ALGAN	Teste	
Curso. LEI	**Data: 2024 – 11 – 16**	**75 minutos**

Nome: ______________________ **Número**: __________ **Turma**: ______

<u>Parte I</u> (15 valores)

1. (**1,5+1,5 val.**) Considere as matrizes,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   a) Calcule $\det(\mathbf{AB} - \mathbf{BA})$.

   b) <u>Use o algoritmo de Gauss-Jordan</u> para calcular $\mathbf{B^{-1}}$.

2. (**3 val.**) Considere a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -a & 2 & a \\ 3 & -3 & a & 2a \\ a & -5 & 5 & 3a \\ 0 & 0 & 0 & 4a \end{bmatrix}$, onde a é um parâmetro real.

   Para que valores do parâmetro a a matriz $\mathbf{A}$ é invertível?

3. (**3+1 val.**) Considere o sistema de equações lineares $\begin{cases} x + 2y + z = a \\ x + (a^2+1)y + az = 2a \\ -x - 2a^2y - az = -3a + b - 1 \end{cases}$ onde a e b são parâmetros reais.

   a) Classifique o SEL em função dos parâmetros a e b.

   b) Resolva o sistema para $a = -1$ e $b = 0$.

4. (**1+3+1 val.**) Considere o seguinte sistema de equações lineares (SEL).

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_6 = 3 \end{cases}$$

   a) Mostre que $(\frac{5-a}{2}, a, -\frac{a+1}{2}, 0, 0, a)$ é solução do SEL para todo $a \in \mathbb{R}$.

   b) Encontre o conjunto solução do SEL.

   c) Encontre, se possível, uma solução $(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6)$ do SEL que satisfaça simultaneamente as seguintes condições: $s_4 = -1$, $s_6 = -1$ e $\sum_{i=1}^{6} s_i = 0$.

Parte II (5 valores)

A cada questão corresponde uma única resposta correta. As respostas têm que ser apresentadas na grelha seguinte com uma das opções (A,B,C ou D). Se não responder ou der mais do que uma resposta a uma questão, terá cotação **zero**. Cada resposta certa vale **1 valor** e cada resposta errada terá uma penalização de **1/3 de valor.**

Questão	5	6	7	8	9	SR	E	C	Total
Respostas									

. . . .

5. Seja $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_5$, tal que $\mathbf{A^{-2}} = -\mathbf{A^T}$. Então pode-se concluir:

   A. $\det(\mathbf{A}) = 1$; B. $\det(\mathbf{A}) = 0$; C. $\det(\mathbf{A}) = 2$; D. Nenhuma das opções anteriores está correta.

6. Considere as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6a & 6c & 12b \\ d & f & 2e \\ g & i & 2h \end{bmatrix}$$

   Então pode-se concluir:

   A. $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B})$; B. $\det(\mathbf{A}) = -12\det(\mathbf{B})$; C. $\det(\mathbf{A}) = 6\det(\mathbf{B})$; D. Nenhuma das opções anteriores está correcta.

7. Seja $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{14}$ uma matriz tal que: $\mathbf{A}^8 = \mathbf{I_{14}}$. Então, podemos concluir;

   A. $\mathbf{A}$ não é invertível; B. $\mathbf{A}^{-6} = \mathbf{A}^2$; C. $\det(\mathbf{A}) = \frac{1}{8}$; D. Não se pode concluir nenhuma das opções anteriores.

8. Seja $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_4$, tal que $\mathbf{A^3} + \mathbf{A^2} = -\mathbf{I_4}$

   Então, podemos concluir;

   A. $\det(\mathbf{A}) = \pm\frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{A}+\mathbf{I_4})}}$; B. $\det(\mathbf{A^2}) = -\det(\mathbf{A}+\mathbf{I_4})$; C. $\det(\mathbf{A}+\mathbf{I_4}) \leq 0$; D. Nenhuma das opções anteriores está correcta.

9. Considere a seguinte equação matricial $((\mathbf{AX})^{-1}\mathbf{B})^T = \mathbf{C}$, onde as matrizes envolvidas são quadradas, com a mesma ordem, e invertíveis. Então tem-se:

   A. $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{C}^{-1})^T$;
   B. $\mathbf{X} = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}^T$;
   C. $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C})^T$;
   D. Nenhuma das opções anteriores está correta.