



**T.C.**  
**NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



**ADIM GENİŞLİĞİ STRATEJİLERİ İÇİN WEB UYGULAMASI**

**Ersan ERDEM**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Haziran - 2019**

**KONYA**

**Her Hakkı Saklıdır**

## TEZ KABUL VE ONAYI

Ersan ERDEM tarafından hazırlanan "*ADIM GENİŞLİĞİ STRATEJİLERİ İÇİN WEB UYGULAMASI*" adlı tez çalışması 20/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS Tezi olarak kabul edilmiştir.

**Jüri Üyeleri**

**İmza**

**Başkan**

**Prof. Dr. Kemal AYDIN**

\_\_\_\_\_

**Danışman**

**Dr. Öğr. Üyesi Gülnur ÇELİK KIZILKAN**

\_\_\_\_\_

**Üye**

**Dr. Öğr. Üyesi Ahmet DUMAN**

\_\_\_\_\_

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Süleyman Savaş DURDURAN

Enstitü Müdürü

## **TEZ BİLDİRİMİ**

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

## **DECLARATION PAGE**

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

---

Ersan ERDEM

Tarih: 20/06/2019

# ÖZET

## YÜKSEK LİSANS TEZİ

### ADIM GENİŞLİĞİ STRATEJİLERİ İÇİN WEB UYGULAMASI

**Ersan ERDEM**

**Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Gülnur ÇELİK KIZILKAN**

**2. Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Ali Osman ÇIBIKDİKEN**

**2019, 46 Sayfa**

**Jüri**

**Prof. Dr. Kemal AYDIN**

**Dr. Öğr. Üyesi Gülnur ÇELİK KIZILKAN**

**Dr. Öğr. Üyesi Ahmet DUMAN**

Bu çalışmada, Cauchy problemlerinin nümerik çözümlerinin elde edilmesinde adım genişliği stratejilerinin online kullanımını sağlayan bir web arayüzü tasarlanmıştır. Bu web arayüzü oluşturmak için Python programlama dilinin Django web çatısı kullanılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Adım genişliği stratejisi, değişken adım genişliği, nümerik çözüm, Python, web arayüzü

# **ABSTRACT**

## **MS THESIS**

### **WEB APPLICATION FOR STEP SIZE STRATEGIES**

**Ersan ERDEM**

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE  
OF NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY**

**THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATICS**

**Advisor: Assistant Professor Gülnur ÇELİK KIZILKAN**

**Co-Advisor: Assistant Professor Ali Osman ÇIBIKDİKEN**

**2019, 46 Pages**

**Jury**

**Prof. Dr. Kemal AYDIN**

**Assist. Prof. Dr. Gülnur ÇELİK KIZILKAN**

**Assist. Prof. Dr. Ahmet DUMAN**

In this study, it has been designed an interactive web interface, providing the online use of step size strategies to obtain the numerical solutions of Cauchy problems. This web interface has been created by using Django web framework of Python programming language.

**Anahtar Kelimeler:** Step size strategy, variable step size, numerical solution, Python, web interface

# İÇİNDEKİLER

ÖZET .....	iv
ABSTRACT .....	v
ÖNSÖZ .....	vi
ŞEKİLLER LİSTESİ .....	ix
TABLolar LİSTESİ .....	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR .....	xii
1. GİRİŞ .....	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI .....	3
2.1. Nümerik Yöntemler İçin Tasarlanmış Bazı Web Siteleri .....	3
2.2. Adım Genişliği İle İlgili Yapılan Çalışmalar .....	4
3. MATERYAL VE YÖNTEM .....	7
3.1. Temel Kavramlar .....	7
3.1.1. Lipschitz Şartı .....	7
3.1.2. Picard-Lindelöf Varlık ve Teklik Teoremi .....	7
3.1.3. Euler Metodu .....	8
3.1.4. Lokal Hata .....	8
3.1.5. Nümerik İntegrasyonda Adım Genişliği Seçiminin Önemi .....	9
3.1.6. Pratik Adım Genişliği Parametresi .....	11
3.2. Adım Genişliği Stratejileri .....	12
3.2.1. Hata Analizi Tabanlı Adım Genişliği Stratejisi .....	12
3.2.2. Picard Teoremi Tabanlı Adım Genişliği Stratejisi .....	12
3.2.3. Picard Teoremi ve Hata Analizi Tabanlı Adım Genişliği Stratejisi .....	12
3.2.4. Lineer Diferansiyel Denklem Sistemleri için Adım Genişliği Stratejisi ..	13
3.2.5. Lineer Olmayan Diferansiyel Denklem Sistemleri için Adım Genişliği Stratejisi .....	13
3.3. Arayüz İçin Kullanılan Teknolojiler .....	14
3.3.1. Python .....	14
3.3.2. Django .....	15

4. ADIM GENİŞLİĞİ STRATEJİLERİ İÇİN WEB ARAYÜZÜ .....	16
4.1. Ana Sayfa ( <i>Home</i> ) .....	16
4.2. Stratejiler ( <i>Strategies</i> ) Menüsü .....	18
4.3. Hesaplamalar ( <i>Calculations</i> ) Menüsü .....	19
4.4. Simülasyonlar ( <i>Simulations</i> ) Menüsü .....	20
4.5. Arayüz Kullanımı İçin Veri Giriş Kılavuzu .....	22
5. NÜMERİK ÖRNEKLER VE UYGULAMALAR .....	23
5.1. Örnekler .....	23
5.1.1. Adım Genişliği Seçiminde Çözümün Varlığı .....	23
5.1.2. Pratik Adım Genişliği Parametresi .....	25
5.2. Uygulamalar .....	29
5.2.1. Serbest Düşen Cisim Modeli .....	29
5.2.2. İlaç Emilim Modeli: Düzensiz Kalp Atışı ve Lidocaine .....	31
5.2.3. Salgın Hastalık Modeli: SIR Modeli .....	36
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER .....	41
KAYNAKLAR .....	42
ÖZGEÇMİŞ .....	45

## ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil	Sayfa
3.1 (3.7) Cauchy probleminin analitik ve nümerik çözümü	10
4.1 Ana sayfanın ( <i>Home</i> ) görünümü	17
4.2 Kayıt ( <i>Register</i> ) ve giriş ( <i>Log in</i> ) formları	17
4.3 Stratejiler ( <i>Strategies</i> ) menüsünden strateji seçimi	18
4.4 Picard teoremi ve hata analizi tabanlı adım genişliği stratejisi	18
4.5 Hesaplamalar ( <i>Calculations</i> ) menüsünden strateji seçimi	19
4.6 Hata analizi tabanlı adım genişliği stratejisi, hesaplamalar ( <i>Calculations</i> ) menüsü, veri giriş ekranı	20
4.7 Simülasyonlar ( <i>Simulations</i> ) menüsünden strateji seçimi	20
4.8 Lineer olmayan sistemlerin nümerik integrasyonu için adım genişliği stratejisi, simülasyonlar ( <i>Simulations</i> ) menüsü, veri giriş ekranı (3x3 boyutlu)	21
5.1 (3.7) problemi için hesaplamalar ( <i>Calculations</i> ) menüsünden strateji seçimi	23
5.2 (3.7) problemi için hesaplama alanına veri girişi	24
5.3 (3.7) problemi için elde edilen nümerik çözüm değerleri	24
5.4 (3.7) problemi için simülasyonlar ( <i>Simulations</i> ) menüsünden strateji seçimi	25
5.5 (3.7) problemi için simulasyon alanına veri girişi	25
5.6 (3.7) problemi için elde edilen adım genişliği değişimi ve nümerik çözümleri	26
5.7 (5.1) problemi için hesaplamalar ( <i>Calculations</i> ) menüsünden strateji seçimi	26
5.8 (5.1) problemi için hesaplama alanına veri girişi	27
5.9 (5.1) problemi için elde edilen nümerik çözüm değerleri	27
5.10 (5.1) problemi için simülasyonlar ( <i>Simulations</i> ) menüsünden strateji seçimi	28
5.11 (5.1) problemi için simulasyon alanına veri girişi	28
5.12 (5.1) problemi için elde edilen adım genişliği değişimi ve nümerik çözümleri	29
5.13 (5.2) denklemi için hesaplamalar ( <i>Calculations</i> ) menüsünden strateji seçimi	30
5.14 (5.2) denklemi için hesaplama alanına veri girişi	30
5.15 (5.2) denklemi için elde edilen nümerik çözüm değerleri	30
5.16 (5.2) denklemi için simulasyon alanına veri girişi	31
5.17 (5.2) denklemi için elde edilen adım genişliği değişimi ve nümerik çözümleri	31
5.18 (5.3) denklemi için <i>Calculations</i> menüsünden strateji seçimi	32



5.19 (5.3) denklemi için hesaplama alanına veri girişı	33
5.20 (5.3) denklemi için elde edilen nümerik çözüm değeri	33
5.21 (5.3) denklemi için simülasyon alanına veri girişı	34
5.22 (5.3) denklemi için nümerik çözümün normu ve adım genişliğı değışimi	35
5.23 (5.3) denklemi için birinci ve ikinci bileşenin nümerik çözüm grafikleri	35
5.24 (5.5) problemi için hesaplamalar <i>Calculations</i> menüsünden strateji seçimi	37
5.25 (5.5) problemi için hesaplama alanına veri girişı	37
5.26 (5.5) problemi için elde edilen nümerik çözüm değeri (ilk 8 adım)	38
5.27 (5.5) problemi için simulasyon alanına veri girişı	38
5.28 (5.5) problemi için elde edilen nümerik çözümün normu ve adım genişliğı değışimi	39
5.29 (5.5) problemi için birinci bileşenin nümerik çözümü	39
5.30 (5.5) problemi için ikinci bileşenin nümerik çözümü	40
5.31 (5.5) problemi için üçüncü bileşenin nümerik çözümü	40

## TABLÖLAR LİSTESİ

<b><u>Tablo</u></b>	<b><u>Sayfa</u></b>
3.1 (3.7) Cauchy probleminin analitik ve nümerik çözüm değerleri .....	10
4.1 Aritmetik İşlem Operatörlerinin Girişi .....	22
4.2 Fonksiyonların Girişi .....	22
4.3 Matematiksel Sabitlerin Girişi .....	22



## SİMGELER VE KISALTMALAR

### Simgeler

$t_i$  : Grid noktaları

$h_i$  :  $i$ . adımdaki adım genişliği

$X(t_i)$  : Cauchy probleminin analitik çözümünün  $t_i$  noktasındaki değeri

$X_i$  : Cauchy probleminin  $t_i$  noktasındaki nümerik çözümü

$E_i$  : Cauchy probleminin  $i$ . adımdaki analitik çözümü ile nümerik çözümü arasındaki fark

$D$  : Konveks bölge

$D_i$  :  $D$  bölgesinin her bir alt bölgesi

$F(t, X)$  :  $X(t)$  fonksiyonun türevi

$M_i$  :  $i$ . adımda  $D_i$  bölgesi üzerinde  $F(t, X)$  fonksiyonun maksimum değeri

$Z(t)$  :  $[t_{i-1}, t_i]$  aralığında  $Z'(t) = F(t, Z)$ ,  $Z(t_{i-1}) = X_{i-1}$  Cauchy probleminin çözümü

$\varphi$  : Birinci mertebeden türevlenebilir lineer olmayan bir vektör fonksiyonu

$\alpha$  :  $A = (a_{ij})$  katsayı matrisinin normu

$\beta_i$  :  $\max_{1 \leq i, j \leq N} \left( \sup_{\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]} |z_j(\tau_i)| \right)$

$\gamma_i$  :  $\max_{1 \leq j \leq N} \left( \sup_{\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]} |\varphi_j(\tau_i, z(\tau_i))| \right)$

$\xi_i$  :  $\max_{1 \leq j \leq N} \left( \sup_{\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]} \left| \frac{d\varphi_j}{dt}(\tau_i, z(\tau_i)) \right| \right)$

$LE_i$  :  $i$ . adımdaki lokal hata

$\rho_i$  : Nümerik yöntemin  $i$ . adımda oluşan hesaplama hatası

$h^*$  : Pratik adım genişliği

$\delta_L$  : İstenilen hata seviyesi

$\|\cdot\|$  : Öklid normu

$|\cdot|$  : Mutlak değer

$L$  : Lipschitz sabiti

# 1. GİRİŞ

Günümüzde artık herkes kolaylıkla internete erişim sağlamaktadır. Bu nedenle internet kullanımına artan ilgi ile birlikte web sitelerine olan ilgi de her geçen gün artmaktadır. Web siteleri internet üzerinde kullanıcılara bilgi, belge, medya paylaşımı sunan dijital platformlardır. Blog siteleri, haber siteleri, kurumsal siteler, e-ticaret siteleri farklı şekilde sınıflandırılabilen web siteleri hemen hemen her alanda olduğu gibi eğitim alanında da kullanılmaktadır. Eğitim alanında dinamik olarak tasarlanan kullanıcı etkileşimli web siteleri öğrenme içeriğine göre hazırlanmış yönergeler ile kullanıcılara her bir adımda anlık dönütler vererek aktif bir öğrenme ortamı sunarak yarar sağlamaktadır. Böyle web sitelerinin en çarpıcı özelliği kullanıcılara içeriği görsel ve işitsel öğeler ile destekleyerek daha somut bir öğrenme biçimi sağlamalarıdır.

Matematiksel hesaplamalar için tasarlanan etkileşimli web siteleri, el ile yapılması zor hatta bazen imkansız olabilen çok adımlı hesaplama işlemlerinin hızlı bir şekilde yapılmasına imkan sağlamaktadır. Mühendislik, ekonomi, fizik, kimya, biyoloji ve daha bir çok alanda gerçek hayat problemlerini matematiksel olarak modellemek için Cauchy problemleri kullanılmaktadır. Bu nedenle modellenen bir gerçek hayat durumu hakkında fikir edinebilmek için Cauchy problemlerinin çözümünün elde edilmesi önemlidir. Fakat Cauchy problemlerinin çözümü analitik yöntemlerle hesaplanamayabilir ya da hesaplanması çok zor olabilir. Böyle durumlarda nümerik yöntemler kullanılır. Nümerik yöntemler bir  $h$  adım genişliğine bağlıdır. Nümerik çözümün analitik çözüme yeterince yakın olarak hesaplanabilmesi için adım genişliği seçimi önemlidir. Nümerik yöntemler çok adımlı işlemler olduğundan internet üzerinde bu yöntemleri kullanabilmek için tasarlanmış web siteleri bulunmaktadır. Fakat bu web siteleri nümerik yöntemler ile hesaplama yaparken sabit adım genişliği ile hesaplama yapmaktadır. Literatürde değişken adım genişliği seçimi ile hesaplanan çözümlerin analitik çözüme daha yakın olabileceğini gösteren çalışmalar mevcuttur. Değişken adım genişliği seçimi ile ilgili yapılan çalışmalarda stratejiler geliştirilmiştir.

