



POLITÉCNICA



Aeroelasticidad

Validación y comportamiento aeroelástico de un perfil



AUTORES:

SARA ALONSO LUCAS

JON ERRASTI ODRIOZOLA

ALEJANDRO SARABIA VARGAS

CARLOS TERREROS SANCHEZ

Índice

1.	Introducción	1
2.	Fundamento teórico.....	2
	2.1 Teoría potencial.....	2
	2.2 Condiciones de contorno	3
	2.3 Métodos de validación.....	4
3.	Implementación del código	5
	3.1 MÉTODO V-G	6
4.	Resultados obtenidos.....	8
5.	Bibliografía.....	11

1. Introducción

El objetivo de este trabajo es implementar un código que sea capaz de medir la respuesta no estacionaria de un perfil, que se modelará mediante una placa plana, a diferentes perturbaciones. Entre las distintas perturbaciones encontramos las ráfagas de viento, cambios instantáneos de ángulo de ataque y flexión de la placa plana. La aerodinámica no estacionaria es capaz de estudiar las fuerzas y momentos producidos en cada instante sobre la placa.

Para el desarrollo de dicho programa se ha hecho uso de la teoría potencial linealizada, que, si bien su uso queda reducido a unos pocos casos específicos, éstos abarcan la gran mayoría de los casos de interés aeronáutico. Además, la teoría potencial linealizada es de interés pedagógico pues permite también, en algunos casos concretos, obtener soluciones analíticas a los problemas.

Sin embargo, con el desarrollo de la tecnología y, en concreto, de los métodos computacionales, se han desarrollado métodos mucho más sofisticados, que dan resultados más cercanos a la realidad, que serían impensables hasta hace unos pocos años. Combinando la teoría potencial linealizada con los avanzados métodos computacionales se tienen unos programas que en tiempos cortos puedan obtener resultados más que aceptables.

En este texto se propone un programa capaz de resolver el problema para distintos casos, teniendo el usuario completa libertad de variar los *inputs*, los saltos temporales y el número de vórtices de la estela.

A continuación, se citan algunas de las hipótesis simplificadoras que se han tomado para resolver el problema, especialmente para obtener un flujo potencial:

- I. El fluido alrededor del ala es incompresible, no viscoso e irrotacional.
- II. La placa es plana, la curvatura del perfil no influye en las variables aerodinámicas calculadas.
- III. El ángulo de ataque es pequeño, lo que nos permite hacer las aproximaciones sujetas a dichos ángulos.

En pocas palabras, nuestro programa toma una cuerda del perfil, un ángulo de ataque y una condición de vuelo y devuelve coeficientes de sustentación, coeficientes de momentos, fuerzas aerodinámicas y la velocidad de flameo. Todo ello en función del tiempo.

Con todo esto, el usuario podrá estudiar la influencia de distintos parámetros en el comportamiento aeroelástico del perfil, pudiendo conocer de antemano las velocidades límite a las que se puede volar antes de entrar en inestabilidades.

2. Fundamento teórico

Los principales conceptos que han de tenerse claros para la correcta comprensión de este tipo de métodos son la circulación y la vorticidad. Hay que entender la circulación Γ como el movimiento del fluido a través un camino. La circulación a través de una curva queda definida como:

$$\Gamma = \int_L \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

Siendo $d\vec{l}$ la diferencial de línea.

Si la línea a lo largo de la cual se ha calculado la circulación es una curva cerrada, podremos hacer uso del teorema de Stokes y podremos aplicar la integral a una superficie, que se expresa de la forma:

$$\Gamma = \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{\sigma}$$

Sin duda, no podríamos describir el problema sin hacer uso de las ecuaciones de conservación de Navier Stokes. Dichas ecuaciones son el sustento matemático del estudio de los flujos. Estas ecuaciones se pueden escribir de forma que describan la conservación de masa, momento y energía a través del flujo.

