

Численное моделирование работы искусственного сердечного клапана

Юрий Н. Захаров¹, Дмитрий А. Долгов¹, Юрий И. Шокин²

¹Кемеровский Государственный Университет

²ИБТ СО РАН

E-mail: zaharov@rambler.ru

Аннотация

В работе рассмотрена математическая модель, описывающая динамику искусственного сердечного клапана, а также метод ее численного решения. Приведены результаты моделирования работы трехстворчатого клапана идеальной формы и биопротеза "Юнилайн".

Keywords: Вязкая несжимаемая жидкость, искусственный сердечный клапан, метод погруженной границы

MSC 2010: 65A01, 65B02,...

Received: Date...

1 Введение

На сегодняшний день исследования в области сердечно-сосудистой системы человека востребованы как никогда. Это связано с двумя основными причинами: во-первых, сердечно-сосудистые заболевания становятся все более распространенными в силу ряда социальных причин (экономические изменения, урбанизация и проч. приводят к изменению образа жизни многих людей) и увеличения влияния факторов риска (например, уменьшение физической активности) [1]. Каждый год в мире проводится примерно 250 000 операций по восстановлению или замене поврежденных сердечных клапанов, и наблюдается тенденция к росту этого числа [2].

Во-вторых, для улучшения качества и продления жизни пациентов с тивными сердечными клапанами требуется вживлёнными искусственными сердечными клапанами требуется совершенствовать их конструкции.

Искусственные сердечные клапана являются одними из самых сложных биопротезов, используемых в кардио хирургии. Они достаточно эффективно позволяют бороться с заболеваниями и повреждениями естественных клапанов, но при этом не являются достаточно долговечными и при их использовании могут проявляться побочные явления. Например, механические клапаны обладают высокой надёжностью и долговечностью, но могут приводить к сильным деформациям потока, формированию сгустков кровяных клеток и как следствие - к образованию тромбов. Биологические клапаны лишены этого недостатка, однако они менее долговечны и их изготовление достаточно сложная техническая задача, которая до сих пор полностью не решена. Так как проведение лабораторных и тем более натурных экспериментов является очень сложной задачей, то поэтому математическое моделирование работы искусственного клапана, аналогичного естественному, может позволить получить более глубокое понимание взаимодействия потока крови и клапана и тем самым найти пути усовершенствования их конструкции. В силу важности данной темы существует множество исследований по

В силу важности данной темы существует множество исследований по моделированию и численному решению работы сердечного клапана. Большинство из них акцентируют внимание только на самом клапане, анализе его поведения, деформации и напряжениях, возникающих под воздействием давления [3], [4]. При этом поток жидкости, приводящий в движение клапан, рассматривается достаточно упрощённо, например, просто используя физиологическое давление жидкости на клапан, полученное экспериментально. Для того, чтобы построить более полную модель, необходимо рассматривать полноценное взаимодействие жидкости и клапана с учётом изменения плотности и вязкости крови при прохождении через клапан.

Существует два основных подхода, которые позволяют исследовать работу сердечных клапанов. Первый - основан на применении конечно-элементных методов ([5], [6], [7]). Используя их, можно хорошо учитывать сложную геометрию сердца, однако необходимость учитывать взаимодействие жидкости и гибких стенок приводит к постоянному перестраиванию расчетной сетки, чтобы удовлетворять меняющейся геометрии исследуемого объекта. Это приводит к существенным затратам времени и вычислительных

ресурсов. Более распространенным методом численного моделирования взаимодействия гибких створок клапана с кровью является метод погруженных границ ([8], [9], [10]). Он может применяться в задачах со сложной геометрией, но при этом не требует модификации сетки, и позволяет моделировать угодно тонкие створки клапана и их деформацию.

В данной работе мы используем именно этот подход, и предлагаем описывать движение крови в упругих крупных кровеносных сосудах и искусственном сердечном клапане как трехмерное нестационарное течение вязкой несжимаемой жидкости с переменной плотностью и вязкостью (см. [11], [12], [13]). Таким образом, целью работы является построение математической модели и метода решения задачи о движении створок искусственного клапана внутри кровеносного сосуда с учетом неоднородной структуры крови, а также о движении примеси (форменных элементов) внутри сосуда.

