	**1**	**1**	**1**	**1**
a 1		**1**	**1**	

$$F(a,b,c) = \overline{a} + c$$

Exercice 5 :

1. Représenter l'expression $abc + ab\overline{c} + \overline{a}\overline{b}\overline{c} + \overline{a}\overline{b}c$ dans un tableau de Karnaugh

a \ $b \cdot c$	$\overline{b}\,\overline{c}$ 00	$\overline{b}\,c$ 01	$b\,c$ 11	$b\,\overline{c}$ 10
$\overline{a}$ 0	1	1		1
a 1			1	1

2. En déduire deux écritures de cette expression sous la forme d'une somme de trois produits de deux variables booléennes prises parmi $a, \overline{a}, b, \overline{b}, c$ et $\overline{c}$

a \ $b \cdot c$	$\overline{b}\,\overline{c}$ 00	$\overline{b}\,c$ 01	$b\,c$ 11	$b\,\overline{c}$ 10
$\overline{a}$ 0	**1**	**1**		**1**
a 1			**1**	**1**

$$F(a,b,c) = \overline{a}\overline{b} + b\overline{c} + ab$$

3. Montrer par le calcul uniquement que ces deux expressions sont équivalentes

$$\begin{aligned}
F(a,b,c) &= abc + ab\overline{c} + \overline{a}\overline{b}\overline{c} + \overline{a}\overline{b}c \\
&= ab(c+\overline{c}) + \overline{a}(b\overline{c} + \overline{b}\overline{c} + \overline{b}c) \\
&= ab + \overline{a}((b+\overline{b})\overline{c} + \overline{b}c) \\
&= ab + \overline{a}(\overline{c} + \overline{b}c) \\
&= ab + \overline{a}(\overline{c} + \overline{b}) \cdot (\overline{c} + c) \\
&= ab + \overline{a}\,\overline{c} + \overline{a}\overline{b}
\end{aligned}$$

$a \backslash b \cdot c$	$\overline{b}\,\overline{c}$ 00	$\overline{b}\,c$ 01	$b\,c$ 11	$b\,\overline{c}$ 10
$\overline{a}$ 0	**1**	**1**		**1**
a 1			**1**	**1**

$$F(a,b,c) \;=\; ab + \overline{a}\,\overline{c} + \overline{a}\overline{b}$$

Exercice 6 :

Une société de commercialisation de bois exploite des coupes constituées exclusivement de feuillus et de résineux. Elle désire simplifier le règlement que ses salariés doivent appliquer pour la coup du bois.
Actuellement le règlement dit qu'un arbre est à abattre dans les quatre cas suivants :

- si c'est un résineux au tronc droit mesurant plus de 20 m de hauteur ;
- si c'est un feuillu de 50 ans ou plus ;
- s'il a moins de 50 ans et mesure plus de 20 mettre de hauteur ;
- s'il est tordu ;

Pour un arbre quelconque, on définit les variables booléennes suivantes par :

a = 1 si l'arbre est un résineux ;

b = 1 si l'arbre a moins de 50 ans ;

c = 1 si l'arbre mesure plus de 20 m de hauteur ;

d = 1 si l'arbre est tordu ;

1. Écrire la fonction booléennes $F(a,b,c,d)$, qui traduit le règlement actuel d'abattage d'un arbre.

- $a\overline{d}c$
- $\overline{a}\overline{b}$
- bc
- d

$$F(a,b,c,d) \;=\; a\overline{d}c \;+\; \overline{a}\overline{b} \;+\; bc \;+\; d$$

Grâce à une bonne gestion des forêts que la société exploite, il n'y a maintenant plus d'arbres tordus.

2. Montrer que le nouveau règlement d'abattage se traduit par la fonction : $G(a,b,c) \;=\; ac \;+\; \overline{a}\overline{b} \;+\; bc$.

Plus des arbres tordus, donc $d \;=\; 0$, $\overline{d} \;=\; 1$

$$G(a,b,c) \;=\; ac \;+\; \overline{a}\overline{b} \;+\; bc$$

3. Donner le tableau de Karnaugh de cette fonction.

a \ $b \cdot c$	$\overline{b}\,\overline{c}$ 00	$\overline{b}\,c$ 01	$b\,c$ 11	$b\,\overline{c}$ 10
$\overline{a}$ 0	**1**	**1**	**1**	
a 1		**1**	**1**	

$$G(a,b,c) \;=\; ac \;+\; \overline{a}\overline{b} \;+\; bc$$

4. Simplifier au maximum cette fonction à l'aide de tableau de Karnaugh.

$b \cdot c$ \ a	$\overline{b}\,\overline{c}$ 00	$\overline{b}\,c$ 01	$b\,c$ 11	$b\,\overline{c}$ 10
$\overline{a}$ 0	**1**	**1**	**1**	
a 1		**1**	**1**	

$$G(a,b,c) = c + \overline{a}\overline{b}$$

5. Écrire la nouvelle régie d'abattage d'un arbre sous la forme la plus simple possible.

- L'arbre mesure plus de 20 m.

Ou

- L'arbre est feuillu **et** a plus de 50 ans.