En primer lugar, tenemos la ecuación de conservación de la masa:

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} + \nabla \cdot (\rho \cdot \vec{v}) = 0$$

En segundo lugar, tenemos la ecuación de cantidad de movimiento:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \vec{\tau} + \rho \vec{f}_m$$

Donde $\vec{\tau}$ es el tensor de esfuerzos viscosos y \vec{f}_m son las fuerzas másicas, que serán siempre despreciables para los movimientos de gases. Esta ecuación de conservación de momento representa la segunda ley de Newton. Esta ecuación representa la variación del momento en el lado izquierdo de la ecuación y sus causas en el derecho.

La ecuación de la energía no será útil para la solución del problema de forma que no se expondrá en este texto.

2.1. Teoría potencial

Como se ha comentado anteriormente, una de las hipótesis más fuertes que se realizan es la del flujo potencial. Para ello el flujo ha de cumplir una serie de condiciones que se citarán a continuación.

La primera simplificación viene de negar la influencia de las fuerzas viscosas en el flujo. En los casos de interés aeronáuticos se tiene un número de Reynolds del orden de $10^6 - 10^7$, lo que

implica que el término convectivo es del orden de entre uno y diez millones de veces superior a los esfuerzos viscosos, por lo que podremos ignorarlos sin cometer un error significativo.

Una segunda asunción es que el flujo será incompresible. Evidentemente, ningún flujo real es completamente incompresible, pero sí puede llegar a ser casi incompresible. La incompresibilidad implica una velocidad del sonido infinita, por lo que, independientemente de la altura, el flujo tendrá números de Mach mucho menores que la unidad. La incompresibilidad nos da una ecuación de la conservación de la masa de la siguiente forma:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

Por último, tenemos que el flujo ha de ser irrotacional. Es decir, la vorticidad se conserva a lo largo del flujo. Además, siendo la vorticidad nula aguas arriba de la corriente, pues el aire está en calma, también lo será aguas abajo de la misma.

Tras haber realizado las anteriores hipótesis tenemos una variedad de casos a estudiar limitada. Por ejemplo, la capa límite no existe cuando se considera flujo potencial. Tampoco se podrán estudiar casos en los que el flujo sea turbulento.

De esta forma, el movimiento viene gobernado por la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

Donde ϕ es el potencial del que deriva la velocidad. Además de la teoría potencial, ésta es también lineal, de forma que es lícito aplicar una superposición de resultados denominados elementales. Estas soluciones elementales son las correspondientes a sumideros, manantiales, torbellinos y dobletes que se han visto en clase y cuya explicación excede el interés de este texto.

2.2. Condiciones de contorno

Hasta este momento la teoría potencial se ha presentado como una herramienta poderosa capaz de analizar flujos no viscosos, incompresibles e irrotacionales. Sin embargo, como se ha comentado también, la teoría potencial por sí sola no es capaz de imponer una circulación que sea capaz de generar sustentación. Cualquier circulación genera un flujo válido alrededor del perfil, de forma que necesitaremos una condición de contorno que puedan fijar una circulación.

Esta condición de contorno es la de Kutta. Esta condición impone que el flujo no debe ser capaz de rebordear el borde de salida, imponiendo que el punto de remanso posterior esté exactamente en el borde de salida. Esto se debe a que la condición de Kutta enuncia que la presión a la salida ha de ser igual tanto en el intradós como en el extradós, de forma que para un borde de salida no de retroceso esto únicamente puede cumplirse para velocidades nulas.

Una vez se tenga la circulación fijada de forma que el punto de remanso esté en el borde de salida, es fácil obtener la sustentación mediante la fórmula de Kutta – Yukovski:

$$L = \rho \Gamma U_{\infty}$$

De la obtención de la fórmula de Kutta – Yukovski se obtiene también que la resistencia es estrictamente nula (lo que sabemos que no ocurre en la realidad, aunque solo sea por efectos puramente de fricción), obteniéndose la paradoja de D’Alambert.

La segunda condición de contorno a imponer es que la placa sea una superficie fluida, es decir, que el gasto a su través sea nulo. Esto se consigue imponiendo que la velocidad normal a la placa sea nula.

