Exercice 1 (Cours)
Donner et prouver le théorème de recherche d'extremums.

Exercice 2 (Cours)
Donner et prouver le théorème de Rolle.

Exercice 3 (Cours)
Donner et prouver le théorème donnant le lien entre signe de la dérivée et monotonie.

Exercice 4
Les fonctions suivantes sont-elles dérivables en 0 ?

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}, \quad g(x) = \begin{cases} x\sin(x)\sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}, \quad h(x) = |x|\sin(x)$$

Exercice 5
Soit f une fonction dérivable en un point $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} = f'(x_0).$$

Réciproquement, si la limite précédente existe, peut-on dire que la fonction f est dérivable en x_0 ?

Exercice 6
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable vériant $f(0) = f(1)$ avec f' continue en 0 et en 1. On définit g sur $[0,1]$ par

$$g(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ f(2x-1) & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}.$$

La fonction g est-elle continue ? Dérivable ? Si non, quelle(s) hypothèse(s) faut-il ajouter pour que ce soit le cas ?

Exercice 7
Démontrer que les courbes d'équation $y = x^2$ et $y = 1/x$ admettent une unique tangente commune.

Exercice 8
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable.

1. On suppose que f s'annule en $n+1$ points distincts de $[a,b]$. Démontrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.
2. On suppose que

$$f(a) = f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n+1)}(a) = f(b) = 0.$$

   Démontrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 9
Soit P un polynôme. Montrer que l'équation

$$P(x) = e^x$$

n'admet qu'un nombre fini de solutions.

Exercice 10 (Rolle "à l'infini")
Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ et telle que

$$f(0) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

On souhaite démontrer qu'il existe $c \in]0,+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$. Le résultat étant trivial si f est identiquement nulle, on suppose que ce n'est pas le cas et qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $f(\alpha) > 0$.

1. Démontrer qu'il existe $a \in]0,\alpha[$ et $b \in]\alpha,+\infty[$ tel que $f(a) = f(b)$.
2. Conclure.

Exercice 11
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe croissante. Montrer que f est constante ou que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 12
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Montrer que si f admet un minimum local en a, alors f admet un minimum global en a.
2. Que peut-on dire si f admet un maximum local en a ?