

Моделирование движения вязкой неоднородной жидкости в искусственном сердечном клапане

Долгов Д.А.

аспирант кафедры вычислительной математики

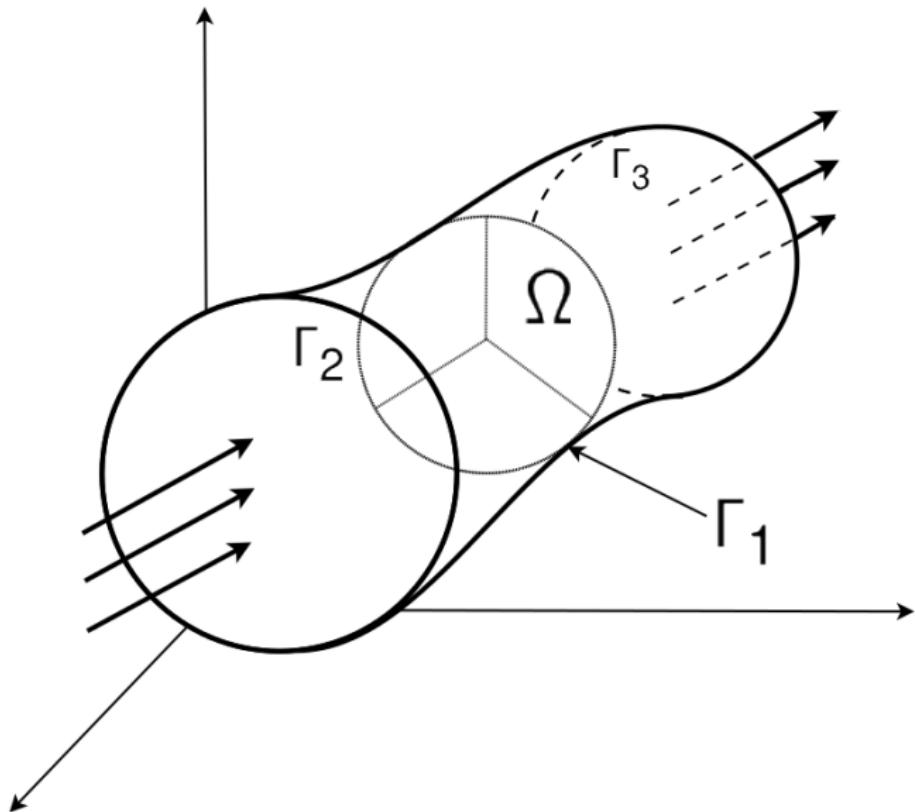
Научный руководитель: Захаров Ю.Н.

Кемеровский Государственный Университет

Введение

Рассмотрим задачу о течении крови внутри крупных сосудов с гибкими стенками и клапаном. Кровь является неоднородной и состоит из плазмы и взвешенных в ней форменных элементов. Клапан и стенки сосуда являются гибкими и изменяют свою форму под воздействием течения. Будем моделировать кровь как вязкую, несжимаемую двухкомпонентную жидкость, а стенки сосуда - как поверхность заданной формы, обладающую определенной жесткостью.

Введение



Моделирование течения

Система уравнений Навье-Стокса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \cdot \sigma + f \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0 \quad (2)$$

где $\sigma = \mu(\nabla u + (\nabla u)^T)$, $\bar{x} = (x, y, z) \in \Omega$ с начальными и краевыми условиями

$$u(\bar{x}, t_0) = u_0; \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_2, \Gamma_3} = 0$$

$$p|_{\Gamma_2} = p_{in}; \quad p|_{\Gamma_3} = p_{out}$$

Концентрация

Уравнение для расчета концентрации примеси в жидкости:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \cdot \nabla c = 0 \quad (3)$$

с начальными и краевыми условиями

$$c(\bar{x}, 0) = c_0(\bar{x})$$

$$c(\bar{x}, t)|_{\Gamma_2} = c_s(\bar{x}, t)$$

Концентрация

Плотность и вязкость зависят от концентрации:

$$\mu = c(\mu_2 - \mu_1) + \mu_1 \quad (4)$$

$$\rho = c(\rho_2 - \rho_1) + \rho_1 \quad (5)$$

где $\mu_1, \mu_2, \rho_1, \rho_2$ - вязкости и плотности обоих компонент.

