

# 二阶锥松弛在配电网最优潮流计算中的应用

陈怀毅<sup>1</sup>, 胡英坤<sup>2</sup>, 杨毅<sup>1</sup>, 范舟<sup>1</sup>

(1. 国网江苏省电力工程咨询有限公司 江苏 南京 210000; 2. 国网徐州供电公司 江苏 徐州 221000)

**摘要:** 最优潮流计算是电网规划、优化运行的重要基础。首先建立了配电网全天有功损耗最小化的最优潮流计算模型; 其次结合辐射型配电网潮流特点建立支路潮流约束, 并考虑配电网中的可控单元, 包括分布式电源和离散、连续无功补偿装置, 建立其出力约束, 该模型为非凸非线性模型; 然后通过二阶锥松弛将该模型转化为包含整数变量的二阶锥规划模型, 采用YALMIP建模工具包以及MOSEK商业求解器对所建模型进行求解; 最后通过对IEEE 33节点设计算例, 验证了所用方法的有效性。

**关键词:** 二阶锥规划; 最优潮流; 配电网; 有功损耗

## Application of second order cone relaxation in optimal power flow calculation of distribution network

CHEN Huaiyi<sup>1</sup>, HU Yingkun<sup>2</sup>, YANG Yi<sup>1</sup>, FAN Zhou<sup>1</sup>

(1. State grid Jiangsu Electric Power Engineering Consulting Co., Ltd., Nanjing 210000, China; 2. State Grid Xuzhou Power Supply Company, Xuzhou 221000, China)

**Abstract:** Optimal power flow calculation is an important basis for distribution network planning and operation. Optimal power flow calculation model for minimization of all-day active power loss in distribution network is firstly established, then, based on the characteristics of the radiant distribution network, the branch flow constraints are established, the controllable unit in the distribution network are also considered, including distributed generation and discrete, continuous reactive power compensation device, their output constraints are also established. This model is non-convex nonlinear, it is converted into a second order cone programming model with integer variables by second order conic relaxation, YALMIP modelling toolkit with commercial solver MOSEK is used to solve the model. Finally, The case study of the IEEE 33-bus distribution system show that the proposed method is effective.

**Key words:** second order cone programming; optimal power flow; distribution network; active power loss

## 0 引言

配电网最优潮流Optimal Power Flow, OPF)问题是指在满足一定约束条件的情况下, 通过控制配电网中的可控变量, 使配电网达到优化运行的目的。OPF问题自Carpentier

于1962年被提出后<sup>[1]</sup>, 得到了广泛研究。由于OPF问题约束条件的特点, 导致其为难以求解的非凸规划问题。目前OPF求解方法主要分为经典数学规划算法和智能优化算法两种<sup>[2]</sup>。

由于OPF问题的非凸性, 文献[3]提出经典规划算法, 比如牛顿法、内点法都无法保证求

解最优性。直流潮流法<sup>[4]</sup>将交流潮流约束近似为直流潮流约束，在处理输电网最优潮流问题上得到广泛应用，然而这种方法却不适用于电阻较高的配电网。粒子群算法<sup>[5]</sup>和遗传算法<sup>[6]</sup>等智能算法在最优潮流问题中得到广泛应用，智能优化算法在处理最优潮流问题时不受模型非凸性的限制，它通过设置一定的种群和迭代次数在可行域内寻找最优解，但是其迭代过程具有随机性，可能会陷于局部最优解，且反复迭代导致计算耗时，求解效率较低。

近年来，很多学者不断探索高效求解OPF问题的方法，随着研究的不断深入，二阶锥松弛（Second Order Cone Relaxation, SOCR）技术被逐步运用于求解OPF问题。文献[7]建立了以支路潮流计算为基础的OPF模型，针对OPF中的非凸性约束，采用SOCR技术将其松弛为二阶锥约束，整个OPF模型则被转化为二阶锥规划（Second Order Cone Programming, SOCP）问题，对其求解可以得到全局最优解。文献[8]在主动配电网最优潮流计算中采取了SOCR技术处理非凸性约束，将优化模型转化为SOCP问题，得到了很好的求解效果，并对产生的松弛误差进行分析，结果表明松弛误差满足计算准确度。

