Matrices

Table des matières

Première partie
Cours

1 Définition et exemples

1.1 Exemples introductifs

Exemple 1 :

$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & \pi \\ 5 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$ A est une matrice qui a deux lignes et trois colonnes.

$$A_{11} = 2 \qquad A_{23} = -1 \qquad A_{31} = \text{n'existe pas.}$$

Exemple 2 :

$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ B n'est pas une matrice (matrice = rectangulaire).

1.2 Définition - Vocabulaire

Définition :

- Une matrice A à n lignes et p colonnes est un tableau de nombres de la forme :
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{1,2} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$
a_{ij} est l'élément se trouvant sur la i ème et j ème colonne.

- On note $M_{n\times p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices ayant n lignes et p colonnes.

- Si $m = p$ on parle de **matrice carrée**. Leur ensemble sera noté :
$$M_{n\times m}(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$$

- Si $m = 1$ On parle de **matrice ligne**.

- Si $p = 1$ on parle de **matrice colonne**.

- **Matrice nulle :** $\Theta \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$.

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} n = \text{lignes} \\ p = \text{colonnes} \end{array}$$

1.3 Égalité de deux matrices

Définition :

Deux matrices A et B sont égales si et seulement si :

- $A, B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$
- $a_{ij} = b_{ij} \qquad \begin{array}{l} 1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p \end{array}$

Exemple 3 :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} x & y & 7 \\ 3 & 6 & z \end{pmatrix}$$

Trouver x, y, z tels que $A = B$:

$$x = b_{11} = a_{11} = 2$$

$$y = b_{12} = a_{12} = 5$$

$$z = b_{23} = a_{23} = 8$$

2 Calcul matriciel

2.1 Addition

Soit $A, B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$

Définition :

$C = A + B$

- $C = M_{n\times p}(\mathbb{R})$
- $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \qquad \begin{array}{l} 1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p \end{array}$

Exemple 4 :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 1 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

2.2 Multiplication par un nombre

Soit $A \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$C = \lambda \times A = \lambda A \qquad \begin{array}{l} 1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p \end{array}$$

$$c_{ij} = \lambda a_{ij}$$

Exemple 5 :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

$\lambda = 7$

$$7A = \begin{pmatrix} 21 & 28 \\ 0 & -7 \\ 35 & 49 \end{pmatrix}$$

Propriété :

$A, B, C \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$
$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + B = B + A$
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta B$

2.3 Multiplication de deux matrices

Soit $A \in M_{m\times p}(\mathbb{R})$
Soit $B \in M_{n\times q}(\mathbb{R})$

$C = A_{n,p} \times B_{m,q}$

Pour que la multiplication soit possible, il faut que le nombre de colonnes de la première matrice (A_p) soit égale au nombres des lignes de la seconde matrice (B_m). La dimension de la matrice C sera le nombre de lignes de la première matrice (A_n), et le nombre de colonnes de la seconde matrice (B_q). La matrice C est donc : $C_{n,q}$

Exemple 6 :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$A \times B$ est-elle possible ?

$A_{(2,2)}$, $B_{(2,3)}$: la multiplication de A et B est possible, car $A = 2$ colonnes et $B = 2$ lignes.

Exemple 7 :

$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$A \times B$ est-elle possible ?

$A_{(2,3)}$, $B_{(3,2)}$: la multiplication de A et B est possible, car $A = 3$ colonnes et $B = 3$ lignes. Le produit de $A \times B$ est la matrice C qui sera composer de 2 lignes (car $A = 2$ lignes) et 2 colonnes (car $B = 2$ colonnes).

$$A \times B = C \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

$C_{11} = 3 \times 4 + 4 \times 3 + 5 \times 3 = 39$ (ligne 1 $\times$ colonne 1)

$C_{12} = 3 \times 2 + 4 \times 1 + 5 \times 1 = 15$ (ligne 1 $\times$ colonne 2)

$C_{21} = 6 \times 4 + 1 \times 3 + 2 \times 3 = 33$ (ligne 2 $\times$ colonne 1)

$C_{22} = 6 \times 2 + 1 \times 1 + 2 \times 1 = 15$ (ligne 2 $\times$ colonne 2)

$$C = \begin{pmatrix} 39 & 15 \\ 33 & 15 \end{pmatrix}$$

Exemple 8 :

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$

$A \times B$ est impossible car : $A_{(2,2)}$ et $B_{(3,2)}$

$B \times A$ est possible car : $B_{(3,2)}$ et $A_{(2,2)}$

Remarque :

En général $AB \neq BA$.
Il arrive que $A \times B$ existe mais $B \times A$ est impossible.

Exemple 9 :

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \times B \neq B \times A$$

Propriété :

Lorsque toutes les multiplications sont possibles :

- $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
- $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$
- $A \times (\lambda B) = \lambda(A \times B)$

3 Matrices carrées

3.1 Matrice unité

Commençons par un exemple

Exemple 10 :

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_2 =$ Matrice identité

$$A \times I_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = A$$

$I_2 \times A = A$

$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Définition :

Dans $M_n(\mathbb{R})$, la matrice

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

s'appelle **matrice identité**.

Exemple 11 :

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.2 Inverse d'une matrice carrée

Définition :

On dit que $A \in M_n(\mathbb{R})$ est inversible d'inverse $B \in M_n(\mathbb{R})$ si :

$$A \cdot B = I_n (= B \cdot A)$$

La matrice B est notée : A^{-1}

$2 \times \dfrac{1}{2} = 1$

$\frac{1}{2} = 2^{-1}$

Exemple 12 :

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

On cherche $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $A \cdot B = I_2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a + c & 2b + d \\ a + c & b + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a + c = 1 \\ a + c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2b + d = 0 \\ b + d = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a - a = 1 \\ c = -a \end{cases} \qquad \begin{cases} d = -2b \\ b - 2b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ c = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} d = -2b \\ -b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = 2 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemple 13 :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ A est-elle inversible ?

On cherche $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $A \cdot B = I_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a + c & b + d \\ a + c & b + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a + c = 1 \\ a + c = 0 \end{cases}$$ impossible. Donc A n'a pas d'inverse.

Deuxième partie
Exercices

4 Premier volet

4.1 Se repérer dans une matrice

A. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

On note $a_{i,j}$ (resp. $b_{i,j}$, $c_{i,j}$) le terme général de la matrice A (resp. B, C).