Сопротивление деформации

В каждой точке сосуда и клапана определена поверхностная сила, которая стремится вернуть систему в равновесное положение

$$F = \frac{\partial}{\partial s}(T\tau) + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(E \cdot I \frac{\partial^2}{\partial s^2} X \right) \quad (6)$$

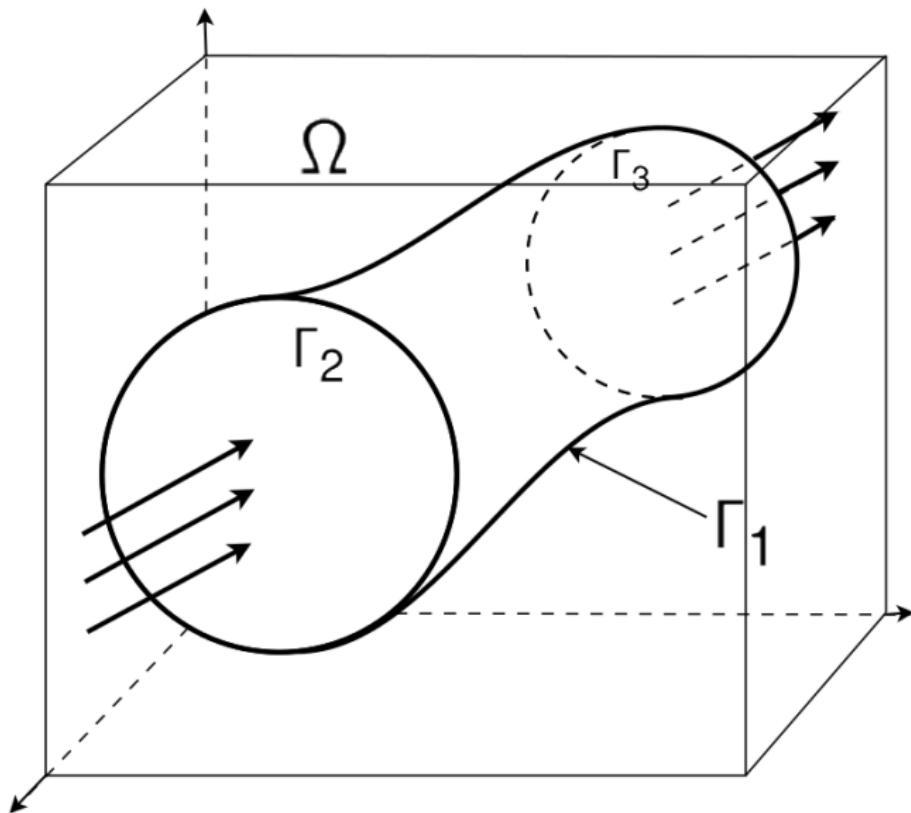
$$F = k \cdot \|X - X_0\| \quad (7)$$

Метод решения

Будем рассматривать отдельно задачи вычисления параметров течения жидкости и параметров движения стенок сосуда и клапанов.
Для этого введем в расчетной области сетки:

- $\Omega_h = \Omega_h(x, y, z)$ - равномерная разнесенная сетка для расчета течения
- $\Gamma_h = \Gamma_h(q, r, s, t)$ - дополнительная сетка, соотнесенная со стенками сосуда и лепестками клапана (в лагранжевых координатах)

Метод решения



Алгоритм

- Решаем задачу (1)-(2)
- Определяем концентрацию примеси с помощью (3) и пересчитываем ρ, μ
- Определяем деформацию сосуда и клапана под воздействием жидкости
- По формулам (6)-(7) вычисляем значение сил, противодействующих деформации
- Находим новое распределение массовых сил в уравнении движения жидкости

Алгоритм решения

Схема расщепления по физическим факторам:

$$\frac{u^* - u^n}{\Delta t} = -(u^n \cdot \nabla) u^n + \frac{1}{\rho} \nabla \sigma + f \quad (8)$$

$$\rho \Delta p^{n+1} - (\nabla p \cdot \nabla p^{n+1}) = \frac{\rho^2 \nabla u^*}{\Delta t} \quad (9)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1} \quad (10)$$