上述研究表明SOCR在处理OPF问题上具有很强的优越性。本文首先以配电网全天有功损耗最小化为目标建立最优潮流模型；其次基于支路潮流模型建立约束条件，约束条件中同时考虑了配电网中包含的分布式电源和离散、连续无功补偿装置出力约束以及节点电压范围约束。利用SOCR将模型转化，得到包含整数变量的二阶锥规划（Mixed Integer Second Order Cone Programming, MISOCP）问题，该问题可以通过现有的成熟商业求解器进行求解；最后基于Matlab平台，利用YALMIP建模工具包调用MOSEK求解器进行求解，针对IEEE 33节点设计算例，仿真验证了SOCR在最优潮流计算中应用的有效性，通过与粒子群算法对比，本文采用的方法更具优越性。

## 1 最优潮流计算模型

### 1.1 目标函数

本文以一天为一个优化周期，建立全天配电网有功损耗最小的最优潮流目标函数，即

$$\min P_{\text{loss}} = \sum_{t=1}^T \sum_{ij \in E} I_{ij,t}^2 r_{ij} \quad (1)$$

式中， $P_{\text{loss}}$ 为配电网全天各支路有功损耗之和； $ij$ 为节点 $i$ 和节点 $j$ 连接的支路； $E$ 为配电网支路集合； $T$ 为全天时段总数； $r_{ij}$ 为支路 $ij$ 的电阻； $t$ 为时段标志； $I_{ij,t}$ 为在 $t$ 时段内支路 $ij$ 的电流。

### 1.2 约束条件

随着主动配电网的发展，配电网中越来越多地接入可控单元，合理调控这些可控单元，可以达到配电网优化运行的目的。本文主要考虑了配电网中包含的分布式电源、离散无功补偿装置和连续无功补偿装置，下面将从配电网潮流、可控单元出力等方面建立最优潮流约束条件。

#### (1) 支路潮流约束

本文以辐射型配电网为研究对象，选取其中一条支路在 $t$ 时刻下的运行状态建立支路潮流模型，如图1所示。

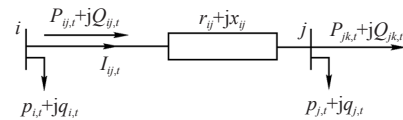


图1 支路潮流模型

Fig. 1 Branch power flow model

该条支路潮流应满足的约束条件为

$$U_{j,t}^2 = U_{i,t}^2 - 2(r_{ij}P_{ij,t} + x_{ij}Q_{ij,t}) + (r_{ij}^2 + x_{ij}^2)I_{ij,t}^2 \quad (2)$$

$$p_{j,t} = P_{ij,t} - r_{ij}I_{ij,t}^2 - \sum_{k:j \rightarrow k} P_{jk,t} \quad (3)$$

$$q_{j,t} = Q_{ij,t} - x_{ij}I_{ij,t}^2 - \sum_{k:j \rightarrow k} Q_{jk,t} \quad (4)$$

$$I_{ij,t}^2 = \frac{P_{ij,t}^2 + Q_{ij,t}^2}{U_{i,t}^2} \quad (5)$$

式中， $i$ 、 $j$ 为节点编号； $U_{i,t}$ 、 $U_{j,t}$ 分别为节点 $i$ 、 $j$ 的电压； $p_{i,t}$ 、 $p_{j,t}$ 分别为节点 $i$ 、 $j$ 的有功注入功率； $q_{i,t}$ 、 $q_{j,t}$ 分别为节点 $i$ 、 $j$ 无功注入功

率； $P_{ij,t}$ 和 $Q_{ij,t}$ 分别为支路 $ij$ 的首端有功无功功率； $r_{ij}+jx_{ij}$ 为支路 $ij$ 的阻抗； $P_{jk,t}$ 和 $Q_{jk,t}$ 分别为支路 $jk$ 的首端有功无功功率； $k:j \rightarrow k$ 为以节点 $j$ 为父节点的子节点集合。