2.3. Métodos de validación

Los valores obtenidos con el código desarrollado han de ser validados. Para ello, se utilizarán funciones analíticas que dan valores aproximados de la solución. Téngase en cuenta que los valores obtenidos no serán idénticos y que el error será grande en las primeras iteraciones, sin embargo, al aumentar el número de pasos temporales ambas soluciones deberán converger a una sola.

Se tiene un primer caso de oscilaciones a flexión del perfil considerado. Dichas oscilaciones pueden modelarse como funciones periódicas que se pueden escribir como:

$$Z_p = h_0 e^{i\omega t}$$

Esta expresión ha de ser adimensionalizada. De esta forma aparece el dominio temporal adimensional τ y la frecuencia reducida κ . Cabe destacar que la frecuencia reducida, además de determinar el movimiento de la placa, gobierna el comportamiento de la estela.

La solución analítica no estacionaria se plantea a partir de la ecuación de coeficientes de presiones particularizada para el movimiento del perfil. El desarrollo matemático no es objeto de interés de este texto, de forma que se obviará.

Atendiendo al análisis individual de cada uno de los términos del coeficiente de sustentación, éstos representan la sustentación de origen circulatorio que queda modificado por la función de Theodorsen.

Se tiene un segundo caso en el que se dan cambios instantáneos en el ángulo de ataque. Estas situaciones se dan cuando el perfil penetra o se induce en un campo de velocidades de forma repentina. La solución analítica viene dada por lo que se conoce como función de Wagner.

Se estudiará también un tercer caso en el que el perfil se somete a una ráfaga transversal. Existe cierta semejanza con el caso anterior, de hecho, la forma de la solución será muy parecida al caso de los cambios en el ángulo de ataque. La diferencia radica en el que ahora no se da un cambio instantáneo en el campo de velocidades inducido, sino que esta se modifica progresivamente. En este texto solo se estudiarán los campos de velocidades inducidos por ráfagas escalón, que no son muy representativas de la realidad. La solución analítica se evaluará mediante la función de Küssner.

Nótese que, por una incomprensión del enunciado, este grupo ha resuelto el problema propuesto habiendo desacoplado los dos grados de libertad de flexión y torsión, de forma que los resultados no son los que el lector se esperaba encontrar.

3. Implementación del código

El código de Matlab es un solucionador de flujos potenciales no estacionarios mediante estelas discretas descritas en el libro de *Joseph Katz y Allen Plotkin*. Este método resuelve flujos “congelados” a cada paso temporal. Esto se basa en el supuesto de que las soluciones particulares de cada paso temporal no dependen de sus derivadas.

El primer paso del cálculo de la solución al problema es la generación de la geometría. Para ello, el programa toma una serie de *inputs* como son la cuerda del perfil, el ángulo de ataque, el número de paneles tanto en el perfil como en la estela y el tiempo final de simulación.

En segundo lugar, se busca una solución del problema aerodinámico. Para ello, se toma en primer lugar una solución estacionaria del problema, válida para cualquier tiempo anterior al inicial y que nos servirá como condición inicial para el cálculo de tiempos posteriores.

Una vez la circulación en el dominio fluido es conocida, se procede al cálculo de las fuerzas aerodinámicas:

El cálculo de la sustentación se realiza mediante el Teorema de Kutta – Yukovski generalizado, en el que se suman las sustentaciones parciales de cada panel. El cálculo de la circulación se lleva a cabo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} L \equiv F_z &= \sum_{j=1}^n \left(\rho(U_\infty + u_W + u_P)_j \Gamma_j + \Delta l_j \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^j \Gamma_k \cos \alpha \right) \\ D \equiv F_x &= - \sum_{j=1}^n \left(\rho(W_\infty + w_W + w_P)_j \Gamma_j + \Delta l_j \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^j \Gamma_k \sin \alpha \right) \\ M_{y_{LE}} &= \sum_{j=1}^n l_j \left(\rho(U_\infty + u_W + u_P)_j \Gamma_j \cos \alpha + \rho(W_\infty + w_W + w_P)_j \Gamma_j \sin \alpha + \Delta l_j \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^j \Gamma_k \right) \end{aligned}$$

Donde n es el número de paneles del perfil.