где $\nabla \sigma(u^n, \mu) = \mu \Delta u^n + (\nabla \mu \cdot \nabla) u^n + (\nabla \mu \cdot J_{u^n})$

Взаимодействие

Уравнения, описывающие взаимодействие погруженной границы и жидкости:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \int_{\Omega_h} u \cdot \delta(\bar{x} - X) \, dx \, dy \, dz \quad (11)$$

$$f = \int_{\Gamma_h} F \cdot \delta(\bar{x} - X) \, dq \, dr \, ds \quad (12)$$

$$\frac{\partial X}{\partial t}(q, r, s, t) = u(X(q, r, s, t), t) \quad (13)$$

Взаимодействие

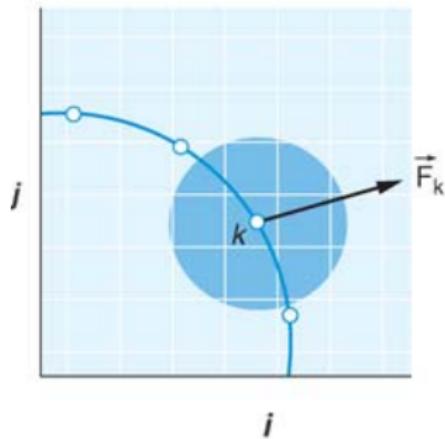
Интерполяция скорости на погруженную границу и распределение силы сопротивления деформации:

$$U_n = \sum_{ijk} u_{ijk} \cdot D(x_{ijk} - x_n) h_{ijk}^3 \quad (14)$$

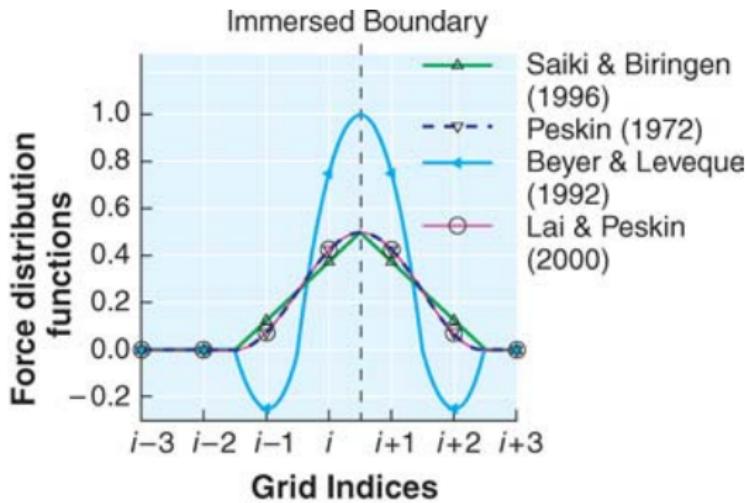
$$f_{ijk} = \sum_n F_n \cdot D(x_{ijk} - x_n) h_n^2 \quad (15)$$

$D(x_n)$ соответствует $\delta(x - x_k)$.

Дельта-функция

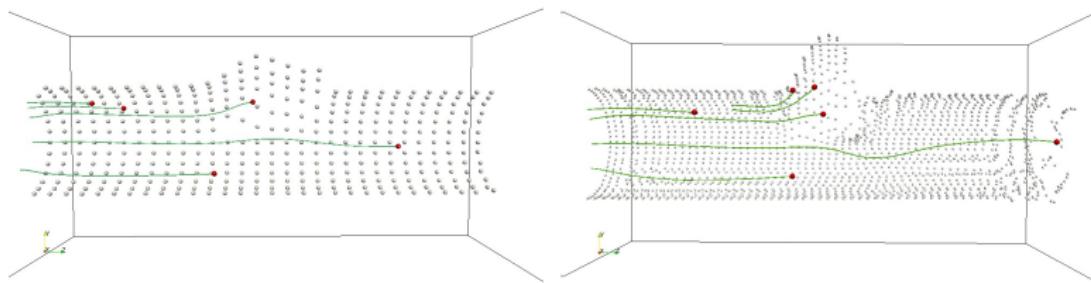


(a)