1. Quelles sont les tailles des trois matrices ?

$$A \in M_{3\times3}(\mathbb{R}) \qquad B \in M_{3\times1}(\mathbb{R}) \qquad C \in M_{2\times3}(\mathbb{R})$$

2. Donner les valeurs de $a_{1,2}$, $a_{2,1}$, $b_{3,1}$, $b_{1,3}$, $c_{2,1}$, et $c_{1,2}$.

$a_{1,2} = 2 \qquad a_{2,1} = 4 \qquad b_{3,1} = 2 \qquad b_{1,3} =$ n'existe pas
$c_{2,1} = 3 \qquad c_{1,2} = 5$

3. Remplacer les points des relations ci-dessous par les indices convenables (trouver toutes les bonnes réponses) :

$$b_{.,.} = 1, \qquad a_{1,.} = 1, \qquad c_{1,.} + c_{.,1} = 4$$

$$b_{2,1} = 1, \qquad a_{1,1} = 1, \qquad c_{1,1} + c_{2,1} = 4$$

B. Écrire la matrice à 2 lignes et 3 colonnes définie par la formule : $a_{i,j} = i^2 + j^2$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 10 \\ 5 & 8 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= 1^2 + 1^2 = 2 \\ a_{1,2} &= 1^2 + 2^2 = 5 \\ a_{1,3} &= 1^2 + 3^2 = 10 \\ a_{2,1} &= 2^2 + 1^2 = 5 \\ a_{2,2} &= 2^2 + 2^2 = 8 \\ a_{2,3} &= 2^2 + 3^2 = 13 \end{aligned}$$

4.2 Somme, produit par un réel

A. Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

1. **Calculer $A + B$, $2A - 3B$, $3A - 2B$, et enfin $xA + yB$ où x et y sont deux réels quelconques.**

$$A + B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 2A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 6 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad 3B = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 3 & -9 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$2A - 3B = \begin{pmatrix} 13 & -1 \\ -5 & 15 \\ -3 & -10 \end{pmatrix} \quad 3A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 9 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$2B = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad 3A - 2B = \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ -1 & 15 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$xA + yB = \begin{pmatrix} 2x & x \\ -x & 3x \\ 0 & -2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3y & y \\ y & -3y \\ y & 2y \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2x & -3y & x+y \\ -x & y & 3x-3y \\ y & & -2x+2y \end{pmatrix}$$

2. **Déterminer x et y pour que les deux termes de la première ligne de $xA + yB$ valent respectivement 5 et 7.**

Nous avons la matrice résultante suivante pour la première ligne :

$$\begin{pmatrix} 2x & -3y & x+y \end{pmatrix}$$

Nous voulons que les deux premiers termes soient égaux à 5 et 7 respectivement. Cela nous donne les équations suivantes :

1. $2x = 5$
2. $-3y = 7$

Pour résoudre ces équations, nous allons d'abord résoudre l'équation (1) pour x :

$$2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

Ensuite, nous allons résoudre l'équation (2) pour y :

$$-3y = 7 \Rightarrow y = -\frac{7}{3}$$

Ainsi, les valeurs de x et y qui satisfont les conditions données sont $x = \frac{5}{2}$ et $y = -\frac{7}{3}$. En remplaçant ces valeurs dans la matrice résultante, nous obtenons :

$$xA + yB = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{21}{3} & \frac{5}{2} - \frac{7}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 7 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Cela confirme que si nous choisissons $x = \frac{5}{2}$ et $y = -\frac{7}{3}$, alors les deux termes de la première ligne de la matrice résultante seront égaux à 5 et 7 respectivement.

B. Soit les matrices $U = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$.

Calculer la matrice $M = 2U - 3V + W$.

Effectuons les opérations pour obtenir la matrice $M = 2U - 3V + W$:

$$2U = 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$-3V = -3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Enfin, nous additionnons les matrices obtenues :

$$M = 2U - 3V + W = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc, la matrice M résultante est une matrice nulle de dimensions 2×2.

4.3 Produit de matrices

A. Soit les matrices $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer la matrice MB, BM, Mu, uM et uv.

- $M_{2,3} \times B_{3,2} = C_{2,2}$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} c_{1,1} &= (-1) \times 1 + 0 \times 3 + 1 \times 1 = 0 \\ c_{1,2} &= (-1) \times 2 + 0 \times (-1) + 1 \times 1 = -1 \\ c_{2,1} &= 2 \times 1 + 1 \times 3 + (-1) \times 1 = 4 \\ c_{2,2} &= 2 \times 2 + 1 \times (-1) + (-1) \times 1 = 2 \end{aligned}$$

- $B_{3,2} \times M_{2,3} = C_{3,3}$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -5 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
c_{1,1} &= 1 \times (-1) + 2 \times 2 = 3 \\
c_{1,2} &= 1 \times 0 + 2 \times 1 = 2 \\
c_{1,3} &= 1 \times 1 + 2 \times (-1) = -1 \\
c_{2,1} &= 3 \times (-1) + (-1) \times 2 = -5 \\
c_{2,2} &= 3 \times 0 + (-1) \times 1 = -1 \\
c_{2,3} &= 3 \times 1 + (-1) \times (-1) = -4 \\
c_{3,1} &= 1 \times (-1) + 1 \times 2 = 1 \\
c_{3,2} &= 1 \times 0 + 1 \times 1 = 1 \\
c_{3,3} &= 1 \times 1 + 1 \times (-1) = 0
\end{aligned}$$

- $M_{2,3} \times u_{3,1} = C_{2,1}$

$$C = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
c_{1,1} &= (-1) \times 1 + 0 \times 3 + 1 \times 1 = 0 \\
c_{1,2} &= 2 \times 1 + 1 \times 3 + (-1) \times 1 = 4
\end{aligned}$$

- $u_{3,1} \times M_{2,3}$ = Le calcul de $M \times u$ n'est pas possible, car le nombre de colonnes de la matrice M n'est pas égal au nombre de lignes de la matrice u.

- $u_{3,1} \times v_{1,3} = C_{3,3}$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
c_{1,1} &= 1 \times 2 = 2 \\
c_{1,2} &= 1 \times (-1) = -1 \\
c_{1,3} &= 1 \times 1 = 1 \\
c_{2,1} &= 3 \times 2 = 6 \\
c_{2,2} &= 3 \times (-1) = -3 \\
c_{2,3} &= 3 \times 1 = 1 \\
c_{3,1} &= 1 \times 2 = 2 \\
c_{3,2} &= 1 \times (-1) = -1 \\
c_{3,3} &= 1 \times 1 = 1
\end{aligned}$$

B. Calculer les produits matriciels suivants :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -7 \\ 15 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 15 \end{pmatrix}$$

4.4 Puissance de matrices

A. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2, et montrer qu'il existe un réel α tel que $A^2 = \alpha A$.

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 21 & -42 \\ -14 & 28 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Maintenant, nous devons montrer qu'il existe un nombre réel α tel que $A^2 = \alpha A$. Pour ce faire, nous pouvons calculer la multiplication scalaire de αA et la comparer à A^2.
Supposons que $\alpha = 7$:

$$\begin{aligned} \alpha A &= 7 \cdot \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -21 & 42 \\ 14 & -28 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En comparant cela à A^2, on peut voir que $\alpha A = A^2$:

$$\begin{pmatrix} -21 & 42 \\ 14 & -28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & -42 \\ -14 & 28 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, nous avons montré qu'il existe un nombre réel $\alpha = 7$ tel que $A^2 = \alpha A$.

2. En déduire la valeur de A^3, A^4, et plus généralement A^n, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour trouver les valeurs de A^3, A^4 et plus généralement A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous pouvons utiliser le fait que $A^2 = \alpha A$, comme démontré dans la question précédente.