### (2) 分布式电源运行约束

若节点 $i$ 接入分布式电源，则其出力范围应满足式的约束为

$$0 \leq P_{i,t}^{\text{DG}} \leq P_{i,t,\max}^{\text{DG}} \quad (6)$$

式中， $P_{i,t}^{\text{DG}}$ 为安装于节点 $i$ 处分布式电源在 $t$ 时段内的实际出力； $P_{i,t,\max}^{\text{DG}}$ 为 $t$ 时段内的分布式电源允许出力最大值。本文假设分布式电源出力连续可调。

### (3) 离散无功补偿装置约束

若接入分组投切电容器组(CB)，其无功补偿量为离散变量，因此CB运行应满足的约束为

$$Q_{i,t}^{\text{cb}} = n_{i,t}^{\text{cb}} Q_{\text{one}}^{\text{cb}} \quad (7)$$

$$0 \leq n_{i,t}^{\text{cb}} \leq n_{i,\max}^{\text{cb}} \quad (8)$$

$$n_{i,t}^{\text{cb}} \in Z \quad (9)$$

式中， $Q_{i,t}^{\text{cb}}$ 为在 $t$ 时段内节点 $i$ 处电容器无功补偿容量； $n_{i,t}^{\text{cb}}$ 为投入电容器组数，该值取整数； $Q_{\text{one}}^{\text{cb}}$ 为每组电容器的无功补偿容量； $n_{i,\max}^{\text{cb}}$ 为最大投入组数； $Z$ 为整数集合。

### (4) 连续无功补偿装置约束

若接入静态无功补偿装置(SVC)，其无功补偿量连续可调，因此SVC运行约束为

$$Q_{i,\min}^{\text{svc}} \leq Q_{i,t}^{\text{svc}} \leq Q_{i,\max}^{\text{svc}} \quad (10)$$

式中， $Q_{i,t}^{\text{svc}}$ 为在 $t$ 时段节点 $i$ 处SVC装置的无功补偿量； $Q_{i,\min}^{\text{svc}}$ 、 $Q_{i,\max}^{\text{svc}}$ 分别为SVC装置无功补偿量的最小值与最大值。

### (5) 节点电压约束

配电网负荷具有时序变化的特性，若加入同样具有时序特性的分布式电源和无功补偿装置，系统运行状态势必更加复杂。为了保证系统节点电压在各时段内都能运行在合理范围内，设置节点电压约束为

$$U_{\min} \leq U_{i,t} \leq U_{\max} \quad (11)$$

式中， $U_{\max}$ 、 $U_{\min}$ 分别为节点电压运行上限与下限。

## 2 基于二阶锥松弛的模型转换

可以看出，上述约束条件中包含二次项以及整数项，该最优潮流问题属于混合整数非线性规划问题，常规算法和智能优化算法的求解效果不佳。因此，本文利用SOCR将模型转换成可以高效求解的标准二阶锥规划问题。

首先通过式(12)、式(13)引入变量，即

$$\alpha_{i,t} = U_{i,t}^2 \quad (12)$$

$$\beta_{ij,t} = I_{ij,t}^2 \quad (13)$$

式中， $\alpha_{i,t}$ 和 $\beta_{ij,t}$ 分别为 $t$ 时段内节点 $i$ 电压的二次方和支路 $ij$ 电流的二次方。

最优潮流目标函数式和约束条件式(2)~式(5)和式(11)可以转化为

$$\min P_{\text{loss}} = \sum_{t=1}^T \sum_{ij \in E} \beta_{ij,t} r_{ij} \quad (14)$$

$$\alpha_{j,t} = \alpha_{i,t} - 2(r_{ij} P_{ij,t} + x_{ij} Q_{ij,t}) + (r_{ij}^2 + x_{ij}^2) \beta_{ij,t} \quad (15)$$

$$P_{j,t} = P_{ij,t} - r_{ij} \beta_{ij,t} - \sum_{k:j \rightarrow k} P_{jk,t} \beta_{ij,t} \quad (16)$$

