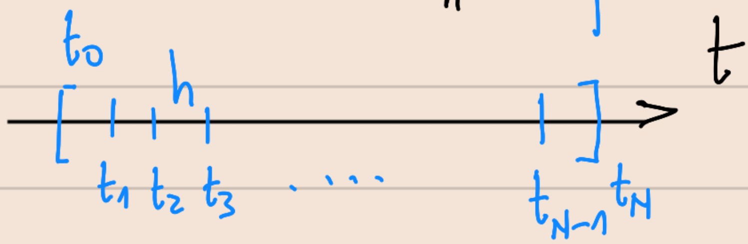
$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t, y(t)), & t \in [t_0, T] \\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$h = \frac{T - t_0}{N_h}$$



$\Rightarrow$ ~~2~~ 3 métodos : FE , BE , CN

solução da eq. no tempo $t = t_n$

$$y_n = y(t_n) \approx u_n$$

1) FE

$u_0 = y_0$ dado (condição inicial)

N

$$u_{n+1} = u_n + h f(t_n, u_n) \; ; \quad n = 0, \dots, N_h - 1$$

↳ explícito $\quad n=0 \Rightarrow u_1 = u_0 + h f(t_0, u_0)$

passado

2) BE

$u_0 = y_0$ dado

$$u_{n+1} = u_n + h f(t_{n+1}, u_{n+1}) \; ; \quad n = 0, \dots, N-1$$

↳ implícito $\quad n=0 \Rightarrow \overset{?}{u_1} = u_0 + h f(t_1, u_1)$

passado $\qquad$ presente ?

$$G\cancel{F}(u_1) = u_1 - h f(t_1, u_1) - u_0 = 0$$

$F(u_1) = u_1 - h f(t_1, u_1) - u_0 = 0$ eq. não-linear (preciso resolver)

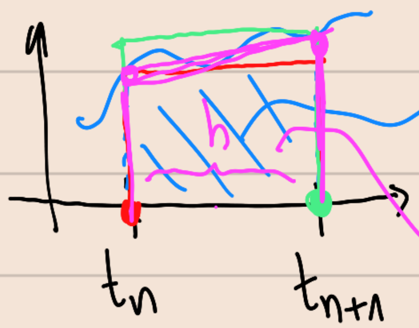
$$F(x) = x - h \underbrace{f(t_{n+1}, x)}_{f(x) \Leftarrow \text{ se for eq. autônoma}} - c = 0$$

3) Crank-Nicolson (CN) ou Trapezoidal.

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y) \Rightarrow y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds$$

$$y(t_{n+1}) = y_0 + \int_{t_0}^{t_{n+1} = t_n + h} f(s, y(s))\, ds = \underbrace{y_0 + \int_{t_0}^{t_n} \dots}_{y_n} + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dots$$

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, y(s))\, ds}$$



FE

BE

$$\frac{h}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\right)$$

$u_0 = y_0$ dado

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})\right]$$

↳ implícito. passado presente?

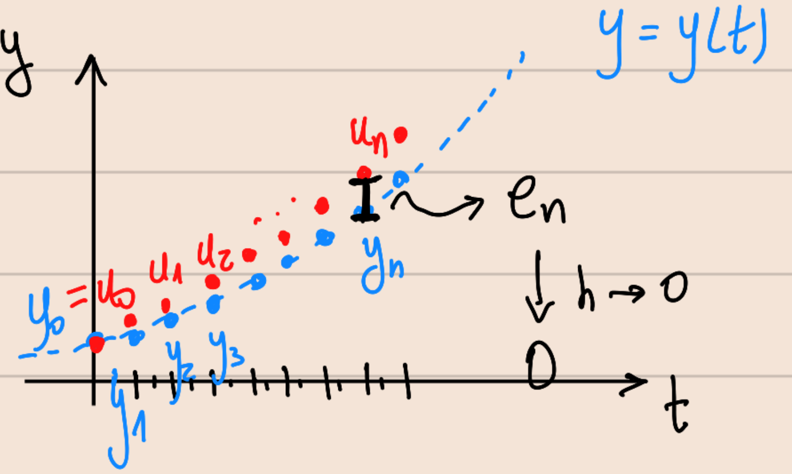
§ Análise de Convergência.

Def: Um método numérico é convergente se

$$\forall n = 0, \dots, N, \qquad \underbrace{|y_n - u_n|}_{e_n \text{ erro no instante } t = t_n} \leq C(h)$$

onde $C(h)$ é um infinitesimal com respeito a h quando h tende a 0. Se $C(h) = O(h^p)$ para algum $p > 0$ dizemos que o método converge com ordem p.

