

Chapitre 9 : Suites arithmétiques et géométriques

1 Suites arithmétiques

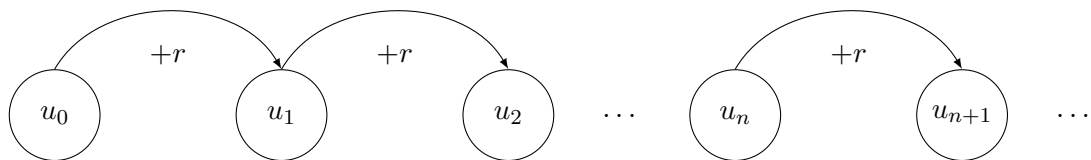
1.1 Définition

Définition 1 (Suite arithmétique)

On dit que la suite (u_n) est **arithmétique** s'il existe un réel r tel que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Le nombre r est appelé la **raison** de la suite.



Remarque

- Pour passer d'un terme à l'autre, on ajoute la raison r , on a donc $\forall n \in \mathbb{N}, r = u_{n+1} - u_n$.
- La raison r ne dépend pas de n .

Application 1

Pour chacune des suites suivantes, déterminer si elles sont arithmétiques ou non. Si oui, déterminer la raison et le premier terme.

1. La suite (a_n) définie sur \mathbb{N} par $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = a_n - 8$.
2. La suite (b_n) définie sur \mathbb{N} par $b_n = n^2 + 2n + 4$.
3. La suite (c_n) définie sur \mathbb{N} par $c_n = 3n + 1$.

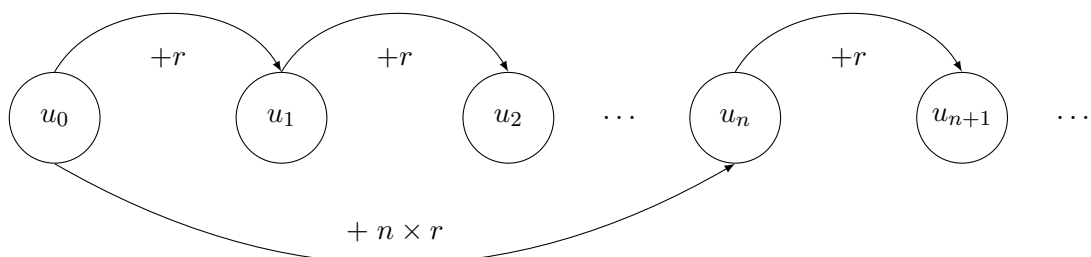
1.2 Expression

Propriété 1

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 . Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 + n \times r$.

Plus généralement, on a

$$\forall p, n \in \mathbb{N}, u_n = u_p + (n - p) \times r.$$



Application 2

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 0,5 et de premier terme $u_0 = 2$.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
2. Calculer u_1 et u_2 .
3. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n , pour tout entier naturel n .
4. En déduire la valeur de u_{50} .
5. Déterminer la plus petite valeur de n telle que $u_n \geq 8$.

1.3 Représentation graphique**Propriété 2**

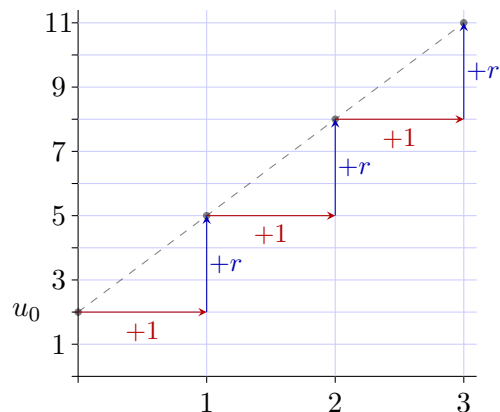
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 . Les points de sa représentation graphique se situent sur la droite d'équation $y = r \times x + u_0$. On parle d'évolution linéaire.

Exemple 3

Soit u la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = 3$. On a donc

$$u_n = 2 + 3n,$$

et les termes de la suite sont sur la droite d'équation $y = 3x + 2$.

**1.4 Sens de variation****Propriété 3**

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

- Si $r > 0$, alors la suite est strictement **croissante**.
- Si $r < 0$, alors la suite est strictement **décroissante**.
- Si $r = 0$, alors la suite est **constante**.