Bu çalışmada, Cauchy problemlerinin nümerik integrasyonunda değişken adım genişliği kullanımına dikkat çekmek ve adım genişliği stratejilerin kullanımını yaygınlaştırmak

amaçlanmıştır. Bu amaç ile literatürde verilen bazı adım genişliği stratejileri için Python dili ile programlar yazılmıştır. Daha sonra yazılan bu programlara, Python dilinin Django web çatısı kullanılarak online bir şekilde erişilebilen etkileşimli bir web sitesi tasarlanmıştır.

Bu tez çalışması 6 bölümden oluşmaktadır.

1. bölümde; tez çalışmasının amacı, kapsamı ve yöntemi ile ilgili bilgiler verilmiştir.
2. bölümde; tez çalışması için yapılan kaynak araştırması verilmiştir.
3. bölümde; Cauchy problemlerinin nümerik çözümleri ile ilgili bazı temel kavramlar, web arayüzü tasarlanan adım genişliği stratejileri ve web arayüzü tasarlanırken yararlanılan teknolojiler tanıtılmıştır.
4. bölümde; web arayüzünün menüleri tanıtılmış ve arayüz kullanımı için bir kılavuz verilmiştir.
5. bölümde; arayüz üzerindeki adım genişliği stratejilerinin uygulandığı nümerik örnekler ve uygulamalar verilmiştir.
6. bölümde; tez çalışması ile ilgili sonuçlar yer almaktadır.

## 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

### 2.1. Nümerik Yöntemler İçin Tasarlanmış Bazı Web Siteleri

Nümerik yöntemler, sürekli yapıyı kesikli yapıya dönüştüren iteratif yapıları sayesinde bilgisayarda programlamaya çok uygun olmaları nedeniyle kullanışlı metodlardır. Nümerik yöntemler ard arda çok sayıda iterasyon gerektirdiğinden bir bilgisayar yardımı olmaksızın nümerik çözüm elde etmek oldukça zordur. Hatta bazen imkansızdır. Böyle durumlar için internet üzerinde kullanıcılara kolaylık sağlamak amacıyla tasarlanmış bazı web siteleri mevcuttur ([1–6]). Bu web sitelerinin ortak özelliği nümerik integrasyonda sabit adım genişliği ile çözüm hesaplamalarıdır.

[1] ile verilen web sitesini 2018 yılında Python dilinin Django web çatısını kullanarak tasarlamıştır. [1] web sitesi, lineer cebir, kalkülüs, olasılık ve istatistik gibi alanlara ait birçok hesaplamaların yapılabilmesinin yanında birinci mertebeden Cauchy problemleri için Euler ve Heun metodları ile çözüm değerlerini elde etme imkanı sunmaktadır.

Stefan Waner tarafından 2006 yılında yayınlanan [2] ile verilen web sitesi, ikinci mertebeden Cauchy problemleri için Euler metodu ile çözüm değerlerinin ve bu değerlere ait grafiğin elde edilmesini sağlamaktadır.

Jonathan R. Senning tarafından ilk versiyonu 2000 yılında yayınlanan [3] web sitesi, C dilinde yazılmıştır. Daha sonra Jonathan R. Senning, 2007 yılında web sitesinin performansını artırmak amacıyla Python dilinin gücünden yararlanarak programları yeniden yazmış ve 2009 yılında son versiyonu yayınlanmıştır. [3] ile verilen web sitesi, birinci mertebeden Cauchy problemleri için Euler, Heun ve Runge Kutta metodları ile çözüm değerlerinin ve bu değerlere ait grafiklerin elde edilmesine olanak sağlamaktadır.

Japonya merkezli Caiso Computer Co.LTD şirketi tarafından 2018 yılında PHP dilinin Apache servisi kullanılarak tasarlanmış [4]; veri analizi, finansal hesaplamalar gibi ve daha birçok hesaplama işlemlerinin yanısıra nümerik yöntemleri kullanma imkanı sunan bir web sitesidir. [4], birinci ve ikinci mertebeden Cauchy problemleri için Euler ve Runge Kutta

metodları ile çözüm değerlerinin elde edilmesine olanak sağlamaktadır.

[5], Carlos Toro tarafından 2012 yılında PHP dili ile yazılmış lineer cebir, fourier analizi, kalkülüs, lineer ve lineer olmayan programlama, diferansiyel denklemler alanlarına ait hesaplama işlemlerinin yapılabilmesini sağlayan bir ile verilen web sitesidir. [5],  $5 \times 5$  boyuta kadar Cauhcy problemleri için Euler, Runge Kutta ve Felhberg metodları ile çözüm grafiğinin elde edilmesine olanak sunmaktadır..

[6], Jürgen Brandes tarafından 2011 yılında PHP ve JavaScript teknolojileri kullanılarak tasarlanmış matris, kalkülüs hesaplamaları, grafik çizdirme ve daha birçok hesaplama yapmaya imkan sunan bir web sitesidir. [6],  $3 \times 3$  boyuta kadar Cauhcy problemleri için Euler, Heun ve 4. mertebeden Runge kutta metodları çözüm grafiğinin elde edilmesine imkan sunmaktadır.

## 2.2. Adım Genişliği İle İlgili Yapılan Çalışmalar

Literatürde, adım genişliği seçimi ile ilgili bir çok çalışma mevcuttur. Bu çalışmalar-dan bazıları aşağıda verilmiştir.

$$x'(t) = f(t, x), x(t_0) = x_0 \quad (2.1)$$

Jorba ve Zou, [7] çalışmasında;  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m, (m \geq 1)$  ve  $f$  türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere (2.1) Cauchy probleminin yüksek mertebeden Taylor metodu ile nümerik integrasyonu için  $m$ . adımdaki adım genişliğini,

$$h_m = \frac{\rho_m}{e^2} \exp\left(-\frac{0.7}{p_m - 1}\right)$$

formülü ile hesaplamışlardır. Burada  $m$ . adımdaki istenilen hata seviyesi  $\varepsilon_m$ , yakınsaklık yarıçapı  $\rho_m$ , mertebe  $p_m = \left\lceil -\frac{1}{2} \ln(\varepsilon_m) + 1 \right\rceil$  dir.

Söderlind, [8] çalışmasında; (2.1) Cauchy probleminin nümerik integrasyonu için  $n$ . adımdaki adım genişliğini

$$h_{n+1} = \left( \frac{\theta TOL}{r_n} \right)^\beta \left( \frac{\theta TOL}{r_{n-1}} \right)^\beta h_n$$

olarak hesaplamıştır. Burada  $\theta \in \mathbb{R}, TOL$ ; istenilen hata seviyesi,  $\beta$ ; uygulanacak metodun mertebesine bağlı bir parametre ve  $r_n$ ;  $n$ . adımdaki lokal hatadır.

[9], çalışmasında Nazreen ve arkadaşları tarafından;

$$y^d = f(x, y, \dots, y^{d-1}), y^i(a) = \eta_i, 0 \leq i \leq d-1, x \in [a, b] \quad (2.2)$$

(2.2) yüksek mertebeden Cauchy problemi ele alınmıştır. (2.2) Cauchy probleminin 2-noktalı blok metodu ile nümerik integrasyonu için adım genişliğini

$$h_{new} = \delta \times h_{old} \times \left( \frac{TOL}{LTE} \right)^{\frac{1}{k}}$$

eşitliği ile vermiştir. Burada  $k$  doğrulayıcı metodun mertebesi,  $\delta$  güvenlik çarpanı,  $TOL$  istenilen hata seviyesi,  $LTE$  lokal kesme hatasıdır. Eğer  $LTE < 0.1 \times TOL$  ise adım başarılıdır. Aksi takdirde son adım genişliği yarıya indirilir.

Ritshel, [10] çalışmasında; (2.1) Cauchy probleminin  $p$ . mertebeden Runge Kutta metodu ile nümerik integrasyonu için iki farklı adım genişliği seçimi stratejisi vermiştir.

- $E_{n+1}; (n+1)$ . adımın lokal kesme hatası ve  $\varepsilon$  istenilen hata seviyesi olmak üzere  $n$ . adımdaki adım genişliğini

$$h_{n+1} = h_n \left( \frac{\varepsilon}{E_{n+1}} \right)^{\frac{1}{p+1}}$$

formülü ile hesaplamıştır.

- $k_l = \frac{0.4}{p+1}, k_p = \frac{0.3}{p+1}, E_n; n$ . adımın lokal kesme hatası ve  $\varepsilon$  istenilen hata seviyesi olmak üzere  $n$ . adımdaki adım genişliğini

$$h_{n+1} = h_n \left( \frac{\varepsilon}{E_{n+1}} \right)^{k_l} \left( \frac{E_n}{E_{n+1}} \right)^{k_p}$$

olarak hesaplamıştır.

[11] çalışmasında Golberg, (2.1) Cauchy probleminin Euler metodu ile nümerik integrasyonu için  $\varepsilon$  istenilen hata seviyesi olmak üzere,

$$x_{k+1}^{(i)} = x_k^{(i)} + h_i f(t_k, x_k^{(i)})$$

eşitliğini ele almıştır. Burada  $x_n^{(i)}$  değerleri  $x_0^{(i)} = x_0$  eşitliği kullanarak hesaplanmaktadır.  $|x_{n_{i+1}}^{(i+1)} - x_{n_i}^{(i)}|$  ifadesi yeterince küçük olana kadar iterasyon uygulanarak  $i$ . adımdaki adım genişliğini,



$$h_{i+2} = q \frac{(h_i - h_{i+1})\varepsilon}{|x_{n_{i+1}}^{(i+1)} - x_{n_i}^{(i)}|}, q < 1$$

formülü ile hesaplamıştır.

Çelik Kızılkın, [12] çalışmasında birinci mertebeden Cauchy problemlerinin nümerik integrasyonu için üç farklı adım genişliği stratejisi vermiştir. [12] çalışmasındaki,

- Picard teoremi tabanlı adım genişliği stratejisi; çözümün var tek olduğu bir bölgenin her bir alt bölgesinde Picard teoremi uygulanarak bir adım genişliği stratejisi elde edilmiştir.
- Hata analizi tabanlı adım genişliği stratejisi; çözümün var tek olduğu bir bölgede analitik çözüm yerine kullanılabilecek kadar yakın bir çözüm elde edebilmek için lokal hatayı hesaba katarak elde edilen bir adım genişliği stratejisidir.
- Picard teoremi ve hata analizi tabanlı adım genişliği stratejisi; çözümün var tek olduğu bilinmediği durumlarda nümerik çözüm hesaplayabilmek için Picard teoremi tabanlı adım genişliği stratejisi ile hata analizi tabanlı adım genişliği stratejisi birleştirilerek elde edilmiştir.

Çelik Kızılkın, [13] çalışmasında lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklem sistemlerinin nümerik integrasyonu için [12] çalışmasında verilen hata analizi tabanlı adım genişliği stratejisini geliştirerek adım genişliği stratejileri elde etmiştir.

### 3. MATERYAL VE YÖNTEM

#### 3.1. Temel Kavramlar

$F(t, X) \in \mathbb{R}^N$ ,  $X(t) = x_j(t)$ ,  $X_0 = (x_{j0})$ ,  $x_{j0} = x_j(t_0)$ ,  $X(t)$ ,  $X_0$ ,  $b = (b_j) \in \mathbb{R}^N$  olmak üzere

$$D = \{(t, X) : |t - t_0| \leq a, |x_j - x_{j0}| \leq b_j\} \quad (3.1)$$

bölgesi üzerinde

$$X'(t) = F(t, X), \quad X(t_0) = X_0 \quad (3.2)$$

Cauchy problemini ele alalım.  $N = 1$  için  $F(t, X)$ ,  $x_j$ ,  $b_j$  sırasıyla  $f(t, x)$ ,  $x$ ,  $b$  şeklinde gösterilecektir.

(3.2) Cauchy problemi için Lipschitz şartı kavramını verelim.

##### 3.1.1. Lipschitz Şartı

$(t, X_1), (t, X_2) \in D$  olmak üzere

$$||F(t, X_1) - F(t, X_2)|| \leq L||X_1 - X_2||$$

olacak şekilde bir  $L > 0$  sabiti var ise  $F(t, X)$  fonksiyonu  $\mathbb{R}^N$  deki  $D$  kümesi üzerinde  $t$  değişkenine göre *Lipschitz şartını* sağlar denir. Buradaki  $L$  sayısına da *Lipschitz sabiti* denir ([14–20]).  $N = 1$  için  $||.||$ , mutlak değere karşılık gelir.

(3.2) Cauchy problemi için varlık ve teklik teoremi olan Picard-Lindelöf teoremini verelim.

### 3.1.2. Picard-Lindelöf Varlık ve Teklik Teoremi

$f(t, x), (t_0, x_0)$  noktasını çevreleyen (3.1)  $D$  bölgesi üzerinde Lipschitz şartını sağlayan sürekli bir fonksiyon ise

$$h = \min\{a, \frac{b}{M}\}, \max_{(\eta, \xi) \in D} |f(\eta, \xi)| \leq M$$

olmak üzere (3.2) Cauchy probleminin  $|t - t_0| < h$  aralığı üzerinde çözümü var ve tektir ([14], [18], [19], [21]).

Bu çalışmada adım genişliği stratejilerinin daha iyi anlaşılabilmesi için iyi bilinen nümerik metodlardan olan Euler metodu kullanılmıştır. Şimdi Euler metodunu tanıtalım.

### 3.1.3. Euler Metodu

(3.2) Cauchy problemi için  $h = t_i - t_{i-1}$  adım genişliği olmak üzere Euler metodu

$$X_i = X_{i-1} + hF(t_{i-1}, X_{i-1}) \quad (3.3)$$

denklemleri ile verilir ([19–23]).  $M; \max_{0 \leq i \leq N} \|X''(t_i)\| = M$  ve  $L$ ; Lipschitz sabiti olmak üzere

Euler metodunun  $i$ . iterasyonunda oluşan hata için üst sınırı

$$\|X(t_{i+1}) - X_{i+1}\| = \|E_i\| \leq \frac{hM}{2L} [e^{(t_i - t_0)L} - 1] \quad (3.4)$$

eşitsizliği ile verilir ([20], [22], [23]).

(3.2) Cauchy problemi için lokal hata kavramını verelim.

### 3.1.4. Lokal Hata

$[t_{i-1}, t_i]$  aralığında  $Z(t)$ ;

$$Z'(t) = F(t, Z), \quad Z(t_{i-1}) = X_{i-1} \quad (3.5)$$

Cauchy probleminin çözümü olmak üzere  $i$ . adımdaki lokal hata  $LE_i = X_i - Z(t_i)$  olarak tanımlanır ([19], [23], [24]).  $N = 1$  için  $Z(t)$ ;  $z(t)$  ile gösterilecektir.