Nótese que la derivada temporal de la circulación se discretiza de la siguiente manera:

$$\left(\frac{\partial \Gamma_k}{\partial t} \right)_m = \frac{\Gamma_k^{m+1} - \Gamma_k^m}{\Delta t}$$

Con todo esto ya se tendría el cálculo de la aerodinámica no estacionaria, de forma que pasaríamos al cálculo de la velocidad de flameo mediante dos métodos distintos, siendo uno de ellos el método V-g.

Para el cálculo de la velocidad de flameo, se toman las sustentaciones y momentos del apartado anterior. Con estos dos datos se calculan las derivadas segundas de la amplitud de oscilación y el ángulo de ataque. Con estos datos se calcula los mismos parámetros en un tiempo posterior mediante un esquema temporal Euler explícito. Con estos datos recalculados podremos obtener las sustentaciones y momentos para un tiempo inmediatamente posterior. Repitiendo este proceso un número lo suficientemente grande de veces podremos ver si la solución es, o no, estable. Este proceso se repite para distintas velocidades incidentes hasta encontrar el límite de estabilidad del problema, al que se denomina velocidad de flameo.

3.1. MÉTODO V-G

Partiendo de las ecuaciones de Lagrange generalizadas, para poder obtener una solución es conveniente adimensionalizarlas. Para este fin se utilizan los siguientes valores:

$$h = \bar{h}e^{i\omega t}; \dot{h} = i\omega\bar{h}e^{i\omega t}; \ddot{h} = -\omega^2\bar{h}e^{i\omega t}$$

$$\alpha = \bar{\alpha}e^{i\omega t}; \dot{\alpha} = i\omega\bar{\alpha}e^{i\omega t}; \ddot{\alpha} = -\omega^2\bar{\alpha}e^{i\omega t}$$

$$L = \bar{L}e^{i\omega t}$$

$$M_\alpha = \bar{M}_\alpha e^{i\omega t}$$

A continuación, se agrupan los sumandos en función de $\frac{\bar{h}}{b}$ y $\bar{\alpha}$ respectivamente, teniendo en cuenta que $k = \frac{\omega b}{U_\infty}$. Se obtienen los siguientes coeficientes:

$$Cl_h = k^2 - 2ikC(k)$$

$$Cl_\alpha = -ak^2 - 2C(k) \left[1 + \left(\frac{1}{2} - a \right) ik \right] - ik$$

$$Cm_{\alpha h} = 2C(k) \left(\frac{1}{2} + a \right) ik - ak^2$$

$$Cm_{\alpha\alpha} = \left(\frac{1}{8} - a \right) k^2 - \left(\frac{1}{2} - a \right) ik + 2C(k) \left(\frac{1}{2} + a \right) \left[1 + \left(\frac{1}{2} - a \right) ik \right]$$

Una vez se han conseguido estos coeficientes, estos se introducen en una matriz denominada matriz generalizada de carga aerodinámica. Esta matriz nos será útil a la hora de resolver el problema:

$$Q = \begin{bmatrix} Cl_h & Cl_\alpha \\ Cm_{\alpha h} & Cm_{\alpha\alpha} \end{bmatrix}$$

También de las ecuaciones de Lagrange, correctamente operada se tienen las siguientes matrices:

I. Matriz generalizada de rigidez:

$$K = \begin{bmatrix} \left(\frac{\omega_\alpha}{\omega_h} \right)^2 & 0 \\ 0 & r_\alpha^2 \end{bmatrix}$$

II. Matriz generalizada de masa:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x_\alpha \\ x_\alpha & r_\alpha^2 \end{bmatrix}$$