Obs: $C(h) = O(h^p) \Rightarrow C(h) \leq c h^p$ (c é const. positiva, e p é o maior inteiro que satisfaz a relação)



convergir, $\forall n = 0, \dots, N$

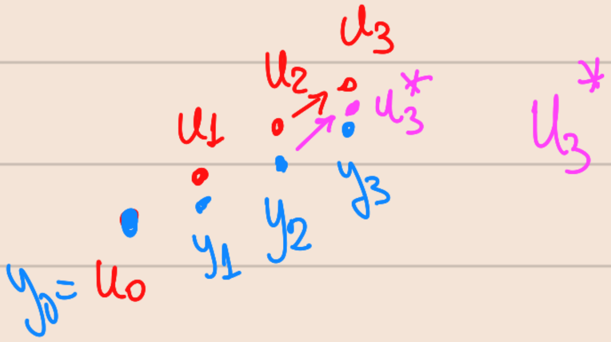
$$|e_n| \leq \underbrace{C(h)}_{\downarrow\, 0} \quad (h \to 0) \Leftrightarrow (N \to \infty)$$

§ Mostrar que FE é convergente.

vamos reescrever o erro em $t = t_n$ como

$$e_n = y_n - u_n = \underbrace{(y_n - u_n^*)}_{\mathrm{I}} + \underbrace{(u_n^* - u_n)}_{\mathrm{II}}$$

onde $u_n^* = y_{n-1} + h f(t_{n-1}, y_{n-1})$ (a solução aprox. produzida por 1 passo do FE)



(I) $y_n - u_n^*$ representa o erro produzido por um único passo de FE.

(II) $u_n^* - u_n$ representa a propagação de t_{n-1} para t_n do erro acumulado nos passos anteriores

Afirmação: O método converge se ambos tendem a zero quando $h \to 0$.

Hipótese: y tem 2ª derivada contínua.

$$y(t_n) = y(t_{n-1}+h) \overset{\text{Taylor}}{=} y(t_{n-1}) + y'(t_{n-1})\,h + \frac{y''(\xi_n)}{2}h^2$$

$\xi_n \in \,]t_{n-1}, t_n[$

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

$$y'(t_{n-1}) = f(t_{n-1}, y(t_{n-1})) = f(t_{n-1}, y_{n-1})$$

$$y_n = \underbrace{y_{n-1} + f(t_{n-1}, y_{n-1})\,h}_{u_n^*} + \frac{y''(\xi_n)}{2}h^2$$

(I) $$y_n = u_n^* + \frac{y''(\xi_n)}{2}h^2 \quad \therefore \quad \boxed{y_n - u_n^* = \frac{y''(\xi_n)}{2}h^2}$$

Def: (Local Truncation Error, LTE)

$$\tau_n(h) = \frac{y_n - u_n^*}{h}$$

Def: (Global Truncation Error / Truncation Error)
GTE TE

$$\tau(h) = \max_{n=0,\dots,N} |\tau_n(h)|$$

Hipótese: y tem 2ª derivada contínua $\Rightarrow$

$$M = \max_{t \in [t_0, T]} |y''(t)|$$

$$\Rightarrow \quad y_n - u_n^* = \frac{y''(\xi_n)}{2} h^2 \quad \therefore \quad \underbrace{\frac{y_n - u_n^*}{h}}_{\tau_n(h)} = \frac{y''(\xi_n)}{2} h$$

$$\tau_n(h) = y''(\xi_n) \frac{h}{2} \Rightarrow \boxed{\tau(h) = \frac{Mh}{2}}$$

Def: Um método é dito consistente se

$$\lim_{h \to 0} \tau(h) = 0$$

Mais ainda, dizemos que é consistente de ordem p se $\tau(h) = O(h^p)$ para algum inteiro $p \geq 1$.

Obs: Como $\tau(h) = \frac{Mh}{2}$ para FE, mostramos que FE é consistente de ordem 1.

Vamos agora para II, i.e., $u_n^* - u_n$.

$$u_n^* - u_n = \left(y_{n-1} + h f(t_{n-1}, y_{n-1})\right) - \left(u_{n-1} + h f(t_{n-1}, u_{n-1})\right)$$

$$= \underbrace{(y_{n-1} - u_{n-1})}_{e_{n-1}} + h\left[f(t_{n-1}, y_{n-1}) - f(t_{n-1}, u_{n-1})\right] \quad \bigstar$$