Application 4

Soit u la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 5$. Soit également w la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $w_n = 8 - 7n$. Déterminer la nature de chaque suite, puis en déduire son sens de variation.

1.5 Suite auxiliaire et suite arithmétique**Application 5**

Soit la suite numérique (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , par $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2+3u_n}$. On désigne par (w_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $w_n = \frac{2}{u_n}$.

1. Démontrer que la suite w est une suite arithmétique dont on précisera la raison.
2. En déduire l'expression de w , puis celle de (u_n) en fonction de n .

2 Suites géométriques

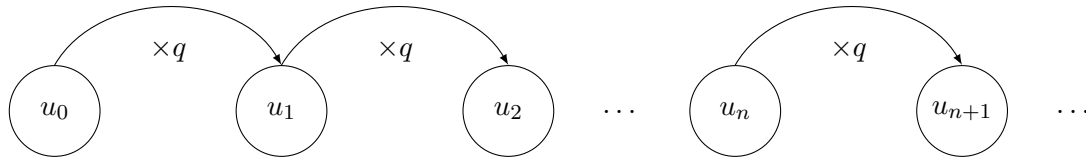
2.1 Définition

Définition 2 (Suites géométriques)

On dit qu'une suite (u_n) est **géométrique** s'il existe un réel $q \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = q \times u_n.$$

Le nombre q est appelé la **raison** de la suite.



Remarque

- Pour passer d'un terme à l'autre, on multiplie par la raison q , on a donc $\forall n \in \mathbb{N}, q = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.
- La raison q ne dépend pas de n .

Application 6

Pour chacune des suites suivantes, dire si elles sont géométriques ou non. Si oui, déterminer la raison et le premier terme.

1. La suite (a_n) définie sur \mathbb{N} par $a_0 = 12$ et $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$.
2. La suite (b_n) définie sur \mathbb{N} par $b_n = \frac{7}{2^n}$.
3. La suite (c_n) définie sur \mathbb{N} par $c_n = \frac{3n+2}{n+1}$.

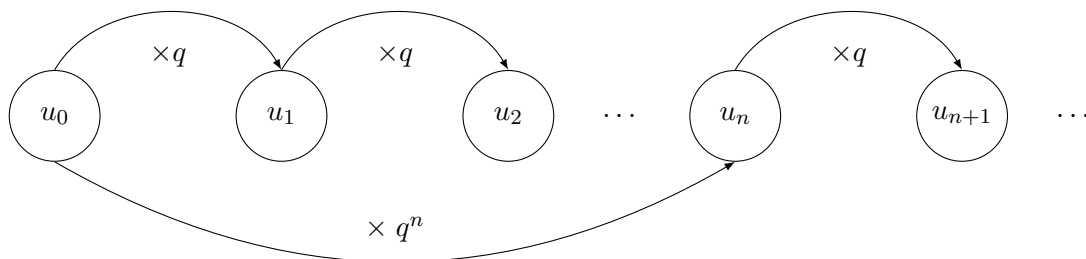
2.2 Expression

Propriété 4

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 . Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 \times q^n$.

Plus généralement, on a

$$\forall p, n \in \mathbb{N}, u_n = u_p \times q^{n-p}.$$



Application 7

Une ville comptait 10 000 habitants en 2018. Chaque année, le nombre d'habitants augmente de 8% par rapport à l'année précédente. On note u_n le nombre d'habitants en 2018 + n .

1. Donner les valeurs de u_0 et u_1 .
2. Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique, et préciser la raison.
3. Exprimer u_n en fonction de n .

4. Quel sera le nombre d'habitants de cette ville en 2032 ?
5. En quelle année le nombre d'habitants de la ville dépassera-t-il 25 000 habitants ?

