Calcul propositionnel

Table des matières

1 Proposition et valeur de vérité

Définition :

Une proposition est une expression bien former de point de vue d'un certaine langage, à laquelle est affecté clairement (par une communauté) une valeur de vérité. Cette valeur de vérité sera notée :

- **V** si la proposition est vraie.
- **F** si la proposition est fausse.

Exemple 1 :

- "$\Pi > 3,14$" est une proposition vraie : **V** (1) $(\Pi = \text{pi})$
- "$x > 3$" n'est pas une proposition, car sa valeur de vérité dépende de la valeur de x.
- "$8 > 18$" est une proposition fausse : **F** (0)

Remarque :

Les proposition seront notées **P, Q, R, S, . . .** etc.
À partir de ces propositions, on peut former d'autres propositions en utilisant des connecteurs logiques :

- négation
- et
- ou
- $\Leftrightarrow$
- $\Rightarrow$

2 Connecteurs logiques

2.1 Négation

Définition :

La négation notée $\neg$ (nonP, $\overline{\text{P}}$, $\neg$P) est un connecteur logique unaire dont la table de vérité ci-dessous :

P	¬P
F	V
V	F

Si P est F, la négation de P est V.
Si P est V, la négation de P est F.

Unaire = on a besoin juste un numéro (**P**)
Binaire = on a besoin 2 numéros (**p** ; **q**)

2.2 Équivalence

Définition :

L'équivalence est un connecteur logique binaire noté $\Leftrightarrow$ dont la table de vérité est donnée ci-dessous :

P	Q	P ⇔ Q
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Remarque :

P $\Leftrightarrow$ Q est identique à Q $\Leftrightarrow$ P

2.3 Conjonction (et)

Définition :

La conjonction est un connecteur logique binaire noté $\wedge$ dont la table de vérité est donnée ci-dessous :

P	Q	P $\wedge$ Q
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

P et Q est = V

2.4 Disjonction (ou)

Définition :

La disjonction est un connecteur logique binaire noté $\vee$ dont la table de vérité est donnée ci-dessous :

P	Q	P $\vee$ Q
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

Exercice 1 :

Montrer que :

$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$

$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$

P	Q	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \wedge \neg Q$
F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	F	V	F
V	V	V	F	F	F	F

Les deux colonnes ($\neg(P \vee Q)$ et $\neg P \wedge \neg Q$) sont identiques

2.5 Implication

Définition :

L'implication est un connecteur logique binaire noté $\Rightarrow$ dont la table de vérité est donnée ci-dessous :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Exercice 2 :

Montrer que : $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	F
V	V	V	F	F	V

Les deux colonnes ($P \Rightarrow Q$ et $\neg Q \Rightarrow \neg P$) sont identiques

Exercice 3 :

Montrer que : $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$	Q	$\neg P \vee Q$
F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F
V	V	V	F	V	V

Les deux colonnes ($P \Rightarrow Q$ et $\neg P \vee Q$) sont identiques

3 Propriétés des connecteurs logiques

3.1 Commutativité

$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$

$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$

3.2 Associativité

$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$

$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$

Démonstration :

P	Q	R	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \vee R$	$Q \vee R$	$P \vee (Q \vee R)$
F	F	F	F	F	F	F
F	F	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	V	V	V	V	V	V

Les deux colonnes ($(P \vee Q) \vee R$ et $P \vee (Q \vee R)$) sont identiques

3.3 Distributivité

$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

3.4 Lois de De Morgan

$\neg\ (P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg\ P \vee \neg Q$

$\neg\ (P \vee Q) \Leftrightarrow \neg\ P \wedge \neg Q$

Démonstration :

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$
F	F	F	V	V	V	V
F	V	F	V	V	F	V
V	F	F	V	F	V	V
V	V	V	F	F	F	F

Les deux colonnes ($\neg(P \wedge Q)$ et $\neg P \vee \neg Q$) sont identiques