### 3.1.5. Nümerik İntegrasyonda Adım Genişliği Seçiminin Önemi

Nümerik integrasyonda adım genişliği seçiminin hesaplanan çözüme nasıl etki edeceğini Euler metodunun hata analizi yardımıyla inceleyelim. Euler metodunun hatası için (3.4) denklemi ile verilen

$$||E_i|| \leq \frac{hM}{2L} [e^{(t_i-t_0)L} - 1]$$

üst sınırını ele alalım. Burada  $||E_i||$  hatasının üst sınırı  $h$  adım genişliği ile orantılıdır. Yani adım genişliği arttıkça hata da artar. Bu nedenle nümerik çözümün analitik çözüme mümkün olduğunca yakın olabilmesi için  $h$  adım genişliğinin yeterince küçük seçilmesi gerekmektedir. Bununla birlikte bu analizler yapılırken oluşan hesaplama hatalarının ihmal edildiği görülmektedir. Gerçekte,  $\rho_i$  her bir adımda oluşan hesaplama hatası olmak üzere (3.3) ile verilen Euler metodu

$$X_{i+1} = X_i + hF(t_i, X_i) + \rho_i$$

şeklinde ifade edilir ([22]). Her  $i$  için  $|\rho_i| < \rho$  olduğunu kabul edilirse Euler metodunda oluşan hata için

$$||E_i|| \leq \frac{e^{(t_i-t_0)L} - 1}{L} \left[ \frac{hM}{2L} + \frac{\rho}{h} \right] \quad (3.6)$$

sınırı elde edilir. Burada  $\frac{\rho}{h}$  teriminden dolayı  $h$  adım genişliği küçüldükçe yapılan hata miktarının artacağı görülmektedir. Bu durum hesaplanan çözümün analitik çözümden uzaklaşmasına yol açabilir. Dolayısıyla hesaplanan çözümün analitik çözüme yakınsaması için adım genişliğinin ilk adımında nasıl seçilmesi gerektiği önemlidir.

İlaveten nümerik integrasyonda adım genişliği seçilirken ele alınan Cauchy probleminin çözümünün var ve tek olduğu bölge dikkate alınmalıdır. Aksi halde adım genişliği problemi, çözümün olmadığı bir nokta ya da bir bölgeye itebilir. Örneğin;

$D = \{(t, x) : |t - 3| \leq 2, |x - 1| \leq 5\}$  bölgesi üzerinde analitik çözümünü kolaylıkla elde edebileceğimiz

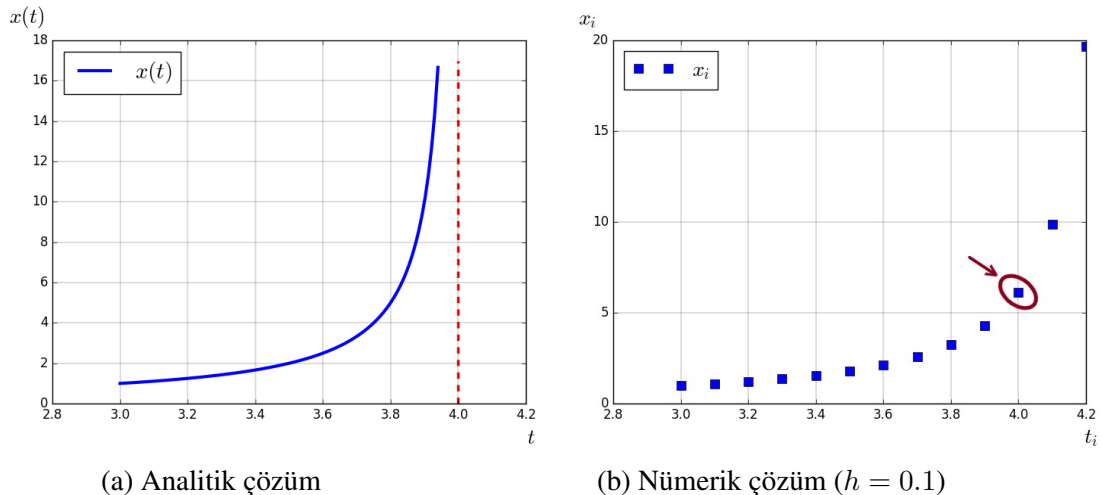
$$x'(t) = x^2, x(3) = 1 \quad (3.7)$$

Cauchy problemini ele alalım. (3.7) Cauchy probleminin analitik çözümü  $x(t) = \frac{1}{4-t}$  olup fonksiyonun grafiği Şekil 3.1a da verilmiştir. Şekil 3.1a dan görüleceği üzere  $t \rightarrow 4$  iken  $x(t) \rightarrow \infty$  gider.  $x(t)$  fonksiyonu  $t = 4$  noktası için tanımsızdır.  $h = 0.1$  adım genişliği (3.7) Cauchy probleminin nümerik çözümünü inceleyelim. Bunun için Euler metodunu kullanalım. (3.7) Cauchy probleminin elde edilen nümerik değerleri Tablo 3.1 ile verilmiştir.

**Tablo 3.1. (3.7) Cauchy probleminin analitik ve nümerik çözüm değerleri**

$i$	$t_i$	$x(t_i)$	$x_i$
0	3	1	1
1	3.1	1.111111	1.1
2	3.2	1.25	1.221
3	3.3	1.428571	1.3700841
4	3.4	1.666666	1.55779714
6	3.5	2.0	1.80047033
7	3.6	2.5	2.12463968
8	3.7	3.333333	2.57604906
9	3.8	5.0	3.23965193
10	3.9	14.285714	4.28918640
11	4	$\infty$	6.12889840
12	4.1	-10	9.88523796
13	4.2	-5	19.6570309

Nümerik çözüm değerleri için elde edilen grafik Şekil 3.1b de görülmektedir. Bu grafiği çizdirmek için Python dilinin Matplotlib kütüphanesinden yararlanılmıştır.



**Şekil 3.1. (3.7) Cauchy probleminin analitik ve nümerik çözümü**

(3.7) Cauchy probleminin çözümü  $t = 4$  noktasında tanımlı olmamasına rağmen Şekil 3.1b de görüldüğü gibi  $t = 4$  noktasında nümerik çözümü  $x(4) \approx 6.12889840$  olarak elde edilmiştir.

Yukarıdaki basit örnek nümerik integrasyonda adım genişliği seçiminin oldukça önemli olduğunu göstermektedir. Hesaplanan nümerik çözümün analitik çözüme yakınsaması için adım genişliği, çözümün hızlı değiştiği bölgede küçük yavaş değiştiği bölgede ise daha büyük seçilmelidir.

### 3.1.6. Pratik Adım Genişliği Parametresi

Bilgisayarlar, reel sayılar kümesinin tüm elemanları ile işlem yapamazlar. Bu nedenle bilgisayarlar rasyonel sayılar kümesinin sonlu bir alt kümesi olan *bilgisayar sayıları kümesi*(*format kümesi*) ile çalışırlar. Sonsuz elemanlı bir kümenin elemanları sonlu bir küme üzerinde yaklaşık olarak temsil edileceğinden bir reel sayı, format kümesindeki kendisine en yakın olan sayı olarak temsil edilir. Format kümesi bir en küçük ve en büyük elemana sahiptir. Eğer bir bilgisayar, format kümesinin en küçük elemanından daha küçük bir sayı ile karşılaşır o sayıyı "0" (sıfır) olarak görür.

Bilgisayar üzerinde değişken adım genişliği ile nümerik çözüm hesaplarken  $h_n$  adım genişliği format kümesinin en küçük elemanından daha küçük olduğunda  $h_n = 0$  olarak alınır. Bu durumda hesaplama işlemine devam edilmesi gereksiz olacaktır. Dolayısıyla hesaplama algoritmasını durduracak bir parametreye ihtiyaç vardır.  $h^*$  kullanıcının belirlediği yeterince küçük bir parametre olmak üzere  $h_n < h^*$  olduğunda  $h^*$  hesaplama algoritması durduracaktır. Burada  $h^*$ , *pratik adım genişliği parametresi* olarak isimlendirilmiştir ([12]).

## 3.2. Adım Genişliği Stratejileri

Tasarlanan web arayüzü üzerinde kullanıma sunulan çalışmalarında verilen adım genişliği stratejilerini tanıtalım.

### 3.2.1. Hata Analizi Tabanlı Adım Genişliği Stratejisi

(3.1) de verilen  $D$  bölgesi üzerinde (3.2) Cauchy probleminin çözümü var ve tek olsun. (3.2) Cauchy probleminin analitik çözümü yerine kullanılabilecek kadar yakın bir nümerik çözüm hesaplayabilmek için lokal hata dikkate alınabilir. Bu takdirde  $i$ . adımdaki adım genişliği integrasyonun her bir adımında kullanılan nümerik metodun lokal hatası istenilen bir  $\delta_L$  hata seviyesinden küçük kalacak şekilde

$$h_i = \sqrt{\frac{2\delta_L}{M_{t_i}}}$$

olarak seçilir. Burada  $\max_{\tau \in [t_{i-1}, t_i]} |Z''(\tau)| \leq M_{t_i}$ ,  $X_i$ ;  $i$ . adımdaki elde edilen nümerik çözümü ve  $Z(t)$ ; (3.5) Cauchy probleminin çözümüdür ([12], [25]).

### 3.2.2. Picard Teoremi Tabanlı Adım Genişliği Stratejisi

(3.1) de verilen  $D$  bölgesi üzerinde (3.2) Cauchy probleminin çözümü var ve tek olsun. Picard-Lindelöf varlık ve teklik teoreminde olduğu gibi  $D$  bölgesinin  $D_i = \{(t, x) : |t - t_i| \leq h_i, |x - x_i| \leq b\}$  alt bölgesi oluşturulsun. Burada  $\max_{(\eta, \xi) \in D_i} |f(\eta, \xi)| \leq M_i$  olmak üzere nümerik integrasyonun  $i$ . adımında adım genişliği

$$h_i = \min\left\{a, \frac{b}{M_i}\right\}$$

formülü ile hesaplanır ([12],[26]).

### 3.2.3. Picard Teoremi ve Hata Analizi Tabanlı Adım Genişliği Stratejisi

(3.2) Cauchy probleminin çözümünün var ve tek olduğu bilinmediği durumlarda bölüm (3.2.1) ve (3.2.2) de verilen stratejiler birleştirilerek Picard teoremi ve hata analizi tabanlı adım genişliği stratejisi elde edilmiştir.  $z(t)$ ; (3.5) Cauchy probleminin çözümü,  $x_i$ ;  $i$ . adımdaki elde edilen nümerik çözüm,  $b_{i-1}$ ;  $|z - x_{i-1}|$  lokal hata için üst sınır,  $b_{0i-1} = \min\{b_{0i-2}, b_{i-1}\}$ ,  $D_{i-1} = \{(t, x_{i-1}) : |t - t_{i-1}| \leq a, |z - x_{i-1}| \leq b_{0i-1}\}$  ve  $\max_{(\eta, \xi) \in D_{i-1}} |f(\eta, \xi)| \leq M_i$  olmak üzere  $i$ . adımdaki adım genişliği

$$h_i = \min\left\{a, \frac{b_{0i-1}}{M_i}\right\}$$

olarak hesaplanır ([12],[26]).

### 3.2.4. Lineer Diferansiyel Denklem Sistemleri için Adım Genişliği Stratejisi

$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ,  $X \in \mathbb{R}^N$  olmak üzere  $F(t, X) = AX$  olması durumunda (3.2) Cauchy probleminin nümerik integrasyonu için nümerik metodun hata analizi dikkate alınırsa  $i$ . adımdaki adım genişliği integrasyonun her bir adımında kullanılan nümerik metodun lokal hatası istenilen bir  $\delta_L$  hata seviyesinden küçük kalacak şekilde

$$h_i = \frac{1}{\alpha \sqrt[4]{N^5}} \sqrt{\left(\frac{2\delta_L}{\beta_{i-1}}\right)}$$

olarak tanımlanır. Burada  $\alpha = \max_{1 \leq i, j \leq N} |a_{ij}|$ ,  $\max_{1 \leq i, j \leq N} \left( \sup_{\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]} |z_j(\tau_i)| \right) \leq \beta_{i-1}$  ve  $j = 1, 2, \dots, N$  için  $z_j(t)$  (3.5) Cauchy probleminin çözüm vektörünün bileşenleridir ([13], [27–29]).

### 3.2.5. Lineer Olmayan Diferansiyel Denklem Sistemleri için Adım Genişliği Stratejisi

$\varphi \in C^1([t_0 - a, t_0 + a] \times \mathbb{R}^N)$ ,  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ,  $X \in \mathbb{R}^N$  olmak üzere  $F(t, X) = AX + \varphi(t, X)$  olsun. (3.2) Cauchy probleminin nümerik integrasyonunda  $i$ . adımdaki adım



genişliği

$$h_i = N^{-0.25} \sqrt{\frac{2\delta_L}{N^2\alpha^2\beta_{i-1} + N\alpha\gamma_{i-1} + \xi_{i-1}}}$$

olarak hesaplanır. Burada  $\alpha = \max_{1 \leq i, j \leq N} |a_{ij}|$ ,  $\max_{1 \leq i, j \leq N} \left( \sup_{\tau_i \in [t_{i-1}, t_i)} |z_j(\tau_i)| \right) \leq \beta_{i-1}$ ,

$$\max_{1 \leq j \leq N} \left( \sup_{\tau_i \in [t_{i-1}, t_i)} |\varphi_j(\tau_i, z(\tau_i))| \right) \leq \gamma_{i-1}, \max_{1 \leq j \leq N} \left( \sup_{\tau_i \in [t_{i-1}, t_i)} \left| \frac{d\varphi_j}{dt}(\tau_i, z(\tau_i)) \right| \right) \leq \xi_{i-1}$$

ve  $j = 1, 2, \dots, N$  için  $z_j(t)$  (3.5) Cauchy probleminin çözüm vektörünün bileşenleridir ([27], [28], [30]).

### 3.3. Arayüz İçin Kullanılan Teknolojiler

Tasarlanan web arayüzü için yararlanılan teknolojileri tanıtalım.

#### 3.3.1. Python

Python, 1980'lerin sonlarında Hollanda'da bulunan Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Ulusal Araştırma Enstitüsü'nde Guido van Rossum tarafından geliştirilen yüksek seviyeli bir programlama dilidir ([31–37]). Python, Google, Yahoo, CERN, NASA gibi prestijli şirketler ve kuruluşlarda yazılım geliştirmek için kullanılmaktadır. Python ücretsiz bir yazılımdır ve <http://python.org/> adresinden kolayca indirilebilir.

Python basit ve şık bir söz dizimine sahiptir ve birçok standart kütüphaneye sahiptir. Ayrıca, NumPy, SymPy ve Matplotlib gibi çok güçlü bilimsel kütüphanelere de sahiptir. NumPy, dizi, vektör ve matris hesaplamalarını daha hızlı ve kolaylıkla yapmak için tasarlanmış bir kütüphanedir. SymPy kütüphanesi, türev alma, integral hesaba yapma ve daha birçok sembolik matematiksel işlemleri gerçekleştirir. Matplotlib ise verileri görselleştirmek için hem 2 hem de 3 boyutlu grafik oluşturma imkanı sağlayan bir grafik kütüphanesidir.