III. Coeficiente asociado a la presión dinámica:

$$\frac{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2}{M \left(\omega \frac{c}{2} \right)^2} = \frac{1}{\mu k^2}$$

Agrupando términos, las ecuaciones de Lagrange en forma matricial quedan:

$$\left(M + \frac{1}{\mu k^2} Q - \left(\frac{\omega_\alpha}{\omega} \right)^2 (1 + i g_\alpha) K \right) \begin{bmatrix} \bar{h}/b \\ \bar{\alpha} \end{bmatrix} = [0]$$

Como es habitual el problema admite solución trivial y, para evitar que esto suceda, se tiene que cumplir la condición de que el determinante de la matriz global sea cero. El problema se reduce a encontrar los autovalores de la matriz compleja A, que se describirá a continuación. Analizando la matriz, se comprueba que es dependiente del valor de la frecuencia reducida, k , siendo muy eficiente el empleo del método V-g para la resolución de este proceso iterativo.

Primeramente, hay que conseguir un volumen suficiente de valores de las fuerzas generalizadas, calculando todas ellas para un intervalo de frecuencia reducida que va desde 1, siendo este un valor lógico experimentalmente, hasta cero o prácticamente cero. Una vez se tienen calculadas estas fuerzas generalizadas, se procede a la obtención de los autovalores del sistema, empezando el proceso iterativo por el valor más alto de frecuencia reducida. En la resolución del problema se siguen los siguientes pasos:

En primer lugar, se reescribe parte del sistema agrupando los términos en una única matriz compleja, a la que denominaremos A.

$$A = K^{-1} \left(M + \frac{1}{\mu k^2} Q \right)$$

A continuación, se resuelve un problema de autovalores de la matriz A, obteniéndose los autovalores λ_i . Con estos autovalores, que tendrán tanto parte real como imaginaria, obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que quedará descrito de la siguiente manera:

$$\omega_F = \frac{\omega_\alpha}{\text{Re}(\lambda_i)}$$

$$g_m = \frac{\text{Im}(\lambda_i)}{\text{Re}(\lambda_i)}$$

Se itera con valores de k hasta que al menos uno de sus autovalores cumpla las dos condiciones siguientes:

$$\text{Re}(\lambda_i) > 0$$

$$g_m = 0$$

En ese momento, se ha encontrado el autovalor correspondiente a la velocidad de flameo, que viene dada por la siguiente expresión:

$$U_F = \frac{\omega_F b}{k}$$

Se han ido dando sucesivos valores de k de la siguiente manera: $k = 1$ hasta $k = 0.000001$ en pasos de 0.000001 .

Puesto que se va analizando la parte real e imaginaria de los autovalores obtenidos con un intervalo discreto de valores de k , no es posible encontrar aquel que cumpla la condición de $g_m = 0$. Por ello, es preciso encontrar un valor lo más cercano posible a 0, de modo que se ha resuelto con:

$$|g_m| < 0.00001$$

4. Resultados obtenidos

Como se ha comentado anteriormente, algunos de los resultados obtenidos no son los esperados puesto que no se entendió a la perfección el planteamiento y solicitudes del problema. En nuestro caso,

A continuación, se muestran los resultados obtenidos en la validación de las perturbaciones realizadas.

