Logiques et Prédicats

Table des matières

1 Calcul des prédicats

1.1 Définition - Exemples

Définition :

Un prédicat est une proposition dont la valeur de vérité dépend d'une ou plusieurs variables.

Rappel : *Proposition* - Énoncé mathématique complet qui est soit vrai soit faut.

Exemple 1 :

On note "$P(x): \ x < 4$"

- $P(1)$ est vraie.
- $P(7)$ est fausse.

Exemple 2 :

Soit le prédicat "$Q(x, y) : x < y$"

- $Q(4, 5)$ est vraie.
- $Q(5, 4)$ est fausse.

1.2 Quantificateurs universels et existentiels

Quantificateur universel :

$\forall$ Pour tout / quel que soit.

Quantificateurs existentiels :

$\exists$ Il existe.

$\exists!$ Il existe un et un seul.

$\nexists$ Il n'existe pas.

1.2.1 Quantificateur universel

Définition :

Si pour tout $x, P(x)$ est vraie, alors on écrit :

$$\boxed{\forall x,\ P(x)}$$

Remarque :

En général x est un element d'un ensemble E

$$\boxed{\forall x \in E,\ P(x)}$$

Exemple 3 :

- $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 0$

  $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) =$ Vraie

- $\forall n \in \mathbb{Z},\ n \leqslant 0$

  $\forall n \in \mathbb{Z},\ Q(n) =$ Fausse

- $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$

  $\forall x \in \mathbb{R},\ R(x) =$ Fausse

- $\forall n \in \{2, 3, 5, 7, 11\},\ n$ est premier

  $\forall n \in E,\ S(n) =$ Vraie

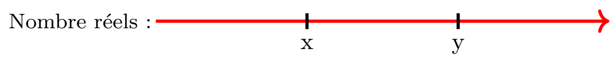
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$
Ensemble des entiers naturels (nombres positifs).
$\mathbb{Z} = \{\ldots - 1, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}$

Ensemble des entiers relatifs (nombres positifs et négatifs).

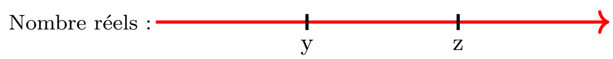
Exemple 4 :

$P(x,y): \quad x \leqslant y$

$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ P(x,y)$ = Vraie



$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ P(x,y)$ = Fausse



Exemple 5 :

$\forall x \in \mathbb{R},\ \underbrace{(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1}_{P(x)}$ = Vraie

1.2.2 Quantificateur existentiel

Définition :

S'il existe une variable x telle que $P(x)$ est vraie, alors on écrit :

$$\boxed{\exists x,\ P(x)}$$

P(x) est un prédicat.

Exemple 6 :

- $\exists x,\ \underbrace{2x+1=13}_{P(x)}$

  $\exists x,\ P(x)$ = Vraie

- $\exists n \in \mathbb{N},\ 2n+1=12$

  $\exists n \in \mathbb{N},\ 2n+1=12$ = Fausse

Méthode :

- Pour démontrer qu'une proposition telle que $\exists x \in E,\ P(x)$ est vraie, il suffit de trouver $x \in E$ tel que $P(x)$ soit vraie.
- Pour démontrer qu'une proposition telle que $\exists x \in E,\ P(x)$ est fausse, il faut montrer que $P(x)$ est fausse pour tout $x \in E$.

Exemple 7 :

a) $P(x): \quad x^2 = 9$
   - $\exists x \in \mathbb{R},\ P(x) =$ est vraie

b) $P(x): \quad x^2 = 9$
   - $\exists n \in \mathbb{N},\ P(n) =$ est fausse

Exercice 1 :

On considère les prédicats suivants :

- $x^2 = 16 \qquad P(x)$
- $x^2 \leqslant 16 \qquad Q(x)$
- $x^2 \leqslant -16 \qquad R(x)$
- $x^2 = 16 \qquad S(x)$

Donner la valeur de vérités des propositions suivantes :

a) $\exists x \in \mathbb{R},\ P(x) =$ Vraie

b) $\exists x \in \mathbb{R},\ Q(x) =$ Vraie

c) $\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) =$ Fausse

d) $\exists x \in \mathbb{R},\ R(x) =$ Fausse

e) $\forall x \in \mathbb{R},\ \neg S(x) =$ Vraie

Remarque :
$S(x): \quad x^2 = -16$
$\neg S(x): \quad x^2 \neq -16$

Exercice 2 :

Nier les propositions suivantes :

- $\forall x \in E,\ P(x)$ l'inverse $=$ $\exists x \in E,\ \neg P(x)$
- $\exists x \in E,\ P(x)$ l'inverse $=$ $\forall x \in E,\ \neg P(x)$

