Matrizes

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Licenciatura em Engenharia Informática

Instituto Superior de Engenharia do Porto

Ano letivo 2025/2026

Definição 1 (Matriz real)

Sejam m e n dois inteiros positivos. Uma matriz real com m linhas e n colunas, é um quadro com $m \times n$ números reais dispostos em m linhas e n colunas.

☞ *Utiliza-se a notação*

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

onde os subíndices de cada entrada $a_{i,j}$ indicam que esta se encontra na i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz A.
Ou na forma compacta

$$A = [a_{i,j}]_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}.$$

- Uma matriz com m linhas e n colunas diz-se uma matriz do tipo $m \times n$. Representa-se o conjunto formado por todas as matrizes reais do tipo $m \times n$ pelo símbolo $\mathscr{M}_{m,n}$.
- Uma matriz $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{m,n}$ diz-se **rectangular** se $m \neq n$. Como casos particulares têm-se:
    - as *matrizes coluna* $(n = 1)$

$$\mathrm{c} = \begin{bmatrix} c_{1,1} \\ c_{2,1} \\ \vdots \\ c_{m,1} \end{bmatrix}$$

    - as *matrizes linha* (m=1)

$$\mathrm{l} = \begin{bmatrix} l_{1,1} & l_{1,2} & \cdots & l_{1,n} \end{bmatrix}$$

- Uma matriz $A \in \mathscr{M}_{m,n}$ diz-se **quadrada** se $m = n$. Frequentemente, por comodidade, dizemos que uma matriz quadrada (do tipo $n \times n$) tem **ordem** n e escrevemos apenas $A \in \mathscr{M}_n$.
  - a **diagonal principal** da matriz A é constituída pelas entradas com os índices (i,j) tais que $i = j$, $i = 1, 2, \ldots, n$
  - a **diagonal secundária** da matriz A é constituída pelas entradas com os índices (i,j) tais que $i + j = n + 1$.
  - Dada uma matriz $A \in \mathscr{M}_{m,n} = [a_{i,j}]_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ (não necessariamente quadrada), definimos a **diagonal principal** da matriz A como sendo o conjunto de índices $\{(1,1), (2,2), \ldots, (\min(m,n), \min(m,n))\}$. **A diagonal secundária não está definida para matrizes não quadradas**.

Exemplos: Nos seguintes exemplos, assinalamos as entradas que pertencem às diagonais principais a vermelho e as entradas que pertencem às diagonais secundárias a azul.

$$a)\quad \begin{bmatrix} \pi & 1 & 2 & -1 \\ 2 & \sqrt{2} & 0 & \pi \\ 1 & \sqrt{3} & 1 & \pi \\ 0 & -3 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad b)\quad \begin{bmatrix} \pi & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \qquad c)\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

- Uma matriz quadrada $[a_{i,j}]_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$, de ordem n diz-se **triangular superior** se e somente se $i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$.
- Uma matriz quadrada $[a_{i,j}]_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$, de ordem n diz-se **triangular inferior** se e somente se $i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0$.

- Uma matriz quadrada $[a_{i,j}]_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$, de ordem n, diz-se **diagonal** se e somente se for simultaneamente triangular superior e triangular inferior ($a_{i,j}=0$ para todo $i \neq j$).
- Se uma matriz diagonal possuir os elementos da diagonal principal todos iguais dizemos que é uma matriz **escalar**.

☞ *Se os elementos da diagonal principal de uma matriz escalar forem iguais a 1 dizemos que a matriz é a matriz* ***identidade*** *ou* ***unitária*** *de ordem n e representamo-la por* $\mathrm{I_n}$.

Exemplos:

$$\mathrm{D}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{5} & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix},\quad \mathrm{E}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix},\quad \mathrm{I}_4=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

As matrizes D, E e I_4 são todas diagonais. Em particular, as matrizes E e I_4 são matrizes escalares sendo que I_4 é a matriz unitária de ordem 4.

