Interpolação

Marcos Vieira

Professor: Adriano Côrtes

Maio/2024

Conteúdo:

Introdução

O que seria interpolação?

Introdução

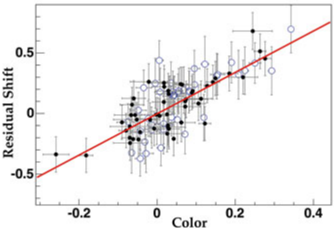
O que seria interpolação?

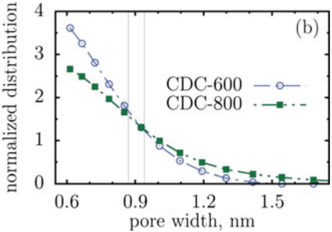
- Passar uma curva pelos dados (conectar os pontos).
- Quando e por qual motivo?

Introdução

O que seria interpolação?

- Passar uma curva pelos dados (conectar os pontos).
- Quando e por qual motivo?





- Imagens ⇒ inferir o valor de pixels ⇒ não importa tanto a precisão
- Geografia ⇒ conectar posições em mapa ⇒ caminho entre pontos

Interpolação vs Fitting

Interpolação:

- Garante que o modelo passe exatamente pelos pontos.
- Foco em preencher os "buracos"entre pontos conhecidos (não em prever pontos!).

Interpolação vs Fitting

Interpolação:

- Garante que o modelo passe exatamente pelos pontos.
- Foco em preencher os "buracos"entre pontos conhecidos (não em prever pontos!).

Ajuste de função:

- Presença de dispersão nos dados.
- fazer previsões fora do intervalo dos dados originais.
- Estimativa de parâmetros quando um modelo teórico está disponível.

Interpolação vs Fitting

Interpolação:

- Garante que o modelo passe exatamente pelos pontos.
- Foco em preencher os "buracos"entre pontos conhecidos (não em prever pontos!).

Ajuste de função:

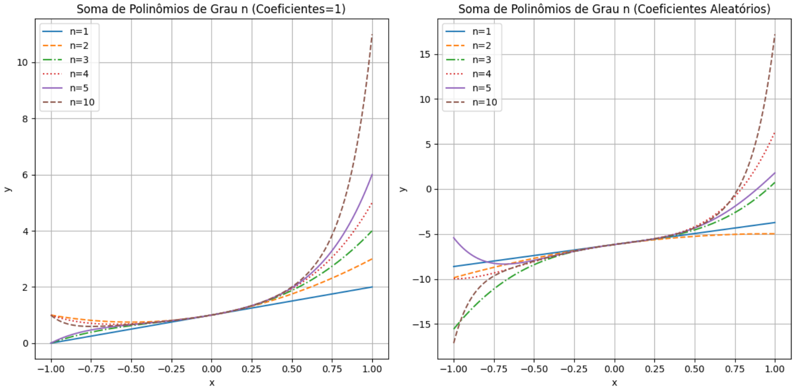
- Presença de dispersão nos dados.
- fazer previsões fora do intervalo dos dados originais.
- Estimativa de parâmetros quando um modelo teórico está disponível.

Por que polinômios?

- Facilidade de Diferenciação/Integração.
- Flexibilidade para aproximar várias funções.

Interpolação Polinomial

Considere um polinômio: $p_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$



Interpolação Polinomial

Abordagem direta: matriz de Vandermonde

Dado $n+1$ pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_{n+1}, y_{n+1})$, procurar um polinômio $p_n(x)$ de grau n tal que $p_n(x_i) = y_i$ para cada i.

Abordagem direta: matriz de Vandermonde

Dado $n+1$ pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_{n+1}, y_{n+1})$, procurar um polinômio $p_n(x)$ de grau n tal que $p_n(x_i) = y_i$ para cada i. Ou seja:

$$\begin{aligned}
p_n(x_1) = y_1 &: a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_n x_1^n = y_1 \\
p_n(x_2) = y_2 &: a_0 + a_1 x_2 + \ldots + a_n x_2^n = y_2 \\
&\vdots \\
p_n(x_n) = y_n &: a_0 + a_1 x_n + \ldots + a_n x_n^n = y_n \\
p_n(x_{n+1}) = y_{n+1} &: a_0 + a_1 x_{n+1} + \ldots + a_n x_{n+1}^n = y_{n+1}
\end{aligned}$$

* reparem que são $n+1$ pontos e n intervalos a serem "preenchidos".

Abordagem direta: matriz de Vandermonde

Dado $n+1$ pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{n+1}, y_{n+1})$, procurar um polinômio $p_n(x)$ de grau n tal que $p_n(x_i) = y_i$ para cada i. Ou seja:

$$
\begin{aligned}
p_n(x_1) = y_1 &: a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_n x_1^n = y_1 \\
p_n(x_2) = y_2 &: a_0 + a_1 x_2 + \ldots + a_n x_2^n = y_2 \\
&\vdots \\
p_n(x_n) = y_n &: a_0 + a_1 x_n + \ldots + a_n x_n^n = y_n \\
p_n(x_{n+1}) = y_{n+1} &: a_0 + a_1 x_{n+1} + \ldots + a_n x_{n+1}^n = y_{n+1}
\end{aligned}
$$

* reparem que são $n+1$ pontos e n intervalos a serem "preenchidos".

Na forma de matriz como $V\mathbf{a} = \mathbf{y}$, onde $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)^T$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_{n+1})^T$.

$$
V = \begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\
1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n
\end{pmatrix}
$$

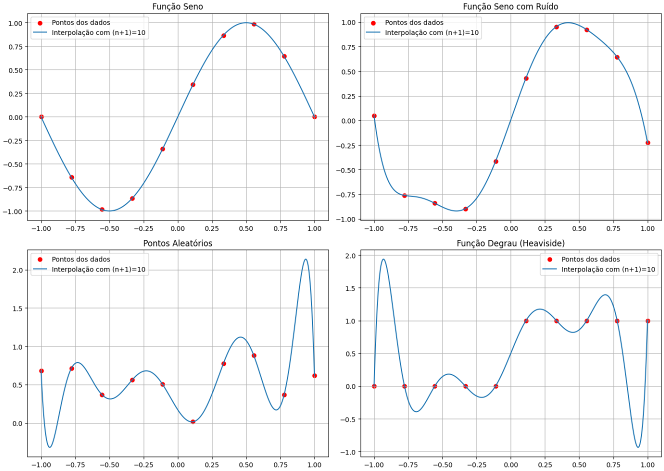
Esta é a matriz de Vandermonde. Para grandes n, esta matriz pode ser mal condicionada.

