Teorema de Taylor (com resto de Lagrange)

Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ n vezes derivável no intervalo aberto $]a,b[$, com $f^{(n-1)}$ contínua em $[a,b]$. Temos que

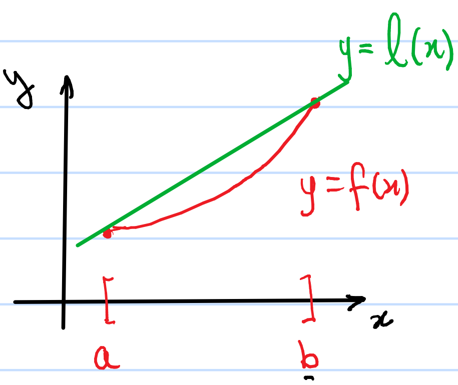
$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\dots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}+R_n$$

onde o resto é

$$R_n=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$$

com $c\in\,]a,b[$.

Observação antes da demonstração: O teorema acima é uma generalização do TVM para $n>1$, portanto vale recordarmos a demonstração do TVM (caso $n=1$)



INTERPRETAÇÃO

Para $n=1$, temos $f(b)=f(a)+R_1$, onde $R_1=f'(c)(b-a)$. Definamos então a função $\varphi(x)=f(b)-f(x)-K(b-x)$, com K escolhido de modo que $\varphi(a)=0$, pois note que já temos $\varphi(b)=0$.

Note também que $0=\varphi(a)=f(b)-f(a)-K(b-a)$ logo $K=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, e podemos pensar em φ como sendo definida por $\varphi(x)=\ell(x)-f(x)$, com $\ell(x)=\left[\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right](x-b)+f(b)$ (interpretação acima)

Agora φ é contínua em $[a,b]$, dif. em $]a,b[$ e satisfaz $\varphi(a)=\varphi(b)=0$, logo pelo Teorema de Rolle existe $c\in\,]a,b[$ tal que $\varphi'(c)=0$. Assim,

$$\varphi'(x)=-f'(x)+K\ \therefore\ 0=\varphi'(c)=-f'(c)+K\ \therefore\ K=f'(c).$$

<u>Demonstração</u>: Tentemos a mesma abordagem acima

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + R_n$$

com $R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$

Definamos φ como

$$\varphi(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 - \frac{f^{(3)}(x)}{3!}(b-x)^3 - \dots - \frac{K}{n!}(b-x)^n$$

com K definido de tal modo que $\varphi(a) = 0$, pois já temos $\varphi(b) = 0$. Agora φ é contínua em $[a,b]$, diferenciável em $]a,b[$ e satisfaz $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, assim pelo Teorema de Rolle, temos que existe $c \in]a,b[$ tal que $\varphi'(c) = 0$.

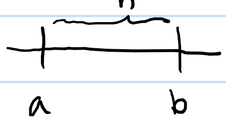
Fazendo as contas (exercício), chegamos que

$$\varphi'(x) = \frac{K - f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1},$$

logo $0 = \varphi'(c) = \frac{K - f^{(n)}(c)}{(n-1)!}\underbrace{(b-c)^{n-1}}_{\neq 0} \Rightarrow K - f^{(n)}(c) = 0 \therefore$

$$K = f^{(n)}(c) \qquad \blacksquare$$

<u>Observação</u>: Outra forma de escrever a fórmula é tomar



$\Rightarrow b - a = h \therefore b = a + h$

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}h^n$$

ou também é comum aparecer trocando a por x_0 e b por x.

<u>Observação 2</u>: Quando $f \in C^\infty(a,b)$ podemos considerar a série de Taylor (soma infinita)

Exemplo: $\operatorname{sen}(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots$

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots$$

Então para x próximo de 0, podemos escrever as aprox. (truncamentos)

$$\operatorname{sen}(x) \approx x \quad \text{ou} \quad \operatorname{sen}(x) \approx x - \frac{1}{3!}x^3$$

mas podemos denotar a ordem dessa aproximação com notação O (ôzão)

$$\operatorname{sen}(x) = x + O(x^3) \quad \text{ou} \quad \operatorname{sen}(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + O(x^5)$$