2 Постановка задачи

Как известно [14], стенки сосуда и створки клапана состоят из большого количества коллагеновых волокон, и изменяют свою форму в зависимости от течения крови. Створки клапана исключительно тонки, их основание крепятся к жесткому кольцу из фиброзной ткани. Кровь состоит из плазмы и взвешенных в ней форменных элементов, которые составляют примерно 45% от всего объема.

Размеры форменных элементов очень малы по сравнению с размерами сосуда (например, диаметр аорты $\sim 3 \cdot 10^{-2}$ м, а диаметр эритроцита $\sim 6 \cdot 10^{-9}$ м). как показано в [15], отдельно плазма ведет себя как ньютоновская жидкость. Это позволяет нам рассматривать движение крови в крупных кровеносных сосудах как течение вязкой, несжимаемой неоднородной двухкомпонентной жидкости с переменной вязкостью и плотностью. Стенки сосуда и створки клапана будем считать непроницаемыми для жидкости поверхностями, которые обладают некоторой жесткостью. Под воздействием давления жидкости стенки сосудов и створки клапана могут деформироваться.

Так как источником движения крови в сосудах является давление, создаваемое сокращением сердца, то задачу о движении крови опишем следующей нестационарной системой дифференциальных уравнений Навье-Стокса [11]:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \sigma + \mathbf{f} \quad (2.1)$$

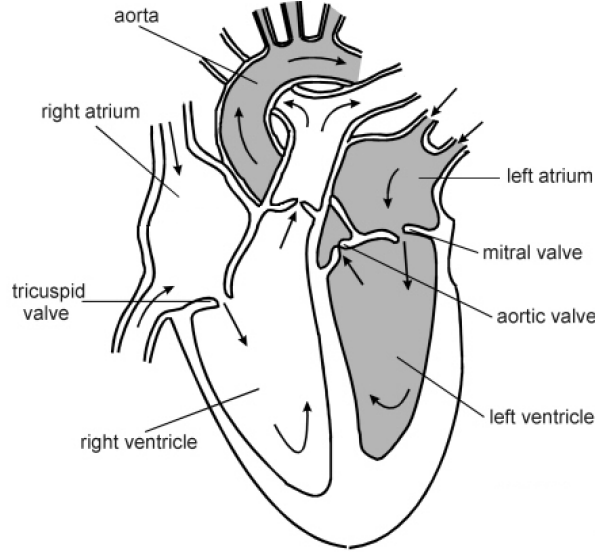


Рис. 1: Изображение аортального клапана и его расположение в сердце

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.2)$$

с начальными и краевыми условиями:

$$\mathbf{u}(\bar{x}, 0) = \mathbf{u}_0 \quad \mathbf{u}|_{\Gamma_1, \Gamma_4} = \mathbf{u}_b \quad v, w|_{\Gamma_2, \Gamma_3} = 0 \quad (2.3)$$

$$p_{\Gamma_2} = p_{in} \quad p_{\Gamma_3} = p_{out} \quad (2.4)$$

где переменные плотность и вязкость $\rho = \rho(\bar{x}, t)$, $\mu = \mu(\bar{x}, t)$ определяются следующим образом:

$$\mu = c(\mu_2 - \mu_1) + \mu_1 \quad (2.5)$$

$$\rho = c(\rho_2 - \rho_1) + \rho_1 \quad (2.6)$$

Здесь $\mu_1, \mu_2, \rho_1, \rho_2$ - вязкости и плотности несущей жидкости (плазмы) и примеси (форменных элементов) соответственно, c - концентрация примеси, $\bar{x} = (x, y, z) \in \Omega$, $\mathbf{u} = (u, v, w)$ - вектор скорости с компонентами $u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)$, \mathbf{u}_b - скорость движения створок клапана под воздействием деформации, $\rho = \rho(\bar{x}, t)$ - плотность, $p = p(\bar{x}, t)$ - давление, $\sigma = \mu(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$ - вязкий тензор напряжений, $\mu = \mu(\bar{x}, t)$ - вязкость жидкости, $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\bar{x}, t)$ - вектор массовых сил. Область Ω представляет собой сосуд с границами $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, где Γ_1 - стенки кровеносного сосуда,