Abordagem direta: matriz de Vandermonde

Nós são igualmente espaçados $\Rightarrow$ amostragens temporais, espaciais etc ...

Abordagem direta: matriz de Vandermonde

Nós são igualmente espaçados $\Rightarrow$ amostragens temporais, espaciais etc ...



Mal condicionada, com $\kappa_\infty(V)$ tipicamente alto. Porém, o comportamento observado é devido a escolha de um modelo de interpolação polinomial (veremos mais adiante).

Interpolação linear

Dados os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) com $x_1 \neq x_2$, o polinômio interpolador linear $p_1(x)$ é:

$$p_1(x) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$\vdots$$

(quadro[1])

$$\vdots$$

Interpolação linear

Dados os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) com $x_1 \neq x_2$, o polinômio interpolador linear $p_1(x)$ é:

$$p_1(x) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$\vdots$$

(quadro[1])

$$\vdots$$

$$p_1(x) = y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x)$$

onde

$$l_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}, \quad l_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

E reparem os valores de $l_1(x)$ e $l_2(x)$ nos pontos x_1 e x_2. O que isso significa?

Interpolação quadrática

E como seria para três pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2), e (x_3, y_3)?

$$\vdots$$

(quadro[2])

$$\vdots$$

Interpolação quadrática

E como seria para três pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2), e (x_3, y_3)?

$$\vdots$$

(quadro[2])

$$\vdots$$

$$l_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

Da mesma forma para os demais ... tentem aí ...

Interpolação quadrática

E como seria para três pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2), e (x_3, y_3)?

$$\vdots$$

(quadro^2)

$$\vdots$$

$$l_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

Da mesma forma para os demais ... tentem aí ...

$$l_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$$

$$l_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

O polinômio interpolador quadrático $p_2(x)$ é:

$$p_2(x) = y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + y_3 l_3(x)$$

Forma geral

Dado um conjunto de pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_{n+1}, y_{n+1})$,

$$p_n(x) = \sum_{i=1}^{n+1} y_i l_i(x)$$

Com:

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Forma geral

Dado um conjunto de pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_{n+1}, y_{n+1})$,

$$p_n(x) = \sum_{i=1}^{n+1} y_i l_i(x)$$

Com:

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Exemplo

$(x_1, y_1) = (0, 1)$, $(x_2, y_2) = (1/2, -1)$, $(x_3, y_3) = (1, 2)$, $(x_4, y_4) = (3, -5)$

$\vdots$

(quadro[3])

$\vdots$

Exemplo:

Polinômio de Interpolação $p_3(x)$:

$$\begin{aligned} p_3(x) &= y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + y_3 l_3(x) + y_4 l_4(x) \\ &= l_1(x) - l_2(x) + 2l_3(x) - 5l_4(x) \end{aligned}$$

$$l_1(x) = -\frac{1}{3}(2x-1)(x-1)(x-3),$$

E o mesmo para os demais ...

...tentem aí...depois vamos ver os gráficos!

Exemplo:

Polinômio de Interpolação $p_3(x)$:

$$
\begin{aligned}
p_3(x) &= y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + y_3 l_3(x) + y_4 l_4(x) \\
&= l_1(x) - l_2(x) + 2l_3(x) - 5l_4(x)
\end{aligned}
$$

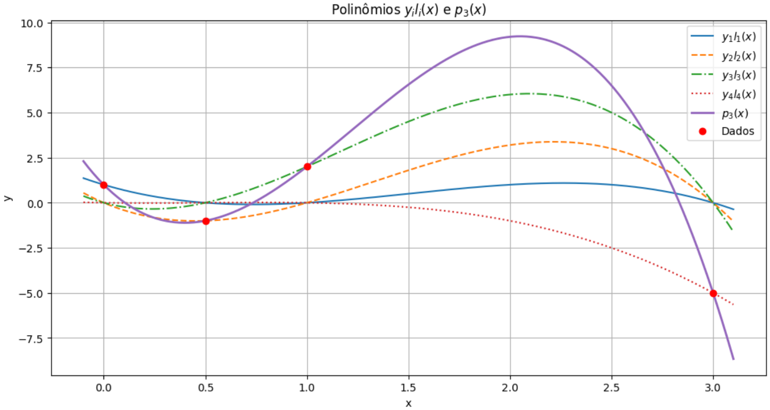
$$l_1(x) = -\frac{1}{3}(2x-1)(x-1)(x-3),$$

E o mesmo para os demais ...

...tentem aí...depois vamos ver os gráficos!

$$
\begin{aligned}
l_2(x) &= \frac{8x(x-1)(x-3)}{5}, \\
l_3(x) &= -\frac{x(2x-1)(x-3)}{2}, \\
l_4(x) &= \frac{x(2x-1)(x-1)}{30}.
\end{aligned}
$$

Gráfico do exemplo anterior



Abordagem otimizada

Defina $l(x)$ como:

$$l(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n+1}) = \prod_{j=1}^{n+1} (x - x_j)$$

Abordagem otimizada

Defina $l(x)$ como:

$$l(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n+1}) = \prod_{j=1}^{n+1} (x - x_j)$$

Reescreva $l_i(x)$ como:

$$l_i(x) = \frac{w_i l(x)}{(x - x_i)}$$

Abordagem otimizada

Defina $l(x)$ como:

$$l(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n+1}) = \prod_{j=1}^{n+1} (x - x_j)$$

Reescreva $l_i(x)$ como:

$$l_i(x) = \frac{w_i l(x)}{(x - x_i)}$$

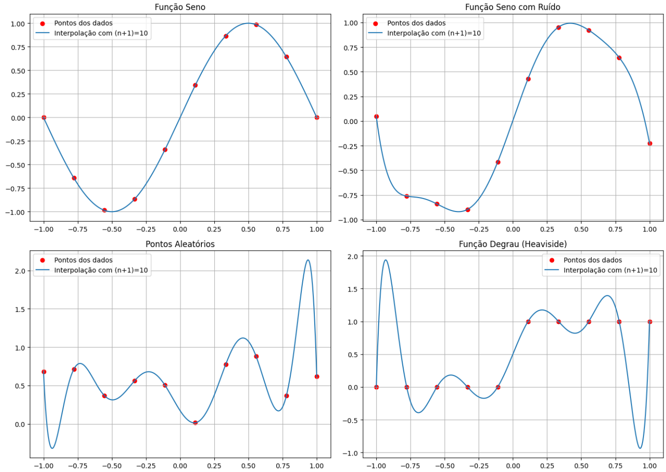
Onde w_i é dado por:

$$w_i = \frac{1}{(x_i - x_1)(x_i - x_2) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_{n+1})}$$

