

# Моделирование движения вязкой неоднородной жидкости в крупных кровеносных сосудах и клапанах

Долгов Д.А.

аспирант кафедры вычислительной математики

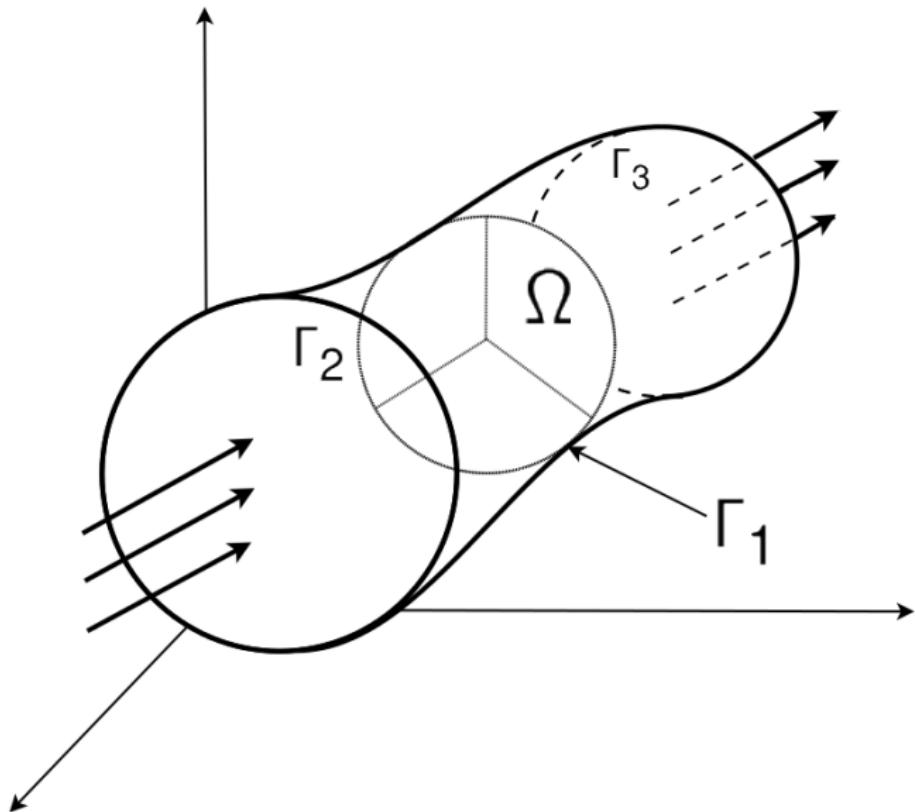
Научный руководитель: Захаров Ю.Н.

Кемеровский Государственный Университет

# Введение

Рассмотрим задачу о течении крови внутри крупных сосудов с гибкими стенками и клапаном. Кровь является неоднородной и состоит из плазмы и взвешенных в ней форменных элементов. Клапан и стенки сосуда являются гибкими и изменяют свою форму под воздействием течения. Будем моделировать кровь как вязкую, несжимаемую двухкомпонентную жидкость, а стенки сосуда и лепестки клапана - как поверхность заданной формы, обладающую определенной жесткостью.

# Введение



# Моделирование течения

Система уравнений Навье-Стокса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \cdot \sigma + f \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0 \quad (2)$$

где  $\sigma = \mu(\nabla u + (\nabla u)^T)$ ,  $\bar{x} = (x, y, z) \in \Omega$  с начальными и краевыми условиями

$$u(\bar{x}, t_0) = u_0; \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_2, \Gamma_3} = 0$$

$$p|_{\Gamma_2} = p_{in}; \quad p|_{\Gamma_3} = p_{out}$$

# Концентрация

Уравнение для расчета концентрации примеси в жидкости:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \cdot \nabla c = 0 \quad (3)$$

с начальными и краевыми условиями

$$c(\bar{x}, 0) = c_0(\bar{x})$$

$$c(\bar{x}, t)|_{\Gamma_2} = c_s(\bar{x}, t)$$

# Концентрация

Плотность и вязкость зависят от концентрации:

$$\mu = c(\mu_2 - \mu_1) + \mu_1 \quad (4)$$

$$\rho = c(\rho_2 - \rho_1) + \rho_1 \quad (5)$$

где  $\mu_1, \mu_2, \rho_1, \rho_2$  - вязкости и плотности обоих компонент.