Exercice 7 :

Un règlement administratif concerne les trois catégories d'individus suivantes :

- les hommes de moins de 50 ans ;
- les non salariés ayant 50 ou plus de 50 ans ;
- les femme qui sont :
  - soit salariées ;
  - soit non salariées et qui ont moins de 50 ans.

On définit quatre variables booléennes h, a, s, r ainsi :

x désignant un individu quelconque,

h = 1 si x est un homme (h = 0 sinon) ;

a = 1 si x est âgé(e) de 50 ans ou plus de 50 ans (a = 0 sinon) ;

s = 1 si x est salarié(e) (s = 0 sinon) ;

r = 1 si x est concerné(e) par le règlement (r = 0 sinon).

1. Quels sont les individus x pour lesquels on a $h \cdot \overline{a} \ = \ 1$?

   $h\overline{a} \ = \ 1$ Un homme de moins de 50 ans.

2. (a) Montrer que $r \ = \ h \cdot \overline{a} \ + \ \overline{s} \cdot a \ + \ \overline{h} \cdot (s + \overline{s} \cdot \overline{a})$.

   - $h\overline{a}$ = Un homme de moins de 50 ans.
   - $\overline{s}a$ = Non salarié ayant 50 ou plus de 50 ans.
   - $\overline{h}(s + \overline{sa})$ = Femme qui est salariée, ou non salariée mais qui a moins de 50 ans.

   $$r \ = \ h \cdot \overline{a} \ + \ \overline{s} \cdot a \ + \ \overline{h} \cdot (s + \overline{s} \cdot \overline{a})$$

   (b) Représenter r par une table de Karnaugh (ou une table de vérité).

h \ $s \cdot a$	$\overline{s}\,\overline{a}$ 00	$\overline{s}\,a$ 01	$s\,a$ 11	$s\,\overline{a}$ 10
$\overline{h}$ 0	1		1	1
h 1	1	1		1

   (c) En déduire une expression simplifiée de r.

h \ $s \cdot a$	$\overline{s}\,\overline{a}$ 00	$\overline{s}\,a$ 01	$s\,a$ 11	$s\,\overline{a}$ 10
$\overline{h}$ 0	**1**		**1**	**1**
h 1	**1**	**1**		**1**

   $$r(a, h, s) \ = \ \overline{a} \ + \ \overline{h}s \ + \ h\overline{s}$$

   (d) Quelle est la catégorie d'individus non concernés par le règlement ?

Les individus non concernés par le règlement sont ceux pour lesquels r est égal à 0. En utilisant l'expression simplifiée de r, cela signifie que $\overline{a}+\overline{h}+\overline{s}=0$. Donc, les individus non concernés sont les hommes de plus de 50 ans qui sont salariés.

3. En utilisant uniquement le calcul booléen, montrer que $r \ = \ h \cdot \overline{a} \ + \ \overline{s} \cdot a \ + \ \overline{h} \cdot (s + \overline{s} \cdot \overline{a}). \ = \ \overline{a} + \overline{s} + \overline{h}$.

$$
\begin{aligned}
r \ &= \ h \cdot \overline{a} \ + \ \overline{s} \cdot a \ + \ \overline{h} \cdot (s + \overline{s} \cdot \overline{a}) \\
&= \ h \cdot \overline{a} \ + \ \overline{s} \cdot a \ + \ \overline{h} \cdot s \ + \ \overline{h} \cdot \overline{s} \cdot \overline{a} \\
&= \ \overline{a} \cdot h \ + \ a \cdot \overline{s} \ + \ s \cdot \overline{h} \ + \ \overline{s} \cdot \overline{h} \cdot \overline{a} \\
&= \ \overline{a} \cdot h \ + \ \overline{a} \cdot \overline{s} \ + \ s \cdot \overline{h} \ + \ \overline{s} \cdot \overline{h} \\
&= \ \overline{a} \cdot (h + \overline{s}) \ + \ \overline{h} \cdot (s + \overline{s}) \\
&= \ \overline{a} + \overline{s} + \overline{h}
\end{aligned}
$$

1. Nous commençons par l'expression donnée : $r = h \cdot \overline{a} + \overline{s} \cdot a + \overline{h} \cdot (s + \overline{s} \cdot \overline{a})$.
2. Nous utilisons la distributivité pour développer l'expression : $r = h \cdot \overline{a} + \overline{s} \cdot a + \overline{h} \cdot s + \overline{h} \cdot \overline{s} \cdot \overline{a}$.
3. Nous réarrangeons les termes en regroupant les variables : $r = \overline{a} \cdot h + a \cdot \overline{s} + s \cdot \overline{h} + \overline{s} \cdot \overline{h} \cdot \overline{a}$.
4. Nous utilisons la commutativité de la multiplication pour réorganiser les termes : $r = \overline{a} \cdot h + \overline{a} \cdot \overline{s} + s \cdot \overline{h} + \overline{s} \cdot \overline{h}$.
5. Nous appliquons la loi d'absorption pour simplifier les termes : $r = \overline{a} \cdot (h + \overline{s}) + \overline{h} \cdot (s + \overline{s})$.
6. Finalement, nous utilisons la loi d'identité ($s + \overline{s} = 1$) pour simplifier davantage : $r = \overline{a} + \overline{s} + \overline{h}$.