Python, Mac OS X, Linux ve Windows gibi birçok platformda çalışabilir. Python, sistem programlama, masaüstü için grafiksel kullanıcı arayüzü programlama, veritabanı programlama, sayısal ve bilimsel programlama ve çok daha fazlasını sağlayan genel amaçlı bir programlama dilidir. Python bir nesne yönelimli dil olduğu için, web projeleri geliştirmek

için de olanak sağlamaktadır. Bir web projesi geliştirmek için, her programlama dili kendi web uygulama çatısına sahiptir. Web çatısının ne olduğunu tanıtalım.

Web çatısı, kullanıcıların daha sağlıklı ve daha hızlı kodlama yapma imkanı sağlayan yazılımın iskeletini oluşturan bir proje alt yapısıdır. Python ile web programlama için Flask, Bottle ve Django gibi web çatıları vardır. Bu web çatıları arasından en çok tercih edileni Django web çatısıdır.

Django web çatısını tanıtalım.

### **3.3.2. Django**

Django, dinamik web siteleri, web uygulamaları ve web servisleri geliştirmek için Python programlama dilinde yazılmış MTV mimari desenini kullanan açık kaynaklı bir web çatısıdır.

Django, gcl ve dinamik web uygulamalarını hızlı bir şekilde geliştirilmesi için uygun bir ortam sağlar. Django’daki URL sistemi çok esnek ve gcldr. URL’ler için desen tanımlamaya ve her bir deseni yakalamak için Python fonksiyonları tanımlamaya için olanak sağlar. Django, kullanıma hazır bir yönetici ara yüzü ile birlikte gelir. Bu arabirim, uygulama verilerinin yönetimini sağlar. Aynı zamanda oldukça esnek ve zelleştirilebilirdir. Ayrıca Django, geliştirme ve test için bir web sunucusu ile birlikte gelir ve çok güzel bir geliştirme ortamı sağlar. Debug modu etkinleştirildiğinde, çok ayrıntılı hata mesajları sağlar. Django hakkında detaylı bilgi için bakınız ([31],[37]).

## 4. ADIM GENİŞLİĞİ STRATEJİLERİ İÇİN WEB ARAYÜZÜ

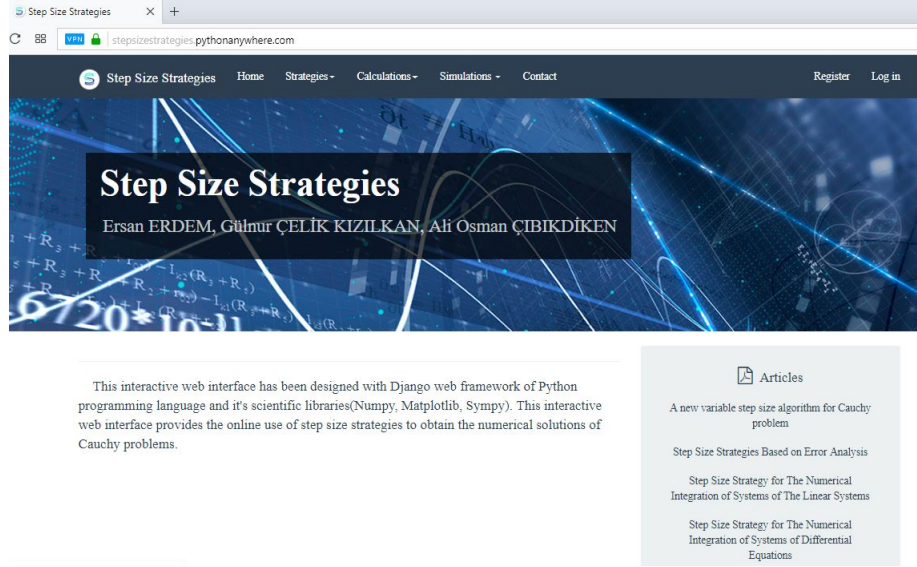
Bu çalışmada, [12], [13], [25–30] çalışmalarında verilen adım genişliği stratejilerinin etkin ve kolay bir şekilde uygulanabilmesi için kullanıcı etkileşimli bir görsel arayüz geliştirilmiştir. Bunun için Python dilinin NumPy, SymPy ve Matplotlib bilimsel hesaplama kütüphaneleri kullanılarak ilgili stratejiler için komut ekranından çalışabilen programlar yazılmıştır. Daha sonra yazılan bu programlar online olarak erişilebilen etkileşimli bir web arayüzü haline getirilmiştir. Eğitim amaçlı kullanılacak bu web arayüzü beş farklı adım genişliği stratejisinin matematiksel yapısının tanıtıldığı ve bu stratejilerin uygulanmasına imkan sağlayan sayfalardan oluşmaktadır. Hem adım genişliği stratejilerini öğrenme hem de görsel destekli olarak uygulayabilme fırsatı sunması amaçlanan web arayüzü "<https://stepsizestrategies.pythonanywhere.com>" adresinden erişime sunulmuştur.

Şimdi, web arayüzünü tanıtalım.

### 4.1. Ana Sayfa (*Home*)

İnternet adres çubuğuna "<https://stepsizestrategies.pythonanywhere.com>" adresi girildiğinde web arayüzünün ana sayfası görüntülenir (Şekil 4.1). Ana sayfanın üst kısmındaki menü çubuğunda ana sayfa (*Home*), stratejiler (*Strategies*), hesaplamalar (*Calculations*), simülasyonlar (*Simulations*), iletişim (*Contact*), kayıt ol (*Register*) ve giriş (*Log in*) menüleri bulunmaktadır. Menü çubuğunun altında sitenin kısa bir tanıtımı yapılmıştır. İletişim (*Contact*) menüsünden web ara yüzünün tasarlanmasına katkı sağlayan ekibin iletişim bilgilerine ve bu arayüzle ilgili yapılan çalışmalarına ulaşılabilir.

Web arayüzünün sağ üst köşesinde bulunan kayıt ol (*Register*) butonuna tıklandığında, kullanıcı Şekil 4.2a da gösterilen kayıt formu sayfasına yönlendirilir.



Şekil 4.1. Ana sayfanın (*Home*) görünümü

(a) Kayıt (*Register*) formu

(b) Giriş (*Log in*) formu

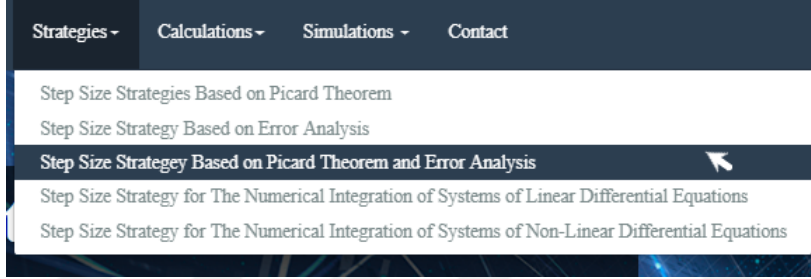
Şekil 4.2. Kayıt (*Register*) ve giriş (*Log in*) formları

Kayıt formunda bulunan istenilen bilgiler doldurulduğunda kullanıcı kaydı tamamlanmış olup web arayüzüne giriş yapmak için kullanıcı adı ve şifre alınmış olur. Web arayüzü üzerindeki adım genişliği stratejileri kullanıcı kaydı yapılmadan da kullanılabilir. Ancak web arayüzüne kayıt yapılması, yapılan hesaplamaların çıktılarını bilgisayara indirme imkanı sağladığından, kullanıcıya web sitesine kayıt yapması önerilir. *Giriş (Log in)* butonuna tıkladığında ve Şekil 4.2b de gösterilen giriş formu sayfası açılır ve üzerindeki gerekli bilgileri doldurarak giriş işlemi başarıyla gerçekleştirilmiş olur. Böylelikle siteye kayıtlı kullanıcı için elde edilen çözüm değerlerini (.xls) uzantılı excel dosyası ve grafikleri (.png) uzantılı resim dosyası olarak bilgisayarın *İndirilenler* klasörüne indirme seçeneği açılmış olur.

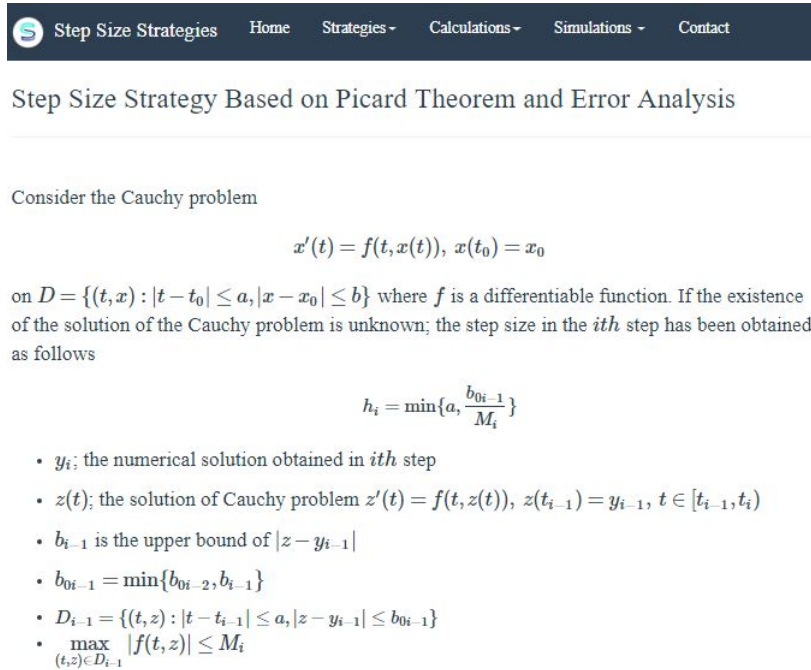
Kayıt yapan kullanıcıların bilgileri sitenin yönetim panelinden takip edilebilen bir veri tabanına otomatik olarak kaydedilmektedir.

## 4.2. Stratejiler (*Strategies*) Menüsü

Adım genişliği stratejilerinin matematiksel yapısının tanıtıldığı sayfaların yer aldığı menü stratejiler (*Strategies*) menüsüdür. Stratejiler (*Strategies*) menüsüne tıklandığında Şekil 4.3 de görüldüğü gibi stratejilerin bulunduğu alt menü açılmaktadır. Alt menüden istenilen strateji seçildiğinde seçilen stratejinin tanıtıldığı sayfa görüntülenir. Şekil 4.4 de seçilen *Picard teoremi ve hata analizi tabanlı adım genişliği stratejisi* nin tanıtıldığı sayfa gösterilmiştir. Diğer stratejiler için de strateji seçim işlemi benzer şekilde yapılmaktadır.



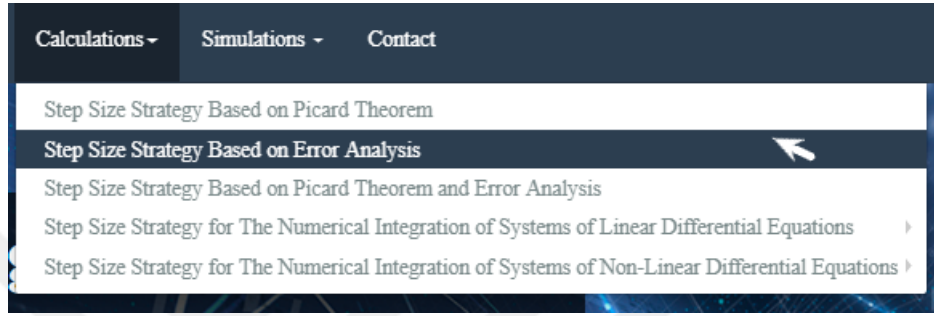
Şekil 4.3. Stratejiler (*Strategies*) menüsünden strateji seçimi



Şekil 4.4. Picard teoremi ve hata analizi tabanlı adım genişliği stratejisi

### 4.3. Hesaplamalar (*Calculations*) Menüsü

Hesaplamalar (*Calculations*) menüsü, bir Cauchy probleminin nümerik çözüm değerlerinin adım genişliği stratejileri ile hesaplanmasını sağlayan sayfaların bulunduğu menüdür. Hesaplamalar (*Calculations*) menüsünün alt menüleri stratejiler (*Strategies*) menüsünde olduğu gibi hesaplama yapılmak istenen stratejilerden oluşmaktadır (Şekil 4.5). Herhangi bir alt menü seçildiğinde problemi çözmek üzere veri giriş ekranı açılır.



Şekil 4.5. Hesaplamalar (*Calculations*) menüsünden strateji seçimi

Bütün stratejiler için kullanım benzer olduğundan bir strateji üzerinde detaylı olarak izah edelim. Örneğin; *hata analizi tabanlı adım genişliği stratejisi* ni seçelim. Şekil 4.6 da bulunan veri giriş (*Input*) kısmı ilgili stratejinin veri giriş alanıdır. Çözümü elde edilmek istenen Cauchy probleminin verileri veri giriş (*Input*) kısmına uygun şekilde girildikten sonra hesaplama (*Calculate*) butonuna tıklandığında ilgili adım genişliği stratejisi için veriler arka planda çalışan programa gönderilmiş olur. Çözüm arka planda hesaplandıktan sonra çözüm değerleri çıktı (*Output*) kısmında bir tablo halinde kullanıcıya sunulur. Kullanıcı hesabı oluşturup siteye giriş yapan kullanıcılar Şekil 4.6 da görülen çıktı dosyası (*Output file*) butonu ile çözüm değerlerini bilgisayara indirebilirler. Çıktı dosyası (*Output file*) butonu yalnızca kullanıcı hesabı oluşturup siteye giriş yapan kullanıcılar tarafından görülmektedir.

Step Size Strategies
Home
Strategies
Calculations
Simulations
Contact

Step Size Strategy Based on Error Analysis

Input

$f(t, x) =$    $t_0 =$    $x_0 =$    $a =$    $b =$    
 $h^* =$    $\delta_L =$

Calculate
Output file

Output

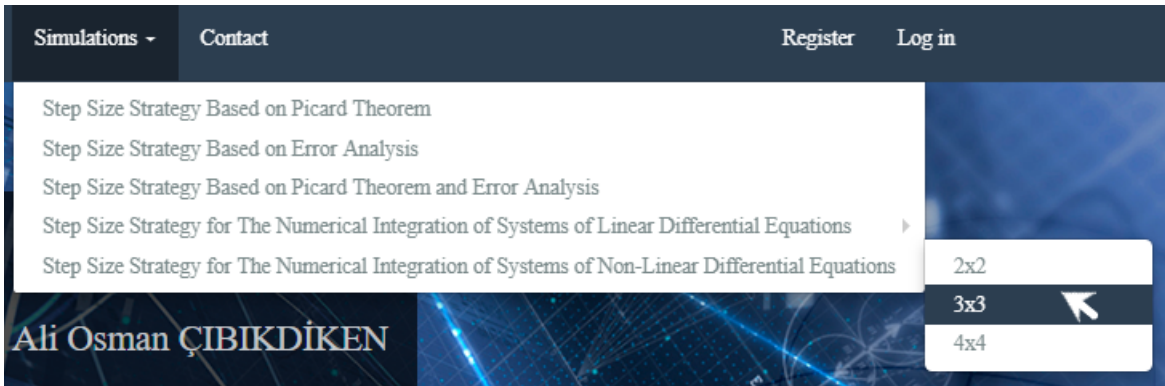
Show 10 entries

$i$	$h_i$	$t_i$	$x_i$
No data available in table			

Şekil 4.6. Hata analizi tabanlı adım genişliği stratejisi, hesaplamalar (*Calculations*) menüsü, veri giriş ekranı

#### 4.4. Simülasyonlar (*Simulations*) Menüsü

Simülasyonlar (*Simulations*) menüsü, verilen bir Cauchy probleminin adım genişliği stratejileri ile hesaplamalar (*Calculations*) menüsünde elde edilen nümerik çözüm değerlerinin grafiklerini oluşturan sayfaların bulunduğu menüdür. Şekil 4.7 de gösterildiği gibi simülasyonlar (*Simulations*) menüsünden uygulanmak istenen bir strateji seçildiğinde hesaplamalar (*Calculations*) menüsündeki veri giriş sayfasına benzer bir sayfa açılmaktadır.