2.3 Représentation graphique

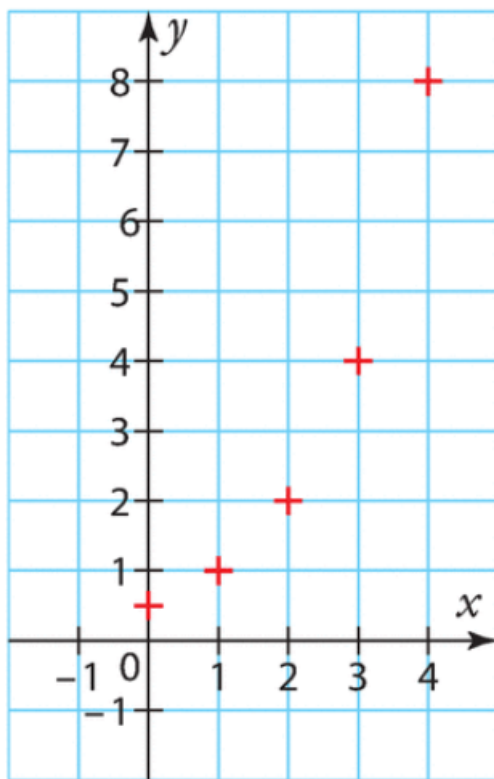
Propriété 5

Pour les représentations graphiques des suites géométriques, on parle d'**évolution exponentielle**.

Exemple 8

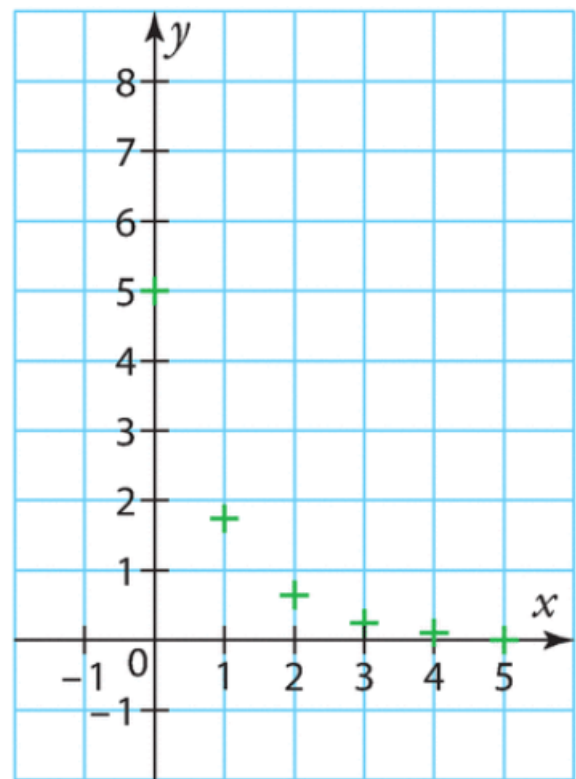
Soit u la suite géométrique de premier terme $u_0 = \frac{1}{2}$ et de raison $q = 2$. On a donc

$$u_n = \frac{1}{2} \times 2^n.$$



Soit u la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = \frac{1}{3}$. On a donc

$$u_n = 5 \times \frac{1}{3^n}.$$



2.4 Sens de variation

Propriété 6

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q dont les termes sont strictement positifs.

- Si $q > 1$, alors la suite est strictement **croissante**.
- Si $q = 1$, alors la suite est **constante**.
- Si $0 < q < 1$, alors la suite est **décroissante**.

Remarque

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q .

- Si $q > 0$ mais que les termes de la suite (u_n) sont strictement négatifs, les sens de variations sont inversés par rapport à la propriété ci-dessus.

- Si $q = 0$, la suite est presque toujours nulle, excepté éventuellement pour u_0 .
- Si $q < 0$, alors la suite n'est **pas monotone**.

2.5 Suite auxiliaire et suite arithmético-géométrique

Application 9

Un youtubeur compte 75 abonnés le 1^{er} Janvier 2019. Il remarque que, chaque mois, il en perd 40% et 100 nouvelles personnes le suivent. On souhaite déterminer l'évolution de son nombre d'abonnés. On modélise la situation par une suite (u_n) , où u_n est le nombre d'abonnés n mois après Janvier 2019.

1. Calculer le nombre d'abonnés au 1^{er} Février 2019.
2. Justifier que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,6u_n + 100$.
3. À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre de mois nécessaires pour dépasser les 230 abonnés.
4. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on note (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 250$.
 - (a) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n . En déduire la nature de la suite (v_n) .
 - (b) Exprimer v_n en fonction de n , puis u_n en fonction de n .
 - (c) Déterminer le nombre d'abonnés au 1^{er} Décembre 2019.

3 Calculs de sommes

3.1 Propriétés générales

3.2 Somme des termes d'une suite arithmétique

3.3 Somme des termes d'une suite géométrique