$$q_{j,t} = Q_{ij,t} - x_{ij} \beta_{ij,t} - \sum_{k:j \rightarrow k} Q_{jk,t} \beta_{ij,t} \quad (17)$$

$$\beta_{ij,t} = \frac{P_{ij,t}^2 + Q_{ij,t}^2}{\alpha_{i,t}} \quad (18)$$

$$U_{i,t,\min}^2 \leq \beta_{i,t} \leq U_{i,t,\max}^2 \quad (19)$$

可以看出式(14)为线性函数，式(15)~式(17)、式(19)为线性约束，而式(18)为非线性等式约束，此时利用SOCR对式(18)进行处理<sup>[9]</sup>，即

$$\beta_{ij,t} \geq \frac{P_{ij,t}^2 + Q_{ij,t}^2}{\alpha_{i,t}} \quad (20)$$

经过等价变换，式(20)可以写成标准二阶锥形式，即

$$\left\| \begin{bmatrix} 2P_{ij,t} \\ 2Q_{ij,t} \\ \beta_{ij,t} - \alpha_{i,t} \end{bmatrix} \right\|_2 \leq \beta_{ij,t} + \alpha_{i,t} \quad (21)$$

式中， $\|\cdot\|_2$ 为二范数，通过上述变换，本文的最优潮流模型被转化为二阶锥规划问题，该问题的完整表达式为

$$\min P_{\text{loss}} = \sum_{t=1}^T \sum_{ij \in E} \beta_{ij,t} r_{ij} \quad (22)$$

s. t. 式 (15) ~ 式 (17)、式 (19)、式 (21)、式 (6) ~ 式 (10) 由于CB运行约束中包含整数变量, 因此该模型为MISOCP问题。由此可以看出, SOCR的处理实际上是为了模型的高效率求解而放宽了约束范围, 会对模型产生一定误差, 因此可以通过式 (23) 定义松弛误差, 即

$$\text{err}_{ij,t} = \beta_{ij,t} \alpha_{i,t} - P_{ij,t}^2 - Q_{ij,t}^2 \quad (23)$$

关于SOCR的变换有效性, 文献[10]已经进行了充分研究。结果表明在相当宽松的条件下, 经过SOCR变换后模型仍然是准确的。本文将在算例中对该误差进行分析, 以证明SOCR对模型处理的有效性。

### 3 模型求解流程

对于MISOCP问题, 可以利用现有的成熟商业求解器进行快速准确求解, 本文基于Matlab平台, 利用YALMIP建模工具包对模型进行建模, 并调用MOSEK求解器进行求解, 程序实现流程为:

- 1) 设置基础参数, 包括配电网拓扑、支路阻抗、分布式电源、CB和SVC等参数。
- 2) 定义最优潮流模型的时序控制变量, 包括分布式电源、CB、SVC出力相关变量、支路电流二次方项、节点电压二次方项和线路传输有功无功等。
- 3) 设置各时段约束条件。
- 4) 调用MOSEK求解器求解并输出结果。

## 4 算例分析

### 4.1 参数设置

本文针对IEEE 33节点设计算例进行仿真分析, IEEE 33节点如图2所示, 相关数据参考文献[11]。

考虑光伏和风机两种分布式电源, 在节点8处安装光伏, 装机容量为1.5 MW; 节点12处

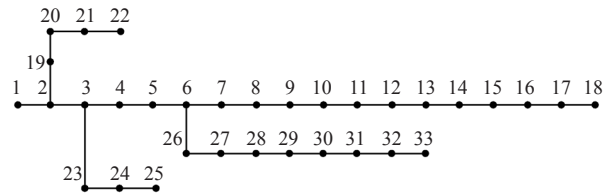


图2 IEEE 33节点

Fig. 2 IEEE 33-bus system

安装风机, 装机容量为1 MW; 节点18处安装CB, CB每组容量为50 kvar, 一共10组; 节点31处安装SVC, 补偿范围为 $-0.2 \sim 1$  Mvar; 节点电压运行范围为 $0.93 \sim 1.07$  pu。本文模型对配电网一天24 h运行工况进行优化, 负荷、风机和光伏的时序预测如图3所示。各时段的负荷为IEEE 33节点基础负荷乘对应时序值, 各时段光伏风机出力的最大值为各自装机容量乘对应时序值。