- Seja $a_{i,j}$ uma entrada de uma matriz A e $b_{\ell,k}$ uma entrada de uma matriz B, onde A e B são matrizes do mesmo tipo ($\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{M}_{m,n}$). Dizemos que as entradas $a_{i,j}$ e $b_{\ell,k}$ são **homólogas** se e somente se $i = \ell$ e $j = k$.
- Dizemos que duas matrizes do mesmo tipo A e B são **iguais**, e escrevemos $\mathrm{A} = \mathrm{B}$, se todas as entradas homólogas forem iguais. Caso contrário, A e B dizem-se diferentes, e escrevemos $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$.
- Seja $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{m,n}$ e sejam k, ℓ dois inteiros positivos tais que $k \leq m$ e $\ell \leq n$. Dizemos que A' é uma **submatriz** de A se a matriz A' for constituida por entradas comuns a k linhas e ℓ colunas de A.

Definição 2 (Adição de matrizes)

Sejam $A = [a_{i,j}]_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ e $B = [b_{i,j}]_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ duas matrizes, do mesmo tipo $(m \times n)$. Definimos a *soma* da matriz A com a matriz B como sendo uma matriz C do tipo $m \times n$, cujas entradas são determinadas por

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j},$$

e escrevemos $C = A + B$

☞ *A adição de duas matrizes de diferentes tipos não está definida.*

Exemplos: Se,

$$A = \begin{bmatrix} x & 0 & 1 \\ -1 & -1 & y \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} x+2 & -9 & y \\ -1 & -z & y \\ 0 & -1 & -x \end{bmatrix}$$

tem-se:

$$A + D = \begin{bmatrix} 2x+2 & -9 & 1+y \\ -2 & -(1+z) & 2y \\ 0 & 1 & -(1+x) \end{bmatrix}; \quad C + B = \begin{bmatrix} a-1 \\ b \\ c+1 \end{bmatrix}$$

$$A + I_3 = \begin{bmatrix} x+1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & y \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Propriedades 1 (da adição de Matrizes)

1. A adição é uma *operação fechada* no conjunto $\mathscr{M}_{m,n}$

$$\forall\, A, B \in \mathscr{M}_{m,n} \;,\; \exists C \in \mathscr{M}_{m,n} \;:\; A + B = C.$$

2. A adição de matrizes é uma *operação associativa*

$$\forall\, A, B, C \in \mathscr{M}_{m,n} \;,\; (A + B) + C = A + (B + C).$$

3. Existe um elemento neutro, E, em $\mathscr{M}_{m,n}$, relativamente à operação adição.

$$\exists E \in \mathscr{M}_{m,n} \;,\; \forall\, A \in \mathscr{M}_{m,n} \;:\; A + E = E + A = A.$$

4. Todo a matriz A em $\mathscr{M}_{m,n}$, possui uma matriz *inversa aditiva* (ou *simétrica*) A'

$$\forall\, A \in \mathscr{M}_{m,n} \;,\; \exists A' \in \mathscr{M}_{m,n} :\; A + A' = A' + A = E.$$

5. A adição de Matrizes é uma *operação comutativa*,

$$\forall\, A, B \in \mathscr{M}_{m,n} \;:\; A + B = B + A.$$

- O elemento neutro de $\mathscr{M}_{m,n}$ é a matriz $\mathrm{E} = 0_{\mathrm{m,n}}$, onde $0_{\mathrm{m,n}}$ designa a matriz do tipo $m \times n$ com as entradas todas nulas. A matriz $0_{\mathrm{m,n}}$ diz-se a matriz nula do tipo $m \times n$.
- A matriz inversa aditiva de uma matriz $\mathrm{A} = [a_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ representa-se com o símbolo $-\mathrm{A}$ e tem-se $-\mathrm{A} = [-a_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$.