Şekil 4.7. Simülasyonlar (*Simulations*) menüsünden strateji seçimi

Şekil 4.8 de 3x3 boyutlu lineer olmayan sistemlerin nümerik integrasyonu için adım

genişliği stratejisi seçildiğinde karşılaşılan veri giriş ekranı görülmektedir. Cauchy probleminin verileri, veri giriş (*Input*) kısmındaki giriş alanlarına uygun şekilde yapıldıktan sonra simülasyon (*Simulate*) butonuna tıklanırsa problemin çözüm değerleri için arka planda çalışan program yardımıyla grafikler elde edilir. Seçilen adım genişliği stratejisine göre adım genişliği ve nümerik çözüm (sistemler için her bir bileşenin nümerik çözümü ile nümerik çözümün normu) grafikleri sayfada bir slayt ekranı içinde görüntülenmektedir. Elde edilen grafikler bir resim dosyası olarak bilgisayara indirilmek istenirse kullanıcı kaydı yapılması gerekmektedir.

Step Size Strategies Home Strategies Calculations Simulations Contact

### Step Size Strategy for The Numerical Integration of Systems of Non-Linear Differential Equations

Input

$\varphi(t, X) = [ \text{ } \text{ } \text{ } ]^T$   $X = [ \text{x} \text{ y } \text{z} ]^T$

$h^* = \text{ } t_0 = \text{ } a = \text{ } b = \text{ } \delta_L = \text{ }$

$A = \begin{bmatrix} \text{ } & \text{ } & \text{ } \\ \text{ } & \text{ } & \text{ } \\ \text{ } & \text{ } & \text{ } \end{bmatrix}$   $X_0 = \begin{bmatrix} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{bmatrix}$

Simulate Norm of Numeric Solution Step Size First Component

Second Component Third Component

**Şekil 4.8.** Lineer olmayan sistemlerin nümerik integrasyonu için adım genişliği stratejisi, simülasyonlar (*Simulations*) menüsü, veri giriş ekranı (3x3 boyutlu)



## 4.5. Arayüz Kullanımı İçin Veri Giriş Kılavuzu

Simülasyonlar (*Simulations*) ve hesaplamalar (*Calculations*) menülerinde sayfalarda bulunan veri giriş ekranına veri girişi yaparken kullanılacak aritmetik işlem operatörleri, fonksiyonlar ve matematiksel sabitler sırasıyla Tablo 4.1, Tablo 4.2, Tablo 4.3 ile verilmiştir. Ondalık ifadeler nokta ile kullanılmalıdır.

**Tablo 4.1. Aritmetik İşlem Operatörlerinin Girişi**

Toplama işlemi	Çıkarma işlemi	Çarpma işlemi	Bölme işlemi
+	−	*	/

**Tablo 4.2. Fonksiyonların Girişi**

Fonksiyon	Veri Girişi
$x^n$	$x^{**}n$
$\sqrt{x}$	$sqr(x)$
$e^x$	$exp(x)$
$\ln(x)$	$log(x)$
$\log_n(x)$	$log\ n(x)$
$\sin(x), \cos(x), \tan(x), \cot(x)$	$\sin(x), \cos(x), \tan(x), \cot(x)$
$\arcsin(x), \arccos(x), \arctan(x)$	$\arcsin(x), \arccos(x), \arctan(x)$
$\sinh(x), \cosh(x), \tanh(x), \coth(x)$	$\sinh(x), \cosh(x), \tanh(x), \coth(x)$
$\operatorname{arcsinh}(x), \operatorname{arccosh}(x), \operatorname{arctanh}(x)$	$\operatorname{arcsinh}(x), \operatorname{arccosh}(x), \operatorname{arctanh}(x)$

**Tablo 4.3. Matematiksel Sabitlerin Girişi**

Matematiksel Sabit	Veri Girişi
$\pi$	$pi$
$e$	$exp(1)$

## 5. NÜMERİK ÖRNEKLER VE UYGULAMALAR

### 5.1. Örnekler

Bu kısımda, web arayüzü üzerindeki adım genişliği stratejilerinin önemini anlamaya yönelik bazı örnekler ele alınmıştır.

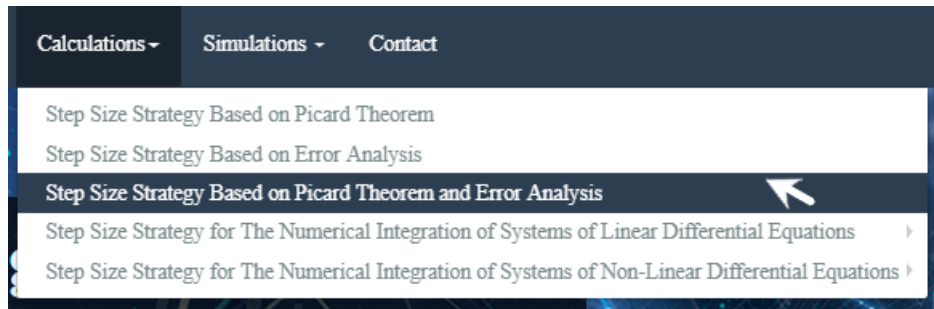
#### 5.1.1. Adım Genişliği Seçiminde Çözümün Varlığı

2. kısımda,  $t = 4$  noktasında analitik çözümü olmayan (3.7) denklemi ile verilen

$$x'(t) = x^2(t), x(3) = 1$$

Cauchy problemini ele alalım. (3.7) Cauchy probleminin nümerik çözümünü Picard teoremi ve hata analizi tabanlı adım genişliği stratejisini (*step size strategy based on Picard theorem and error analysis*) kullanarak web arayüzü üzerinde hesaplayalım.  $h^* = 10^{-4}$  alalım.

Hesaplamalar (*Calculations*) menüsünden Picard teoremi ve hata analizi tabanlı adım genişliği stratejisini (*step size strategy based on Picard theorem and error analysis*) seçelim (Şekil 5.1).



Şekil 5.1. (3.7) problemi için hesaplamalar (*Calculations*) menüsünden strateji seçimi

Yönlendirilen veri giriş ekranına (3.7) Cauchy probleminin verilerini uygun şekilde girelim ve hesapla (*Calculate*) butonuna tıklayalım (Şekil 5.2).

### Input

$f(t, x) =$  
 $t_0 =$  
 $x_0 =$  
 $a =$  
 $b =$

$h^* =$

Şekil 5.2. (3.7) problemi için hesaplama alanına veri girişi

(3.7) Cauchy problemi için elde edilen çözüm değerleri, sayfada Şekil 5.3 deki tablo olarak karşımıza gelir.

### Output

Show  entries

$i$	$h_i$	$t_i$	$x_i$
0	0.138889	3.000000	1.000000
1	0.148022	3.138889	1.138889
2	0.154433	3.286911	1.330884
3	0.173932	3.441344	1.330884
4	0.155564	3.615276	1.604423
5	0.132538	3.770840	1.604423
6	0.063162	3.903378	1.638961
7	0.009217	3.966540	1.638961

Showing 1 to 8 of 8 entries

Previous

1

Next

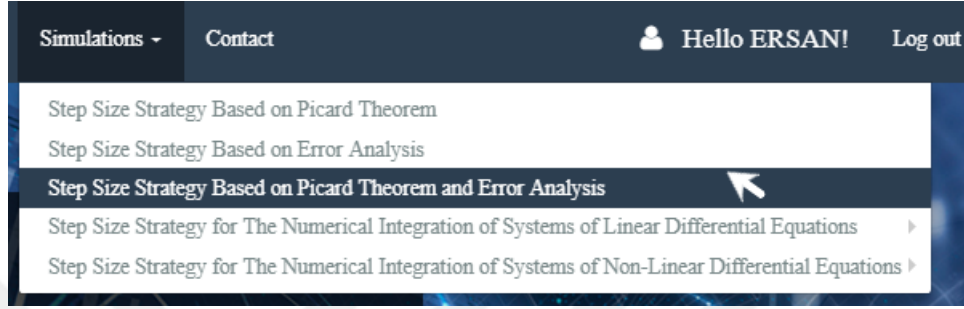
Şekil 5.3. (3.7) problemi için elde edilen nümerik çözüm değerleri

(3.7) Cauchy problemi için 2. kısımda sabit adım genişliği kullanılarak elde edilen nümerik çözümde  $t = 4$  noktasında çözüm varmış gibi görünmesine rağmen (Şekil 3.1b) Picard teoremi ve hata analizi tabanlı adım genişliği stratejisi ile elde edilen nümerik çözüm hesaplama işlemi Şekil 5.3 de görüldüğü gibi  $t = 3.966540$  noktasında sonlanmıştır. Yani,

strateji çözümün var olduğu garantili bir bölgede nümerik çözüm hesaplanmasını sağlamıştır.

(3.7) Cauchy probleminin nümerik çözüm değerlerine ait grafikleri elde edelim.

Simülasyonlar (*Simulations*) menüsünden Picard teoremi ve hata analizi tabanlı adım genişliği stratejisini (*step size strategy based on Picard theorem and error analysis*) seçelim (Şekil 5.4).



Şekil 5.4. (3.7) problemi için simülasyonlar (*Simulations*) menüsünden strateji seçimi

(3.7) Cauchy probleminin verileri, simülasyon alanındaki veri giriş ekranındaki yerlere uygun şekilde girelim ve simülasyon (*Simulate*) butonuna tıklayalım (Şekil 5.5).

Input

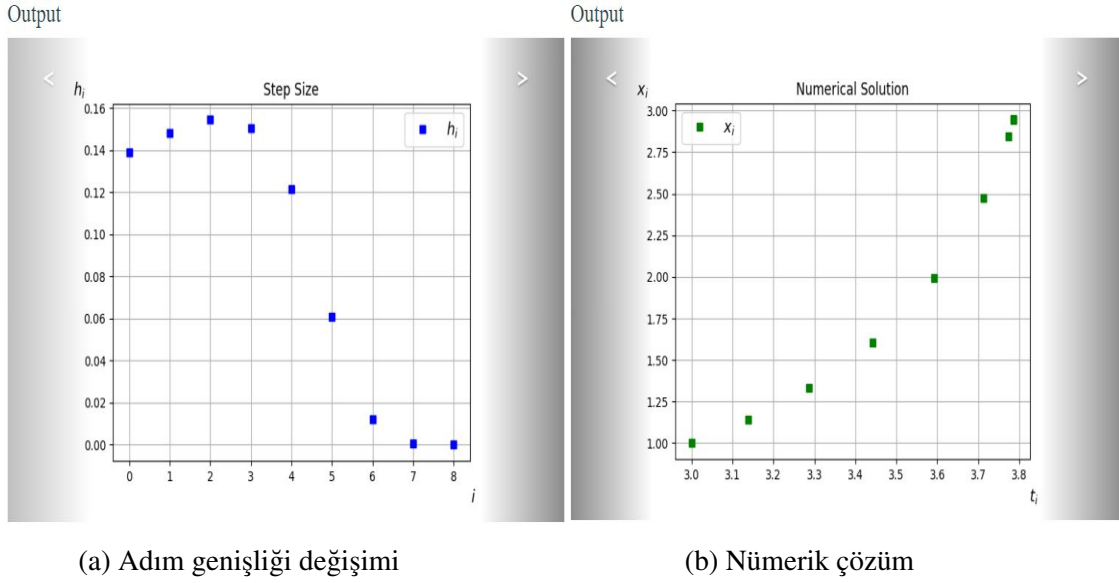
$f(t, x) =$    $t_0 =$    $x_0 =$    $a =$    $b =$

$h^* =$

Şekil 5.5. (3.7) problemi için simülasyon alanına veri girişi

(3.7) Cauchy problemi için elde edilen nümerik çözüm ve adım genişliği değişim grafiği sırasıyla Şekil 5.6b ve Şekil 5.6a deki gösterildiği gibi bir slayt ekranı içerisinde kullanıcıya sunulur.

Şekil 5.6a da kullanılan stratejisi sayesinde çözümün hızlı değiştiği yerlerde küçük adım genişlikleri, çözümün yavaş değiştiği yerlerde ise daha büyük adım genişlikleri ile hesaplama yapıldığı görülmektedir.



Şekil 5.6. (3.7) problemi için elde edilen adım genişliği değişimi ve nümerik çözümleri

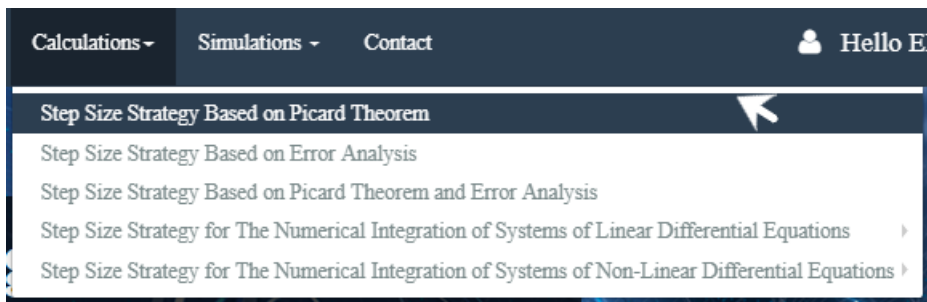
### 5.1.2. Pratik Adım Genişliği Parametresi

$D = \{(t, x) : |t| \leq 5, |x - 4| \leq 5\}$  bölgesi üzerinde

$$x'(t) = 2x, x(0) = 4 \quad (5.1)$$

verilen Cauchy problemini ele alalım. (5.1) Cauchy probleminin nümerik çözümünü Picard teoremi tabanlı adım genişliği stratejisini (*step size strategy based on Picard theorem*) kullanarak web arayüzü üzerinde hesaplayalım.  $h^* = 10^{-4}$  alalım.

Hesaplamalar (*Calculations*) menüsünden Picard teoremi tabanlı adım genişliği stratejisi (*step size strategy based on Picard theorem*) seçelim (Şekil 5.7).



