Arithméthique

Table des matières

1 Rappels

On désigne par :

- $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \\ \mathbb{N}^* &= \{1, 2, 3, \ldots\} \end{aligned}$$

- $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &= \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} \\ \mathbb{N} &\in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

- $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux (nombres à virgule)

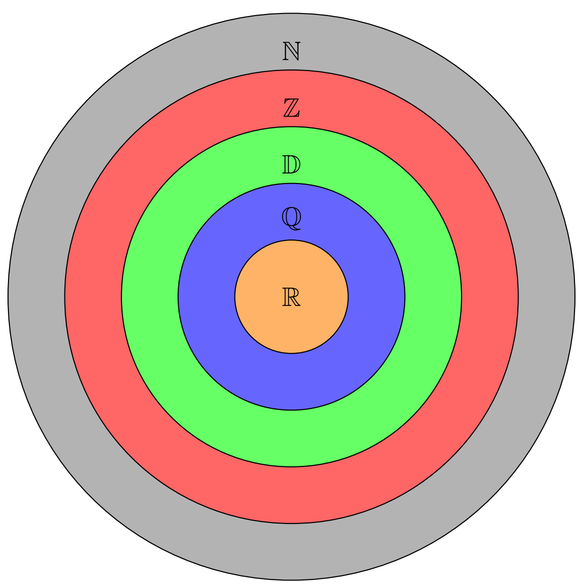
$$\mathbb{D} = \{ \ \frac{a}{10^n}, \text{ avec } a \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{Z} \ \}$$

- $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels

$$\mathbb{Q} = \{ \ \frac{a}{b}, \text{ avec } a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{N}^* \ \}$$

- $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels

$$\mathbb{N} \in \mathbb{Z} \in \mathbb{D} \in \mathbb{Q} \in \mathbb{R}$$
$$\sqrt{2} \in \mathbb{R} \ , \ \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$



2 Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

2.1 Définition et exemples

Définition :

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$

On dit que a divise b s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = k \times a$

On dit aussi que $-b$ est un multiple de a et que a est un diviseur de b

Notation : $a \mid b$ a divise b

Exemple 1 :

1) $a = -2$, $b = 6$

   $6 = (-3) \times (-2)$
   -2 divise 6

2) $b = 12$

   6 n'est pas un multiple de 4, donc 4 ne divise pas 6

3) $a = -2$, $b = 6$

   Diviseurs de 12 :
   $D_{12} = \{-12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

4) $a = -50$

   Multiples de -50 :
   $M_{-50} = \{\ldots, -150, -100, -50, 0, 50, 100, 150, 200, \ldots\}$
   Remarque :
   Les diviseur de b sont finis $(b \neq 0)$
   Les multiples de a sont infinis

Exercice 1 :

1) Donner la liste des diviseurs de 16 :

   $D_{16} = \{-16, -8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8, 16\}$

2) Donner la liste des entiers qui divisent à la fois 16 et 24 :

   $D_{24} = \{-24, -12, -8, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$
   $D_{16} \cap D_{24} = \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$ PGCD (16,24) $=$ 8

Exercice 2 :

Déterminer tous les couples $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$x^2 - 2xy = 15$
$5^2 - 2 \times 5 \times 1$

$x \times x - 2x \times y = 15$
$x(x - 2y) = 15$

x est un diviseur positif de 15

$$D_{15} = \{1, 3, 5, 15\}$$

cas 1) $x = 1$ donc $1 - 2y = 15$ $\times$
$-2y = 14$
$y = -7$

cas 2) $x = 3$ donc $3 - 2y = 5$ $\times$
$-2y = 2$
$y = -1$

cas 3) $x = 5$ donc $5 - 2y = 3$ ✓ $\{5, 1\}$
$-2y = -2$
$y = 1$

cas 4) $x = 15$ donc $15 - 2y = 1$ ✓ $\{15, 7\}$
$-2y = -14$
$y = 7$

x	$x - 2y$	$x(x - 2y)$
1	15	15
3	5	15
5	3	15
15	1	15

Exercice 3 :

Déterminer tous les couples (x, y) dont non naturelles tel que :

