Teorema (Convergência do Método de Newton)

Seja $f \in C^2(a,b)$ com $\bar{x} \in]a,b[$ tal que $f(\bar{x}) = 0$, i.e., $\bar{x}$ é uma raiz de f, e satisfazendo $f'(x) \neq 0$ para x em $]a,b[$ (em particular temos $f'(\bar{x}) \neq 0$, ou seja, $\bar{x}$ é uma raiz simples).

Além disso, suponhamos que $f''(\bar{x}) \neq 0$ e que a sequência gerada pelo método seja convergente, i.e, $\lim_{k\to\infty} x_k = \bar{x}$. $(*)$

Então,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1} - \bar{x}}{(x_k - \bar{x})^2} = \frac{f''(\bar{x})}{2 f'(\bar{x})} \qquad (**)$$

Antes de provar o resultado acima faremos duas observações:

Observação 1: Definindo o erro na iteração k como $e_k = |x_k - \bar{x}|$, então $(*)$ implica que

$$\lim_{k\to\infty} e_k = 0$$

Observação 2: A equação $(**)$ (e a Obs. acima) implica que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^2} = \left| \frac{f''(x)}{2f'(x)} \right| ,$$

e portanto quando x_k está suficientemente próximo de $\bar{x}$, a ordem de convergência do método é quadrática.

__Prova:__

Consideremos a iteração $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, subtraindo $\bar{x}$ de ambos os lados temos

$$\underbrace{x_{k+1} - \bar{x}}_{\varepsilon_{k+1}} = \underbrace{x_k - \bar{x}}_{\varepsilon_k} - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad \therefore \quad \boxed{\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

erro com sinal

Sendo $\varepsilon_k = x_k - \bar{x} \therefore \bar{x} = x_k - \varepsilon_k$, e usando a fórmula de Taylor ficamos com

$$0 = f(\bar{x}) = f(x_k - \varepsilon_k) = f(x_k) - f'(x_k)\varepsilon_k + \frac{1}{2} f''(x_k)\varepsilon_k^2 + O(\varepsilon_k^3)$$

$$\therefore -f(x_k) = -f'(x_k)\varepsilon_k + \frac{1}{2} f''(x_k)\varepsilon_k^2 + O(\varepsilon_k^3).$$

Substituindo em ▲ ficamos com

$$\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \varepsilon_k + \frac{\left[-f'(x_k)\varepsilon_k + \frac{1}{2} f''(x_k)\varepsilon_k^2 + O(\varepsilon_k^3)\right]}{f'(x_k)}$$

$$= \cancel{\varepsilon_k} - \cancel{\varepsilon_k} + \frac{1}{2}\frac{f''(x_k)}{f'(x_k)}\varepsilon_k^2 + \frac{1}{f'(x_k)} O(\varepsilon_k^3) \quad \varepsilon_k^2 \cdot O(\varepsilon_k)$$

$$\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k^2 \left(\frac{1}{2}\frac{f''(x_k)}{f'(x_k)} + \frac{1}{f'(x_k)} O(\varepsilon_k) \right) \therefore$$

$$\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k^2} = \frac{1}{2}\frac{f''(x_k)}{f'(x_k)} + \frac{1}{f'(x_k)} O(\varepsilon_k) \xrightarrow{k \to \infty} \frac{1}{2}\frac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})} + \cancel{\frac{1}{f'(\bar{x})} \cdot 0} \quad 0$$

∎