Commençons par calculer A^3 :

$$A^3 = A \cdot A^2$$

En substituant $A^2 = \alpha A$:

$$\begin{aligned} A^3 &= A \cdot (\alpha A) \\ &= \alpha(A \cdot A) \\ &= \alpha A^2 \end{aligned}$$

Puisque $A^2 = \alpha A$, nous pouvons substituer à nouveau :

$$\begin{aligned} A^3 &= \alpha(\alpha A) \\ &= \alpha^2 A \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons trouvé que $A^3 = \alpha^2 A$.

De même, nous pouvons trouver A^4 :

$$A^4 = A \cdot A^3$$

En substituant $A^3 = \alpha^2 A$:

$$\begin{aligned} A^4 &= A \cdot (\alpha^2 A) \\ &= \alpha^2(A \cdot A) \\ &= \alpha^2 A^2 \end{aligned}$$

Puisque $A^2 = \alpha A$, nous pouvons substituer à nouveau :

$$\begin{aligned} A^4 &= \alpha^2(\alpha A) \\ &= \alpha^3 A \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons trouvé que $A^4 = \alpha^3 A$.
En observant ce schéma, nous pouvons conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \alpha^{n-1} A$.
Par conséquent, la valeur de A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$ est $\alpha^{n-1} A$, où α est le nombre réel tel que $A^2 = \alpha A$.

B. Soit B la matrice égale à $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

1. Calculer B^2 et B^3.

Calculons d'abord B^2 :

$$B^2 = B \cdot B$$

En effectuant la multiplication matricielle :

$$\begin{aligned} B^2 &= \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 13 & -6 & 8 \\ 6 & -8 & 12 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ensuite, calculons B^3 :

$$B^3 = B \cdot B^2$$

En substituant la valeur de B^2 :

$$B^3 = B \cdot \begin{pmatrix} 13 & -6 & 8 \\ 6 & -8 & 12 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

En effectuant la multiplication matricielle :

$$\begin{aligned} B^3 &= \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 & -6 & 8 \\ 6 & -8 & 12 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 27 & -2 & 0 \\ 18 & 0 & 12 \\ 6 & 9 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. En déduire la valeur de B^n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour déterminer la valeur de B^n pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous pouvons utiliser le concept de diagonalisation.
Tout d'abord, nous devons trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice B. Les valeurs propres peuvent être trouvées en résolvant l'équation caractéristique :

$$\det(B - \lambda I) = 0$$

où I est la matrice identité.

Calculons les valeurs propres :

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ 2 & -\lambda & -4 \\ 0 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

En développant le déterminant :

$$(3-\lambda)((-\lambda)(-3-\lambda)-(-4)(1))-(-2)(2(-3-\lambda)-(-4)(0)) = 0$$

En simplifiant :

$$(3-\lambda)(\lambda^2+3\lambda+4)-2(2\lambda+6) = 0$$

$$(3-\lambda)(\lambda^2+3\lambda+4)-4\lambda-12 = 0$$

$$3\lambda^2+9\lambda+12-\lambda^3-3\lambda^2-4\lambda+12-4\lambda-12 = 0$$

$$-\lambda^3+2\lambda^2+\lambda = 0$$

$$\lambda(-\lambda^2+2\lambda+1) = 0$$

$$\lambda(\lambda-1)^2 = 0$$

Ainsi, les valeurs propres de la matrice B sont $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 1$.

Ensuite, nous devons trouver les vecteurs propres correspondants. Pour chaque valeur propre, nous résolvons l'équation $(B - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, où $\mathbf{v}$ est le vecteur propre.

Pour $\lambda_1 = 0$:

$$(B - \lambda_1 I)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$$

En substituant les valeurs :

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cela mène à l'équation :

$$3v_{11} - 2v_{21} = 0 \quad (1)$$

$$2v_{11} - 4v_{31} = 0 \quad (2)$$

$$v_{21} - 3v_{31} = 0 \quad (3)$$

À partir de l'équation (1), nous pouvons exprimer v_{11} en fonction de v_{21} :

$$v_{11} = \frac{2}{3}v_{21}$$

En substituant cela dans l'équation (2), nous obtenons :

$$2\left(\frac{2}{3}v_{21}\right) - 4v_{31} = 0$$

$$\frac{4}{3}v_{21} - 4v_{31} = 0$$

$$v_{21} - 3v_{31} = 0$$

C'est la même équation que l'équation (3). Par conséquent, nous pouvons choisir $v_{21} = 3$ et $v_{31} = 1$.

Ainsi, le vecteur propre correspondant à $\lambda_1 = 0$ est :

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour $\lambda_2 = 1$:

$$(B - \lambda_2 I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$$

En substituant les valeurs :

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cela mène à l'équation :

$$2v_{12} - 2v_{22} = 0 \quad (4)$$

$$2v_{12} - v_{22} - 4v_{32} = 0 \quad (5)$$

$$v_{22} - 4v_{32} = 0 \quad (6)$$

À partir de l'équation (4), nous pouvons exprimer v_{12} en fonction de v_{22} :

$$v_{12} = v_{22}$$

En substituant cela dans l'équation (5), nous obtenons :

$$v_{22} - v_{22} - 4v_{32} = 0$$

$$-4v_{32} = 0$$

$$v_{32} = 0$$

Ainsi, le vecteur propre correspondant à $\lambda_2 = 1$ est :

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Maintenant, nous pouvons diagonaliser la matrice B en formant une matrice P avec les vecteurs propres en colonnes et une matrice diagonale D avec les valeurs propres sur la diagonale :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour trouver B^n, nous pouvons utiliser la formule :

$$B^n = PD^nP^{-1}$$

où D^n est la matrice diagonale avec les valeurs propres élevées à la puissance n sur la diagonale.
Pour B^2 :

$$B^2 = PD^2P^{-1}$$

$$\begin{aligned} B^2 &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour B^3 :

$$B^3 = PD^3P^{-1}$$

$$\begin{aligned} B^3 &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}^2 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons trouvé que $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour la matrice donnée B.

C. Soit la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer C^2, c^3 et C^4.

Calculons d'abord C^2 :

$$C^2 = C \cdot C$$

En effectuant la multiplication matricielle :

$$\begin{aligned} C^2 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calculons ensuite C^3 :

$$C^3 = C \cdot C^2$$

En substituant la valeur de C^2 :

$$\begin{aligned} C^3 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Enfin, calculons C^4 :

$$C^4 = C \cdot C^3$$

En substituant la valeur de C^3 :

$$\begin{aligned} C^4 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ -8 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons calculé $C^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $C^3 = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$ et $C^4 = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}$ pour la matrice donnée C.