Definição 3 (subtracção de Matrizes)

Dadas duas matrizes $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{M}_{m,n}$ define-se a subtracção $\mathrm{A} - \mathrm{B}$ como sendo a adição de A com a inversa aditiva de B.

Definição 4 (Produto de um escalar por uma matriz)

Sejam α um número real e $A = [a_{i,j}]_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$ uma matriz do tipo $m \times n$. O *produto do escalar* α pela matriz A é uma matriz do mesmo tipo da matriz A, cujas entradas são iguais às entradas homólogas da matriz A multiplicadas pelo escalar α. Em notação matemática tem-se

$$\alpha A = [\alpha a_{i,j}]_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}.$$

Exemplos:

$$\pi \begin{bmatrix} \pi & -1 & \alpha \\ 2 & \pi^{-1} & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi^2 & -\pi & \pi\alpha \\ 2\pi & 1 & -2\pi \end{bmatrix}$$

$$3 \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 9 & -1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 12 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

Propriedades 2

Para todas as matrizes A e B em $\mathscr{M}_{m,n}$ e para todos os escalares α e β, tem-se

1. $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$.
2. $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$.
3. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.
4. $1A = A$.
5. $(-1)A = -A$.

Definição 5 (Multiplicação de matrizes)

Sejam as matrizes $A = [a_{i,j}]_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le \ell}} \in \mathscr{M}_{m,\ell}$ e $B = [b_{i,j}]_{\substack{1\le i\le \ell\\1\le j\le n}} \in \mathscr{M}_{\ell,n}$.
Definimos o *produto* da matriz A pela matriz B como sendo a matriz $C = [c_{i,j}]_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} \in \mathscr{M}_{m,n}$, e escrevemos $C = A \times B$, ou simplesmente $C = AB$, sendo as entradas da matriz C dadas pela relação

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{\ell} a_{i,k} b_{k,j}.$$

☞ *Apenas podemos efectuar a multiplicação* $A \times B$ *se o número de colunas da matriz à esquerda,* A, *for igual ao número das linhas da matriz à direita,* B.

Exemplo:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1\times 0 + 2\times 1 + 3\times 2 & 1\times 3 + 2\times(-1) + 3\times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \end{bmatrix}.$$

☞ *A multiplicação* BA **não está definida**, *dado que a matriz à esquerda tem* 2 *colunas e a matriz à direita tem* 1 *linha.*

☞

- *Se as matrizes* A *e* B *forem ambas quadradas e de ordens iguais, os produtos* AB *e* BA *estão ambos definidos*
- *A multiplicação de matrizes quadradas não possui a propriedade comutativa. Ou seja, a propriedade*

$$\forall A, B \in \mathscr{M}_n,\ AB = BA$$

é falsa.

Definição 6 (Matrizes permutáveis (ou comutáveis))

Dizemos que duas matrizes $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{M}_n$ são *permutáveis* (ou *comutáveis*) se se verificar a igualdade

$$\mathrm{A}\,\mathrm{B} = \mathrm{B}\,\mathrm{A}.$$

Definição 7 (Centro de $\mathscr{M}_n$)

O *centro* de $\mathscr{M}_n$ é o conjunto formado pelas matrizes quadradas de ordem n que permutam com todas as matrizes quadradas de ordem n. Ou seja

$$\mathscr{Z}(\mathscr{M}_n) = \left\{ \mathrm{A} \in \mathscr{M}_n : \mathrm{A}\,\mathrm{X} = \mathrm{X}\,\mathrm{A},\ \forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_n \right\}.$$

Exemplos:

Considere as seguintes matrizes quadradas de ordem 2:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. A matriz A não comuta com a matriz B porque se tem,
$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
2. A matriz A comuta com a matriz C porque se tem,
$$AC = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } CA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$
3. A matriz $A \notin \mathcal{Z}(\mathcal{M}_2)$. De facto, se A pertencesse ao centro de $\mathcal{M}_2$, teria de permutar com todas as matrizes quadradas de ordem 2 e verificámos atrás que ela não comuta com a matriz B.
4. A matriz D comuta com todas as matrizes quadradas de ordem 2. De facto tem-se
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2z & 2t \end{bmatrix}$$
consequentemente $D \in \mathcal{Z}(\mathcal{M}_2)$.