$x^2 - 7xy = 17$

$x \times x - 7xy = 17$

$D_{17} = \{1, 17\}$

cas 1) $x = 1$ donc $1 - 7y = 17$ $\times$

$$-7y = 16$$

$$y = \frac{16}{-7}$$

cas 2) $x = 17$ donc $17 - 7y = 17$ $\times$

$$-7y = -16$$

$$y = \frac{-16}{-7}$$

2.2 Propriétés

Exemple 2 :

$$\begin{array}{l} a = 5 \\ b = 25 \\ c = 75 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a \mid 25 \\ \\ a \mid 75 \end{array} \right. \quad \text{alors } a \text{ divise} = \quad \begin{array}{l} a \mid b + c \\ \\ a \mid b - c \end{array}$$

et plus généralement $a \mid nb + mc$

Exemple : $n = 4$

$m = 2$

$nb + mc = 100 - 150$

$= -50 \quad (a)5 \mid -50$

Proposition :

Si $a \mid b$ et $b \mid c$ alors

$a \mid b + c$

$a \mid b - c$

et plus généralement

$a \mid nb + mc$ avec $n, m \in \mathbb{Z}$

3 Division euclidienne

Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$

Définition :

Il existe un unique couple $(q\,;\,r)$, $q \in \mathbb{Z}$ $\quad r \in \mathbb{N}$ tel que

$$b \;=\; q \cdot a + r \quad \text{et} \quad 0 \leqslant r < a$$

$$\begin{array}{lcr|ll} \text{Le dividende} & \rightarrow & b & a & \leftarrow \text{ Le diviseur} \\ \cline{3-4} \text{Le reste} & \longrightarrow & r & q & \leftarrow \text{ Le quotient} \end{array}$$

$\uparrow$

La division euclidienne de b par a

Exemple 3 :

- $b \;=\; 27$
  $a \;=\; 10$

$$\begin{array}{r|l} 27 & 10 \\ \cline{2-2} 7 & 2 \end{array} \qquad 27 \;=\; 2 \times 10 + 7$$

- $b \;=\; -27$
  $a \;=\; 10$

$$\begin{array}{r|l} -27 & 10 \\ \cline{2-2} 3 & -3 \end{array} \qquad -27 \;=\; (-3) \times 10 + 3$$

Exercice 4 :

Effectuer la division euclidienne de b par a dans les cas suivantes :

1) $b \;=\; 75 \qquad a \;=\; 11$

$$\begin{array}{r|l} 75 & 11 \\ \cline{2-2} 9 & 6 \end{array}$$

2) $b \;=\; -75 \qquad a \;=\; 11$

$$\begin{array}{r|l} -75 & 11 \\ \cline{2-2} 2 & -7 \end{array}$$

3) $b \;=\; 63 \qquad a \;=\; 9$

$$\begin{array}{r|l} 63 & 9 \\ \cline{2-2} 0 & 7 \end{array}$$

4) $b = -63 \qquad a = 9$

$$\begin{array}{r|l} -63 & 9 \\ \cline{2-2} 0 & -7 \end{array}$$

Exercice 5 :

Trouver tous les entiers qui sont divisés par 5 donnent un quotient égal 3 fois le reste :

$$\begin{array}{r|c} b & 5 \\ \cline{2-2} r & 3 \times r \end{array} \qquad 0 \leqslant r < 5$$

$$\begin{aligned} b &= 3 \times r \times 5 + r \\ b &= 16r \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{lll} r = 0 & & b = 0 \\ r = 1 & & b = 16 \\ r = 2 & & b = 32 \\ r = 3 & & b = 48 \\ r = 4 & & b = 64 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{r|l} 48 & 5 \\ \cline{2-2} 3 & 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|c} b & 7 \\ \cline{2-2} r & 2 \times r \end{array} \qquad 0 \leqslant r < 7$$

$$\begin{aligned} b &= 2 \times r \times 7 + r \\ b &= 15r \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll} r = 0 & & b = 0 \\ r = 1 & & b = 15 \\ r = 2 & & b = 30 \\ r = 3 & & b = 45 \\ r = 4 & & b = 60 \\ r = 5 & & b = 75 \\ r = 6 & & b = 90 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 15 & 7 \\ \cline{2-2} 1 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 30 & 7 \\ \cline{2-2} 2 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 45 & 7 \\ \cline{2-2} 3 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 7 \\ \cline{2-2} 4 & 8 \end{array} \qquad \begin{array}{r|c} 75 & 7 \\ \cline{2-2} 5 & 10 \end{array} \qquad \begin{array}{r|c} 90 & 7 \\ \cline{2-2} 6 & 12 \end{array}$$