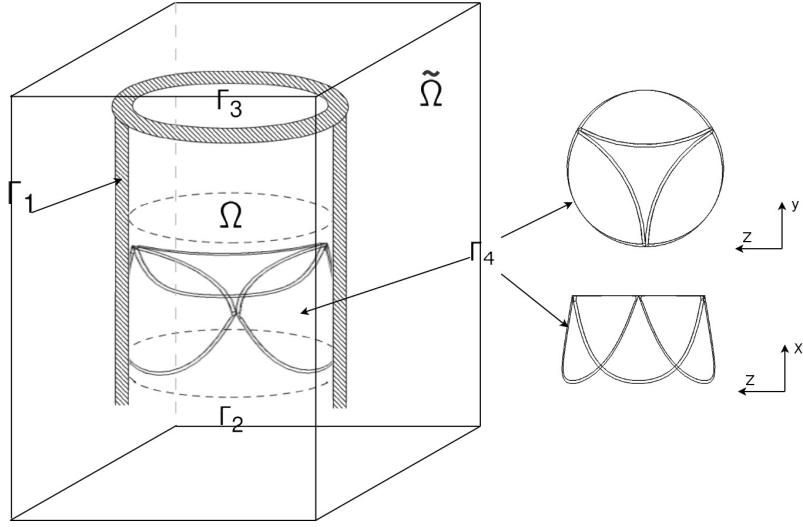


Рис. 2: Изображение границ расчетной области

Γ_2 and Γ_3 - границы, на которых происходит втекания/вытекания, Γ_4 - створок клапана (см рис. 2).

Концентрация определяется как решение уравнения переноса:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c = 0 \quad (2.7)$$

с начальными условиями:

$$c(\bar{x}, 0) = c_0(\bar{x}), \bar{x} \in \Omega \quad (2.8)$$

с краевыми условиями для области втекания:

$$c(\bar{x}, t)|_{\Gamma_2} = c_s(\bar{x}, t) \quad (2.9)$$

Отсутствие задания одной компоненты вектора скорости $u(x, y, z, t)$ на участках втекания-вытекания является одной из проблем при численном решении задач подобного типа. Она решается с помощью использования исходных уравнений (2.1) - (2.2) на границах Γ_2 и Γ_3 для вычисления недостающих компонент вектора скорости (подробнее см. [11], [12]).

Для того, чтобы иметь возможность моделировать движение тонких гибких клапанов, необходимо добавить силы, возникающие при деформации створок клапана и стремящиеся вернуть их в равновесное состояние.

Для описания сил, возникающих при деформации клапана, воспользуемся следующей формулой (см.[8], [9]):

$$F = \frac{\partial}{\partial s} T \boldsymbol{\tau} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(k \cdot \left(\frac{\partial^2 X^0}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 X}{\partial s^2} \right) \right) \quad (2.10)$$

где $\bar{q} = (q, r, s) \in \Gamma$, $X = X(\bar{q}, t)$ - функция, описывающая поверхность створок клапана в момент времени t , $X^0 = X(\bar{q}, 0)$, координаты q, r, s выбраны так, чтобы поверхность X была представлена набором параметрических линий $s \rightarrow X(q^*, r^*, s)$, T - напряжение, возникающее вдоль линии $s \rightarrow X(q^*, r^*, s)$, $\boldsymbol{\tau}$ - единичный вектор, касательный к поверхности клапана, $k = E \cdot I$, E - модуль упругости, I - момент инерции поперечного сечения.

Как показано в [8], для того, чтобы описать взаимодействие потока жидкости и клапана, необходимо ввести в рассмотрение параллелепипед $\tilde{\Omega}$, содержащий внутри себя Ω . Тогда движение гибкой границы в жидкости определяется из следующего уравнения:

$$\frac{\partial X}{\partial t}(\bar{q}, t) = \int_{\Omega} \mathbf{u}(\bar{x}, t) \cdot \delta(x - X(\bar{q}, t)) d\bar{x} \quad (2.11)$$

и правая часть системы 2.1 задается следующим образом:

$$\mathbf{f}(\bar{x}, t) = \int_{\Gamma} \mathbf{F}(\bar{q}, t) \cdot \delta(x - X(\bar{q}, t)) d\bar{q} \quad (2.12)$$

где δ - дельта функция Дирака, F - сила деформации.

Таким образом, уравнения 2.1 - 2.12 описывают взаимодействие крови как вязкой неоднородной несжимаемой жидкости с переменной вязкостью и плотностью с искусственным сердечным клапаном. В этой модели состояние жидкости и форма поверхностей $\Gamma_1 \cup \Gamma_4$ определяются независимо друг от друга, а влияние створок клапана на течение отражено с помощью соотношения (2.12) между вектором массовых сил $\mathbf{f}(\bar{x}, t)$ уравнения (2.1) и силой сопротивления деформации $F = F(\bar{q}, t)$ из уравнения (2.10).