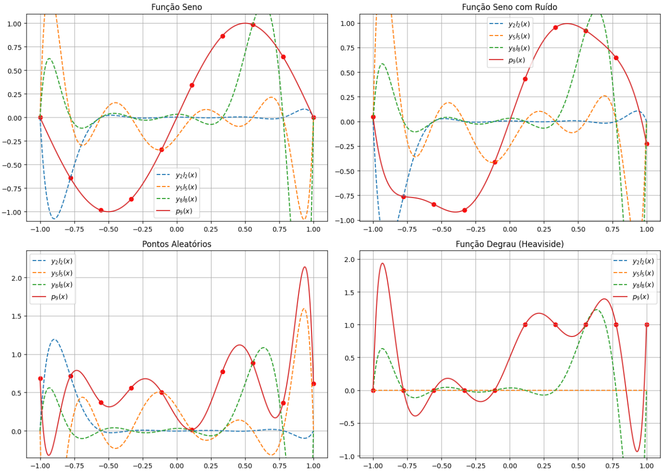
Finalmente, o polinômio interpolador $p_n(x)$ pode ser expresso como:

$$p_n(x) = l(x) \sum_{i=1}^{n+1} \frac{w_i y_i}{x - x_i}$$

Interpolação polinomial: abordagem de Lagrange



Interpolação polinomial: abordagem de Lagrange



Fenômeno de Runge

- Poderia sugerir que aumentar o número de pontos deveria melhorar a aproximação.

Fenômeno de Runge

- Poderia sugerir que aumentar o número de pontos deveria melhorar a aproximação.

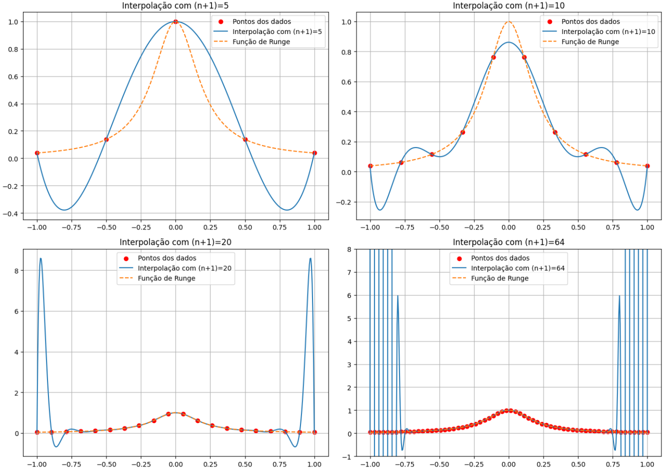
- Nem sempre é verdade $\Rightarrow$ problema ilustrado pelo exemplo da função de Runge:

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

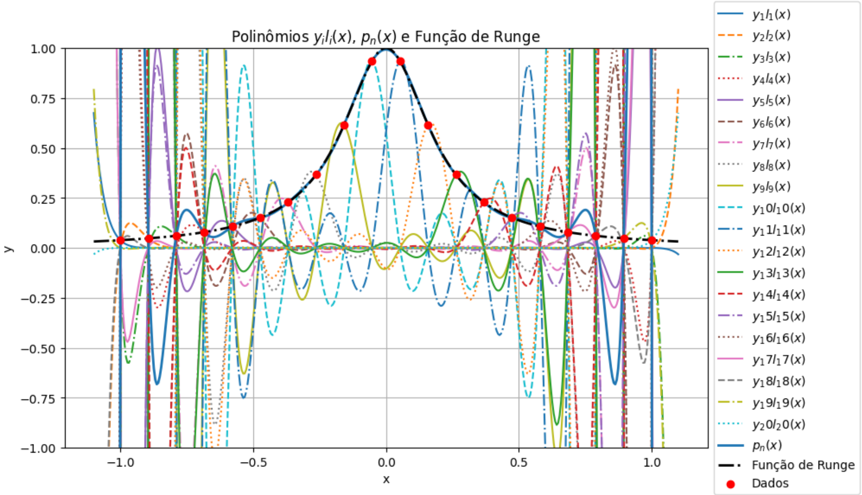
- Número de pontos $\Rightarrow$ ordem dos polinômios.
- Posição dos pontos x_i's.

Como resultado ...

Fenômeno de Runge



Fenômeno de Runge



Interpolação linear segmentada

Interpolação linear segmentada - conceito básico

- Interpolar entre pontos de dados adjacentes usando funções lineares.

Interpolação linear segmentada - conceito básico

- Interpolar entre pontos de dados adjacentes usando funções lineares.

- Pontos de dados: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_{n+1}, y_{n+1})$ onde $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$.

Interpolação linear segmentada - conceito básico

- Interpolar entre pontos de dados adjacentes usando funções lineares.

- Pontos de dados: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_{n+1}, y_{n+1})$ onde $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$.

- Função Linear: $g_i(x) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i),$ para $x_i \leq x \leq x_{i+1}$

Interpolação linear segmentada - conceito básico

- Interpolar entre pontos de dados adjacentes usando funções lineares.

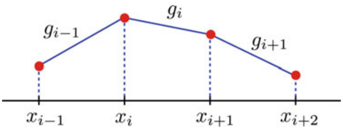
- Pontos de dados: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_{n+1}, y_{n+1})$ onde $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$.

- Função Linear: $g_i(x) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i)$, para $x_i \leq x \leq x_{i+1}$

- Função completa:

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{se } x_1 \leq x \leq x_2, \\ g_2(x) & \text{se } x_2 \leq x \leq x_3, \\ \vdots & \\ g_n(x) & \text{se } x_n \leq x \leq x_{n+1} \end{cases}$$

Obtendo:

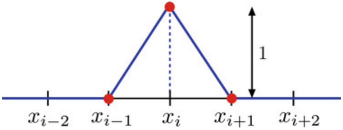


Interpolação linear segmentada - forma simplificada

$\Rightarrow$ Definir $Gi(x)$ de modo que $Gi(x_i) = 1$ e $Gi(x_j) = 0$ para $j \neq i$ ...