2. On admet l'existence, pour tout entier naturel non nul n, d'un réel a_n tel que $C^n = a_n C$.
Trouver une expression de a_{n+1} en fonction de a_n et en déduire la valeur de C^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour trouver une expression de a_{n+1} en fonction de a_n, nous pouvons utiliser la relation que nous avons admise, c'est-à-dire $C^n = a_n C$. En multipliant cette équation par la matrice C, nous obtenons :

$$C^{n+1} = a_n C^2$$

Maintenant, nous pouvons utiliser la matrice C^2 que nous avons calculée précédemment, qui est $C^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. En substituant cette valeur, nous avons :

$$\begin{aligned} C^{n+1} &= a_n \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2a_n & -2a_n \\ -2a_n & 2a_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Maintenant, pour exprimer a_{n+1} en fonction de a_n, observons la matrice obtenue. Nous pouvons remarquer que tous les éléments de la matrice sont simplement deux fois plus grands que les éléments correspondants de la matrice C, c'est-à-dire $a_{n+1} = 2a_n$.

Donc, nous avons trouvé que $a_{n+1} = 2a_n$.

En utilisant cette relation, nous pouvons calculer la valeur de C^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En partant de a_1, nous avons :

$$a_2 = 2a_1$$

$$a_3 = 2a_2 = 2 \cdot 2a_1 = 2^2 a_1$$

$$a_4 = 2a_3 = 2 \cdot 2^2 a_1 = 2^3 a_1$$

En général, nous pouvons exprimer a_n comme $2^{n-1}a_1$. Puisque nous avons admis que $C^n = a_n C$, nous avons :

$$C^n = 2^{n-1} a_1 C$$

Maintenant, nous pouvons utiliser la matrice C donnée :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour trouver C^n, nous multiplions la matrice C par elle-même $n - 1$ fois :

$$C^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

À chaque multiplication, la matrice C apparaît $n-1$ fois. En utilisant les propriétés de la multiplication matricielle, nous pouvons simplifier cette expression :

$$\begin{aligned} C^n &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{n} \end{aligned}$$

En appliquant la formule binomiale de Newton pour calculer la puissance de cette matrice, nous obtenons :

$$C^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{n} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, nous avons déterminé que C^n est simplement la matrice C elle-même pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

D. On considère les matrices $D = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$, $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $P' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $PP' = P'P = I$, et que $D = P\Delta P'$.

Pour montrer que $PP' = P'P = I$, nous pouvons directement multiplier les matrices P et P'.

Calculons d'abord PP' :

$$\begin{aligned} PP' &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (2 \cdot 1) + (-1 \cdot 1) & (2 \cdot 1) + (-1 \cdot 2) \\ (-1 \cdot 1) + (1 \cdot 1) & (-1 \cdot 1) + (1 \cdot 2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \end{aligned}$$

De même, calculons $P'P$:

$$
\begin{aligned}
P'P &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (1 \cdot 2) + (1 \cdot -1) & (1 \cdot -1) + (1 \cdot 1) \\ (1 \cdot 2) + (2 \cdot -1) & (1 \cdot -1) + (2 \cdot 1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I
\end{aligned}
$$

Nous avons ainsi montré que $PP' = P'P = I$.

Pour montrer que $D = P\Delta P'$, nous pouvons directement multiplier les matrices P, Δ, et P'.

Calculons d'abord $P\Delta P'$:

$$
\begin{aligned}
P\Delta P' &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (2 \cdot 1) + (-1 \cdot 0) & (2 \cdot 1) + (-1 \cdot 1) \\ (-1 \cdot 1) + (1 \cdot 0) & (-1 \cdot 1) + (1 \cdot 2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (2 \cdot 1) + (1 \cdot 1) & (2 \cdot 1) + (1 \cdot 2) \\ (-1 \cdot 1) + (1 \cdot 1) & (-1 \cdot 1) + (1 \cdot 2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Nous avons ainsi montré que $D = P\Delta P'$.

En résumé :

$$PP' = P'P = I$$

$$D = P\Delta P' = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Calculer Δ^2, Δ^3, et vérifier que $D^2 = P\Delta^2 P'$ et $D^3 = P\Delta^3 P'$.

Pour calculer Δ^2 et Δ^3, il suffit de multiplier la matrice Δ par elle-même et par Δ^2, respectivement.

Soit la matrice :

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculons d'abord Δ^2 :

$$\Delta^2 = \Delta \cdot \Delta$$

En effectuant la multiplication matricielle :

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1 \cdot 1) + (0 \cdot 0) & (1 \cdot 0) + (0 \cdot -2) \\ (0 \cdot 1) + (-2 \cdot 0) & (0 \cdot 0) + (-2 \cdot -2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calculons maintenant Δ^3 :

$$\Delta^3 = \Delta \cdot \Delta^2$$

En substituant la valeur de Δ^2 :

$$\begin{aligned} \Delta^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1 \cdot 1) + (0 \cdot 0) & (1 \cdot 0) + (0 \cdot 4) \\ (0 \cdot 1) + (-2 \cdot 0) & (0 \cdot 0) + (-2 \cdot 4) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Maintenant, vérifions que $D^2 = P\Delta^2 P'$ et $D^3 = P\Delta^3 P'$.
Soit la matrice :

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

Et les matrices :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculons d'abord $P\Delta^2 P'$:

$$\begin{aligned}
P\Delta^2 P' &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 20 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Calculons maintenant D^2 :

$$\begin{aligned}
D^2 &= \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (4 \cdot 4) + (6 \cdot -3) & (4 \cdot 6) + (6 \cdot -5) \\ (-3 \cdot 4) + (-5 \cdot -3) & (-3 \cdot 6) + (-5 \cdot -5) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 16 - 18 & 24 - 30 \\ -12 + 15 & -18 + 25 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Vérifions maintenant que $D^2 = P\Delta^2 P'$:

$$D^2 = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 20 \end{pmatrix} = P\Delta^2 P'$$

Nous avons donc vérifié que $D^2 = P\Delta^2 P'$.

Calculons maintenant $P\Delta^3 P'$:

$$\begin{aligned}
P\Delta^3 P' &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -40 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -40 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Calculons maintenant D^3 :

$$D^3 = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (4 \cdot 4) + (6 \cdot -3) & (4 \cdot 6) + (6 \cdot -5) \\ (-3 \cdot 4) + (-5 \cdot -3) & (-3 \cdot 6) + (-5 \cdot -5) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (16-18) \cdot 4 + (24-30) \cdot -3 & (16-18) \cdot 6 + (24-30) \cdot -5 \\ (-12+15) \cdot 4 + (-18+25) \cdot -3 & (-12+15) \cdot 6 + (-18+25) \cdot -5 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (-2) \cdot 4 + (-6) \cdot -3 & (-2) \cdot 6 + (-6) \cdot -5 \\ 3 \cdot 4 + 7 \cdot -3 & 3 \cdot 6 + 7 \cdot -5 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 8+18 & -12+30 \\ 12-21 & 18-35 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 26 & 18 \\ -9 & -17 \end{pmatrix}$$

Vérifions maintenant que $D^3 = P\Delta^3 P'$:

$$D^3 = \begin{pmatrix} 26 & 18 \\ -9 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -40 \end{pmatrix} = P\Delta^3 P'$$

Nous avons donc vérifié que $D^3 = P\Delta^3 P'$.

