Instituto Superior de Engenharia do Porto

ALGAN	Teste	
Curso. LEI	**Data: 2024 – 11 – 18**	**75 minutos**

Nome: ____________________________________ **Número**: ____________ **Turma**: ______

Parte I (15 valores)

1. (**1,5+1,5 val.**) Considere a matriz,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

   a) Determine, se possível, a matriz $\mathbf{B} = (\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathbf{T}} - \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A})^{-1}$.

   b) Encontre o conjunto S formado pelas matrizes simétricas que permutam com a matriz $\mathbf{A}$.
   Nota: Uma matriz $\mathbf{A}$ diz-se simétrica se e somente se $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$.

2. (**3 val.**) Considere a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & a+2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 1 \end{bmatrix}$, onde a é um parâmetro real.

   Para que valores do parâmetro a a matriz $\mathbf{A}$ é invertível?

3. (**1+3 val.**) Considere o sistema de equações lineares $\begin{cases} x + by + az = 1 \\ x + y + bz = a \\ x + by + bz = b \end{cases}$ onde a e b são parâmetros reais.

   a) Que condição devem os parâmetros satisfazer para que a característica da matriz simples do SEL seja máxima?

   b) Classifique o SEL em função dos parâmetros a e b.

4. (**1+3+1 val.**) Considere o seguinte sistema de equações lineares (SEL).

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & & & 3x_4 & + & x_5 & = & 1 \\ & & & & x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 7x_4 & + & 3x_5 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 8x_4 & + & 3x_5 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & -1 \end{array}\right.$$

   a) Mostre que $(-3-2a, a, -2, 1, 1)$ é solução do SEL para todo $a \in \mathbb{R}$.

   b) Encontre o conjunto solução do SEL.

   c) Encontre, se possível, uma solução do SEL que tenha três entradas nulas. Justifique a sua resposta no caso de não existir tal solução.

<u>Parte II</u> (5 valores)

A cada questão corresponde uma única resposta correta. As respostas têm que ser apresentadas na grelha seguinte com uma das opções (A,B,C ou D). Se não responder ou der mais do que uma resposta a uma questão, terá cotação **zero**. Cada resposta certa vale **1 valor** e cada resposta errada terá uma penalização de **1/3 de valor.**

Questão	5	6	7	8	9	SR	E	C	Total
Respostas									

....

5. Seja $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_4$, com $\det(\mathbf{A}) = 2$. Então pode-se concluir:

   A. $\det(\mathrm{adj}(\mathbf{A})) = \frac{1}{2}$; B. $\det(\mathrm{adj}(\mathbf{A})) = 8$; C. $\det(\mathrm{adj}(\mathbf{A})) = 2$; D. Nenhuma das opções anteriores está correta.

6. Considere as matrizes
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6a & 6b & 12c \\ d & e & 2f \\ g & h & 2i \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & d+a & 12g \\ b & e+b & 12h \\ c & f+c & 12i \end{bmatrix}$$

   Então pode-se concluir:

   A. $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B})$; B. $\det(\mathbf{A}) = 3\det(\mathbf{B})$; C. $\det(\mathbf{A}) = -3\det(\mathbf{B})$; D. Nenhuma das opções anteriores está correcta.

7. Seja $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_3$ uma matriz tal que: $\mathbf{A}^2 - \mathbf{A} + \mathbf{I} = \mathbf{O}$. Então, podemos concluir;

   A. $\mathbf{A}$ não é invertível; B. $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^2$; C. $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{A}$; D. Não se pode concluir nenhuma das opções anteriores.

8. Seja $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, a forma matricial de um sistema de equações lineares com conjunto solução
$$CS = \{(x, y, 2x + 3z, z, 4x - y + 3z) \in \mathbb{R}^5 \,:\, x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

   Então, podemos concluir;

   A. $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = 5$; B. $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = 4$; C. $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = 3$; D. Nenhuma das opções anteriores está correcta.

9. Considere a seguinte equação matricial $(\mathbf{AX})^T\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{C}$, onde as matrizes envolvidas são quadradas, com a mesma ordem, e invertíveis. Então tem-se:

   A. $\mathbf{X} = (\mathbf{BC})^T\mathbf{A}^{-1}$;
   B. $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{C}^T$;
   C. $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C})^T$;
   D. Nenhuma das opções anteriores está correta.