3 Метод решения

В данной работе для определения движения створок клапана мы будем использовать метод погруженной границы [8]. В соответствии с этим методом, будем рассчитывать течение жидкости в параллелепипеде $\tilde{\Omega}$, который включает в себя Ω (см. рис 2). На границах $\tilde{\Omega}$ задано условие прилипания. Для расчета течения жидкости будем использовать прямоугольную равномерную разнесенную сетку $\tilde{\Omega}_h$ с шагами h_{xi}, h_{yj}, h_{zk} и шахматным расположением узлов, где давление, дивергенция скорости и концентрация определяются

в центре ячейки, а компоненты вектора скорости и внешних сил – на границах.

Алгоритм решения состоит из нескольких шагов: на сетке $\tilde{\Omega}_h$ решаем задачу (2.1)-(2.4); затем решаем уравнение конвекции (2.7) т.е. определяем концентрацию примеси в области решения и пересчитываем значение плотности и вязкости. После этого используем формулы (2.10) и (2.11), (2.12) для определения положения створок клапана и их формы

Поставленная дифференциальная задача (2.1) – (2.6) решается методом конечных разностей. Для решения (2.1) – (2.4) будем использовать схемы расщепления по физическим факторам [16]:

$$\frac{u^* - u^n}{\Delta t} = -(u^n \cdot \nabla)u^* - \frac{1}{\rho}\nabla\sigma + f^n \quad (3.1)$$

$$\rho\Delta p^{n+1} - \nabla\rho \cdot p^{n+1} = \frac{\rho^2\nabla u^*}{\Delta t} \quad (3.2)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho}\Delta p^{n+1} \quad (3.3)$$

Численная реализация схемы состоит из 3-х этапов. Сначала по известным значениям скорости с предыдущего временного слоя находится промежуточное поле u^* . Для этого уравнение (3.1) решается методом стабилизирующей поправки [17]. Затем, путем численного решения (3.2) с использованием метода бисопряженных градиентов, определяется новое поле давления. И на последнем этапе восстанавливается окончательное поле вектора скорости по явным формулам (3.3).

После нахождения параметров течения жидкости необходимо вычислить новые значения плотности и вязкости. Для этого, используя полученные значения компонент скорости, делается шаг по времени для уравнения конвекции (2.7), и производится пересчет значений плотности и вязкости по формулам (2.5), (2.6).

Далее нам необходимо определять деформацию стенок сосуда и створок клапана под воздействием жидкости, а также распределение массовых сил $\mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t})$ в уравнении движения жидкости исходя из возникшей деформации. Используя уравнения (2.11) – (2.12), которые численно интегрируются с помощью обобщенной квадратурной формулы трапеций, и уравнение (2.10), мы можем рассчитать деформацию, которой подвергаются стенки сосуда и клапан при данном давлении жидкости и возникающую силу сопротивления $F(q, r, s, t)$. После этого пересчитываем массовые силы $\mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t})$ и переходим на следующий шаг по времени.



Рис. 3: Искусственный клапан "Юнилайн"

4 Результаты

В этом пункте приведем некоторые результаты методических расчётов работы искусственных сердечных клапанов. Расчеты проводились для случаев постоянной и переменной плотности и вязкости в безразмерных величинах.

Все численные эксперименты проводились для двух клапанов: идеальный клапан упрощенной формы и клапан, полученный сканированием реального биопротеза "Юнилайн" (см. рис. 4) [18].

В качестве сосуда, в котором расположен клапан, для всех расчетов используется круговой цилиндр (см. рис. 2) с длиной $l = 1$, радиусом $r = 0.11$ и жесткостью стенок $k = 1 \cdot 10^3$. Для створок клапана заданы коэффициенты сопротивления растяжению $k_s = 5 \cdot 10^3$ и скручиванию $k_b = 2 \cdot 10^3$. Перепад давления $p_{in} - p_{out}$ периодически меняется от 0 до 6 по параболическому закону. Область $\tilde{\Omega}$ имеет размеры $10 \times 0.5 \times 0.5$. Далее приведены результаты расчетов для пространственной сетки $\tilde{\Omega}_h$ с шагом по времени $\Delta t = 0.01$ шага по пространственной сетке $\tilde{\Omega}_h$ $h_x = h_y = h_z = 0.01$, шаг по времени $\Delta t = 0.01$.