Portanto na série de Taylor podemos escrever, por exemplo

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + O(h^3)$$

Integração Numérica

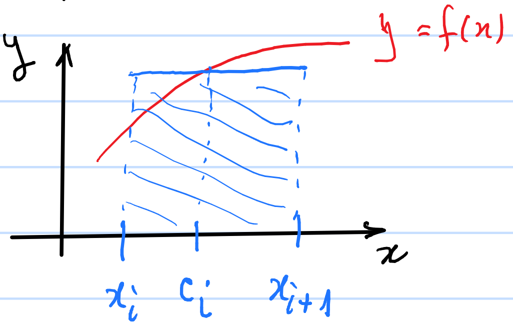
Lembremos que estamos nos baseando na decomposição

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx + \dots + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)\,dx$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

e tentando diferentes aproximações para os termos $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$

Portanto nossa análise partirá dos termos (localizados) $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$.

Aproximando f em $[x_i, x_{i+1}]$ por constantes



$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx f(c_i)(x_{i+1}-x_i) \quad \text{com} \quad \blacktriangle$$

$$x_i = a + (i-1)h, \quad \text{e} \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Qual o erro que estamos cometendo em $\blacktriangle$?

Começamos com a série de Taylor centrada em $x = c_i$:

$$f(x) = f(c_i) + f'(c_i)(x-c_i) + \frac{1}{2}f''(c_i)(x-c_i)^2 + \cdots$$

Com isso,

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[f(c_i) + f'(c_i)(x-c_i) + \frac{1}{2}f''(c_i)(x-c_i)^2 + \cdots \right] dx$$

$$= f(c_i)h + \underbrace{\overbrace{\boxed{z_i f'(c_i)\, h}}^{(\mathrm{I})} + \overbrace{\boxed{\frac{1}{24} f''(c_i)\, h\left(12 z_i^2 + h^2\right)}}^{(\mathrm{II})} + \cdots}_{\text{ERRO}}$$

com $z_i = x_i + \dfrac{h}{2} - c_i$

Farei a conta para (I), a conta para (II) fica como exercício:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(c_i)(x-c_i)\,dx = f'(c_i)\left[\frac{(x-c_i)^2}{2}\right]_{x_i}^{x_{i+1}} = f'(c_i)\frac{1}{2}\left[(x_{i+1}-c_i)^2 - (x_i-c_i)^2\right]$$

usando o produto notável $b^2 - a^2 = (b+a)(b-a)$, podemos escrever

$$= f'(c_i)\frac{1}{2}\left[(x_{i+1} - c_i + x_i - c_i)\cdot(x_{i+1} \overbrace{- \cancel{c_i} - x_i + \cancel{c_i}}^{-x_i + x_i})\right] =$$

$$= f'(c_i)\frac{1}{2}\left[(\underbrace{x_{i+1} - x_i}_{=h} + 2x_i - 2c_i)\cdot h\right] = f'(c_i)\,h\left(x_i + \frac{h}{2} - c_i\right)$$

$$= f'(c_i)\,h\,z_i$$

O erro (local) será portanto,

$$E_i = h z_i f'(c_i) + \frac{1}{24} h (12 z_i^2 + h^2) f''(c_i) + \dots$$

com $z_i = x_i + \frac{h}{2} - c_i$

Portanto se tomarmos $c_i = x_i$ (extremo esquerdo) teremos $z_i = h/2$ e $E_i = O(h^2)$, igualmente para $c_i = x_{i+1}$, pois $z_i = -h/2$, e também teremos $E_i = O(h^2)$. Agora tomando $c_i = x_i + h/2$, teremos $z_i = 0$, e ficamos com

$$E_i = \frac{1}{24} h^3 f''(c_i) + \dots \Rightarrow E_i = O(h^3)$$

BEM MELHOR!

ERRO DA REGRA DO PONTO MÉDIO (COMPOSTA).

