1. Considere as matrizes

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0&2&0\\0&0&3\\0&0&0\end{bmatrix}\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&0&1\\0&1&3\end{bmatrix}$$
$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&1&2\\1&0&1\end{bmatrix}\quad \mathbf{E}=\begin{bmatrix}a&b&c\\b&a&b\\c&b&a\end{bmatrix}\quad \mathbf{F}=\begin{bmatrix}1&1&1\\x&y&z\\x^2&y^2&z^2\end{bmatrix}.$$

Calcule:

a) $\det(\mathbf{A})$; **b**) $\det(\mathbf{B})$; **c**) $\det(\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I}_3)$; **d**) $\det(\mathbf{C})$; **e**) $\det(\mathbf{D})$;

f) $\det(\mathbf{C}\,\mathbf{D})$ **g**) $\det(\mathbf{C})\det(\mathbf{D})$ **h**) $\det(\mathbf{D}\,\mathbf{C})$ **i**) $\det(\mathbf{C}^T)$ **j**) $\det(\mathbf{B}-\mathbf{C})$;

k) $\det(\mathbf{C}^2)$ **l**) $\det(\lambda\,\mathbf{A})$ **m**) $\det(\lambda\,\mathbf{D})$ **n**) $\det((\mathbf{C}\,\mathbf{D})^4)$ **o**) $\det(\mathbf{C}+\mathbf{D})$

p) $\det((\mathbf{C}\,\mathbf{D})^{-3})$ **q**) $\det(\mathbf{C}^{-1})+\det(\mathbf{D}^{-1})$ **r**) $\det(\mathbf{E})$ **s**) $\det(\mathbf{F})$

2. Considere a matriz $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$. Verifique que se tem:

   a) $\det(\mathbf{A})=\det(\mathbf{A}^T)$.

   b) $\det(\mathbf{A}^2)=\det^2(\mathbf{A})$.

3. Resolva as equações

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix}x&-1&0&0\\x^2&2&0&0\\0&0&4&11\\0&0&1&3\end{vmatrix}=0 \qquad \text{b)}\ \begin{vmatrix}1&3x&2&2\\2&4&4&4\\0&0&x&1\\0&0&1&1\end{vmatrix}=0.$$

4. Resolva a equação

$$\begin{vmatrix}x&1&1\\0&2&x\\x&3&1\end{vmatrix}=-1.$$

5. Sem calcular o determinante do lado direito da igualdade abaixo indicada, encontre uma matriz $\mathbf{A}\in\mathcal{M}_5$ tal que,

$$\det(\mathbf{A})=\begin{vmatrix}1&0&2&1\\-1&1&3&1\\0&-1&4&2\\0&1&2&3\end{vmatrix}$$

   e verifique:

jem@isep.ipp.pt

a) a sub-matriz formada pelas entradas da segunda linha de $\mathbf{A}$ é

$$\mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) A matriz $\mathbf{A}$ está em forma de escada por linhas.

c) A matriz $\mathbf{A}$ não possui entradas nulas.

6. Use determinantes para encontrar condições (sobre os parâmetros) para que sejam invertíveis as seguintes matrizes.

$$\textbf{a)} \quad \begin{bmatrix} a & 1 \\ ab & 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{b)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{c)} \quad \begin{bmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-2 & 1 \\ 3 & 1 & \lambda-1 \end{bmatrix}$$

$$\textbf{d)} \quad \begin{bmatrix} \lambda & -\lambda \\ a & \lambda-b \end{bmatrix} \qquad \textbf{e)} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & c & d & e \end{bmatrix} \qquad \textbf{f)} \quad \begin{bmatrix} a & ab & 0 \\ ab & a & 0 \\ a & b & a \end{bmatrix}$$

7. Mostre que a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{bmatrix}$$

é invertível sse $a \neq -3b \wedge a \neq b$.

8. (ex. de exame) Considere as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a+b & b & -6c \\ d+e & e & -6f \\ g+h & h & -6i \end{bmatrix}.$$

Sabendo que $\det(\mathbf{A}) = -6$ calcule $\det(\mathbf{B})$.

9. Use as propriedades de função anti-simétrica e de função n-linear para demonstrar que:

a) Se uma matriz tiver uma fila nula então o seu determinante é zero.

b) Se uma matriz tiver duas linhas (colunas) iguais então o seu determinante é zero.

c) Se uma matriz tiver uma linha (coluna) múltipla de outra linha (coluna) então o seu determinante é zero.

d) Se $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ então $\det(\lambda\mathbf{A}) = \lambda^n \det(\mathbf{A})$.