На рис. 4 показано движение створок клапана и течение жидкости через него при увеличении и уменьшении перепада давления.

Как можно увидеть из рис. 4, створки клапана раскрываются при изменении разности давлений, а затем возвращаются в исходное положение при выравнивании давлений.

На рис. 5 показано изменение концентрации форменных элементов при прохождении потока жидкости через клапан. Изначально равномерное распределение форменных элементов со временем нарушается движением створок клапана.

На рис. 6 показан график расхода жидкости внутри клапана в зависимости от времени для первых трех циклов работы. Каждо-

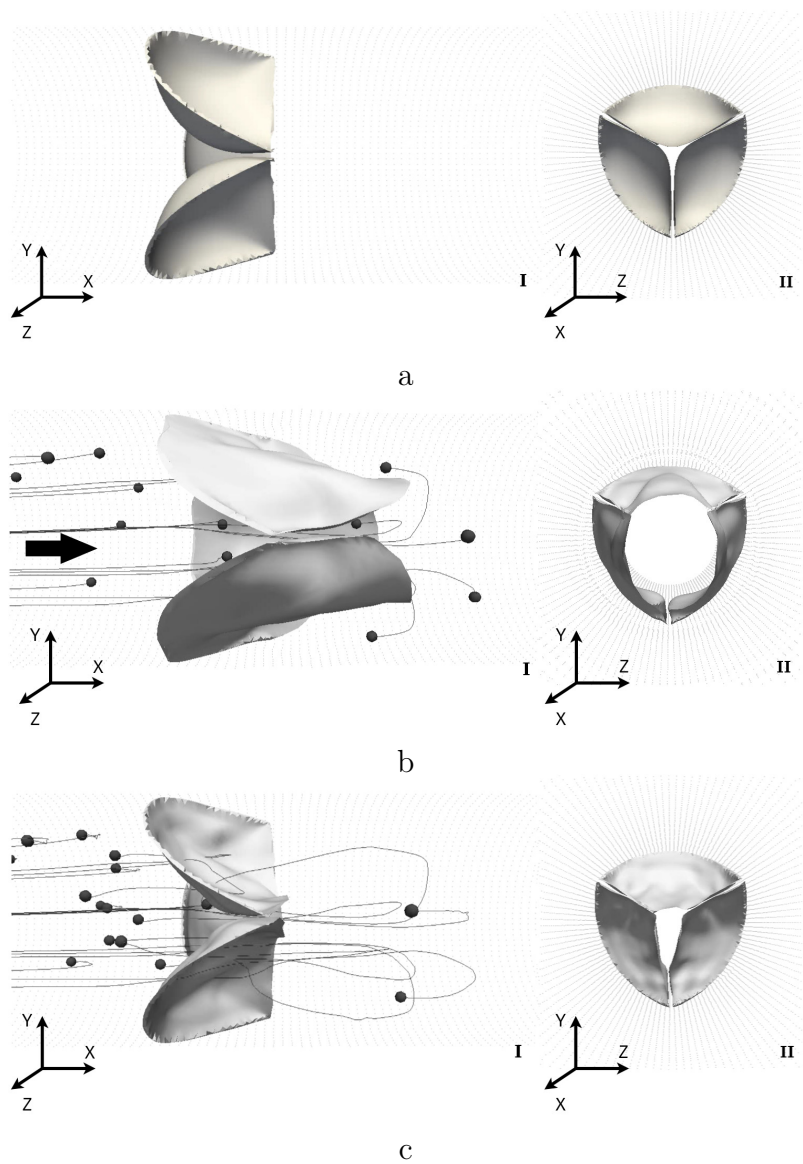
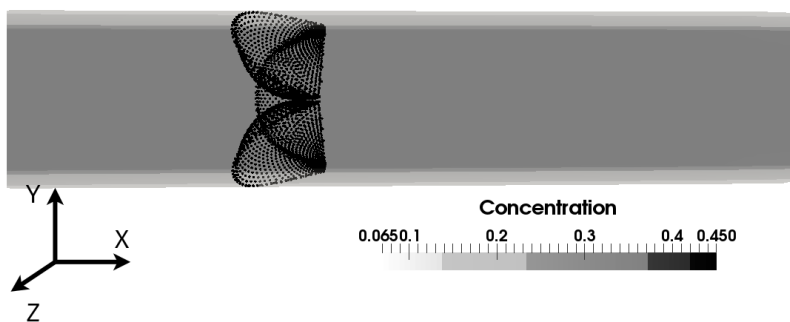
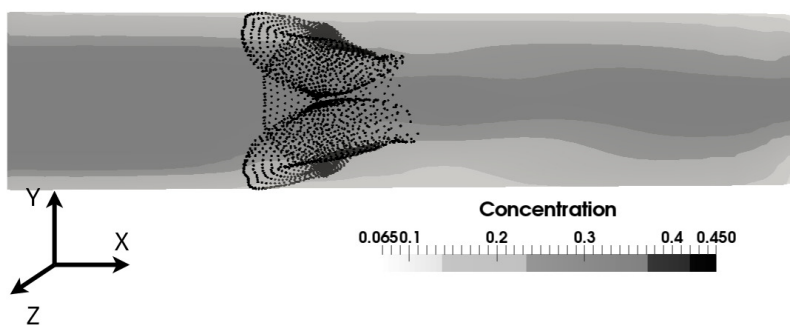