Concluímos portanto que (localmente)

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) h + O(h^3).$$

Assim sendo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\underset{=a}{x_1}}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx + \dots + \int_{x_n}^{\overset{=b}{x_{n+1}}} f(x)\,dx$$

$$= \left[f\left(x_1 + \tfrac{h}{2}\right)h + O(h^3)\right] + \left[f\left(x_2 + \tfrac{h}{2}\right)h + O(h^3)\right] + \dots + \left[f\left(x_n + \tfrac{h}{2}\right)h + O(h^3)\right]$$

$$= h\left[f\left(x_1 + \tfrac{h}{2}\right) + f\left(x_2 + \tfrac{h}{2}\right) + \dots + f\left(x_n + \tfrac{h}{2}\right)\right] + n\,O(h^3)$$

$$= I_{mid} + \underbrace{\frac{(b-a)}{h} \cdot O(h^3)}$$

$$n = \frac{b-a}{h}$$

$$= I_{mid} + O(h^2)$$

Podemos refazer as contas com fórmula de Taylor com resto. Com efeito

$$f(x) = f(c_i) + f'(c_i)(x-c_i) + \frac{1}{2} f''(\eta_x)(x-c_i)^2 \quad \text{com } \eta_x \text{ em } x \text{ e } c_i$$

$\eta_x = \eta(x)$

Colocando na integral entre x_i e x_{i+1} teremos

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[f(c_i) + f'(c_i)(x-c_i) + \frac{1}{2} f''(\eta_x)(x-c_i)^2 \right] dx$$

$$= f(c_i)h + h z_i f'(c_i) + \boxed{\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{2} f''(\eta(x))(x-c_i)^2\,dx} = E_i$$

com $z_i = x_i + \frac{h}{2} - c_i$.

Tomando $c_i = x_i + \frac{h}{2}$, temos $z_i = 0$, e $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = f(x_i + \frac{h}{2})h + E_i$

Globalmente teremos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i + \tfrac{h}{2})h + E_i \right] =$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(x_i + \tfrac{h}{2})h}_{I_{mid}} + \sum_{i=1}^{n} E_i$$

precisamos agora estimar essa soma dos erros locais, lembrando que são dados por uma expressão integral.

Então,

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - I_{mid} \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} E_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |E_i|$$

a hipótese $f \in C^2(a,b)$ implica que f'' é contínua em $[a,b]$ ⊛

$$|E_i| = \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{2} f''(\eta(x))(x-c_i)^2\,dx \right| \leq \frac{1}{2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \boxed{|f''(\eta(x))|}\,(x-c_i)^2\,dx$$

⊛ e portanto f'' assume seu máximo em $[a,b]$, logo podemos definir

$\|f''\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$, que nos fornece um limite superior para o termo $|f''(\eta(x))|$, isto é, $|f''(\eta(x))| \leq \|f''\|_\infty, \forall x$

Cont.

$$|E_i| \leq \frac{1}{2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f''(\eta(x))|\,(x-c_i)^2\,dx \leq \frac{1}{2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \underbrace{\|f\|_\infty}_{\text{constante, logo sai da integral}} (x-c_i)^2\,dx$$

$$|E_i| \leq \frac{1}{2}\|f''\|_\infty \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x-c_i)^2\,dx = \frac{1}{2}\|f''\|_\infty \left.\frac{(x-c_i)^3}{3}\right]_{x=x_i}^{x=x_{i+1}}, \quad \text{com } c_i = x_i + \frac{h}{2}$$

$$|E_i| \leq \frac{1}{6}\|f''\|_\infty \left[\left(x_{i+1} - x_i - \frac{h}{2}\right)^3 - \left(x_i - x_i - \frac{h}{2}\right)^3\right] =$$

$$\frac{1}{6}\|f''\|_\infty \left[\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8}\right] = \frac{1}{24}\|f''\|_\infty h^3$$

Retomando,

$$n = \frac{b-a}{h}$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - I_{mid}\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{24}\|f''\|_\infty h^3 = \frac{1}{24}\|f''\|_\infty h^3 \cdot n$$

$$= \frac{(b-a)}{24}\|f''\|_\infty \cdot h^2$$

Dessa forma acabamos de demonstrar um resultado que podemos enunciar como um teorema:

<u>Teorema</u>: Se $f \in C^2(a,b)$, então a regra do ponto médio composta satisfaz

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - I_{mid}\right| \leq \frac{(b-a)}{24}\|f''\|_\infty h^2,$$

onde $\|f''\|_\infty = \max\limits_{x \in [a,b]} |f''(x)|$.

<u>Observação</u>: Em particular o teorema mostra que a regra do ponto médio composta integra funções afins, $f(x) = ax + b$, exatamente, uma vez que $f''(x) = 0$, logo $\|f''\|_\infty = 0$