Propriedades 3

Considerem-se as matrizes $A, B \in \mathscr{M}_{m,\ell}$, $C, D \in \mathscr{M}_{\ell,p}$ e $E \in \mathscr{M}_{p,n}$ e o escalar $\alpha \in \mathbb{R}$. As seguintes propriedades são válidas:

1. $(A+B)D = AD + BD$
2. $A(C+D) = AC + AD$
3. $(AD)E = A(DE)$
4. $0_{r,m}A = 0_{r,\ell}$ e $A0_{\ell,s} = 0_{m,s}$
5. $I_m A = A$ e $AI_\ell = A$
6. $\alpha(AC) = (\alpha A)C = A(\alpha C)$

Notas: A primeira propriedade chama-se propriedade distributiva à direita da multiplicação relativamente à adição. A segunda propriedade chama-se propriedade distributiva à esquerda da multiplicação relativamente à adição. A terceira propriedade chama-se propriedade associativa da multiplicação. As propriedades indicadas em 4. chamam-se, respectivamente, existência de elemento absorvente à esquerda e à direita. E as propriedades indicadas em 5. chamam-se, respectivamente, existência de elemento neutro à esquerda e à direita.

Definição 8 (Matrizes invertíveis)

Dizemos que uma matriz $A \in \mathscr{M}_n$ é *invertível* (ou *regular*) se existir uma matriz $Z \in \mathscr{M}_n$ tal que

$$A\,Z = Z\,A = I_n \tag{1}$$

Se não existir uma matriz $Z \in \mathscr{M}_n$ tal que se verifique a igualdade (1) então a matriz A diz-se não *invertível* (ou *singular*).

☞ *No caso de* A *ser invertível existe apenas uma matriz* Z *que satisfaz* (1). *Chamamos a essa matriz a matriz inversa de* A *e representamo-la por* A^{-1}.

Exemplo: A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

é invertível, porque se tem

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

logo tem-se

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

E a matriz inversa da matriz A^{-1} é a matriz A. Ou seja, tem-se $(A^{-1})^{-1} = A$.

Definição 9 (Potência de ordem $k \in \mathbb{Z}$)

Sejam $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n$ e k um inteiro. A *potência* de ordem k da matriz A é a matriz $\mathrm{A}^k \in \mathscr{M}_n$ tal que,

$$\begin{aligned} \mathrm{A}^0 &= \mathrm{I_n} \\ \mathrm{A}^k &= \underbrace{\mathrm{A} \times \mathrm{A} \times \ldots \times \mathrm{A}}_{k \text{ vezes}} \quad \text{se } k > 0. \\ \mathrm{A}^{-k} &= \underbrace{\mathrm{A}^{-1} \times \mathrm{A}^{-1} \times \ldots \times \mathrm{A}^{-1}}_{k \text{ vezes}} \quad \text{se } k > 0 \quad (\text{A invertível}). \end{aligned}$$

Definição 10 (Transposta (de uma matriz))

Seja $\mathrm{A} = [a_{i,j}]_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ uma matriz do tipo $m \times n$. A *transposta* da matriz A é uma matriz do tipo $n \times m$, e representa-se pelo símbolo $\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = [a'_{i,j}]_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}$, onde

$$a'_{i,j} = a_{j,i}, \quad 1 \le i \le n \text{ e } 1 \le j \le m.$$

Exemplos: Considerando as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

tem-se,

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \quad B^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } C^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(A^T)^T = ?, \quad (B^T)^T = ?, \quad (C^T)^T = ?$$

Definição 11 (Matrizes simétricas e anti-simétricas)

Seja A uma matriz quadrada.