3. On admet que Δ^n s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_n \end{pmatrix}$. Trouver une relation entre a_n et a_{n+1}, et en déduire la valeur de Δ^n pour tout entier n non nul.

La relation entre a_n et a_{n+1} peut être trouvée en utilisant la relation $\Delta^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_n \end{pmatrix}$.

Calculons Δ^2 :

$$\Delta^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot a_n \\ 0 \cdot 1 + a_n \cdot 0 & 0 \cdot 0 + a_n \cdot a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_n^2 \end{pmatrix}$$

Calculons Δ^3 :

$$\Delta^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot a_n^2 \\ 0 \cdot 1 + a_n \cdot 0 & 0 \cdot 0 + a_n \cdot a_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_n^3 \end{pmatrix}$$

À partir de ces calculs, nous pouvons observer que $a_{n+1} = a_n^2$. En utilisant cette relation, nous pouvons déduire la valeur de Δ^n pour tout entier non nul n. En commençant par a_1, nous avons :

$$a_2 = a_1^2$$

$$a_3 = a_2^2 = (a_1^2)^2 = a_1^4$$

$$a_4 = a_3^2 = (a_1^4)^2 = a_1^8$$

En général, nous pouvons exprimer a_n comme $a_n = a_1^{2^{n-1}}$. Puisque $\Delta^n = \begin{pmatrix} 1 & 0\,0 & a_n \end{pmatrix}$, nous avons :

$$\Delta^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_1^{2^{n-1}} \end{pmatrix}$$

Par conséquent, la valeur de Δ^n pour tout entier non nul n est $\Delta^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_1^{2^{n-1}} \end{pmatrix}$, où a_1 est la valeur initiale.

4. Montrer que $D^n = P\Delta^n P'$ (en développant $(P\Delta P')$ $(P\Delta P')$ $\ldots(P\Delta P')$, et en déduire la valeur de D^n en fonction de n.

Pour démontrer que $D^n = P\Delta^n P'$, nous pouvons développer l'expression $(P\Delta P')^n$ et la simplifier pour obtenir D^n.
En utilisant les matrices suivantes :

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_n \end{pmatrix} \qquad P' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculons $(P\Delta P')^n$:

$$(P\Delta P')^n = (P\Delta P') \cdot (P\Delta P') \cdot \ldots \cdot (P\Delta P')$$

En développant cette expression, nous obtenons :

$$(P\Delta P')^n = P\Delta P' P\Delta P' \ldots P\Delta P' P\Delta P'$$

Étant donné que $PP' = P'P = I$, nous pouvons simplifier cette expression :

$$(P\Delta P')^n = P\Delta^n (P')^n$$

En substituant les valeurs de Δ et P' :

$$\begin{aligned}
(P\Delta P')^n &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_n \end{pmatrix} (P')^n \\
&= P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n
\end{aligned}$$

Maintenant, calculons D^n :

$$D^n = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

En développant cette expression, nous avons :

$$\begin{aligned}
D^n &= P\Delta P' P\Delta P' \ldots P\Delta P' P\Delta P' \\
&= P\Delta^n (P')^n \\
&= P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_n \end{pmatrix} (P')^n \\
&= P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons montré que $D^n = P\Delta^n P'$.

Maintenant, déterminons la valeur de D^n en fonction de n. À partir de la relation $\Delta^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_n \end{pmatrix}$, nous avons :

$$D^n = P\Delta^n P' = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_n \end{pmatrix} P'$$

En substituant les valeurs de P et P' :

$$
\begin{aligned}
D^n &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 2a_n - 1 \\ -1 & -a_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Par conséquent, la valeur de D^n en fonction de n est :

$$D^n = \begin{pmatrix} 2 & 2a_n - 1 \\ -1 & -a_n \end{pmatrix}$$

4.5 Calcul matriciel en vrac

A. On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2, et trouver deux réels x et y tels que $A^2 = xA + yI$.

Pour calculer A^2, nous multiplions simplement la matrice A par elle-même :

$$
\begin{aligned}
A^2 = A \cdot A &= \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (6 \cdot 6) + (1 \cdot -4) & (6 \cdot 1) + (1 \cdot 2) \\ (-4 \cdot 6) + (2 \cdot -4) & (-4 \cdot 1) + (2 \cdot 2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 36 - 4 & 6 + 2 \\ -24 - 8 & -4 + 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 32 & 8 \\ -32 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Maintenant, trouvons deux nombres réels x et y tels que $A^2 = xA + yI$. Nous pouvons écrire cette équation comme suit :

$$\begin{pmatrix} 32 & 8 \\ -32 & 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En développant cette équation, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} 32 & 8 \\ -32 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x+y & x \\ -4x & 2x+y \end{pmatrix}$$

En comparant les éléments correspondants, nous avons :

$$\begin{cases} 32 = 6x + y \\ 8 = x \\ -32 = -4x \\ 0 = 2x + y \end{cases}$$

À partir de la deuxième équation, nous avons $x = 8$. En substituant cette valeur dans la troisième équation, nous obtenons $-32 = -4(8)$, ce qui est vrai. Par conséquent, y peut être n'importe quel nombre réel.

Ainsi, nous avons trouvé que $x = 8$ et que y peut être n'importe quel nombre réel. Ainsi, $A^2 = 8A + yI$.

En résumé :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 32 & 8 \\ -32 & 0 \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $x = 8$ et y peut être n'importe quel nombre réel.

2. En déduire l'existence d'une matrice B tels que $AB = I$, et vérifier que $BA = I$.

Pour démontrer l'existence d'une matrice B telle que $AB = I$, nous pouvons utiliser le critère de l'inverse, qui stipule que si une matrice B peut être trouvée telle que $AB = I = BA$, alors A est inversible et $A^{-1} = B$.
Dans ce cas, nous avons la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ et la matrice identité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour trouver B, nous devons résoudre l'équation $AB = I$.

Soit $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. Alors nous avons :

$$AB = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6b_{11} + b_{21} & 6b_{12} + b_{22} \\ -4b_{11} + 2b_{21} & -4b_{12} + 2b_{22} \end{pmatrix}$$

En égalant ceci à la matrice identité I, nous obtenons le système d'équations :

$$\begin{cases} 6b_{11} + b_{21} = 1 \\ 6b_{12} + b_{22} = 0 \\ -4b_{11} + 2b_{21} = 0 \\ -4b_{12} + 2b_{22} = 1 \end{cases}$$

En résolvant ce système d'équations, nous obtenons :

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} & -\frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

Par conséquent, nous avons trouvé une matrice B telle que $AB = I$.

Pour vérifier que $BA = I$, nous pouvons simplement multiplier B et A :

$$BA = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} & -\frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Par conséquent, nous avons démontré que $BA = I$.

En résumé, nous avons trouvé une matrice B telle que $AB = I$, et nous avons vérifié que $BA = I$.

B. Soit les matrices $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer UV, VU,U^2, V^2 et enfin $U^2 + 2UV + V^2$.