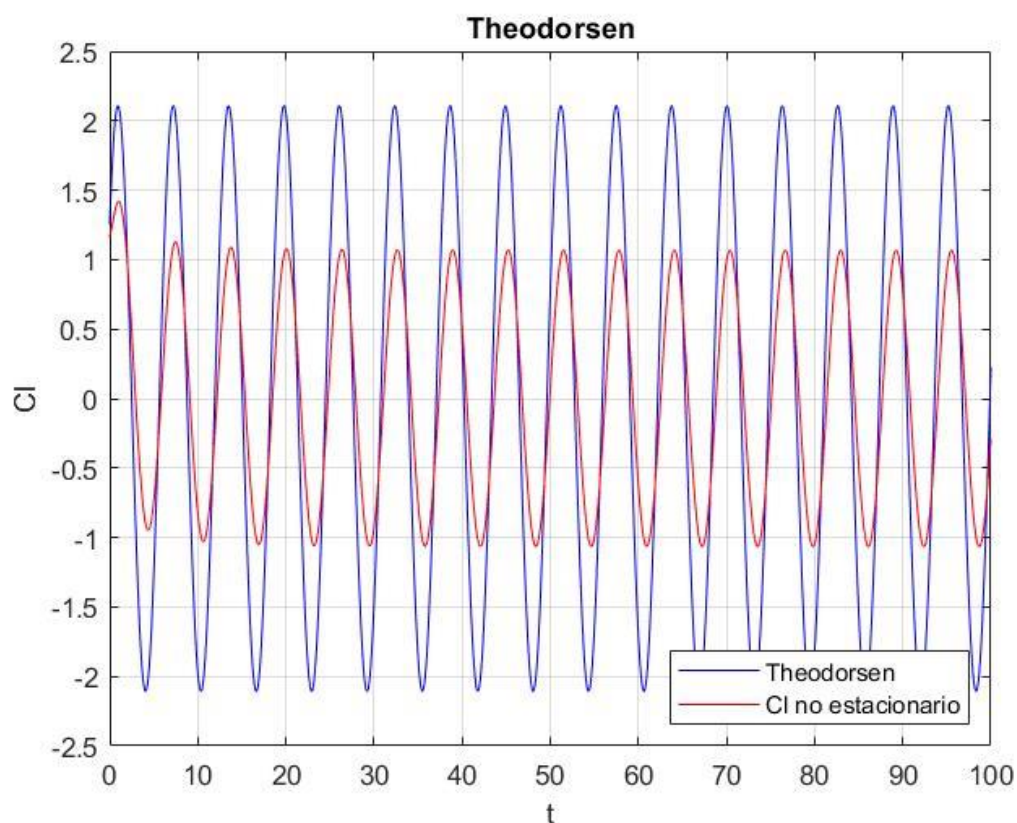


Figura 1: Comparativa del coeficiente de sustentación calculado numéricamente con el dado por la función de Theodorsen