Interpolação linear segmentada - forma simplificada

⇒ Definir $Gi(x)$ de modo que $Gi(x_i) = 1$ e $Gi(x_j) = 0$ para $j \neq i$ ... ou seja:



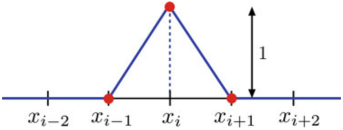
$\vdots$

(quadro[4])

$\vdots$

Interpolação linear segmentada - forma simplificada

⇒ Definir $Gi(x)$ de modo que $Gi(x_i) = 1$ e $Gi(x_j) = 0$ para $j \neq i$ ... ou seja:



⋮

(quadro[4])

⋮

$$Gi(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq x_{i-1}, \\ \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{se } x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} & \text{se } x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0 & \text{se } x_{i+1} \leq x \end{cases}$$

Interpolação linear segmentada - generalização

Para pontos espaçados uniformemente:

$$\vdots$$

(quadro[5])

$$\vdots$$

Interpolação linear segmentada - generalização

Para pontos espaçados uniformemente:

$$\vdots$$

(quadro[5])

$$\vdots$$

$$Gi(x) = G\left(\frac{x - x_i}{h}\right)$$

onde

$$G(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{se } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$$

De modo que podemos escrever:

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n+1} y_i Gi(x)$$

Exemplo usando o método 1

Dados os pontos: $(0,1), \left(\frac{1}{2}, -1\right), (1,2)$.

Definimos $g(x)$ para dois intervalos $[0, \frac{1}{2}]$ e $[\frac{1}{2}, 1]$:

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ g_2(x) & \text{se } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Para encontrar $g_1(x)$:

$$g_1(x) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$g_1(x) = 1 + \frac{-1 - 1}{\frac{1}{2} - 0}(x - 0) = 1 - 4x$$

Para encontrar $g_2(x)$:

$$g_2(x) = y_2 + \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}(x - x_2)$$

$$g_2(x) = -1 + \frac{2 + 1}{1 - \frac{1}{2}}(x - \frac{1}{2}) = -4 + 6x$$

Exemplo usando o método 2

Dados os pontos: $(0,1), \left(\frac{1}{2}, -1\right), (1,2) \quad \Rightarrow \quad h =$

Exemplo usando o método 2

Dados os pontos: $(0,1), \left(\frac{1}{2}, -1\right), (1,2) \quad \Rightarrow \quad h = 0.5.$

Podemos expressar $g(x)$ como:

$$g(x) = y_1 G_1(x) + y_2 G_2(x) + y_3 G_3(x)$$

$$g(x) = G_1(x) - G_2(x) + 2G_3(x)$$

Para $G_1(x)$:

...(quadro**)...

Exemplo usando o método 2

Dados os pontos: $(0,1), \left(\frac{1}{2}, -1\right), (1,2) \quad \Rightarrow \quad h = 0.5.$

Podemos expressar $g(x)$ como:

$$g(x) = y_1 G_1(x) + y_2 G_2(x) + y_3 G_3(x)$$
$$g(x) = G_1(x) - G_2(x) + 2G_3(x)$$

Para $G_1(x)$:

$$\ldots(\text{quadro}^{**})\ldots$$

$$G_1(x) = G\left(\frac{x-0}{0.5}\right) = 1 - |2x|$$

E desmembrando em partes:

$$G_1(x) = \begin{cases} 1+2x & \text{se } -\frac{1}{2} \leq x < 0 \\ 1-2x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exemplo usando o método 2

Para $G_2(x)$, usando:

$$G_2(x) = G\left(\frac{x - \frac{1}{2}}{0.5}\right) = 1 - |2x - 1|$$

E desmembrando em partes:

$$G_2(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2 - 2x & \text{se } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

...tentem aí para $G_3(x)$...

Exemplo usando o método 2

Para $G_2(x)$, usando:

$$G_2(x) = G\left(\frac{x - \frac{1}{2}}{0.5}\right) = 1 - |2x - 1|$$

E desmembrando em partes:

$$G_2(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2 - 2x & \text{se } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

. . . tentem aí para $G_3(x)$ . . .

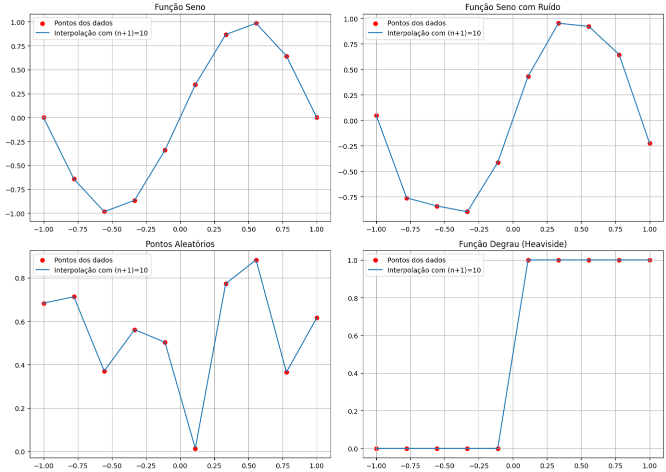
Para $G_3(x)$, usando:

$$G_3(x) = G\left(\frac{x - 1}{0.5}\right) = 1 - |2x - 2|$$

E desmembrando em partes:

$$G_3(x) = \begin{cases} -1 + 2x & \text{se } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 3 - 2x & \text{se } 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Interpolação linear segmentada - exemplos



Aproximação de funções

Quantificação do erro na interpolação polinomial

- Assume-se que os pontos de dados venham de uma função $f(x)$.

Quantificação do erro na interpolação polinomial

- Assume-se que os pontos de dados venham de uma função $f(x)$.

- Quantificar o quão bem $p_n(x)$ aproxima $f(x)$ em $a \leq x \leq b$.

Quantificação do erro na interpolação polinomial

- Assume-se que os pontos de dados venham de uma função $f(x)$.

- Quantificar o quão bem $p_n(x)$ aproxima $f(x)$ em $a \leq x \leq b$.

- Para x_i tal que $a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1} \leq b$.

Quantificação do erro na interpolação polinomial

- Assume-se que os pontos de dados venham de uma função $f(x)$.

- Quantificar o quão bem $p_n(x)$ aproxima $f(x)$ em $a \leq x \leq b$.