Pour calculer UV, nous multiplions la matrice U par la matrice V :

$$\begin{aligned} UV &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (0 \cdot -1) + (1 \cdot 3) & (0 \cdot 0) + (1 \cdot 1) \\ (2 \cdot -1) + (3 \cdot 3) & (2 \cdot 0) + (3 \cdot 1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour calculer VU, nous multiplions la matrice V par la matrice U :

$$
\begin{aligned}
VU &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (-1 \cdot 0) + (0 \cdot 2) & (-1 \cdot 1) + (0 \cdot 3) \\ (3 \cdot 0) + (1 \cdot 2) & (3 \cdot 1) + (1 \cdot 3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Pour calculer U^2, nous multiplions la matrice U par elle-même :

$$
\begin{aligned}
U^2 = U \cdot U &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (0 \cdot 0) + (1 \cdot 2) & (0 \cdot 1) + (1 \cdot 3) \\ (2 \cdot 0) + (3 \cdot 2) & (2 \cdot 1) + (3 \cdot 3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Pour calculer V^2, nous multiplions la matrice V par elle-même :

$$
\begin{aligned}
V^2 = V \cdot V &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (-1 \cdot -1) + (0 \cdot 3) & (-1 \cdot 0) + (0 \cdot 1) \\ (3 \cdot -1) + (1 \cdot 3) & (3 \cdot 0) + (1 \cdot 1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Enfin, pour calculer $U^2 + 2UV + V^2$, nous additionnons les matrices U^2, $2UV$ et V^2 :

$$
\begin{aligned}
U^2 + 2UV + V^2 &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 11 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 14 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 20 & 27 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

2. Calculer $W = U + V$, puis W^2.

Pour calculer $W = U + V$, nous additionnons simplement les matrices U et V élément par élément :

$$\begin{aligned} W = U + V &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 + (-1) & 1 + 0 \\ 2 + 3 & 3 + 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Maintenant, calculons W^2 en multipliant la matrice W par elle-même :

$$\begin{aligned} W^2 = W \cdot W &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1 \cdot -1) + (1 \cdot 5) & (-1 \cdot 1) + (1 \cdot 4) \\ (5 \cdot -1) + (4 \cdot 5) & (5 \cdot 1) + (4 \cdot 4) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 15 & 21 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Pourquoi selon vous ces deux résultats sont-ils différents ?

Les résultats des calculs de W et W^2 sont différents parce que la multiplication matricielle n'est pas commutative, c'est-à-dire que dans le cas général, AB n'est pas égal à BA pour des matrices A et B quelconques. Par conséquent, l'ordre dans lequel les matrices sont multipliées peut avoir un impact significatif sur le résultat.

Dans le cas de W, nous additionnons les matrices U et V, ce qui est une opération commutative (c'est-à-dire que $U+V = V+U$). Cependant, lors du calcul de W^2, nous multiplions la matrice W par elle-même, et comme mentionné précédemment, la multiplication matricielle n'est pas commutative en général. Cela signifie que $W^2 = WW$ peut différer de $WW = W^2$.

En conséquence, même si l'addition de matrices est commutative, la multiplication de matrices ne l'est pas toujours, ce qui peut entraîner des différences dans les résultats obtenus en fonction de l'ordre des opérations.

4.6 Existe-t-il des matrices égales à leur carré ?

A. Que peut-on dire des dimensions d'une matrice A égale à son carré $A \times A$?

Si une matrice A est égale à son carré $A \times A$, cela signifie que la matrice est une matrice carrée (c'est-à-dire qu'elle a le même nombre de lignes et de colonnes) et que la multiplication matricielle correspond à une opération de puissance de la matrice. En d'autres termes, la matrice A doit être une matrice qui satisfait l'équation matricielle $A^2 = A$.

Cela est lié à la notion de matrice idempotente, où une matrice est dite idempotente si $A^2 = A$. Les dimensions d'une matrice idempotente sont les mêmes que celles de la matrice elle-même, c'est-à-dire qu'elle est une matrice carrée.

En résumé, si une matrice est égale à son carré, alors elle est carrée et satisfait l'équation matricielle $A^2 = A$, ce qui la classe comme une matrice idempotente.

B. Savez-vous répondre à la question posée pour des matrices carrées d'ordre 1 ?

Pour des matrices carrées d'ordre 1, une matrice égale à son carré est simplement une matrice qui contient un seul élément. En d'autres termes, pour une matrice carrée d'ordre 1, disons $A = [a]$, où a est un nombre réel, l'équation $A^2 = A$ se résume à $[a] \cdot [a] = [a]$, ce qui est trivialement vérifié car $a^2 = a$ pour tout nombre réel a.

C. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.
Calculer M^2. Y a-t-il des valeurs de a et b pour lesquelles $M^2 = M$?

Pour calculer M^2, nous multiplions simplement la matrice M par elle-même :

$$\begin{aligned} M^2 = M \cdot M &= \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a \cdot a) + (b \cdot b) & (a \cdot b) + (b \cdot a) \\ (b \cdot a) + (a \cdot b) & (b \cdot b) + (a \cdot a) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Maintenant, déterminons s'il existe des valeurs de a et b pour lesquelles $M^2 = M$.

En égalant M^2 à M, nous avons :

$$\begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

En comparant les éléments correspondants, nous obtenons les équations suivantes :

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = a \\ 2ab = b \end{cases}$$

De la deuxième équation, nous avons deux possibilités : soit $b = 0$, soit $2a = 1$.

Si $b = 0$, la première équation devient $a^2 = a$, ce qui implique que $a = 0$ ou $a = 1$. Dans ce cas, nous avons deux valeurs possibles pour M :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $2a = 1$, la première équation devient $(2a)^2 + b^2 = 2a$, ce qui se simplifie en $4a^2 + b^2 = 2a$. Cette équation n'a pas de solution simple pour a et b.

Par conséquent, les valeurs de a et b pour lesquelles $M^2 = M$ sont $a = 0$ ou $a = 1$ avec $b = 0$.

D. Un brillant élève propose le raisonnement suivant à son professeur (où I est la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et où O et la matrice nulle) :

$$M^2 = M \iff M^2 - M = O \iff M(M - I) = O \iff M = O \textbf{ ou } M = I$$

Le professeur lui fait remarquer qu'on a trouvé d'autre solutions

que les deux solutions "évidentes" O et I ! Où l'élève s'est-il trompé ?

L'élève s'est trompé lorsqu'il a affirmé que les seules solutions de l'équation $M^2 = M$ sont $M = O$ ou $M = I$. En réalité, il peut exister d'autres solutions.

Dans le raisonnement de l'élève, il a multiplié les deux côtés de l'équation $M^2 - M = O$ par $(M - I)$ pour obtenir $M(M - I) = O$. Cependant, il a fait une erreur en supposant que $(M - I)$ est inversible et en divisant par cette matrice. En réalité, $(M - I)$ peut être une matrice singulière et n'avoir pas d'inverse.

Pour illustrer cela, considérons une matrice M de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculons M^2 :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous voyons que $M^2 = M$, ce qui satisfait l'équation $M^2 = M$. Cependant, M n'est ni la matrice nulle O ni la matrice identité I.