2 Propriétés

2.1 Succession de quantificateurs

Commençons par un exemple :

Exemple 8 :

$\exists x\ ,\ \forall y\ ,\ P(x,y)$

- $\exists x \in \mathbb{N}\ ,\ \forall y \in \mathbb{N}\ ,\ x \leqslant y \quad = \quad$ Vraie
  Il existe un nombre qui est inférieur à tout les entiers.
- $\forall y \in \mathbb{N}\ ,\ \exists x \in \mathbb{N}\ ,\ x \leqslant y \quad = \quad$ Vraie
  Pout tout les nombres entiers, il existe un nombre inférieur.
- $\forall y \in \mathbb{R}\ ,\ \exists x \in \mathbb{R}\ ,\ x^2 = y \quad = \quad$ Fausse

Proposition :

$$[\,\forall x\ ,\ \forall y\ ,\ P(x,y)\,] \Leftrightarrow [\,\forall y\ ,\ \forall x\ ,\ P(x,y)\,]$$

$$[\,\exists x\ ,\ \exists y\ ,\ P(x,y)\,] \Leftrightarrow [\,\exists y\ ,\ \exists x\ ,\ P(x,y)\,]$$

Remarque :
$\forall x\ ,\ \exists y\ ,\ P(x,y)$ n'est pas équivalent à $\exists x\ ,\ \forall y\ ,\ P(x,y)$

Exemple 9 :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \exists y \in \mathbb{R}\ ,\ y - 2 = x \quad = \quad \text{Vraie}$$

$$\exists y \in \mathbb{R}\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ y - 2 = x \quad = \quad \text{Fausse}$$

2.2 Négation

$$\neg\,(\ \forall x \in E\ ,\ P(x)\ )\ \Leftrightarrow\ (\ \exists x \in E\ ,\ \neg P(x)\ )$$

$$\neg\,(\ \exists x \in E\ ,\ P(x)\ )\ \Leftrightarrow\ (\ \forall x \in E\ ,\ \neg P(x)\ )$$

Exemple 10 :

$$\forall x \in \mathbb{N}\ ,\ x \leqslant -x \quad = \quad \text{Fausse}$$

$$\exists x \in \mathbb{N}\ ,\ x > -x \quad = \quad \text{Vraie}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} a \leqslant b & a > b \\ a < b & a \geqslant b \end{array}}$$

$$\neg\,(\ \forall x \in E\ ,\ \exists y \in E\ ,\ P(x,y)\ )\ \Leftrightarrow\ (\ \exists x \in E\ ,\ \forall y \in E\ ,\ \neg P(x,y)\ )$$

$$\neg\,(\ \forall x \in E\ ,\ \forall y \in E\ ,\ P(x,y)\ )\ \Leftrightarrow\ (\ \exists x \in E\ ,\ \exists y \in E\ ,\ \neg P(x,y)\ )$$

Exercice 3 :

Déterminer la négation de chacune des propositions suivantes et donner sa valeur de vérité :

a) $\forall x \in \mathbb{N}\ ,\ x^2 \leqslant 9 \quad = \quad$ Fausse

$$\neg\,(\ \forall x \in \mathbb{N}\ ,\ x^2 \leqslant 9\ )\ \Leftrightarrow\ \exists x \in \mathbb{N}\ ,\ x^2 > 9 \quad = \quad \text{Vraie}$$

b) $\forall x \in \mathbb{N}\ ,\ \exists y \in \mathbb{N}\ ,\ x = y^2 \quad = \quad$ Fausse

$\neg\,(\,\forall x \in \mathbb{N}\,,\ \exists y \in \mathbb{N}\,,\ x = y^2\,) \ \Leftrightarrow\ \exists x \in \mathbb{N}\,,\ \forall y \in \mathbb{N}\,,\ x \neq y^2 \quad =$ Vraie

c) $\exists x \in \mathbb{N}\,,\ \forall y \in \mathbb{N}\,,\ x < y \quad =$ Fausse

$\neg\,(\exists x \in \mathbb{N}\,,\ \forall y \in \mathbb{N}\,,\ x < y) \ \Leftrightarrow\ \forall x \in \mathbb{N}\,,\ \exists y \in \mathbb{N}\,,\ x \geqslant y \quad =$ Vraie

d) $\exists x \in \mathbb{N}\,,\ \forall y \in \mathbb{N}\,,\ x \neq y \quad =$ Fausse

$\neg\,(\exists x \in \mathbb{N}\,,\ \forall y \in \mathbb{N}\,,\ x \neq y) \ \Leftrightarrow\ \forall x \in \mathbb{N}\,,\ \exists y \in \mathbb{N}\,,\ x = y \quad =$ Vraie