- Para x_i tal que $a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1} \leq b$.

- Com $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_{n+1}, y_{n+1})$, onde $y_i = f(x_i)$.

Quantificação do erro na interpolação polinomial

- Assume-se que os pontos de dados venham de uma função $f(x)$.

- Quantificar o quão bem $p_n(x)$ aproxima $f(x)$ em $a \leq x \leq b$.

- Para x_i tal que $a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1} \leq b$.

- Com $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_{n+1}, y_{n+1})$, onde $y_i = f(x_i)$.

- Para estimar o erro na aproximação $f(x) \approx p_n(x)$:

Teorema: Se $f \in C^{n+1}[a, b]$, então

$$f(x) = p_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} q_{n+1}(x), \quad \text{para} \quad a \leq x \leq b$$

Aqui,

$$q_{n+1}(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n+1})$$

e η é algum ponto em (a, b).

- Prova introduzindo $F(z)$ e considerando $n = 1 \ldots$ (quadro[6]) ...

Erro para interpolação polinomial

Teorema: Se f pertence à classe $C^{n+1}[a,b]$, então $p_n(x)$ satisfaz:

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)| \max_{a \leq x \leq b} |q_{n+1}(x)|, \quad \text{para} \quad a \leq x \leq b$$

Erro para interpolação polinomial

Teorema: Se f pertence à classe $C^{n+1}[a,b]$, então $p_n(x)$ satisfaz:

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)| \max_{a \leq x \leq b} |q_{n+1}(x)|, \quad \text{para} \quad a \leq x \leq b$$

Se os x_i são igualmente espaçados, com $x_1 = a$, $x_{n+1} = b$, e $x_{i+1} - x_i = h$, então:

$$\vdots$$

(quadro[7])

$$\vdots$$

Erro para interpolação polinomial

Teorema: Se f pertence à classe $C^{n+1}[a,b]$, então $p_n(x)$ satisfaz:

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)| \max_{a \leq x \leq b} |q_{n+1}(x)|, \quad \text{para} \quad a \leq x \leq b$$

Se os x_i são igualmente espaçados, com $x_1 = a$, $x_{n+1} = b$, e $x_{i+1} - x_i = h$, então:

$$\vdots$$

(quadro[7])

$$\vdots$$

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{1}{4(n+1)} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)| h^{n+1}, \quad \text{para} \quad a \leq x \leq b$$

Exemplo

Agora, $p_n(x)$ e com nós igualmente espaçados para aproximar $f(x) = e^{-2x}$ para $0 \leq x \leq 3$.

Para uma aproximação correta com 4 dígitos significativos, queremos:

$$\left|\frac{f(x) - p_n(x)}{f(x)}\right| < 10^{-4}, \text{para } 0 \leq x \leq 3$$

$$\vdots$$

(Tentem aí/quadro[8])

$$\vdots$$

Exemplo

Agora, $p_n(x)$ e com nós igualmente espaçados para aproximar $f(x) = e^{-2x}$ para $0 \leq x \leq 3$.

Para uma aproximação correta com 4 dígitos significativos, queremos:

$$\left| \frac{f(x) - p_n(x)}{f(x)} \right| < 10^{-4}, \text{para } 0 \leq x \leq 3$$

$$\vdots$$

(Tentem aí/quadro[8])

$$\vdots$$

Assim: $f^{(n+1)}(x) = (-2)^{n+1} e^{-2x} \quad \Rightarrow \quad \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)| = 2^{n+1}$. Neste intervalo, $|f(x)| \geq e^{-6}$. Dado $h = \frac{3}{n}$:

$$\left| \frac{f(x) - p_n(x)}{f(x)} \right| \leq \frac{1}{e^{-6}} \frac{1}{4(n+1)} \left(\frac{6}{n} \right)^{n+1}$$

Será menor que 10^{-4} quando n deve ser maior ou igual a 14.

Para interpolação linear segmentada ...

Interpolação linear segmentada

- A precisão da aproximação linear depende do subintervalo.

- Determinar o quão bem $f(x)$ é aproximado por $g_i(x)$ no subintervalo $x_i \leq x \leq x_{i+1}$.

Interpolação linear segmentada

- A precisão da aproximação linear depende do subintervalo.

- Determinar o quão bem $f(x)$ é aproximado por $g_i(x)$ no subintervalo $x_i \leq x \leq x_{i+1}$.

- $n = 1$: $q_2(x) = (x - x_i)(x - x_{i+1})$ fazendo $h = x_{i+1} - x_i$ . . . (quadro[9]) . . .

Interpolação linear segmentada

- A precisão da aproximação linear depende do subintervalo.

- Determinar o quão bem $f(x)$ é aproximado por $g_i(x)$ no subintervalo $x_i \leq x \leq x_{i+1}$.

- $n = 1$: $q_2(x) = (x - x_i)(x - x_{i+1})$ fazendo $h = x_{i+1} - x_i$ $\ldots$(quadro[9])$\ldots$ $|q_2(x)| \leq \frac{h^2}{4}$

Consequentemente:

$$
\begin{aligned}
|f(x) - g_i(x)| &\leq \frac{1}{2} \max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} |f''(x)| \max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} |q_2(x)| \\
&\leq \frac{1}{2} \max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} |f''(x)| \frac{h^2}{4} \\
&\leq \frac{1}{8} h^2 \max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} |f''(x)| \\
&\leq \frac{1}{8} h^2 ||f''||_\infty
\end{aligned}
$$

Este resultado se aplica a cada subintervalo, o que nos dá o próximo resultado.

Teorema e aplicações

Teorema: Suponha que $f \in C^2[a, b]$ e que os x_i são igualmente espaçados, com $x_{i+1} - x_i = h$. Neste caso, a função de interpolação linear segmentada satisfaz:

$$|f(x) - g(x)| \leq \frac{1}{8}h^2||f''||_\infty \quad \text{para} \quad a \leq x \leq b$$

Ou seja, converge para a função original e o erro é de segunda ordem (devido ao h^2). Consequentemente, dobrar o número de pontos de interpolação diminui o erro por aproximadamente um fator 4.

- Ex 1: Limite de erro para $f(x) = \cos(2\pi x)$ com $n = 5$ e $0 \leq x \leq 1$.
- Ex 2: Quantos pontos de interpolação são necessários para garantir um erro de 10^{-4}?

. . . tentem aí, pelo menos até encontrar a expressão pro h . . .