Şekil 5.7. (5.1) problemi için hesaplamalar (*Calculations*) menüsünden strateji seçimi

Yönlendirilen veri giriş ekranına (5.1) Cauchy probleminin verileri uygun şekilde girelim ve hesapla (*Calculate*) butonuna tıklayalım (Şekil 5.8).

### Input

$f(t, x) =$  
 $t_0 =$  
 $x_0 =$  
 $a =$  
 $b =$

$h^* =$

Şekil 5.8. (5.1) problemi için hesaplama alanına veri girişi

(5.1) Cauchy problemi için elde edilen çözüm değerleri sayfada Şekil 5.9 deki tablo olarak karşımıza gelir.

### Output

Show  entries

$i$	$h_i$	$t_i$	$x_i$
5000	0.00010015	4.57932953	24958.20670469
5001	0.00010013	4.57942968	24963.20570322
5002	0.00010011	4.57952981	24968.20470195
5003	0.00010009	4.57962991	24973.20370087
5004	0.00010007	4.57973000	24978.20270000
5005	0.00010005	4.57983007	24983.20169933
5006	0.00010003	4.57993011	24988.20069886
5007	0.00010001	4.58003014	24993.19969858

Showing 5,001 to 5,008 of 5,008 entries

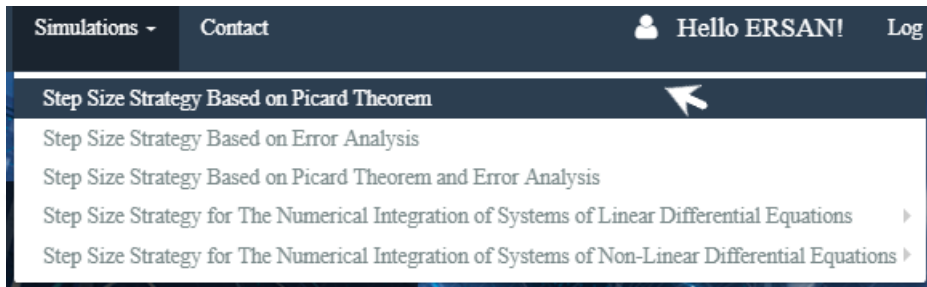
Previous 1 ... 497 498 499 500 501 Next

Şekil 5.9. (5.1) problemi için elde edilen nümerik çözüm değerleri

Şekil 5.9 da  $t = 4.58003014$  noktasına kadar hesaplama yapıldığı görülmektedir.  $h_{5007} = 0.00010001$  olduğundan bir sonraki adımda  $h_{5008} < h^*$  olup hesaplama işlemi, pratik adım genişliği parametresi tarafından durdurulmuştur.

(5.1) Cauchy probleminin nümerik çözüm değerlerine ait grafikleri elde edelim.

Simülasyonlar (*Simulations*) menüsünden Picard teoremi tabanlı adım genişliği stratejisi (*step size strategy based on Picard theorem*) seçelim (Şekil 5.10).



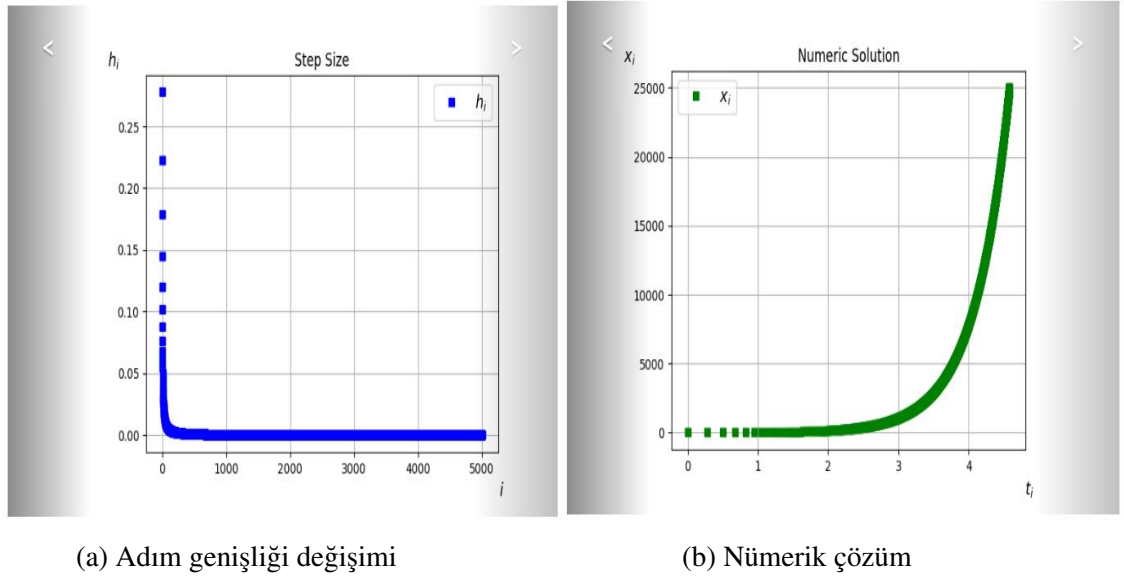
Şekil 5.10. (5.1) problemi için simülasyonlar (*Simulations*) menüsünden strateji seçimi

(5.1) Cauchy probleminin verileri, simülasyon alanındaki veri giriş ekranındaki yerlere uygun şekilde girilir ve simülasyon (*Simulate*) butonuna tıklanır (Şekil 5.11).

Input

Şekil 5.11. (5.1) problemi için simülasyon alanına veri girişi

(5.1) Cauchy problemi için elde edilen nümerik çözüm ve adım genişliği değişim grafiği sırasıyla Şekil 5.12b ve Şekil 5.12a deki gösterildiği gibi bir slayt ekranı içerisinde kullanıcıya sunulur.



Şekil 5.12. (5.1) problemi için elde edilen adım genişliği değişimi ve nümerik çözümleri

## 5.2. Uygulamalar

Gerçek hayat modelleri üzerine kurulu Cauchy problemleri için web arayüzü üzerinde uygulamalar verelim.

### 5.2.1. Serbest Düşen Cisim Modeli

Bir cismin düşmesi en basit fiziksel durumlardan biridir.  $\gamma > 0$ ,  $g$  yerçekimi ivmesi olmak üzere  $m$  kütleli düşen bir cismin herhangi bir  $t$  zamanındaki  $v$  hızını veren birinci mertebeden diferansiyel denklem

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\gamma v}{m} \quad (5.2)$$

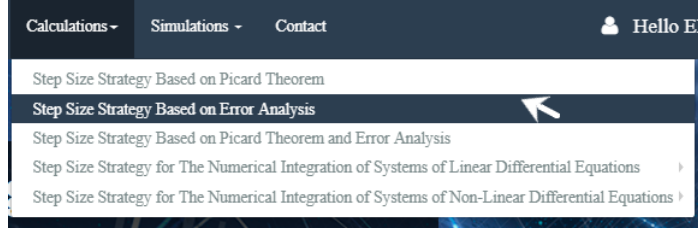
şeklinde verilir ([38]).  $m = 2$ ,  $g = 9.8$  ve  $\gamma = 0.392$  olsun.

$D = \{t \in [0, 10], |x - x_0| \leq 50\}$  bölgesi üzerinde (5.2) Cauchy probleminin çözümünü hata analizi tabanlı adım genişliği stratejini (*step size strategy based on error analysis*) kullanarak elde edelim.  $x(0) = 48$ ,  $\delta_L = 0.08$  ve  $h^* = 10^{-4}$  değerlerini kullanalım.

Hesaplamalar (*Calculations*) menüsünden problemin yapısına uygun olan hata analizi tabanlı adım genişliği stratejini (*step size strategy based on error analysis*) seçelim (Şekil 5.13).

Hata analizi tabanlı adım genişliği stratejisi için yönlendirilen veri giriş ekranına (5.2)





**Şekil 5.13. (5.2) denklemi için hesaplamalar (*Calculations*) menüsünden strateji seçimi**

Cauchy probleminin verilerini uygun şekilde girelim ve hesapla (*Calculate*) butonuna tıklayalım (Şekil 5.14).

Input

$f(t, x) =$    $t_0 =$    $x_0 =$    $a =$    $b =$

$h^* =$    $\delta_L =$

**Şekil 5.14. (5.2) denklemi için hesaplama alanına veri girişi**

Output

Show  entries

$i$	$h_i$	$t_i$	$x_i$
0	0.283010304197	0.0	48.0
1	0.283312684026	0.283010304197	48.1109400392
2	0.283599489302	0.566322988222	48.2158381902
3	0.283871445273	0.849922477524	48.3150117163
4	0.284129251421	1.1337939228	48.4087624479
5	0.284373581511	1.41792317422	48.4973774063
6	0.284605083759	1.70229675573	48.5811294154
7	0.2848243811	1.98690183949	48.6602777006

Showing 1 to 10 of 35 entries

Previous     Next

**Şekil 5.15. (5.2) denklemi için elde edilen nümerik çözüm değerleri**

(5.2) Cauchy problemi için elde edilen çözüm değerleri sayfada Şekil 5.15 deki gibi bir tablo olarak gösterilir. Şekil 5.15 de tablonun ilk sayfası gösterilmiştir.

(5.2) Cauchy probleminin nümerik çözüm değerlerine ait grafikleri elde edelim.

Simülasyonlar (*Simulations*) menüsünden hata analizi tabanlı adım genişliği stratejisini (*step size strategy based on error analysis*) seçelim. (5.2) Cauchy probleminin verileri simülasyon alanındaki veri giriş ekranına uygun şekilde girelim ve simülasyon (*Simulate*) butonuna tıklayalım (Şekil 5.16).

Input

$f(t, x) = 9.8 - 0.196 \cdot x$   $t_0 = 0$   $x_0 = 48$   $a = 10$   $b = 50$

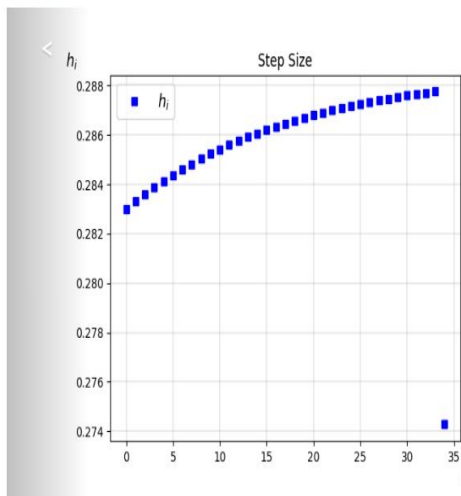
$h^* = 0.0001$   $\delta_L = 0.08$

Simulate Numeric Solution Step Size

Şekil 5.16. (5.2) denklemi için simülasyon alanına veri girişi

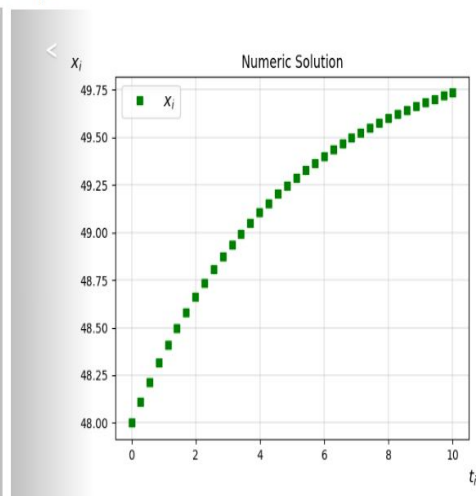
(5.2) Cauchy problemi için elde edilen adım genişliği değişim ve nümerik çözüm grafiği sırasıyla Şekil 5.17a ve Şekil 5.17b deki gösterildiği gibi bir slayt ekranı içerisinde kullanıcıya sunulur.

Output



(a) Adım genişliği değişimi

Output



(b) Nümerik çözüm

Şekil 5.17. (5.2) denklemi için elde edilen adım genişliği değişimi ve nümerik çözümleri

### 5.2.2. İlaç Emilim Modeli: Düzensiz Kalp Atışı ve Lidocaine

Ventriküler aritmi veya düzensiz kalp atışı *lidocaine* isimli ilaç ile tedavi edilir. İlacın etkili olması için ilacın kan akışındaki konsantrasyonu litre başına  $1.5 \text{ mg}$  olmalıdır. Ancak  $6 \text{ mg}$  üzerindeki konsantrasyonlar bazı hastalarda öldürücü olabilmektedir. Gerçek dozaj vücut ağırlığına bağlıdır. Ventriküler taşikardi için maximum yetişkin dozu  $3 \text{ mg/kg}$  olarak bildirilmiştir ([39]). İlaç, oda sıcaklığında saklanan %0.5, %1, %2 lik solüsyonlarda sağlanır.

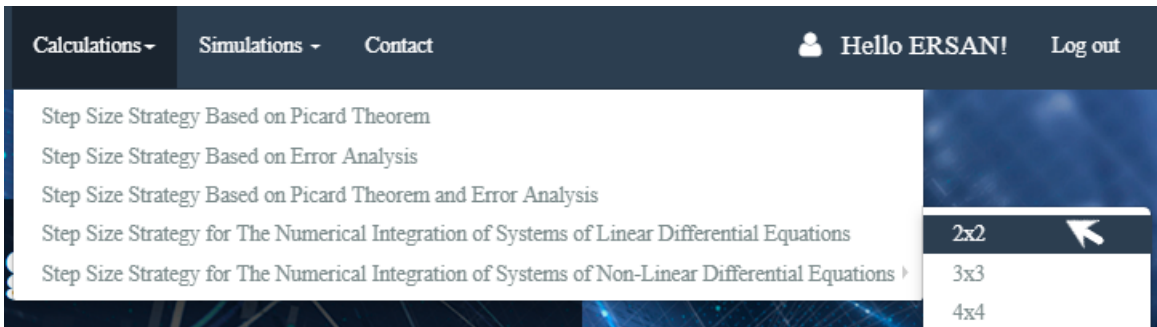
Kan akışındaki *lidocaine* miktarı  $x(t)$ , vücut dokusundaki *lidocaine* miktarı  $y(t)$  olmak üzere sadece belirli bir vücut ağırlığı için geçerli olan diferansiyel denklem sistemi aşağıdaki gibi (5.3) denklemleriyle verilir([40]).

$$\begin{aligned}x'(t) &= -0.09x(t) + 0.038y(t) \\y'(t) &= 0.066x(t) - 0.038y(t)\end{aligned}\quad (5.3)$$

Kan akışındaki sıfır ilaç  $x(0) = 0$  ve enjeksiyon dozajı  $y(0) = y_0$  olmak üzere fiziksel olarak anlamlı başlangıç verileri ile (5.3) diferansiyel denklem sisteminin çözümleri olası maximum güvenli dozajı ve *lidocaine* ilacının etki süresini tahmin etmek için kullanılabilir.

$x(0) = 0$  ve  $y(0) = 4$  başlangıç verileri olmak üzere  $D = \{t \in [0, 10], |x_j - x_{j0}| \leq 10\}$  bölgesi üzerinde (5.3) Cauchy problemini  $h^* = 10^{-4}$ ,  $\delta_L = 0.08$  değerlerini kullanarak lineer sistemler için verilen adım genişliği stratejisini uygulayalım.