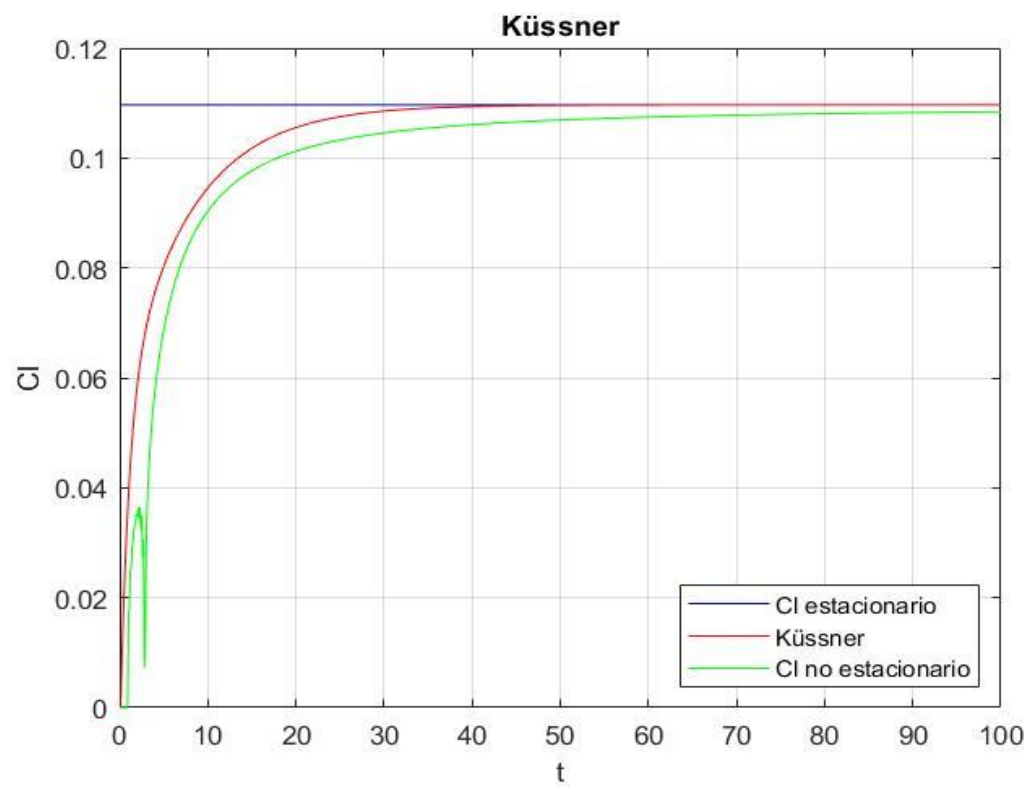


Figura 2: Comparativa del coeficiente de sustentación calculado numéricamente con la función de Küssner

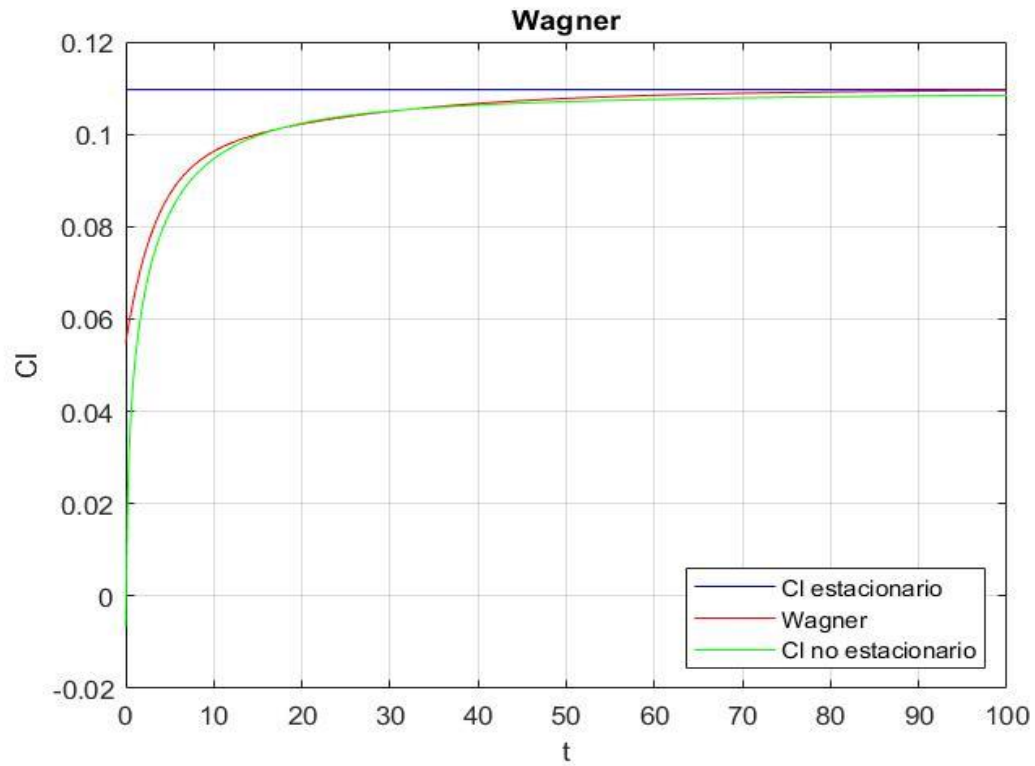


Figura 3 Comparativa del coeficiente de sustentación calculada numéricamente con la función de Wagner