Teorema e aplicações

Teorema: Suponha que $f \in C^2[a,b]$ e que os x_i são igualmente espaçados, com $x_{i+1} - x_i = h$. Neste caso, a função de interpolação linear segmentada satisfaz:

$$|f(x) - g(x)| \leq \frac{1}{8} h^2 ||f''||_\infty \quad \text{para} \quad a \leq x \leq b$$

Ou seja, converge para a função original e o erro é de segunda ordem (devido ao h^2). Consequentemente, dobrar o número de pontos de interpolação diminui o erro por aproximadamente um fator 4.

- Ex 1: Limite de erro para $f(x) = \cos(2\pi x)$ com $n = 5$ e $0 \leq x \leq 1$.
- Ex 2: Quantos pontos de interpolação são necessários para garantir um erro de 10^{-4}?

...tentem aí, pelo menos até encontrar a expressão pro h...

Ex 1: $f''(x) = -4\pi^2 \cos(2\pi x) \Rightarrow ||f''||_\infty = 4\pi^2$. Dado que $h = \frac{1}{5} \Rightarrow |f(x) - g(x)| \leq \frac{\pi^2}{50}$.

Ex 2: $\frac{h^2}{8} ||f''||_\infty \leq 10^{-4} \Rightarrow \frac{\pi^2 h^2}{2} \leq 10^{-4}$. Resolvendo para h, temos $h \leq \sqrt{\frac{2 \times 10^{-2}}{\pi}}$.
Uma vez que $x_1 = 0$ e $x_{n+1} = 1$, $h = \frac{1}{n}$. Portanto, $n \geq \frac{50\pi}{\sqrt{2}} \approx 222.1 \Rightarrow n \geq 223$.

Reduzindo o erro ...

Reduzindo o erro para aproximações polinomiais

- $p_n(x)$ pode falhar ao aproximar $f(x)$ quando os nós x_i são igualmente espaçados.

- O componente principal de interesse é o termo de erro dado por:

$$\frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}q_{n+1}(x).$$

Reduzindo o erro para aproximações polinomiais

- $p_n(x)$ pode falhar ao aproximar $f(x)$ quando os nós x_i são igualmente espaçados.

- O componente principal de interesse é o termo de erro dado por:

$$\frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}q_{n+1}(x).$$

- Se f está em $C^{n+1}[a,b]$, então existe uma constante M_{n+1} tal que $|f^{(n+1)}(x)| \leq M_{n+1}$.

Reduzindo o erro para aproximações polinomiais

- $p_n(x)$ pode falhar ao aproximar $f(x)$ quando os nós x_i são igualmente espaçados.

- O componente principal de interesse é o termo de erro dado por:

$$\frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} q_{n+1}(x).$$

- Se f está em $C^{n+1}[a,b]$, então existe uma constante M_{n+1} tal que $|f^{(n+1)}(x)| \leq M_{n+1}$.

- Focar em minimizar o valor máximo de $q_{n+1}(x)$ no intervalo $[a,b]$:

$$Q = \max_{a \leq x \leq b} |q_{n+1}(x)|$$

- Agora como posicionar os pontos para reduzir o erro?

Polinômios de Chebyshev

Um polinômio de Chebyshev, $T_n(x)$, é definido recursivamente como:

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots$$

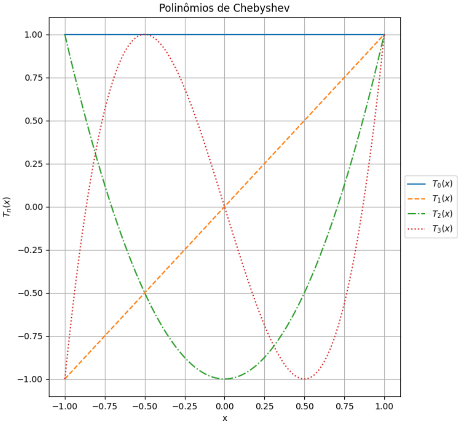
Os casos base são $T_0(x) = 1$ e $T_1(x) = x$.

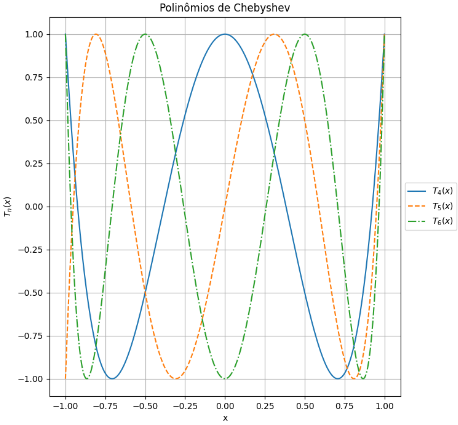
Os primeiros polinômios de Chebyshev podem ser expressos como:

$$\begin{aligned}
T_2(x) &= 2x^2 - 1, \\
T_3(x) &= 4x^3 - 3x, \\
T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1, \\
T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x, \\
T_6(x) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1.
\end{aligned}$$

Cada $T_n(x)$ é um polinômio de grau n com um coeficiente líder de 2^{n-1}.

Polinômios de Chebyshev





Encontrando os x_i's

Antes de ver como reduzir Q utilizando os polinômios de Chebyshev ...

Teorema:

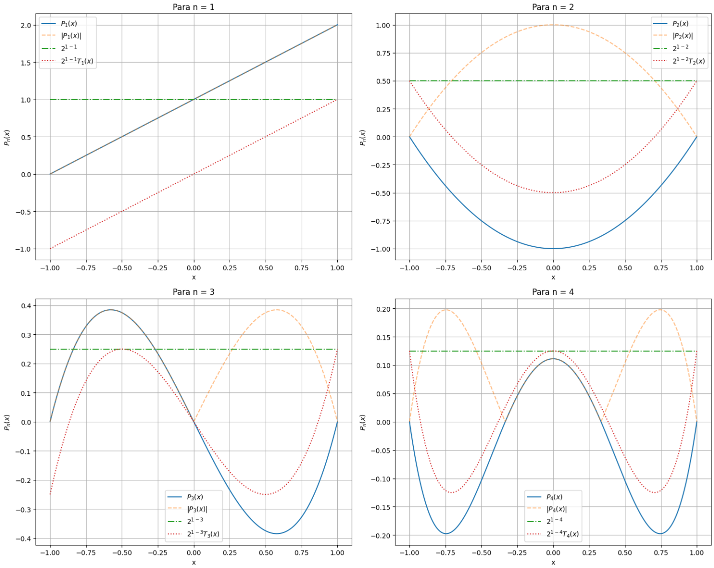
Se $P_n(x) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0$, onde $n \geq 1$, então:

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |P_n(x)| \geq 2^{1-n}$$

Se $P_n(x) = 2^{1-n}T_n(x)$, então:

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |P_n(x)| = 2^{1-n}$$

Encontrando os x_i's



Encontrando os x_i's

Reparem que:

- q_{n+1} pode ser escrito como $P_n(x) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0$

- Os b_i's são dados pelas escolhas dos x_i's. $\ldots$(quadro***)$\ldots$

Encontrando os x_i's

Reparem que:

- q_{n+1} pode ser escrito como $P_n(x) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0$

- Os b_i's são dados pelas escolhas dos x_i's. $\ldots$(quadro***)$\ldots$

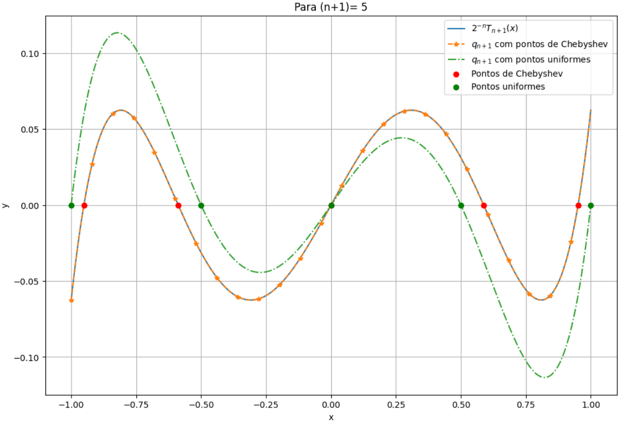
- $2^{1-n}T_n(x)$ é apenas um caso particular.

Com isso vemos que para minimizar o erro Q, os x_i's devem ser escolhidos de forma que sejam os zeros de $T_{n+1}(x)$, formulados como:

$$2^{-n}T_{n+1}(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{n+1})$$

Ou seja ...

Encontrando os x_i's



Encontrando os x_i's

Para encontrar esses zeros, outra forma é introduzida:

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x), \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Os zeros de $T_{n+1}(x)$ são encontrados resolvendo:

$$(n+1) \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}(2i - 1), \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \ldots, n+1$$

As posições para x podem ser transformadas se o domínio mudar de $-1 \leq x \leq 1$ para $a \leq x \leq b$.

Pontos de Chebyshev

$$\vdots$$

(quadro[10])

$$\vdots$$

Pontos de Chebyshev

$$\vdots$$

(quadro[10])

$$\vdots$$

- Com os x_i dados por:

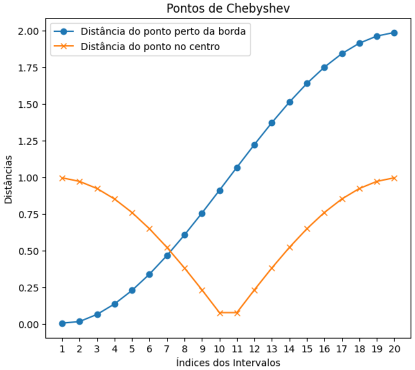
$$x_i = \frac{1}{2}[a + b + (b - a)z_i], \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, n + 1,$$

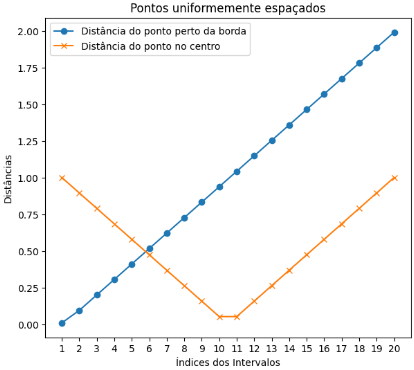
onde z_i é definido como:

$$z_i = \cos\left(\frac{\pi(2i - 1)}{2(n + 1)}\right).$$

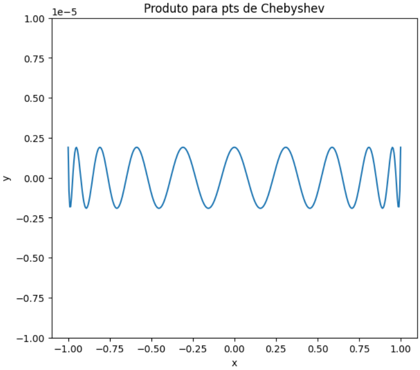
Esses pontos x_i são conhecidos como os pontos de Chebyshev, e eles estão ligados aos zeros do polinômio de Chebyshev $T_{n+1}(x)$ de grau $n + 1$.

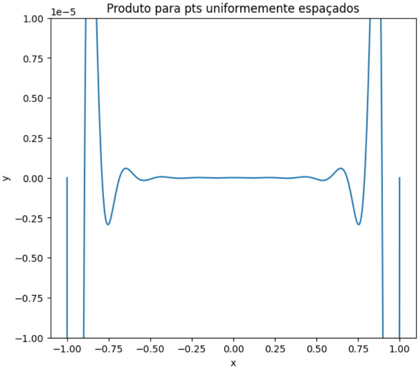
Pontos de Chebyshev





Pontos de Chebyshev





Redução no erro

Teorema:

Dado x_i como pontos Chebyshev, o polinômio de interpolação $p_n(x)$ satisfaz:

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{(n+1)\pi}} R^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_\infty, \quad \text{para} \quad a \leq x \leq b$$

Onde R é definido como:

$$R = \frac{(b-a)e}{4(n+1)}$$

- Se $n \ggg$ tal que $R < 1$, então R^{n+1} converge para zero exponencialmente.

Exemplo de aplicação

Ex: Limites de erro para $f(x) = \cos(2\pi x)$ com $0 \leq x \leq 1$:

Número de pontos de interpolação necessários para garantir um erro de 10^{-4}:

$$\sqrt{\frac{2}{(n+1)\pi}} R^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_\infty \leq 10^{-4}$$

Dado que $\|f^{(n+1)}\|_\infty = (2\pi)^{n+1}$, a equação se torna:

$$\sqrt{\frac{2}{(n+1)\pi}} (2\pi R)^{n+1} \leq 10^{-4}$$

Exemplo de aplicação

Resolvendo numericamente nós obtemos $n \geq 9$.

