

## Chapitre 10 : Fonction exponentielle

### 1 Définition et première propriétés

#### 1.1 Définition

**Théorème 1 (admis)**

Il existe une unique fonction  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que

$$f' = f \quad \text{et} \quad f(0) = 1.$$

Cette fonction est appelée **fonction exponentielle** et est notée  $\exp$ .

**Remarque**

La fonction exponentielle est donc définie sur  $\mathbb{R}$  et on a  $\exp(0) = 1$ . Elle est aussi dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $\exp'(x) = \exp(x)$ .

#### 1.2 Propriétés algébriques

**Propriété 2**

Pour tout réel  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$\exp(x) \times \exp(-x) = 1 \quad \text{et} \quad \exp(x) \neq 0.$$

**Propriété 3**

Soient  $x \in \mathbb{R}$  et  $y \in \mathbb{R}$  deux réels et  $n \in \mathbb{Z}$  un entier relatif, on a alors

a. $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$	b. $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$
c. $\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$	d. $\exp(nx) = (\exp(x))^n$

#### 1.3 Notation $e^x$

**Notation 1**

Le nombre  $\exp(1)$  est noté  $e$ . On a  $e \approx 2,718$ .

**Propriété 4 (admise)**

D'après les propriétés précédentes, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on a

$$\exp(n) = \exp(n \times 1) = (\exp(1))^n = e^n.$$

Par extension, on admet que pour tout nombre réel  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$\exp(x) = e^x.$$

**Propriété 5**

On retrouve les propriétés algébriques précédentes :

$$\text{a. } e^{x+y} = e^x \times e^y \quad \text{b. } e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad \text{c. } e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \quad \text{d. } e^{nx} = (e^x)^n$$

**Application 1**

Simplifier au maximum chacune des expressions suivantes, où  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\text{a) } A = \frac{e^2 \times e^{-3}}{e^{-7}} \quad \text{b) } B = e^x (1 + 2e^{-x}) \quad \text{c) } C = \frac{e^{5x-2}}{e^{1-x}} \quad \text{d) } D = \frac{e^{2x+1}}{(e^{x-1})^4}$$

**Application 2**

Démontrer chacune des deux égalités suivantes.

$$\text{a) } \frac{4e^{2x}}{e^{2x} + 3} = \frac{4}{1 + 3e^{-2x}} \quad \text{b) } (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = 4$$

**Propriété 6**

Pour tout réel  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^x > 0$ .

*Démonstration.* Pour tout réel  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^x \neq 0$ , puis

$$e^x = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 \geq 0,$$

donc pour tout réel  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $e^x > 0$ . □

## 2 Étude de la fonction exponentielle

### 2.1 Variations et représentation graphique

**Propriété 7**

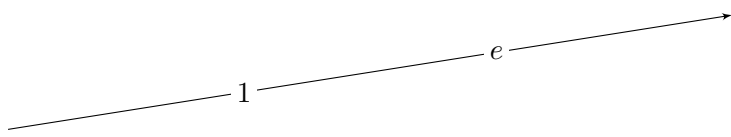
La fonction exponentielle est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$\exp'(x) = \exp(x).$$

*Démonstration.* Cela fait partie de la définition de la fonction exponentielle. □

**Propriété 8**

La fonction exponentielle est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

$x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp(x)$			+	
$\exp$				

*Démonstration.* On sait que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\exp'(x) = \exp(x) > 0$ , donc la fonction  $\exp$  est strictement croissante, d'après les propriétés sur la dérivation. □

**Propriété 9**

La courbe représentative de la fonction exponentielle est donnée ci-contre. On retrouve bien

- qu'elle est strictement positive ;
- strictement croissante ;
- $\exp(0) = 1$  ;
- $\exp(1) = e \approx 2,718$ .