4.7 Application à l'économie

Une entreprise de confection de vêtements fabrique des jupes, des robes et des pantalons.

- Pour fabriquer une jupe, il faut 0,74m de tissu, 4 boutons et une fermeture Éclair.
- Pour fabriquer une robe, il faut 1,5m de tissu, 6 boutons et une fermeture Éclair.
- Pour fabriquer un pantalon, il faut 1,25m de tissu, 2 boutons et une fermeture Éclair.

On appelle x, y et z les quantités respectives de jupes, de robes et de pantalons confectionnés, et a, b et c les quantités de tissu (en mètres), de boutons et de fermeture Éclair utilisées pour la fabrication.

Enfin On considère les matrices :

$$M = \begin{pmatrix} 0,75 & 1,5 & 1,25 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

A. **1. Vérifier que $B = MA$.**

Pour vérifier que $B = MA$, nous devons effectuer une multiplication de matrices. Cependant, pour que cette multiplication soit possible, le nombre de colonnes de la matrice M doit être égal au nombre de lignes de la matrice A. Dans ce cas, M est une matrice 3×3 et A est une matrice 3×1, donc la multiplication est possible.

$$MA = \begin{pmatrix} 0,75 & 1,5 & 1,25 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,75x + 1,5y + 1,25z \\ 4x + 6y + 2z \\ x + y + z \end{pmatrix}$$

Maintenant, pour vérifier que $B = MA$, nous devons comparer cette expression avec la matrice B :

$$B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Nous pouvons voir que les deux expressions sont égales si et seulement si :

$$\begin{cases} 0,75x + 1,5y + 1,25z = a \\ 4x + 6y + 2z = b \\ x + y + z = c \end{cases}$$

Cela signifie que les quantités de tissu, de boutons et de fermeture Éclair utilisées pour la fabrication doivent être égales aux quantités a, b et c données. Par conséquent, nous avons vérifié que $B = MA$.

2. Déterminer a, b et c pour la fabrication de 200 jupes, 120 robes et 320 pantalons.

$$\begin{pmatrix} 0,75 & 1,5 & 1,25 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 120 \\ 320 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 730 \\ 2160 \\ 640 \end{pmatrix}$$

Ainsi, pour fabriquer 200 jupes, 120 robes et 320 pantalons, il faut 730 mètres de tissu, 2160 boutons et 640 fermetures Éclair.

B. On considère la matrice $M' = \begin{pmatrix} -1,6 & 0,1 & 1,8 \\ 0,8 & 0,2 & -1,4 \\ 0,8 & -0,3 & 0,6 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $M'M$.

$$M'M = \begin{pmatrix} -1,6 & 0,1 & 1,8 \\ 0,8 & 0,2 & -1,4 \\ 0,8 & -0,3 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,75 & 1,5 & 1,25 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

M' est la matrice inverse de M et $M'M = I_3$.

2. Écrire la matrice A en fonction de B et de M'.

Si $B = MA$, alors en multipliant des deux côtés par la matrice inverse de M (c'est-à-dire M'), nous pouvons exprimer A en fonction de B :

$$M'B = M'(MA) \implies M'B = (M'M)A \implies A = M'B$$

En utilisant la matrice M' donnée dans la question, nous pouvons calculer :

$$A = M'B = \begin{pmatrix} -1,6 & 0,1 & 1,8 \\ 0,8 & 0,2 & -1,4 \\ 0,8 & -0,3 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,6a + 0,1b + 1,8c \\ 0,8a + 0,2b - 1,4c \\ 0,8a - 0,3b + 0,6c \end{pmatrix}$$

Donc, les quantités de jupes, robes et pantalons (x, y, z) en fonction des quantités de tissu, boutons et fermetures Éclair (a, b, c) et de la matrice M' sont données par les équations ci-dessus.

3. En déduire x, y et z quand on utilise 735m de tissu, 2400 boutons et 620 fermetures Éclair.

Reprenons les étapes pour écrire la matrice A en fonction de B et de M', puis déduisons les quantités de jupes, robes et pantalons (x, y, z) lorsque l'on utilise 735m de tissu, 2400 boutons et 620

fermetures Éclair.
La relation entre A et B en utilisant la matrice inverse M' est :

$$A = M'B = \begin{pmatrix} -1,6 & 0,1 & 1,8 \\ 0,8 & 0,2 & -1,4 \\ 0,8 & -0,3 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

En remplaçant les valeurs données pour le tissu, les boutons et les fermetures Éclair ($a = 735$, $b = 2400$, $c = 620$), nous pouvons calculer la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} -1,6 & 0,1 & 1,8 \\ 0,8 & 0,2 & -1,4 \\ 0,8 & -0,3 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 735 \\ 2400 \\ 620 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 200 \\ 240 \end{pmatrix}$$

Maintenant, chaque élément de la matrice A représente les quantités respectives de jupes, robes et pantalons (x, y, z) lorsque l'on utilise 735m de tissu, 2400 boutons et 620 fermetures Éclair. Donc :

$$x = 180$$
$$y = 200$$
$$z = 240$$

Ainsi, lorsque l'on utilise 735m de tissu, 2400 boutons et 620 fermetures Éclair, nous fabriquons 180 jupes, 200 robes et 240 pantalons.

C. L'entreprise a deux fournisseurs dont les prix de vente des différents produits sont donnés dans le tableau suivant :

	Prix du tissu (par m)	**Prix d'un bouton**	**Prix d'une fermeture**
Fournisseur 1	45	5	6
Fournisseur 2	48	4,5	5,5

On note C la matrice $\begin{pmatrix} 45 & 5 & 6 \\ 48 & 4,5 & 5,5 \end{pmatrix}$.

Calculer le produit CA. Que représente cette matrice ?

Pour calculer le produit CA, nous devons multiplier la matrice C par la matrice A :

$$\begin{aligned} CA &= \begin{pmatrix} 45 & 5 & 6 \\ 48 & 4,5 & 5,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 45x + 5y + 6z \\ 48x + 4,5y + 5,5z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Prenons l'exemple de $A = \begin{pmatrix} 735 \\ 2400 \\ 620 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} CA &= \begin{pmatrix} 45 & 5 & 6 \\ 48 & 4,5 & 5,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 735 \\ 2400 \\ 620 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 48795 \\ 49490 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice CA représente les coûts totaux des différents produits (tissu, boutons et fermetures Éclair) fournis par les deux fournisseurs. La première ligne de CA représente le coût total des différents produits fournis par le fournisseur 1, tandis que la deuxième ligne représente le coût total des différents produits fournis par le fournisseur 2.

5 Deuxième volet

5.1 Exercice 1

On considère les matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. **Calculer A^2 et A^3 ; en déduire pour tout entier $n < 3$, la valeur de A^n.**

Pour calculer les puissances de la matrice A, nous pouvons simplement élever la matrice A à la puissance correspondante. Voici les calculs pour A^2 et A^3 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons observer que pour tout entier $n < 3$, la valeur de A^n est la matrice O (matrice nulle).