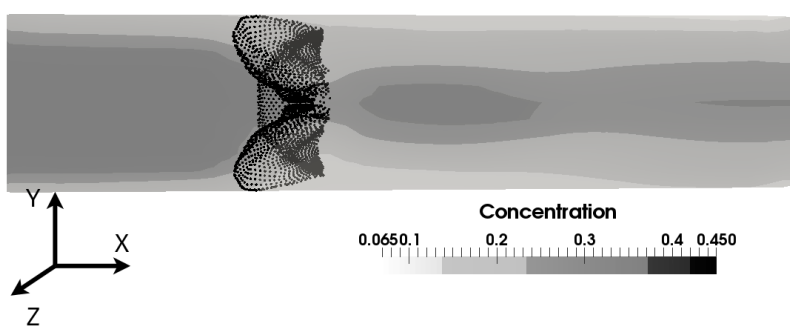
Рис. 4: Динамика створок клапана и треки некоторых частиц. Направление тока указано стрелкой. Показан вид сбоку (I) и вид спереди (II) а) $t = 0$, б) $t = 0.7$, в) $t = 1.5$



a



b



c

Рис. 5: Движение створок клапана в сосуде с переменной вязкостью и плотностью. На входе задается постоянный приток примеси $c_s|_{\Gamma_2} = 0.45$, концентрация примеси в начальный момент времени $c_0 = 0.45$, $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 1.2$, $\nu_1 = 1 \cdot 10^{-2}$, $\nu_2 = 1.2 \cdot 10^{-2}$; а) $t = 0$, б) $t = 3$, в) $t = 6$

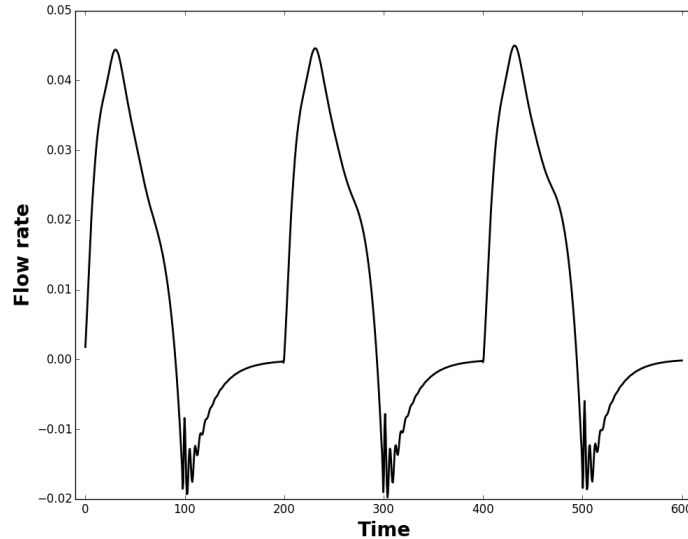


Рис. 6: График расхода жидкости в зависимости от времени

му пульсу соответствует резкое повышение расхода, а колебания створок клапана при закрытии отражаются в осцилляции на графике.

На рис. 7 показана динамика движения одной створки идеального трехстворчатого клапана под воздействием жидкости с переменной вязкостью и плотностью $\rho_1 = 1, \rho_2 = 2, \mu_1 = 1 \cdot 10^{-2}, \mu_2 = 2 \cdot 10^{-2}$, а также распределение напряжения $F(q, r, s, t)$ по поверхности (см. уравнение 2.12).