10. Considere a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & f & 0 \\ b & 1 & 2 & g & 1 \\ c & 1 & 1 & h & 1 \\ d & 1 & 2 & i & 0 \\ e & 1 & 1 & j & 0 \end{bmatrix}$$

onde, $\det(\mathbf{A}) = 2$.

Calcule

a)

$$\begin{vmatrix} a+6 & 1 & 1 & f & 0 \\ b+6 & 1 & 2 & g & 1 \\ c+6 & 1 & 1 & h & 1 \\ d+6 & 1 & 2 & i & 0 \\ e+6 & 1 & 1 & j & 0. \end{vmatrix}$$

b)

$$\begin{vmatrix} a & 3 & 2 & f+1 & 0 \\ b+1 & 6 & 2 & g+2 & 3 \\ c+1 & 3 & 2 & h+1 & 3 \\ d & 6 & 2 & i+2 & 0 \\ e & 3 & 2 & j+1 & 0 \end{vmatrix}$$

c)

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 2 \\ f & g & h & i & j \\ 0 & 7 & 7 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

11. Seja $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_3$ tal que $\det(\mathbf{A}) = -\frac{1}{3}$. Então,

    a) $\det(-\mathbf{\frac{1}{3}}\mathbf{A}^{-1}) = -\frac{1}{9}$
    b) $\det(-\frac{1}{3}\mathbf{A}^{-2}) = \frac{1}{9}$
    c) $\det(\frac{1}{3}\mathbf{A}^2) = -\frac{1}{9}$
    d) Nenhuma das opções anteriores está correcta.

12. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, considere a matriz

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & -\alpha & \alpha \\ 1 & -1 & \alpha & 4 \end{bmatrix}$$

    Determine os valores de α para os quais a matriz $\mathbf{A}_\alpha$ é regular.

13. Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ matrizes quadradas de ordem 5, tais que $|\mathbf{A}| = 3$ e $|\mathbf{B}| = -2$. Calcule:
    a) $|\mathbf{A}^T\mathbf{B}|$ b) $|2\mathbf{A}| + |\mathbf{B}^3|$ c) $|-\mathbf{A}\mathbf{B}^2|$ d) $|\frac{1}{2}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^T|$

14. (ex. de exame)
    Considere a seguinte equação matricial

$$(\mathbf{X}^T\mathbf{A})^T - \frac{1}{2}\mathbf{A}^T\mathbf{X} = \mathbf{I}_n,$$

    onde $\mathbf{X}$ é a matriz incógnita e $\det(\mathbf{A}) = 2$. Se $\mathbf{B}$ é solução da equação podemos concluir:

    a) $\det(\mathbf{B}) = 2^{n-1}$
    b) $\det(\mathbf{B}) = \frac{(-1)^n}{2}$
    c) $\det(\mathbf{B}) = \frac{1}{2^n}$
    d) Nenhuma das opções anteriores está correcta.

15. Calcule as matrizes adjuntas e as matrizes inversas das seguintes matrizes:

a)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

b)

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

c)

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 6 & 2 & 5 \\ 1 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

d)

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad ad - bc \neq 0$$

e)

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

f)

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

16. Para que valores de $a \in \mathbb{R}$ a matriz $\mathbf{A}$ é invertível?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 0 & a & a & a \\ a & 2a+1 & 2a & 2a+1 \\ 1 & 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

17. Considere a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sabendo que $\left(\left(\mathbf{X}^T\mathbf{A}^T\right)^{-1}\right)^T = \mathbf{X}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}$, calcule, se possível $\det(\mathbf{X})$.

18. Considere as matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b+c & e+f & h+i \\ a+b & d+e & g+h \\ 2c & 2f & 2i \end{bmatrix}$$

Sabendo que $\det(\mathbf{A}) = 1$, podemos concluir que:

jem@isep.ipp.pt

a) $\det(\mathbf{B}) = 2$;

b) $\det(\mathbf{B}) = -2$;

c) $\det(\mathbf{B}) = 0$;

d) Não se pode concluir nenhuma das opções anteriores.

19. Considere as matrizes $\mathbf{A},\ \mathbf{B} \in \mathcal{M}_3$. Se $\det(\mathbf{A}) = 2$ e $\det(\mathbf{B}) = -4$ então tem-se:

a) $\det(-2\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}) = -8$;

b) $\det(-2\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}) = -4$;

c) $\det(-2\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}) = -\frac{1}{8}$;

d) Nenhuma das opções anteriores está correcta.