Hesaplamalar (*Calculations*) menüsünden  $2 \times 2$  boyutlu lineer sistemlerin nümerik integrasyonu için adım genişliği stratejisi (*step size strategy for the numerical integration of systems of linear differential equations*) seçelim (Şekil 5.18).



Şekil 5.18. (5.3) denklemi için *Calculations* menüsünden strateji seçimi

Yönlendirilen sayfadaki veri giriş ekranına (5.3) Cauchy probleminin verileri hesaplama alanındaki veri giriş ekranına uygun şekilde girdikten sonra hesapla (*Calculate*) butonuna tıklayalım (Şekil 5.19).

### Input

$h^* = 0.0001$     $t_0 = 0$     $a = 10$     $b = 10$     $\delta_L = 0.08$

$A = \begin{bmatrix} -0.09 & 0.038 \\ 0.066 & -0.038 \end{bmatrix}$     $X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

Calculate   Output file

Şekil 5.19. (5.3) denklemi için hesaplama alanına veri girişi

(5.3) Cauchy probleminin elde edilen çözüm değerleri bir tablo halinde karşımıza çıkar. Şekil 5.20 de tablonun ilk sayfası gösterilmiştir.

### Output

Show 10 entries

$i$	$h_i$	$t_i$	$  X_i  $	$x_i$	$y_i$
0	0.49942005	0.00000000	4.00000000	0.00000000	4.00000000
1	0.50077957	0.49942005	3.92482235	0.07591185	3.92408815
2	0.50208234	1.00019962	3.85473344	0.14716441	3.85192323
3	0.50333050	1.50228196	3.78935641	0.21400577	3.78330854
4	0.50452617	2.00561246	3.72833597	0.27667304	3.71805610
5	0.50567147	2.51013863	3.67133828	0.33539260	3.65598641
6	0.50676847	3.01581010	3.61805053	0.39038040	3.59692824
7	0.50781922	3.52257857	3.56818041	0.44184225	3.54071841

Showing 1 to 10 of 20 entries

Previous 1 2 Next

Şekil 5.20. (5.3) denklemi için elde edilen nümerik çözüm değerleri

(5.3) Cauchy probleminin nümerik çözüm değerlerine ait grafikleri elde edelim.

Simülasyonlar (*Simulations*) menüsünden  $2 \times 2$  boyutlu lineer sistemlerin nümerik integrasyonu için adım genişliği stratejisini (*step size strategy for the numerical integration of systems of linear differential equations*) seçelim .

(5.3) Cauchy probleminin verilerini, veri giriş ekranına uygun şekilde girdikten ve simülasyon (*Simulate*) butonuna tıklayalım (Şekil 5.21).

Input

$h^* = 0.0001$   $t_0 = 0$   $a = 10$   $b = 10$   $\delta_L = 0.08$

$A = \begin{bmatrix} -0.09 & 0.038 \\ 0.066 & -0.038 \end{bmatrix}$   $X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

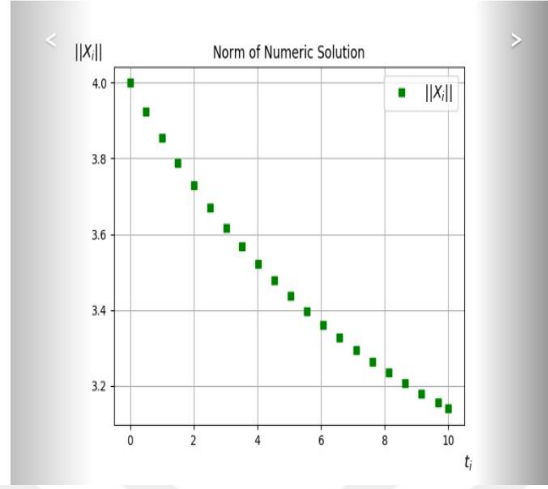
Simulate Norm of Numeric Solution Step Size First Component Second Component

Şekil 5.21. (5.3) denklemini için simülasyon alanına veri girişi

(5.3) Cauchy probleminin elde edilen nümerik çözümün norm grafiği, adım genişliği değişim grafiği, sistemin birinci ve ikinci bileşenin nümerik çözüm grafikleri sırasıyla Şekil 5.22a, Şekil 5.22b, Şekil 5.23a, Şekil 5.23b ile verildiği gibi bir slayt ekranı içerisinde kullanıcıya sunulur.

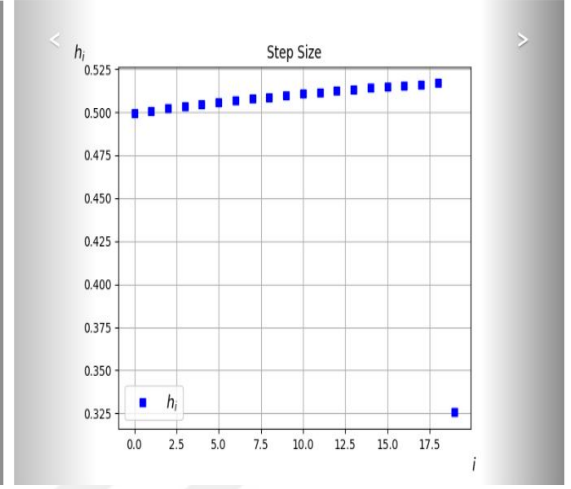
*Norm of Numerical Solution*, *Step Size*, *First Component*, *Second Component* butonları ile sırasıyla nümerik çözümün normu, adım genişliği değişimi, sistemin nümerik çözümünün birinci ve ikinci bileşenine ait grafikler indirilebilir.

Output



(a) Nümerik çözümün normu

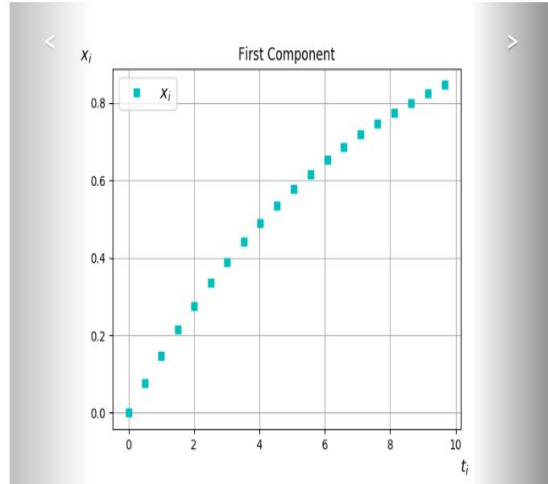
Output



(b) Adım genişliği değişimi

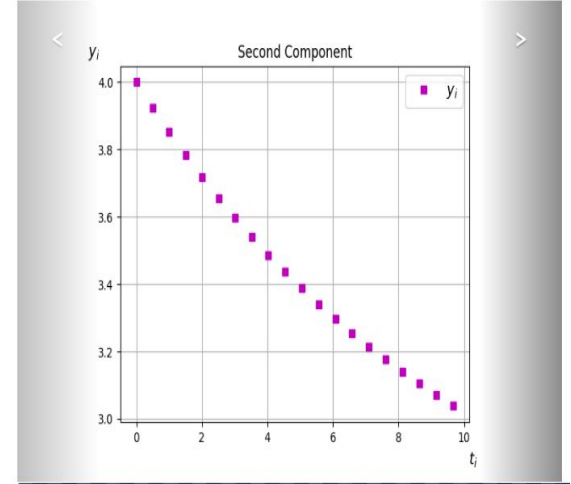
Şekil 5.22. (5.3) denklemi için nümerik çözümün normu ve adım genişliği değişimi

Output



(a) Birinci bileşene ait nümerik çözüm

Output



(b) İkinci bileşene ait nümerik çözüm

Şekil 5.23. (5.3) denklemi için birinci ve ikinci bileşenin nümerik çözüm grafikleri

### 5.2.3. Salgın Hastalık Modeli: SIR Modeli

SIR modeli, sabit bir popülasyonda bir hastalığın yayılımının matematiksel olarak tanımlayan bir salgın hastalık modelidir. Bu model popülasyonu, **S**-hastalığa yatkın fakat henüz hastalanmamış bireylerin oluşturduğu grup, **I**- enfeksiyon kapmış bireylerin oluşturduğu grup, **R**-enfeksiyona karşı kalıcı bir bağışıklık kazanmış bireylerin oluşturduğu grup olmak üzere 3 gruba böler. *SIR* modeli (5.4) denklemi ile verilir.

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\frac{\beta SI}{N} \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta SI}{N} - \gamma \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I\end{aligned}\quad (5.4)$$

Burada  $\beta$ ; temas oranı,  $\gamma$ ; ortalama iyileşme oranı ve  $N$ ; popülasyonun nüfusedir ([41–44]).

$\beta = 0.3$ ,  $\gamma = 0.1$ ,  $N = 1000$ ,  $I(0) = 1$ ,  $R(0) = 0$ ,  $S(0) = N - I(0) - R(0)$  olsun.

Bu durumda (5.4) ile verilen lineer olmayan diferansiyel denklem sistemi

$$\begin{pmatrix} S' \\ I' \\ R' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S \\ I \\ R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.0003SI \\ 0.0003SI \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} S(0) \\ I(0) \\ R(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 999 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

olarak yeniden yazılabilir.  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\varphi = \begin{pmatrix} -0.0003SI \\ 0.0003SI \\ 0 \end{pmatrix}$  dır.

$D = \{t \in [0, 180], |x_j - x_{j0}| \leq 10\}$  bölgesi üzerinde (5.5) Cauchy problemini ele alalım. (5.5) Cauchy problemine lineer olmayan diferansiyel denklem sistemleri için verilen adım genişliği stratejisini  $h^* = 10^{-4}$ ,  $\delta_L = 0.08$  değerlerini kullanarak uygulayalım.

Problemin yapısına uygun olarak hesaplamalar (*Calculations*) menüsünden  $3 \times 3$  boyutlu lineer olmayan sistemlerin nümerik integrasyonu için adım genişliği stratejisini (*step size strategy for the numerical integration of systems of non-linear differential equations*) seçelim (Şekil 5.24).



Şekil 5.24. (5.5) problemi için hesaplamalar *Calculations* menüsünden strateji seçimi

$3 \times 3$  boyutlu lineer olmayan sistemlerin nümerik integrasyonu için adım genişliği stratejisine (*step size strategy for the numerical integration of systems of non-linear differential equations*) ait yönlendirilen sayfadaki veri giriş ekranına (5.5) Cauchy probleminin verilerini, veri giriş yerlerine uygun şekilde girdikten sonra hesaplama (*Calculate*) butonuna tıklayalım (Şekil 5.25). Burada  $x, y, z$  değişkenleri, sırasıyla  $S, I, R$  değişkenlerini temsil etmektedir.

Input

$$\varphi(t, X) = \begin{bmatrix} -0.003 \cdot x \cdot y & 0.0003 \cdot x \cdot y & 0 \end{bmatrix}^T \quad X = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T$$

$$h^* = 0.0001 \quad t_0 = 0 \quad a = 180 \quad b = 10 \quad \delta_L = 0.08$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \end{bmatrix} \quad X_0 = \begin{bmatrix} 999 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Calculate Output file

Şekil 5.25. (5.5) problemi için hesaplama alanına veri girişi



### Output

Show 10 entries

$i$	$h_i$	$t_i$	$\ X_i\ $	$x_i$	$y_i$	$z_i$
0	0.00691546	0.00000000	999.00050050	999.00000000	1.00000000	0.00000000
1	0.00691563	0.00691546	998.97977627	998.97927438	1.00138102	0.00069155
2	0.00691580	0.01383108	998.95902334	998.95852005	1.00276393	0.00138406
3	0.00691597	0.02074689	998.93824166	998.93773696	1.00414875	0.00207756
4	0.00691615	0.02766286	998.91743120	998.91692509	1.00553547	0.00277202
5	0.00691632	0.03457901	998.89659191	998.89608439	1.00692410	0.00346747
6	0.00691650	0.04149533	998.87572375	998.87521482	1.00831463	0.00416389
7	0.00691667	0.04841183	998.85482669	998.85431634	1.00970708	0.00486129

Showing 1 to 10 of 5,269 entries

Previous

1

2

3

4

5

...

527

Next

**Şekil 5.26. (5.5) problemi için elde edilen nümerik çözüm değerleri (ilk 8 adım)**

(5.5) Cauchy probleminin elde edilen çözüm değerlerinin ilk 8 adımını bulunan tablo olarak Şekil 5.26 de gösterilmiştir.

(5.5) Cauchy probleminin nümerik çözüm değerlerine ait grafikleri elde edelim.

Simülasyonlar (*Simulations*) menüsünden  $3 \times 3$  boyutlu lineer olmayan sistemlerin nümerik integrasyonu için adım genişliği stratejisi seçelim. (5.5) Cauchy probleminin verilerini, veri giriş yerlerine uygun şekilde girdikten sonra simülasyon (*Simulate*) butonuna tıklayalım (Şekil 5.27).