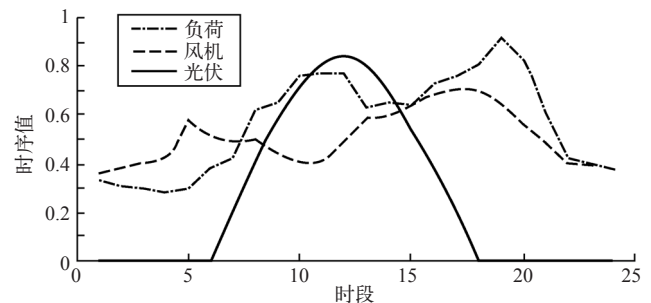


图3 负荷、风机、光伏时序预测值

Fig. 3 Timing prediction curves of load, wind generator and photovoltaic generator

### 4.2 结果分析

通过调用MOSEK求解器对模型进行求解, 得到各时段有功损耗之和为537.57 kW, 系统优化前有功损耗为1 691.20 kW, 优化后的有功损耗降低至优化前的31.79%。系统各时段优化前后的损耗对比如图4所示。可以看出系统各时段有功损耗曲线和负荷时序值相似, 有功损耗随着负荷的增加而增加, 随着负荷的减小而减小。通过本文采用的方法可以协调控制分布式电源以及无功补偿装置出力, 大大减小系统有功损耗, 提高配电网运行的经济性。

本文求解得到的各时段光伏风机总出力、无功补偿量如图5所示。各单元能够协调优化



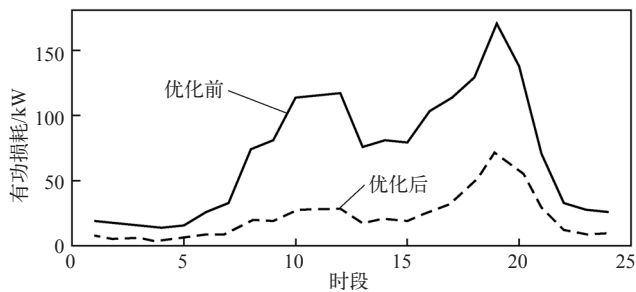


图4 优化前后系统各时段有功损耗  
Fig. 4 Active power loss in each period of the system before and after optimization

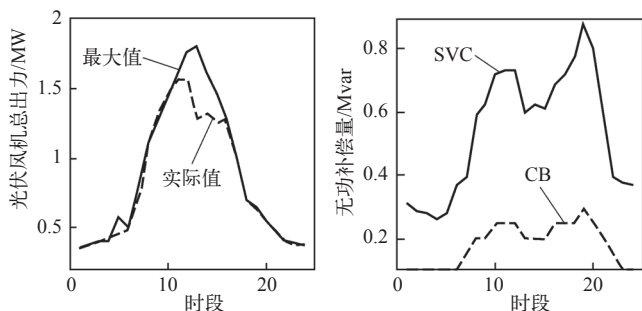


图5 各时段可控单元出力情况  
Fig. 5 Output of controllable units in each period

运行在出力约束范围内，为了优化系统有功损耗，分布式电源在最大出力占负荷比重较大时，对出力进行削减，CB和SVC也跟随负荷变化而调整无功补偿。

为了分析SOCR对模型处理的准确性，本文按照式（23）的计算方法，求得每个时段下每条支路的松弛误差，如图6所示。从图6中可以看出松弛误差最大量级为 $10^{-6}$ ，满足运行要求，可见SOCR对模型进行的松弛处理是可行的。