# Сопротивление деформации

В каждой точке сосуда и клапана определена поверхностная сила, которая стремится вернуть систему в равновесное положение

$$F = \frac{\partial}{\partial s}(T\tau) + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left( E \cdot I \frac{\partial^2}{\partial s^2} X \right) \quad (6)$$

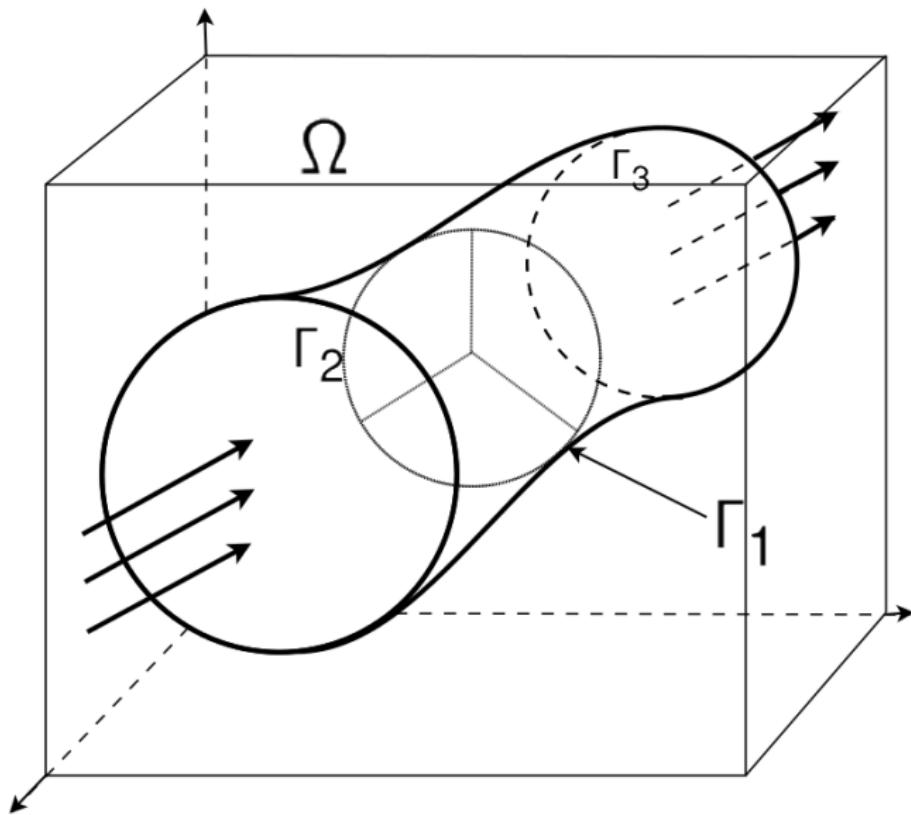
$$F = k \cdot \|X - X_0\| \quad (7)$$

# Метод решения

Будем рассматривать отдельно задачи вычисления параметров течения жидкости и параметров движения стенок сосуда и клапанов.  
Для этого введем в расчетной области сетки:

- $\Omega_h = \Omega_h(x, y, z)$  - равномерная разнесенная сетка для расчета течения
- $\Gamma_h = \Gamma_h(q, r, s, t)$  - дополнительная сетка, соотнесенная со стенками сосуда и лепестками клапана (в лагранжевых координатах)