Как видно из рис. 7, больше поверхностного напряжения возникает в двух областях - на конце створки, т.к. это самая гибкая его часть, которая подвержена наибольшим деформациям скручивания, и в области крепления створки к фиброзному кольцу, т.к. там возникает наибольшая деформация растяжения в силу фиксированного расположения.

На рис. 8 представлена динамика движения для клапана "Юнилайн", который двигается под воздействием движения жидкости.

На рис. 9 представлена динамика движения и распределение поверхностного напряжения для створки клапана "Юнилайн", который двигается под воздействием движения жидкости с переменной вязкостью и плотностью $\rho_1 = 1, \rho_2 = 2, \mu_1 = 1 \cdot 10^{-2}, \mu_2 = 2 \cdot 10^{-2}$.

Как видно из сравнения рис. 7 и рис. 9, в отличие от клапана идеальной формы, в области крепления створки "Юнилайн"

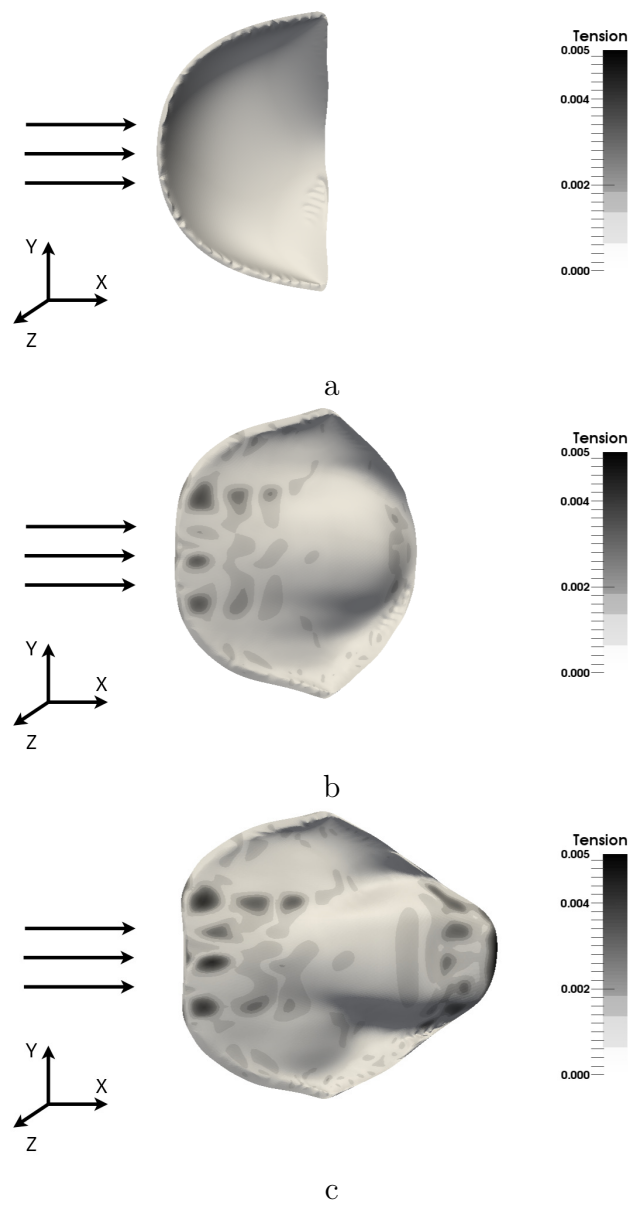
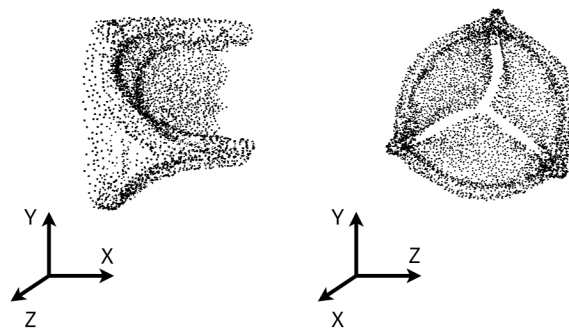
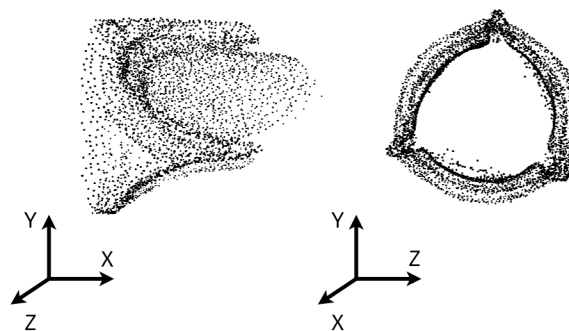