- Diz-se que A é uma **matriz simétrica** se $A = A^T$.
- Se $A = -A^T$, diz-se que a matriz A é uma **matriz anti-simétrica** .

Exemplos:

1. As matrizes simétricas de ordem 3 têm a forma

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}, \qquad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$$

2. As matrizes anti-simétricas de ordem 3 têm a forma

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Propriedades 4

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$
3. $(A\,C)^T = C^T A^T$
4. $(A^k)^T = (A^T)^k,\ k \in \mathbb{N}_0$
5. $(B\,C)^{-1} = C^{-1} B^{-1}$
6. $(B^k)^T = (B^T)^k,\ k \in \mathbb{Z}$

☞ *As propriedades são válidas para todas as matrizes, desde, que as operações indicadas façam sentido.*

Definição 12 (Coeficiente líder)

Seja E uma matriz. Em cada linha dizemos que a primeira entrada não nula é o **coeficiente líder** (dessa linha). Se uma linha contém apenas entradas nulas não possui coeficiente líder.

Definição 13 (Matriz em forma de escada por linhas (f.e.l.))

Dizemos que a matriz E está em **forma de escada por linhas** se:

1. Para toda a linha $i > 1$, da matriz E, o coeficiente líder encontra-se à direita do coeficiente da linha anterior (da linha $i - 1$)
2. Se uma linha tiver entradas todas nulas, então todas as linhas abaixo dela possuem igualmente entradas todas nulas.

Exemplos: Considere as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

- A única matriz que está em forma de escada é a matriz B.
- Na matriz A o coeficiente líder da linha 2 está à esquerda do coeficiente líder da linha anterior.
- Na matriz C o coeficiente líder da linha 3 não está à direita do coeficiente líder da linha 2 (encontram-se ambos na coluna 2).
- A matriz D possui uma linha nula (sem coeficientes líder) anterior a uma linha com coeficiente líder.

Definição 14 (Característica de uma matriz em f.e.l.)

A característica de uma matriz E em forma de escada por linhas, $r(\mathrm{E})$ é o número de linhas não nulas.

$$\boxed{r(E) = \text{número de linhas não nulas de E.}}$$

☞ ***Note-se que o número de linhas não nulas apenas é a característica de matrizes em forma de escada por linhas.*** *Iremos ver à frente como se determina a característica de uma matriz qualquer (não necessariamente em f.e.l)*

Definição 15 (Operações elementares sobre linhas (colunas))

Considere uma matriz A. Designam-se *operações elementares sobre as linhas (colunas)* as operações:

1. Troca de linhas da matriz A. A troca das linhas L_i e L_j (das colunas C_i e C_j) representa-se por $L_i \leftrightarrow L_j$ ($C_i \leftrightarrow C_j$).
2. A substituição de uma linha L_i (coluna C_i) pela linha αL_i (coluna βC_i), onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ou seja, a substituição de uma linha L_i (coluna C_i) por um seu múltiplo αL_i (βC_i) não nulo. Representamos esta operação elementar por
$$L_i \leftarrow \alpha L_i \quad (\ C_i \leftarrow \beta C_i \ )$$
3. A substituição de uma linha L_i (coluna C_i) pela sua soma com um múltiplo de outra linha (coluna). Representamos esta operação elementar por
$$L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j \quad (\ C_i \leftarrow C_i + \beta C_j \ )$$

Definição 16 (Matrizes equivalentes)

Duas matrizes dizem-se **equivalentes** se uma resulta da outra através de uma sequência finita de operações elementares.

Teorema 1

Seja A uma matriz equivalente a uma matriz E que está em forma de escada. Então, tem-se

$$\boxed{\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(E)}$$

☞ *O teorema anterior permite encontrar a característica de uma matriz desde que encontremos a sua forma de escada (Algoritmo de eliminação Gaussiana).*

Exemplo (introdutório): Encontrar uma forma de escada equivalente à matriz A.