# Метод решения



# Алгоритм

- Решаем задачу (1)-(2)
- Определяем концентрацию примеси с помощью (3) и пересчитываем  $\rho, \mu$
- Определяем деформацию сосуда и клапана под воздействием жидкости
- По формулам (6)-(7) вычисляем значение сил, противодействующих деформации
- Находим новое распределение массовых сил в уравнении движения жидкости

# Алгоритм решения

Схема расщепления по физическим факторам:

$$\frac{u^* - u^n}{\Delta t} = -(u^n \cdot \nabla) u^n + \frac{1}{\rho} \nabla \sigma + f \quad (8)$$

$$\rho \Delta p^{n+1} - (\nabla p \cdot \nabla p^{n+1}) = \frac{\rho^2 \nabla u^*}{\Delta t} \quad (9)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1} \quad (10)$$

где  $\nabla \sigma(u^n, \mu) = \mu \Delta u^n + (\nabla \mu \cdot \nabla) u^n + (\nabla \mu \cdot J_{u^n})$

# Взаимодействие

Уравнения, описывающие взаимодействие погруженной границы и жидкости:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \int_{\Omega_h} u \cdot \delta(\bar{x} - X) \, dx \, dy \, dz \quad (11)$$

$$f = \int_{\Gamma_h} F \cdot \delta(\bar{x} - X) \, dq \, dr \, ds \quad (12)$$

$$\frac{\partial X}{\partial t}(q, r, s, t) = u(X(q, r, s, t), t) \quad (13)$$

# Взаимодействие

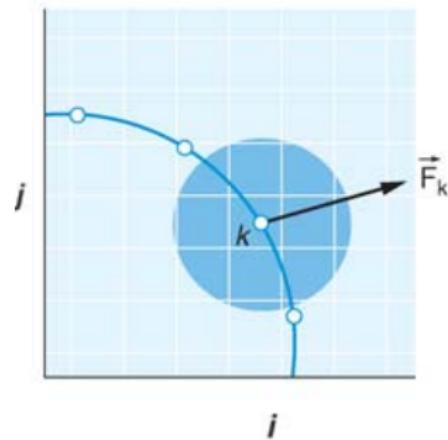
Интерполяция скорости на погруженную границу и распределение силы сопротивления деформации:

$$U_n = \sum_{ijk} u_{ijk} \cdot D(x_{ijk} - x_n) h_{ijk}^3 \quad (14)$$

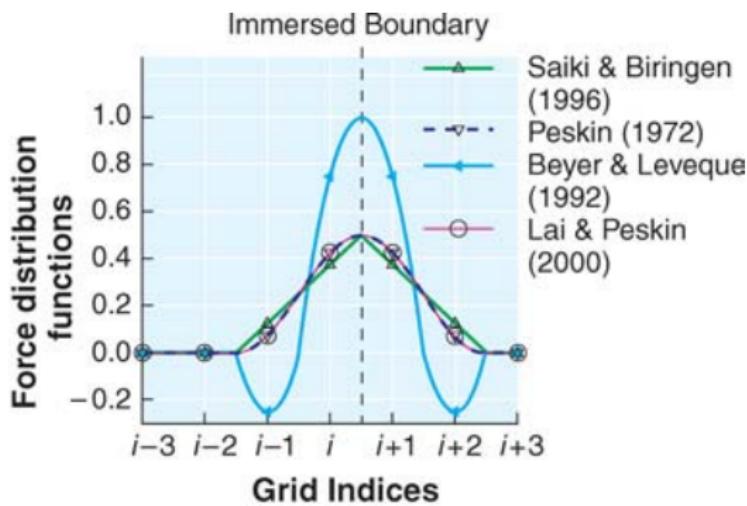
$$f_{ijk} = \sum_n F_n \cdot D(x_{ijk} - x_n) h_n^2 \quad (15)$$

$D(x_n)$  соответствует  $\delta(x - x_k)$ .