Remarque :

Si $b = q \times a + r \qquad 0 \leqslant r < a$

$b - r = q \cdot a$

$a \mid b - r$

4 Congruence

Commençons par un exemple :

$n = 7$

$a = 75$

$b = 89$

Méthode 1

$$\begin{aligned} b - a &= 89 - 75 \\ &= 14 \end{aligned}$$

14 est un multiple de 7

$89 \equiv 75\ [7]$

Méthode 2

$$\begin{array}{r|l} 75 & 7 \\ \cline{2-2} 5 & 10 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 89 & 7 \\ \cline{2-2} 5 & 12 \end{array}$$

89 est congru à 75 modulo 7

$89 \equiv 75\ [7]$

Définition :

Soit n est un entier naturel $\boxed{n \geqslant 2}$ et soient a et b deux entiers relatifs.
On dit que a est congru à b modulo n et on écrit $a \equiv b\,[n]$ si :

$-n \mid b - a$ ou

a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n

Propriété :

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$

- $a \equiv a\,[n]$ (réflexivité)
- $a \equiv b\,[n] \Leftrightarrow b \equiv a\,[n]$ (symétrie)

Si $a \equiv b\,[n]$ et $b \equiv c\,[n]$ alors $a \equiv c\,[n]$ (transitivité)

Théorème :

$$a \equiv b\,[n] \Leftrightarrow a - b \equiv 0\,[n]$$

Remarque :

Effectuons loi D.E de a par n

$$\begin{array}{r|l} a & n \\ \cline{2-2} r & q \end{array} \qquad 0 \leqslant r < n$$

$$\begin{aligned} &a = nq + r \\ &a - r = nq \\ &a - r \equiv 0\,[n] \\ &a \equiv r\,[n] \end{aligned}$$

Exemple 4 :

$n = 5$
$a = -24$

$$\begin{array}{r|l} -24 & 5 \\ \cline{2-2} 1 & 5 \end{array}$$

$$-24 \equiv 1\,[5]$$

Exercice 6 :

Trouver le plus petit entier positif r tel que $a \equiv r\,[n]$ dans les cas suivants :

1) $a = 17$, $n = 3$

$$\begin{array}{r|l} 17 & 3 \\ \cline{2-2} 2 & 5 \end{array} \qquad 17 \equiv 2\,[3]\ ,\ r = 2$$

2) $a = -17$, $n = 3$

$$\begin{array}{r|l} -17 & 3 \\ \cline{2-2} 1 & -6 \end{array} \qquad -17 \equiv 1\,[3]\ ,\ r = 1$$

3) $a = 72\ ,\ n = 5$

$$\begin{array}{r|l} 72 & 5 \\ \hline 2 & 14 \end{array} \qquad 72 \equiv 2\ [5]\ ,\ r = 2$$

4) $a = -72\ ,\ n = 5$

$$\begin{array}{r|l} -72 & 5 \\ \hline 3 & -15 \end{array} \qquad -72 \equiv 3\ [5]\ ,\ r = 3$$

Théorème (de compatibilité) :

$$\begin{array}{c} a \equiv b\ [n] \\ c \equiv d\ [n] \end{array} \qquad \text{alors} \qquad \begin{array}{c} a + c \equiv b + d\ [n] \\ a - c \equiv b - d\ [n] \\ a \times c \equiv b \times d\ [n] \end{array}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$a^k \equiv b^k\ [n]$

Exemple 5 :

$a = 50^{172}$

Déterminons le reste de la D.E de a par 7 :

$$\begin{array}{r|l} 50 & 7 \\ \hline 1 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 50 \equiv 1\ [7] \\ 50^{172} \equiv 1^{172}\ [7] \\ 50^{172} \equiv 1\ [7] \end{array}$$

Le reste est 1

Exemple 6 :

Déterminer le reste de loi D.E de a par 7 :

1) $a = 55^{63}$

$$\begin{array}{r|l} 55 & 7 \\ \hline 6 & 7 \end{array}$$

$$55 \equiv 6\ [7]$$
$$6 \equiv -1\ [7]$$
$$55 \equiv -1\ [7]$$
$$55^{63} \equiv (-1^{63})$$
$$55^{63} \equiv -1\ [7]$$
$$55^{63} \equiv 6\ [7]$$