20. Considere as matrizes $\mathbf{A},\ \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n$. Supondo que: $(\mathbf{AX} - \mathbf{XB})^{-1} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$, $\det(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = 3$ e que $\mathbf{B}$ permuta com $\mathbf{X}$, então tem-se;

a) $\det(\mathbf{X}) = 3^n$;

b) $\det(\mathbf{X}) = (-3)^n$;

c) $\det(\mathbf{X}) = (-1)^n$;

d) Nenhuma das opções anteriores está correcta.

21. Considere a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2a & -b & c & -c \\ b & 1 & -1 & b \\ c & 2 & a & 2 \\ 2 & 1 & 2 & d \end{bmatrix}.$$

Encontre, se possível uma matriz $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_6$ que verifique simultaneamente as seguintes condições:

- $\det(\mathbf{B}) = -\det(\mathbf{A})$
- A quinta linha da matriz $\mathbf{B}$ é $[1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6]$

22. Considere a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -a & 2 & a \\ 3 & -3 & a & 2a \\ a & -5 & 5 & 3a \\ 0 & 0 & 0 & 4a \end{bmatrix}$, onde a é um parâmetro real.

Para que valores do parâmetro a a matriz $\mathbf{A}$ é invertível?

23. Considere as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6a & 6c & 12b \\ d & f & 2e \\ g & i & 2h \end{bmatrix}$$

Então pode-se concluir:

a) $\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})$;

b) $\det(\mathbf{B}) = 12\det(\mathbf{A})$;

c) $\det(\mathbf{B}) = 6\det(\mathbf{A})$;

d) Nenhuma das opções anteriores está correcta.

24. Mostre que

$$\det\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a & a^2 \end{bmatrix} = (1-a^4)^3$$

Soluções

1.

a) -2. **b**) 0. **c**) $-\lambda^3$. **d**) -2. **e**) -2.

f) 4. **g**) 4. **h**) 4. **i**) -2. **j**) -7.

k) 4. **l**) $-2\lambda^2$. **m**) $-2\lambda^3$. **n**) 256. **o**) -1.

p) $\frac{1}{64}$. **q**) -1. **r**) $a(a^2-c^2)+2b^2(c-a)$ **s**) $(z-x)(y-x)(z-y)$

2.

3.

a) $x=0 \vee x=-2$. **b**) $x=\frac{2}{3} \vee x=1$.

4.

$x \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

5.

Por exemplo (existem outras respostas igualmente válidas):

a)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

b)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

c)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

6.

a) $a \neq 0 \ \wedge \ b \neq 1$. **b**) $a \neq 1$. **c**) $\lambda \neq 1 \ \wedge \ \lambda \neq \frac{3+\sqrt{5}}{2} \ \wedge \ \lambda \neq \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. **d**) $\lambda \neq 0 \ \wedge \ \lambda \neq b-a$. **e**) $a \neq 0$. **f**) $a \neq 0 \ \wedge \ b \neq 1 \ \wedge \ b \neq -1$.

7.

8.

$\det(\mathbf{B}) = 36$

9.

10.

a) 2. **b**) -36. **c**) 168.

11.

d)

12.

13.

a) -6. **b**) 88. **c**) -12. **d**) $-\frac{1}{48}$.

14.

a)

15.

a)

$$\mathbf{adj}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$\mathbf{adj}(\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} 0 & -1/8 & 0 & 1/8 \\ -1/4 & 3/8 & 1/4 & -1/8 \\ 0 & -1/8 & -1/4 & 1/8 \\ 0 & 3/8 & 1/4 & -1/8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

c)

$$\mathbf{adj}(\mathbf{C}) = \begin{bmatrix} -7 & 13 & -1 \\ -49 & 28 & 28 \\ 28 & -17 & -10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C^{-1}} = \begin{bmatrix} -1/7 & 13/49 & -1/49 \\ -1 & 4/7 & 4/7 \\ 4/7 & -17/49 & -10/49 \end{bmatrix}$$

d)

$$\mathbf{adj}(\mathbf{D}) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D^{-1}} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

e)

$$\mathbf{adj}(\mathbf{E}) = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -7 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E^{-1}} = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 7 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

f)

$$\mathbf{adj}(\mathbf{F}) = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & -2 & -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F^{-1}} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ -1/3 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

16.

$a \neq 0$ e $a \neq 1$.

17.

$\det(\mathbf{X}) = \det(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = 1$

18.

Opção b)

19.

Opção d)

20.

Opção d)

21.

Por exemplo,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2a & -b & c & -c & 0 \\ 0 & b & 1 & -1 & b & 0 \\ 0 & c & 2 & a & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & d & 0 \end{bmatrix}$$

22.

$$a \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm\sqrt{11}\}.$$

23.

Opção d)

jem@isep.ipp.pt