# Дельта-функция

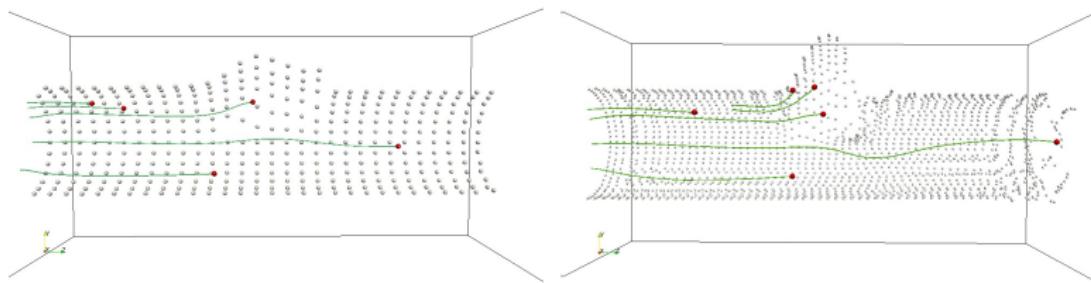


(a)



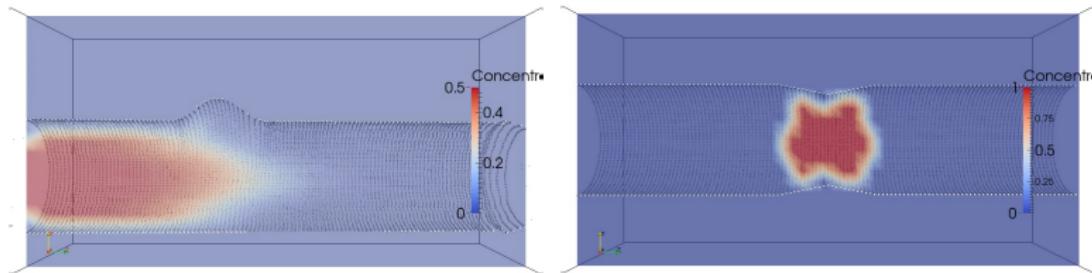
(b)

# Примеры



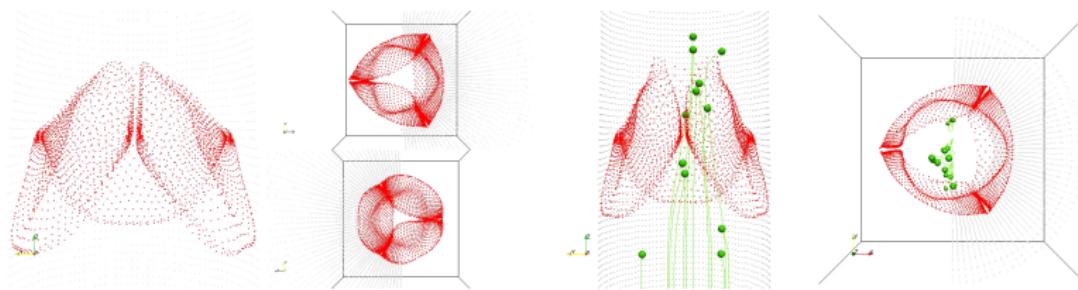
- Деформация стенок сосуда
- Аналогичный расчет на более мелкой сетке

# Примеры



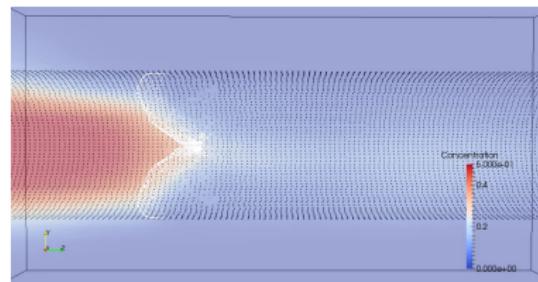
- Расчет распространения примеси
- Размыв "тромба"

# Примеры



- Движение клапана
- Треки частиц

# Примеры



- Распространение примеси в сосуде с клапаном

# Примеры