Le reste est 6

2) $a = 55^{64}$

$$\begin{array}{r|l} 55 & 7 \\ \hline 6 & 7 \end{array}$$

$$55 \equiv 6\ [7]$$
$$6 \equiv -1\ [7]$$
$$55 \equiv -1\ [7]$$
$$55^{64} \equiv (-1^{64})$$
$$55^{64} \equiv -1\ [7]$$

Le reste est 1

3) $a = 78^{15}\ ,\ n = 11$

$$\begin{array}{r|l} 78 & 11 \\ \hline 1 & 7 \end{array}$$

$$78 \equiv 1\ [11]$$
$$78^{15} \equiv 1^{15}\ [11]$$
$$78^{15} \equiv 1\ [11]$$

Le reste est 1

Exercice 7 :

a) Vérifier que :

1) $2^4 \equiv -1$ [17]

$$\begin{aligned}
2^4 &= 16 \\
16-(-1) &= 17 \text{ qui est un multiple de } 17 \\
\text{donc } 16 &\equiv -1 \ [17] \\
2^4 &\equiv -1 \ [17]
\end{aligned}$$

2) $6^2 \equiv 2$ [17]

$$\begin{aligned}
6^2 &= 36 \\
36-2 &= 34 \text{ qui est un multiple de } 17 \\
\text{donc } 36 &\equiv 2 \ [17] \\
6^2 &\equiv 2 \ [17]
\end{aligned}$$

b) En déduire le reste de la division euclidienne de 1532^{20} et 346^{12} par 17

$$\begin{array}{r|l} 1532 & 17 \\ \hline 2 & 90 \end{array}$$

$$\begin{cases} 1532 \equiv 2 \ [17] \\ 1532^4 \equiv 2^4 \ [17] \\ 2^4 \equiv -1 \ [17] \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\text{donc } 1532^4 &\equiv 1 \ [17] \\
1532^{20} &\equiv (-1)^5 \ [17] \\
1532^{20} &\equiv -1 \ [17] \\
1532^{20} &\equiv 16 \ [17]
\end{aligned}$$

Le reste est 16

$$\begin{array}{r|l} 346 & 17 \\ \hline 6 & 20 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
346 &\equiv 6 \ [17] \\
346^{12} &\equiv 6^{12} \ [17] \\
6^2 &\equiv 2 \ [17] \\
(6^2)^6 &\equiv 2^6 \ [17] \\
6^{12} &\equiv 2^6 \ [17] \\
2^6 &= 64
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} 64 & 17 \\ \hline 13 & 3 \end{array}$$

$$6^{12} \equiv 13 \ [17]$$

Le reste est 13

Exercice 8 :

- Déterminer tout les couples des entiers naturel $(x\ ,\ y)$ tel que

$$\begin{aligned} x^2 &= y^2 + 21 \\ x^2 - y^2 &= 21 \\ (x+y)\,(x-y) &= 21 \end{aligned}$$

$$21 \times 1 \quad \begin{cases} x + y = 21 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad 2x = 22 \quad \boxed{\begin{array}{c} x = 11 \\ y = 10 \end{array}}$$

$$7 \times 3 \quad \begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 3 \end{cases} \quad 2x = 10 \quad \boxed{\begin{array}{c} x = 5 \\ y = 2 \end{array}}$$

- Déterminer tout les couples des entiers naturel $(x\ ,\ y)$ tel que

$$\begin{aligned} x^2 - 7xy &= 17 \\ x(x - 7y) &= 17 \\ D_{17} &= \{1,\ 17\} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = 17 \\ x - 7y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 17 - 7y &= 1 \\ -7y &= -16 \\ 7y &= 16 \\ y &= \frac{16}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x - 7y = 17 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1 - 7y &= 17 \\ -7y &= 16 \\ y &= \frac{16}{7} \end{aligned}$$

Donc il n'y a pas de solution

Conclusion :

$$a \equiv b \Leftrightarrow a - b \equiv 0 \, [n]$$
$$a \equiv r \quad \text{ou } r \text{ est le reste de la division euclidienne de } a \text{ par } n$$

$$\begin{matrix} a \equiv b \\ b \equiv c \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad a \equiv c$$

$$\begin{matrix} a \equiv b \\ c \equiv d \end{matrix}$$