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}}^{A} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}}^{A_1} \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + (-1) L_1} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}}^{A_2} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + (-2) L_2} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}}^{A_3} \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_4} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{E}$$

As matrizes A, A_1, A_2, e E são todas equivalentes logo têm a mesma característica. A matriz E está em forma de escada por linhas. Como E possui 3 linhas não nulas tem-se

$$r(E) = r(A_3) = r(A_2) = r(A_1) = r(A) = 3.$$

Algoritmo 1 (de eliminação Gaussiana)

Considere a matriz $A \in \mathcal{M}_{m,n}$.

1. Seja $U = A$ e $r = 1$. Se $U = 0$, U está em forma de escada por linhas (**STOP**).
2. Se $U \neq 0$, procurar nas linhas $r, \ldots, m$, da matriz U, a primeira coluna, k, não nula e primeira entrada $a_{i,k} \neq 0$. Se $i > r$, troque as linhas r e i em U (obtém-se uma entrada não nula na posição (r, k)). Seja U a matriz que resulta desta troca.
3. Adicionar múltiplos da linha r às linhas abaixo para anular todas as entradas localizadas na coluna k e nas linhas $r + 1, \ldots, m$. Seja U a matriz resultante.
4. Se $r = m - 1$ ou as linhas $r + 1, \ldots, m$ são todas nulas, U está em forma de escada por linhas (**STOP**). Caso contrário faça $r = r + 1$ e repita os passos 2, 3 e 4.

☞ *No passo 3, não explicitámos as operações elementares que permitem anular as entradas da coluna k e das linhas $r+1, \ldots, k$. Contudo facilmente se verifica que efectuando a operação $L_\ell \leftarrow L_\ell - m_\ell L_r$, com $m_\ell = a_{\ell,k}/a_{r,k}$ anulamos a entrada $a_{\ell,k}$.*

Exemplo: Algoritmo de eliminação Gaussiana aplicado à matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & 4 \\ -4 & -12 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Passo 1. $U^{(1)} = A$ e $r = 1$.
Passo 2. Como $a_{1,1} \neq 0$, não é necessário troca de linhas.
Passo 3. Anular as entradas da primeira coluna abaixo da entrada $a_{1,1}$. Tem-se

$$m_2 = \frac{-4}{2}, \quad m_3 = \frac{0}{2}, \quad \text{e} \quad m_4 = \frac{1}{2},$$

Consequentemente, apenas temos de efectuar as operações $L_2 \leftarrow L_2 - (-2)L_1$ e $L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{2}L_1$. Obtemos, desta forma, a matriz

$$U^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Passo 4. A submatriz, de $U^{(2)}$, constituída pelas linhas 2, 3 e 4 não é a matriz nula, consequentemente incrementamos o valor de r, o valor de r passa a ser 2, e voltamos ao passo 2.

exemplo (cont.)

Passo 2. A primeira coluna não nula, da submatriz de $\mathrm{U}^{(2)}$, constituída pelas linhas 2, 3 e 4, é a terceira e a primeira entrada não nula da terceira coluna situa-se na terceira linha de $\mathrm{U}^{(2)}$. Consequentemente efectuamos a troca de linhas $L_2 \leftrightarrow L_3$ em $\mathrm{U}^{(2)}$. Desta forma tem-se

$$\mathrm{U}^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Passo 3. Anular as entradas da terceira coluna abaixo da entrada $a_{2,3}$. Tem-se $m_4 = -1/-1$ e efectua-se a operação elementar $L_4 \leftarrow L_4 - L_2$. Obtendo-se

$$\mathrm{U}^{(4)} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Passo 4. A matriz $\mathrm{U}^{(4)}$ está em forma de escada por linhas e a eliminação Gaussiana terminada STOP.

exemplo (cont.)

Esquematicamente escrevemos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & 4 \\ -4 & -12 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - 1/2 L_4]{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - L_2} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

? Qual a característica da matriz A?