<u>Obs:</u> Para ter existência e unicidade (pelo menos local) de uma EDO nós pedimos que o lado direito, ou seja, $f = f(t,x)$ seja Lipschitz contínua no 2º argumento

$$\exists L > 0 \text{ tal que } |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$$

$$\bigstar \quad u_n^* - u_n = e_{n-1} + h\left[f(t_{n-1}, y_{n-1}) - f(t_{n-1}, u_{n-1})\right]$$

$$|u_n^* - u_n| \leq |e_{n-1}| + h\left|f(t_{n-1}, y_{n-1}) - f(t_{n-1}, u_{n-1})\right|$$

$$\overset{\text{Lipschitz}}{\leq} |e_{n-1}| + hL\underbrace{|y_{n-1} - u_{n-1}|}_{|e_{n-1}|} =$$

$$\boxed{|u_n^* - u_n| \leq (1 + hL)|e_{n-1}|}$$

$$e_0 = y_0 - u_0 = 0$$

$$e_n = y_n - u_n = (y_n - u_n^*) + (u_n^* - u_n)$$

$$|e_n| \leq |y_n - u_n^*| + |u_n^* - u_n|$$

$$0: \quad |e_n| \leq h\,|\tau_n(h)| + (1+hL)\,|e_{n-1}|$$

$$1: \quad |e_{n-1}| \leq h\,|\tau_{n-1}(h)| + (1+hL)\,|e_{n-2}|$$

$$2: \quad |e_{n-2}| \leq h\,|\tau_{n-2}(h)| + (1+hL)\,|e_{n-3}|$$

$$\vdots \qquad |e_1| = \qquad |\tau_1(h)| \qquad\qquad |e_0| = 0$$

$$n-1: \quad |e_{n-(n-1)}| \leq h\,|\tau_{n-(n-1)}(h)| + \cancel{(1+hL)\,|e_{n-n}|} \to 0$$

$$|e_1| \leq h\,|\tau_1(h)|$$

$0 \leftarrow 1$:

$$|e_n| \leq h\,|\tau_n(h)| + (1+hL)\,|e_{n-1}|$$
$$\leq h\,|\tau_n(h)| + (1+hL)\left[h\,|\tau_{n-1}(h)| + (1+hL)\,|e_{n-2}|\right]$$
$$\leq h\,|\tau_n(h)| + (1+hL)\,h\,\tau_{n-1}(h) + (1+hL)^2\,|e_{n-2}|$$

$0 \leftarrow 1 \leftarrow 2$:

$$|e_n| \leq h\,|\tau_n(h)| + (1+hL)\,h\,\tau_{n-1}(h) + (1+hL)^2\,[$$

$$\rightarrow h|\tilde{\tau}_{n-2}(h)| + (1+hL)|e_{n-3}|\,]$$

$$\leq \underline{h|\tau_n(h)|} + (1+hL)\underline{h|\tilde{\tau}_{n-1}(h)|} + (1+hL)^2 h\underline{|\tilde{\tau}_{n-2}(h)|} +$$

$$(1+hL)^3|e_{n-3}|$$

$$[\ldots] \quad \ldots \quad (1+hL)^{n-1}|e_{n-(n-1)}| = (1+hL)^{n-1}|e_1| \leq$$

$$(1+hL)^{n-1}h|\tilde{\tau}_1(h)|$$

$$\tau(h) = \max_{n=0,\ldots,N} |\tau_n(h)|$$

$$|e_n| \leq \left[1 + (1+hL) + (1+hL)^2 + \ldots + (1+hL)^{n-1}\right] h\,\tau(h)$$

$$\leq \frac{(1+hL)^n - 1}{\cancel{h}L}\cancel{h}\tau(h) \leq \frac{e^{nhL}-1}{L}\tau(h) =$$

$1 + hL \leq e^{hL}$

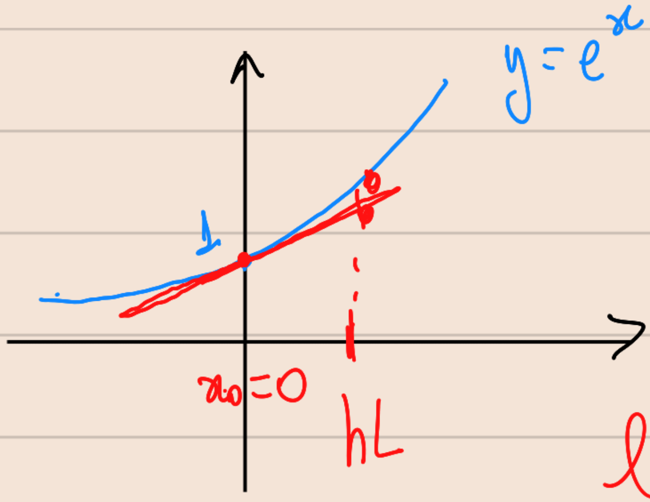
$nh = t_n - t_0$

$$\frac{e^{L(t_n-t_0)} - 1}{L}\tau(h)$$

FE: $\tau(h) = \frac{Mh}{2} \leftarrow$ TE order 1

$$|e_n| \leq \underbrace{\frac{e^{L(t_n-t_0)}-1}{L}\frac{M}{2}}_{C} h = Ch$$

FE convergente de orden 1.



$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

$y - 1 = \underset{1}{e^0}(x - 0)$

$l(x)\ y = x + 1$

$l(hL) \leq e^{hL}$

$1 + hL \leq e^{hL}$ ♥