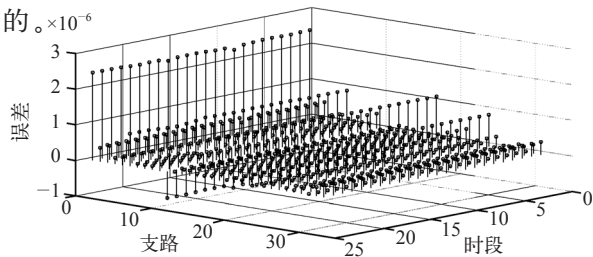


图6 各支路各时段松弛误差  
Fig. 6 Relaxation error of each branch in each period

为了进一步验证本文求解方法的有效性，选取第12时段进行优化分析。采用本文方法，

表 不同参数下粒子群算法求解结果

Tab. Solution of particle swarm optimization algorithm under different parameters

情况	粒子种群数	迭代次数	计算用时/s	有功损耗/kW
1	15	15	0.642	28.82
2	20	20	1.099	28.78
3	30	30	2.521	28.75

求解时间为0.372 s，计算得到该时段的有功损耗为28.74 kW。同时采用粒子群智能优化算法并结合牛—拉法潮流计算对该模型进行计算，设置粒子群算法不同参数，对计算结果进行比较，如下表所示。

从表中可以看出，由于粒子群优化算法的迭代过程具有一定随机性，其求解结果不稳定，而且依赖种群数量和迭代次数，种群数目和迭代次数越多，求解结果越优，求解时间也就越长。通过与粒子群算法求解效果进行对比，可以发现本文方法对模型求解具有快速准确的优点。

5 结束语

本文以配电网全天有功损耗最小为目标，建立了基于支路潮流约束的配电网最优潮流计算模型，该模型还考虑了分布式电源和离散、连续无功补偿装置的运行约束，属于包含整数变量的非线性、非凸规划模型，通过使用SOCR对模型转化，使其成为可以被高效求解的MISOCP问题。最后通过YALMIP建模工具包调用MOSEK商业求解器对模型进行高效求解，仿真表明：

- 1) 协调控制配电网中的可控单元，可以大大降低配电网的有功损耗，提高系统运行的经济性。
- 2) 通过算例对松弛误差进行分析，结果表明松弛误差能够满足运行要求，SOCR对模型的处理是有效的。
- 3) 通过与粒子群算法的求解结果进行比

较,可以发现本文所采用的方法能够稳定地取得最优解。

## 参考文献

- [1] CARPENTIER J. Contribution to the economic dispatch problem[J]. Bulletin Society Francaise Electriciens, 1962(8): 431-447.
- [2] 李成豪,王淳,尹发根,等.含潮流路由器的配电网最优潮流计算[J].电力系统保护与控制,2019,47(6):1-8.
- [3] 林哲,胡泽春,宋永华.最优潮流问题的凸松弛技术综述[J].中国电机工程学报,2019,39(13):3717-3727.
- [4] 何天雨,卫志农,孙国强,等.基于网损等值负荷模型的改进直流最优潮流算法[J].电力系统自动化,2016,40(6):58-64.
- [5] 蔡博,黄少锋.基于多目标粒子群算法的高维多目标无功优化[J].电力系统保护与控制,2017,45(15):77-84.
- [6] 汤晓青,刘辉,范宇,等.基于改进多目标遗传算法的实时发电市场优化调度研究[J].电力系统保护与控制,2017,45(17):65-71.
- [7] FARIVAR M, LOW S H. Branch flow model: relaxations and convexification-part I[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2013, 28(3): 2554-2572.
- [8] 高红均,刘俊勇,沈晓东,等.主动配电网最优潮流研究及其应用实例[J].中国电机工程学报,2017,37(6):1634-1644.
- [9] 刘一兵,吴文传,张伯明,等.基于混合整数二阶锥规划的主动配电网有功-无功协调多时段优化运行[J].中国电机工程学报,2014,34(16):2575-2583.
- [10] ARYA L D, KOSHTI A, CHOUBE S C. Distributed generation planning using differential evolution accounting voltage stability consideration[J]. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 2012, 42(1): 196-207.
- [11] BARAN M E, WU F F. Network reconfiguration in distribution systems for loss reduction and load balancing[J]. Power Engineering Review, IEEE, 1989, 9(4): 101-102.

## 作者简介



陈怀毅

陈怀毅(1994-),男,硕士,助理工程师,主要从事电网规划建设工作。

(收稿日期:2019-07-20) **EA**