### Input

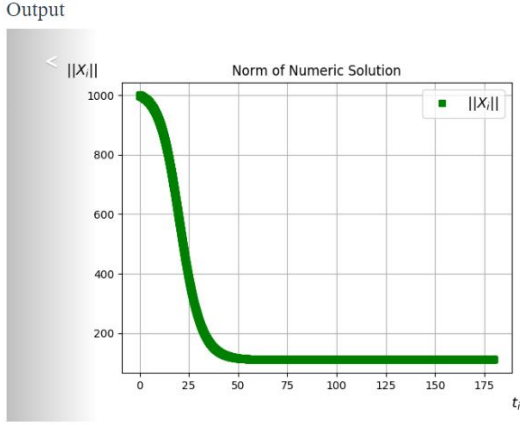
$\varphi(t, X) = \begin{bmatrix} -0.003 \cdot x \cdot y & 0.0003 \cdot x \cdot y & 0 \end{bmatrix}^T$   $X = \begin{bmatrix} x & y & y \end{bmatrix}^T$

$h^* = 0.0001$   $t_0 = 0$   $a = 180$   $b = 10$   $\delta_L = 0.08$

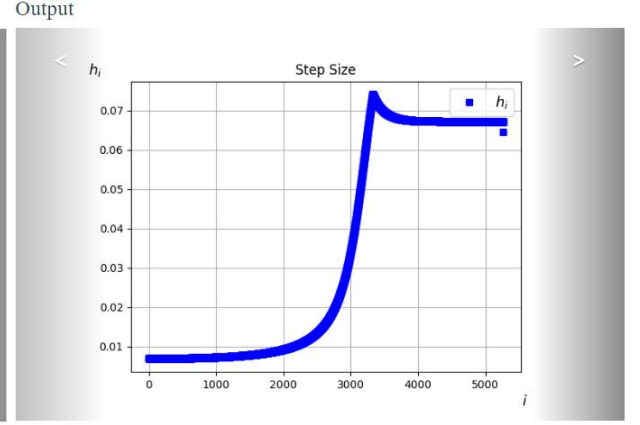
$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}$   $X_0 = \begin{bmatrix} 999 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Simulate Norm of Numeric Solution Step Size First Component Second Component Third Component

**Şekil 5.27. (5.5) problemi için simülasyon alanına veri girişi**



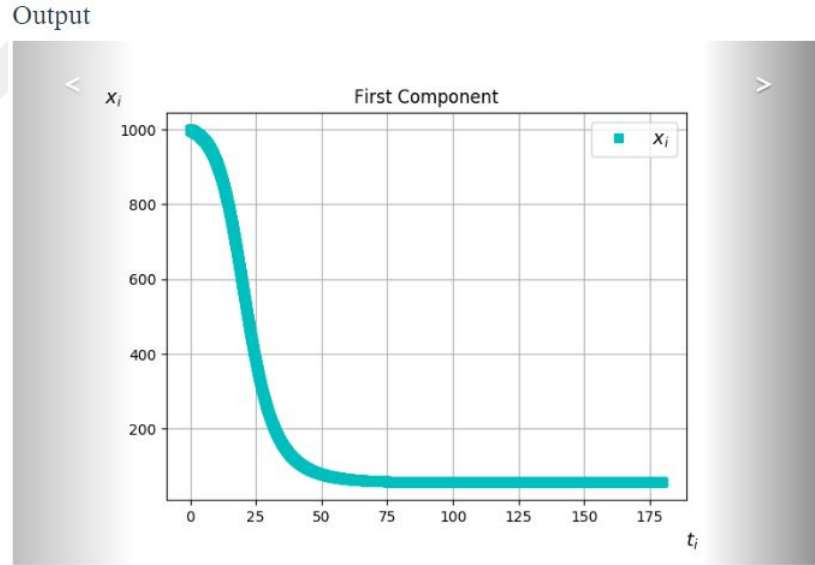
(a) Nümerik çözümün normu



(b) Adım genişliği değişimi

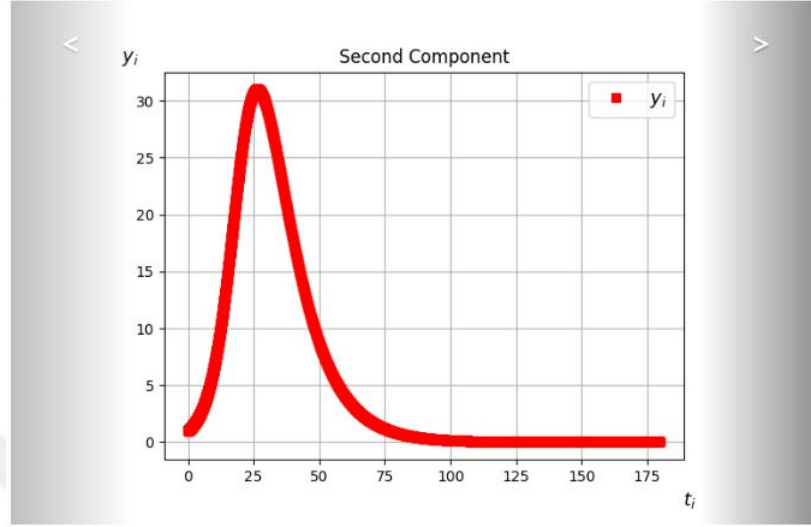
**Şekil 5.28. (5.5) problemi için elde edilen nümerik çözümün normu ve adım genişliği değişimi**

(5.5) Cauchy probleminin elde edilen nümerik çözümün norm grafiği, adım genişliği değişim grafiği, sistemin birinci, ikinci ve üçüncü bileşenin nümerik çözüm grafikleri sırasıyla Şekil 5.28a, Şekil 5.28b, Şekil 5.29, Şekil 5.30, Şekil 5.31 ile verildiği gibi bir slayt ekranı içerisinde kullanıcıya sunulur.



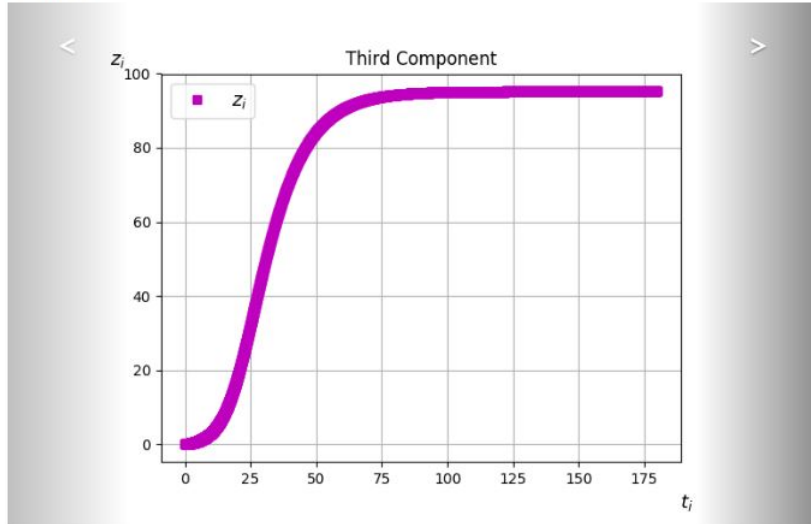
**Şekil 5.29. (5.5) problemi için birinci bileşenin nümerik çözümü**

Output



Şekil 5.30. (5.5) problemi için ikinci bileşenin nümerik çözümü

Output



Şekil 5.31. (5.5) problemi için üçüncü bileşenin nümerik çözümü

## 6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, [12], [13], [25–30] da verilen adım genişliği stratejileri için özellikle son yıllarda popüleritesi artan ve ülkemizde de sıkça tercih edilmeye başlanan Python programlama dili ile komut ekranından çalışabilen programlar yazılmıştır. Yazılan programların kod satır sayısı çok fazla olduğundan tez çalışmasına eklenmemiştir. Ancak bu programlar istenildiği takdirde <https://ersan-erdem@bitbucket.org/ersan-erdem/step-size-strategies.git> adresinden indirilebilir. Yazılan programlara hem görsellik katmak hem de kullanımını kolaylaştırmak amacıyla Python dilinin Django web çatısı kullanılarak etkileşimli bir web arayüzü tasarlanmıştır. Tasarlanan web arayüzü birinci mertebeden Cauchy problemlerinin nümerik integrasyonu için üç farklı adım genişliği stratejisinin, birer tane de 4x4 boyuta kadar lineer ve lineer olmayan sistemler şeklinde verilen Cauchy problemlerinin nümerik integrasyonu için adım genişliği stratejisinin online kullanımını sağlamaktadır. Web arayüzü, Cauchy probleminin verilerini girdi olarak alır ve problemi çözer. Elde edilen çözüm değerlerini ve bu değerlere ait grafikleri çıktı olarak kullanıcıya sunar. Dahası elde edilen çözüm değerleri bir excel tablosu olarak ve bu değerlere ait grafikleri de bir resim olarak indirmeye imkan sağlar.

Tez çalışması sonucunda elde edilen web arayüzü *Step Size Strategies* adıyla <https://stepsizestrategies.pythonanywhere.com> adresinde kullanıma sunulmuştur.

## KAYNAKLAR

- [1] Paul. *EMathHelp*, <http://www.emathhelp.net/calculators/differential-equations/euler-method-calculator/>. 2018 (Erişim tarihi:21.04.2019).
- [2] Stefan Waner. *Two Dimensional Differential Equation Solver and Grapher V 1.0*, <https://www.zweigmedia.com/RealWorld/deSystemGrapher/func.html>. 2006 (Erişim tarihi:21.04.2019).
- [3] Jonathan R. Senning. *First Order Differential Equation Solver*, <http://www.math-cs.gordon.edu/senning/desolver/>. 2009 (Erişim tarihi:21.04.2019).
- [4] Caiso Computer Co.LTD. *Keisan Online Calculator*, <https://keisan.casio.com/exec/system/1392171850>. 2018 (Erişim tarihi:21.04.2019).
- [5] Carlos Toro. *MathsTools* <https://www.mathstools.com/>. 2012 (Erişim tarihi:21.04.2019).
- [6] Jürgen Brandes. *Calculator for general first order differential equations* <http://elsenaju.eu/Calculator/ODE-General-first-Order.htm>. 2011 (Erişim tarihi:21.04.2019).
- [7] Angel Jorba Maorong Zou. A software package for the numerical integration of odes by means of high-order taylor methods. 2004.
- [8] Söderlind Gustaf. Time-step selection algorithms: Adaptivity, control, and signal processing. *Applied Numerical Mathematics*, 56(2006):488–502, 2005.
- [9] Z.A. Majid F. Ismail and M. Suleiman Waeleh, N. Numerical solution of higher order ordinary differential equations by direct block code. *Journal of Mathematics and Statistics*, 8(1):77–81, 2012.
- [10] Ritschel Tobias. *Numerical Methods For Solution of Differential Equations*. Technical University of Denmark Department of Applied Mathematics and Computer Science, Kongens Lyngby, Denmark, 2005.

- [11] Golberg Oleg. Adaptive stepsize numerical methods for solving ordinary differential equations. 2007.
- [12] Gülnur Çelik Kızılkın. *Başlangıç değer problemlerinin nümerik integrasyonunda adım genişliği tespiti*. Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 2004.
- [13] Gülnur Çelik Kızılkın. *Diferensiyel denklem sistemlerinin nümerik integrasyonunda adım genişliği stratejileri*. Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 2009.
- [14] A.G. Malliaris W.A. Brock. *Differential Equations, Stability and Chaos in Dynamic Economics*. Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1989.
- [15] Carroll J. *Outline Lecture Notes, Numerical Solution of ODE Initial Value Problems*. 2002.
- [16] Miranker W. L. *Numerical Methods for Stiff Equations and Singular Perturbations*. D. Reidel Publishing Company Holland, 1981.
- [17] Bulgak H. Chumakova N.A. Aydın K., Bulgak A. *Global Error Estimation in Numerical Integration of Ordinary Differential Equations*. 2001.
- [18] Christopher P. Grant. *Theory of Ordinary Differential Equations*. 2008.
- [19] Ernst Hairer. *Numerical Geometric Integration*. Universite de Geneve, 1999.
- [20] David Stewart Kendall Atkinson, Weimin Han. *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*. A John Wiley, Sons, Inc., Publication, 2009.
- [21] J. Douglas Faires Richard L. Burden. *Numerical Analysis, Ninth Edition*. Richard Stratton, 2010.
- [22] S. Pross L.F. Shampine, R.C. Allen Jr. *Fundamentals of Numerical Computing*. John Wiley, Sons, 1996.
- [23] Mark E. Davis. *Numerical Methods and Modelling for Chemical Engineers*. John Wiley,

Sons, 1984.

- [24] Michael T. Heath. *Scientific Computing an Introductory Survey, Second Edition*. McGraw-Hill, New York, 2002.
- [25] Gülnur Çelik Kızıllkan Kemal Aydın. Step size strategy based on error analysis. *SDU Journal of Science (E-Journal)*, 25:79–86, 2005.
- [26] Gülnur Çelik Kızıllkan Kemal Aydın. A new variable step size algorithm for cauchy problem. *Applied Mathematics and Computation*,, 183:878–884, 2006.
- [27] Gülnur Çelik Kızıllkan Kemal Aydın. Step size strategies based on error analysis for the linear systems. *SDU Journal of Science (E-Journal)*, 25(6):149–159, 2011.
- [28] Gülnur Çelik Kızıllkan Kemal Aydın. Step size strategies for the numerical integration of systems of differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 236:3805–3816, 2012.
- [29] Gülnur Çelik Kızıllkan Ahmet Duman, Kemal Aydın. The analysis of the effect of the norms in the step size selection for the numerical integration. *Konuralp Journal of Mathematics*, 4(2):116–123, 2016.
- [30] Gülnur Çelik Kızıllkan Ahmet Duman, Kemal Aydın. Analysis with variable step size strategy of some sir epidemic models. *Karaelmas Fen ve Mühendislik Dergisi*, 6(1):203–210, 2016.
- [31] Ayman Hourieh. *Learning Website Development with Django*. Packt Publishing, 2008.
- [32] Allen Downey. *Think python*. Green Tea Press, 2012.
- [33] Hans Petter Langtangen. *Numerical python*. Simula Research Laboratory Dept. of Informatics, Univ. of Oslo, 2008.
- [34] Ian Ozsvald Micha Gorelick. *High Performance Python*. O’Reilly Media, 2014.

- [35] Hans Fangohr. *Introduction to python for computational science and engineering*. Faculty of Engineering and the Environment University of Southampton, 2015.
- [36] Richard L. Halterman. *Learning to program with Python*. 2011.
- [37] Muslu Yüksektepe. *A turkish guide about Django*. 2016.
- [38] Paul Dawkins. *Differential Equations, Paul's Online Math Notes*. 2003.
- [39] *Family Practice Notebook* <https://fpnotebook.com/legacy/CV/Pharm/Ldcn.htm> (Erişim tarihi:21.04.2019).
- [40] Grant B. Gustafson. *Systems of Differential Equations* <http://www.math.utah.edu/~gustafso/2250systems-de.pdf>. Mathematics Department University of Utah, Salt Lake City, 2019 (Erişim tarihi:21.04.2019).
- [41] Bastin G. Lectures on mathematical modelling of biological systems, <https://perso.uclouvain.be/georges.bastin/lectures-bio.pdf>. 2012 (Erişim tarihi:21.04.2019).
- [42] Lobo SNF. Mak MK. Harko, T. Exact analytical solutions of the susceptible- infected-recovered (sir) epidemic model and of the sir model with equal death and birth dates. *Appl. Math. Comput.*, 236:84–94, 2014.
- [43] SNF. Mak MK. Harko T., Lobo. The mathematics of infectious diseases. *SIAM Review*, 42(4):599–653, 2014.
- [44] L.J.S. Allen. *An introduction to stochastic epidemic models. In Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1945.



# ÖZGEÇMİŞ

## KİŞİSEL BİLGİLER

**Adı Soyadı :** Ersan ERDEM  
**Uyruğu :** T.C.  
**Doğum Yeri ve Tarihi :** KONYA - 30.12.1990  
**Telefon :** 0535 608 0931  
**Faks :** -  
**e-mail :** ersanerdem.ee@gmail.com

## EĞİTİM

Derece	Adı	Bitirme Yılı
Lise	Seydişehir Lisesi	2009
Lisans	Anadolu Üniversitesi	2015
Yüksek Lisans	Necmettin Erbakan Üniversitesi	2019

## İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2 Ay	Photon Transfer	Veri Bilimcisi
1 Yıl 4 Ay	Özgüven Sistem Koleji	Matematik Öğretmeni
10 Ay	Özel Final Ortaokulu	Matematik Öğretmeni

## YABANCI DİLLER

İngilizce

## YAYINLAR

1) Creating a Web Interface for Step Size Strategies, International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2017), Harran University, Sanliurfa, May 11-13, 2017, (Ersan ERDEM, Gülnur ÇELİK KIZILKAN, Ali Osman ÇIBIKDİKEN).