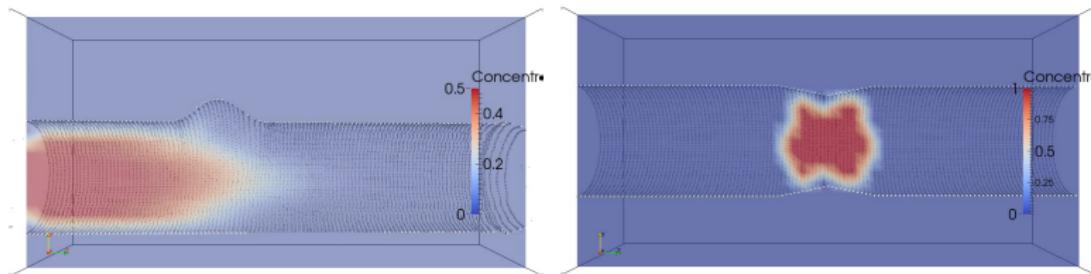
(b)

Примеры



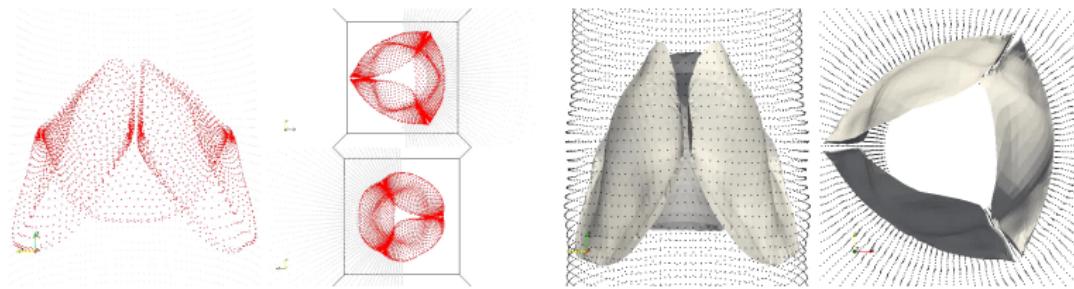
- Деформация стенок сосуда
- Аналогичный расчет на более мелкой сетке

Примеры



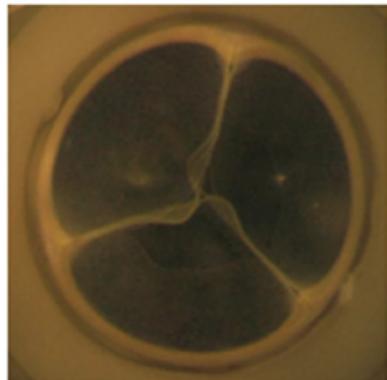
- Расчет распространения примеси
- Размыв "тромба"

Примеры

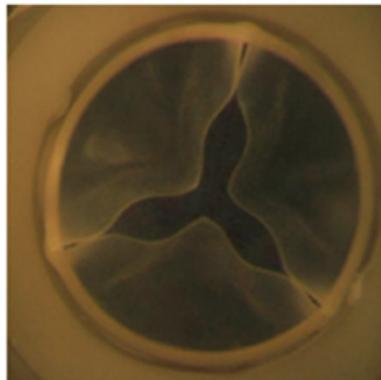


- Движение клапана
- Движение клапана (поверхность)

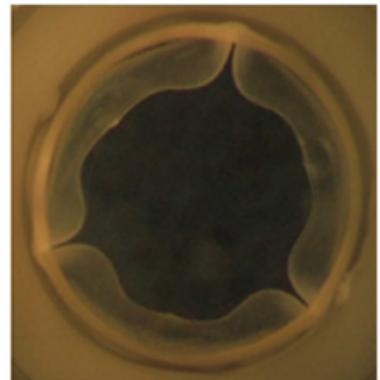
Примеры



(a)



(b)



(c)

Watton PN, Luo XY et al (2007) Dynamic modelling of prosthetic chorded mitral valves using the immersed boundary method. J Biomech 40(3):613–626 Watton PN, Luo XY et al (2008) Effect of ventricle motion on the

График расхода жидкости