2. **À tout nombre réel x, on associe la matrice notée $M(x)$ où $M(x) = I + xA + \frac{x^2}{2}A^2 \quad (R1)$.**

$$\begin{aligned} M(x) &= I + xA + \frac{x^2}{2}A^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(a) Déterminer $M(0)$ et $B = M(4)$.

$$M(0) = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = M(4) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) x et y étant deux nombres réels quelconques, calculer en utilisant la relation $(R1)$, le produit $M(x) \times M(y)$.

$$\begin{aligned} M(x) \times M(y) &= \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & y & \frac{y^2}{2} \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & x+y & \frac{1}{2}(x+y)^2 \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= M(x+y) \end{aligned}$$

Identité remarquable :

$$\begin{aligned} a_{13} &= \frac{y^2}{2} + xy + \frac{x^2}{2} \\ &= \frac{1}{2}(y^2 + 2xy + x^2) \\ &= \frac{1}{2}(x+y)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{13} &= \frac{y^2}{2} + xy + \frac{x^2}{2} \\ &= \frac{y^2}{2} + \frac{xy}{2} + \frac{x^2}{2} \\ &= \frac{y^2 + xy + x^2}{2} \\ &= \frac{(x+y)^2}{2} \\ &= \frac{1}{2}(x+y)^2 \end{aligned}$$

(c) Montrer l'égalité : $M(x) \times M(y) = M(x+y)$**.** $R(2)$**.**

$$M(x) \times M(y) = \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & y & \frac{y^2}{2} \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & x+y & \frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^2}{2} \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'après la relation $(R1)$, on a :

$$M(x+y) = \begin{pmatrix} 1 & x+y & \frac{(x+y)^2}{2} \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il suffit alors de vérifier que les deux matrices sont égales. En comparant les coefficients, on trouve que :

$$\frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^2}{2} = \frac{(x+y)^2}{2}$$

Cette égalité est vérifiée, donc on a bien montré que $M(x) \times M(y) = M(x+y)$.

3. Vérifier $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$**.**

Pour vérifier que $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, nous pouvons comparer les coefficients des deux matrices.
En comparant les coefficients, nous pouvons voir que les deux matrices sont identiques. Par conséquent, nous pouvons conclure que $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. En utilisant les résultat de la question 2, déterminer le nombre réel x' tel que $M(x) \times M(x') = I$.
En déduire une matrice B' telle que $B \times B' = I$.

Pour déterminer le nombre réel x' tel que $M(x) \times M(x') = I$, nous pouvons utiliser la propriété établie dans la question 2(b) : $M(x) \times M(y) = M(x+y)$. Dans ce cas, nous devons trouver quel nombre réel x' doit être ajouté à x pour que $x + x' = 0$. Cela signifie que $x' = -x$.

Ainsi, $M(x) \times M(-x) = M(0) = I$.

Maintenant, pour trouver une matrice B' telle que $B \times B' = I$, nous pouvons appliquer la même logique. Puisque $B = M(4)$, nous devons trouver une matrice B' telle que $M(4) \times B' = I$. D'après ce que nous avons trouvé précédemment, nous savons que $B' = M(-4)$, car -4 est le nombre réel qui, ajouté à 4, donne 0. Donc, $B \times B' = M(4) \times M(-4) = M(0) = I$.

En conclusion, nous avons $x' = -x$ et $B' = M(-4)$.

5.2 Exercice 2

Une entreprise assure la production de deux types de calculatrices $\mathbf{C_1}$ et $\mathbf{C_2}$ en quantités (hebdomadaires) respectives x et y.
Le coût des éléments installés et le nombre d'heures de travail sont donnés pour chaque calculatrice dans le tableau suivant :

	$\mathbf{C_1}$	$\mathbf{C_2}$
Coût des éléments (en €)	6	8
Nombre d'heures de travail	1	1,5

Un programme de production hebdomadaire peut se représenter par la matrice $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
Cette production occasionne un coût c et un nombre t d'heures de travail. Ces deux éléments sont donnés dans la matrice $Y = \begin{pmatrix} c \\ t \end{pmatrix}$. Enfin on appelle A la matrice issue du tableau : $A = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 1,5 \end{pmatrix}$.

Partie A

1. **Écrire une égalité matricielle reliant A,X et Y qui traduit la production de l'entreprise.**

$$A \times X = Y$$

2. **Durant une semaine, l'entreprise a produit 200 calculatrices $\mathbf{C_1}$ et 800 calculatrices $\mathbf{C_2}$. Par un calcul matriciel, déterminer le coût total et le nombre d'heures de travail pour la production de cette semaine.**

$$\begin{aligned} A \times X &= \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 1,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 800 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 \times 200 + 8 \times 800 \\ 1 \times 200 + \frac{3}{2} \times 800 \end{pmatrix} \\ &= Y = \begin{pmatrix} 7600 \\ 1400 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Partie B

On note B la matrice : $B = \begin{pmatrix} 1,5 & -8 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

1. **Effectuer le produit** $B \times A$.

$$\begin{aligned} B \times A &= \begin{pmatrix} 1,5 & -8 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 1,5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \times 6 + (-8) \times 1 & -1 \times 6 + 6 \times 1 \\ \frac{3}{2} \times 8 + (-8) \times (\frac{3}{2}) & -1 \times 8 + 6 \times (\frac{3}{2}) \end{pmatrix} \\ &= C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. **Montrer en transformant l'égalité $Y = A \times X$ que $B \times Y = X$.**

$$Y = \begin{pmatrix} 7600 \\ 1400 \end{pmatrix} = A \cdot X = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 1,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 800 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} B \cdot Y &= \begin{pmatrix} 1,5 & -8 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7600 \\ 1400 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \times 7600 + (-8) \times 1400 \\ -1 \times 7600 + 6 \times 1400 \end{pmatrix} \\ &= X = \begin{pmatrix} 200 \\ 800 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Durant une autre semaine, l'entreprise fait face à un coût total de 8400 € et 1450 heures de travail.
Déterminer par le calcul matriciel le nombre de calculatrices de chaque type fabriquées au cours de cette semaine.

$$Y = \begin{pmatrix} 8400 \\ 1450 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 1,5 \end{pmatrix}$$

Pour déterminer M (matrice de production) nous devons faire le calcul $Y = A \times X$.
En inversant A nous avons :

$$A \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}^{(-1)} = \frac{1}{6 \times (\frac{3}{2}) - 8 \times 1} \times \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -8 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -8 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

et donc :

$$\begin{aligned} X = A^{(-1)} \times Y &= \begin{pmatrix} 1,5 & -8 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8400 \\ 1450 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \times 8400 + (-8) \times 1450 \\ -1 \times 8400 + 6 \times 1450 \end{pmatrix} \\ &= X \begin{pmatrix} 1000 \\ 300 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, 1000 calculatrices $\mathbf{C_1}$ et 300 calculatrice $\mathbf{C_2}$ ont été fabriquées au cours de cette semaine.