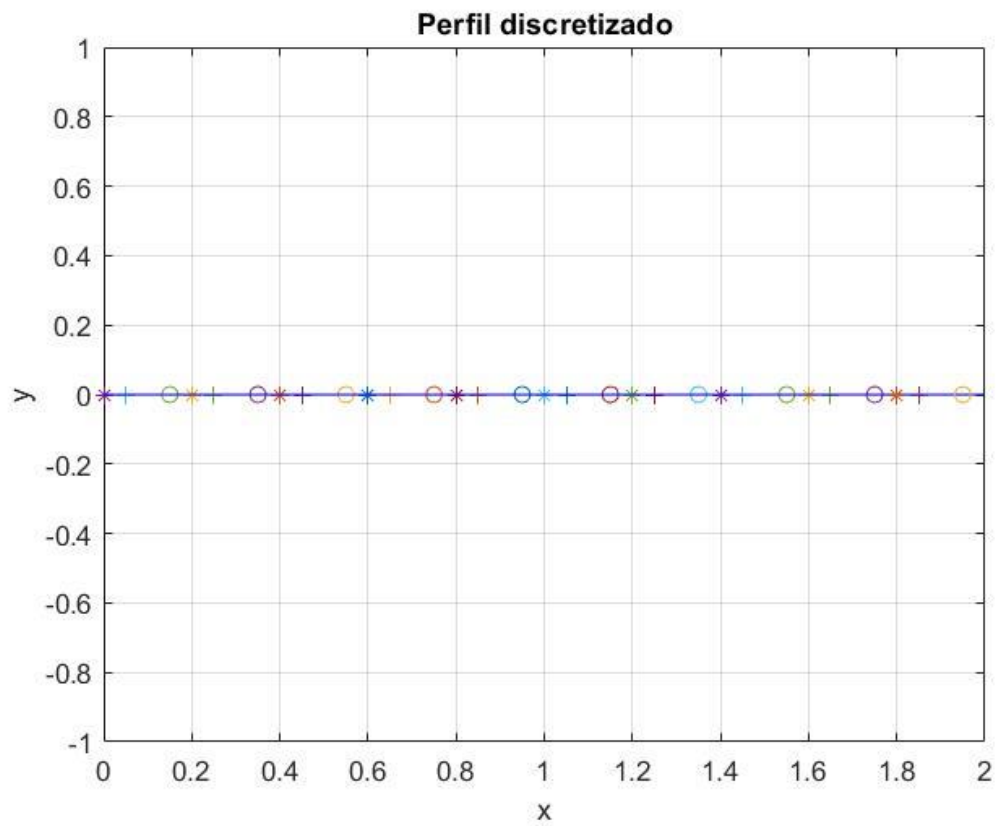


Figura 4 Discretización del perfil

De estas graficas se deduce que la aerodinámica no estacionaria está correctamente calculada, pues en todos los casos (flexión, cambio instantáneo de ángulo de ataque y ráfaga) el valor calculado converge a las soluciones analíticas para tiempos suficientemente largos.

En segundo lugar, se ha calculado la velocidad y frecuencia a la cual el perfil entra en inestabilidad, es decir, flamea. Para los datos introducidos, tenemos que:

$$U_{flameo} = 13.86 \text{ m/s}$$

$$\omega_{flameo} = 1,2757 \text{ rad/s}$$

Que coincide con lo que se esperaba.

5. Bibliografía

PERALES PERALES, J. M., *Aerodinámica y Mecánica del Vuelo*, ETSIAE, Madrid, 2013.

KATZ, J., Y PLOTKIN A., *Low Speed Aerodynamics*, San Diego State University, San Diego, 1991.

MUÑOZ SOLER, F., *Implementación del método Vortex-Lattice para el cálculo de la Aerodinámica no Estacionaria de alas en régimen incompresible*, Universidad de Sevilla, Sevilla, 2016.

COLERA RICO, M., *Cálculo numérico del flujo potencial linealizado no estacionario alrededor de perfiles en régimen compresible subsónico por método de diferencias finitas*, Universidad de Sevilla, 2016

HERNÁNDEZ ILLUECA, J., *Estudio de las fuerzas aerodinámicas sobre estructuras de placas sometidas a flameo*, Universidad Politécnica de Valencia, 2017