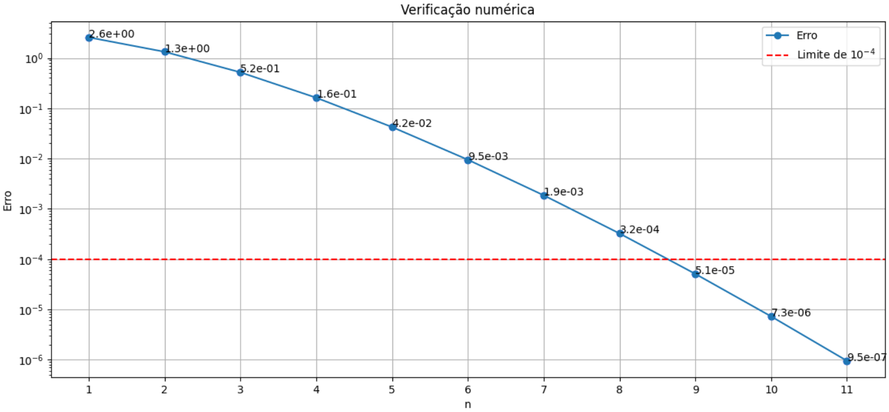


Ilustração para Runge - sem pontos Chebyshev

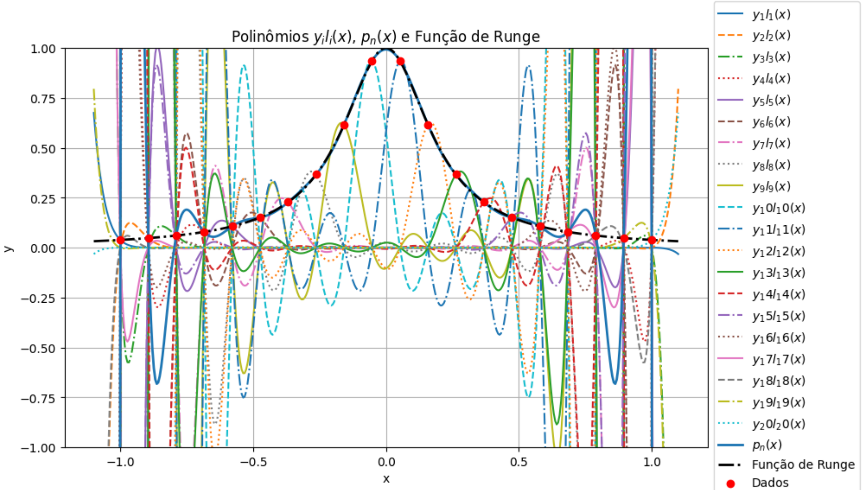
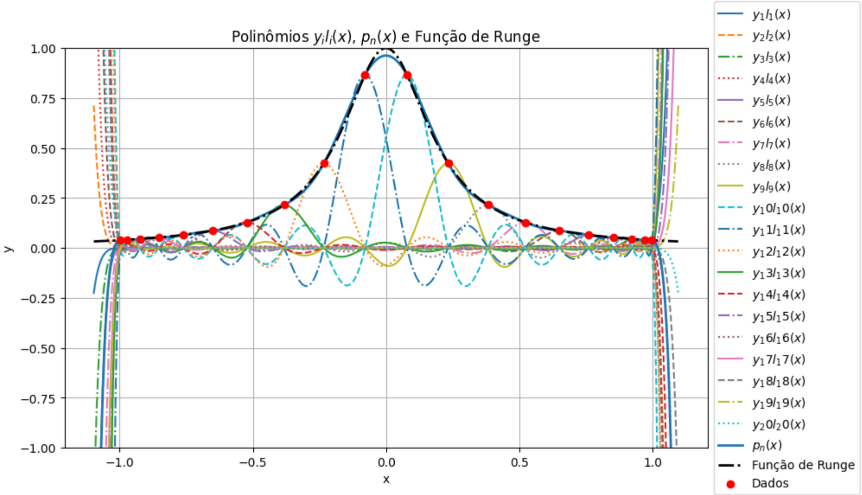
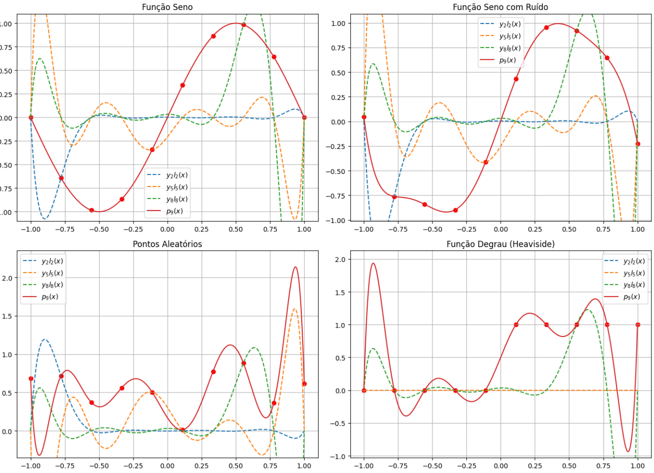


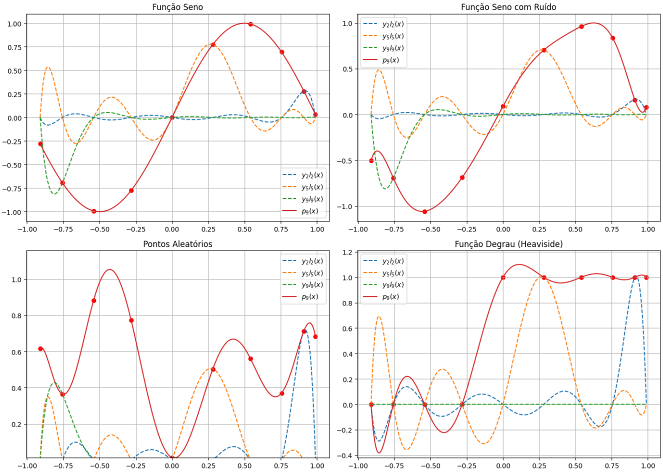
Ilustração para Runge - com pontos Chebyshev



Casos anteriores - sem pontos Chebyshev



Casos anteriores - com pontos Chebyshev



Obrigado!