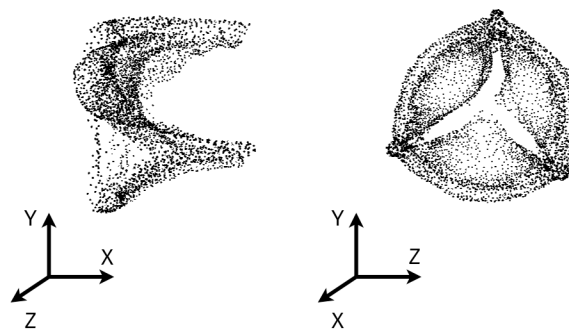
Рис. 7: Распределение напряжение по поверхности створки в моменты времени $t = 0, t = 0.4, t = 0.8$. Точками обозначены стенки сосуда



a



b



c

Рис. 8: Работа клапана в моменты времени $t = 0, t = 0.5, t = 1.8$. Точками обозначена поверхность фиброзного кольца и створки клапана

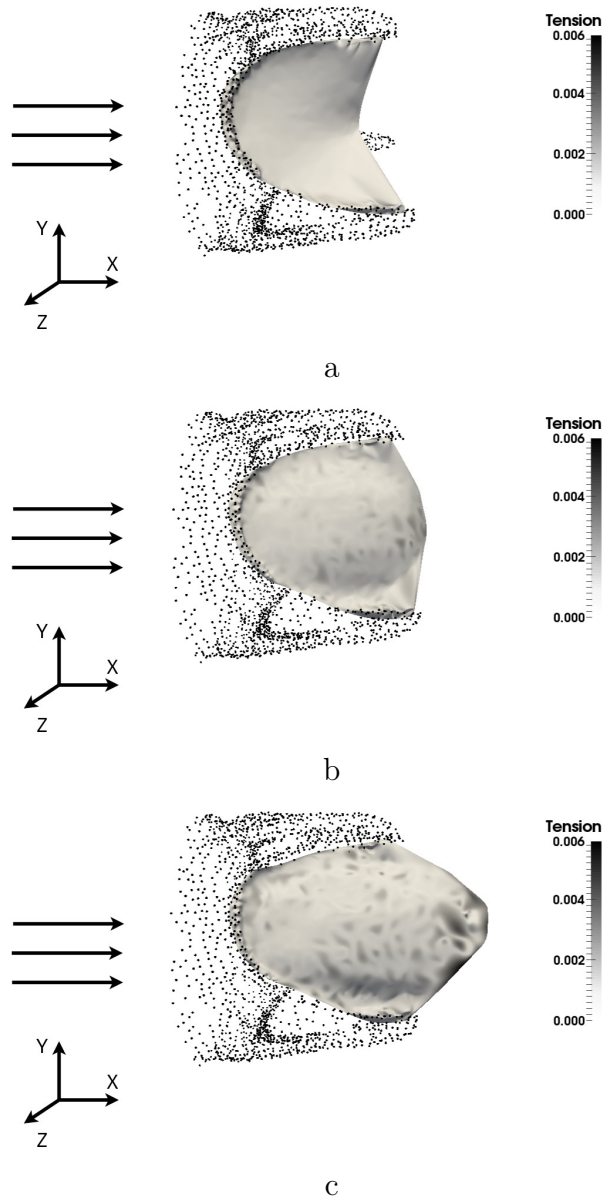


Рис. 9: Распределение напряжения по поверхности одной створки во времена $t=0$, $t=0.4$, $t=0.8$. Точками обозначена поверхность фиброзного кольца

не происходит значительного увеличения поверхностного напряжения $F(q, r, s, t)$

Далее было решено рассмотреть влияние переменной плотности и вязкости на величину напряжения в трёх характерных точках клапана (см. рис. 10): "активная точка", "пассивная точка" и "точка на границе". "активная точка" находится на одной из осей кольца, рядом с областью крепления створки. "точка на границе" тоже располагается в области крепления, но на удалении от осей. "пассивная точка" располагается на внешней, наименее подвижной части кольца

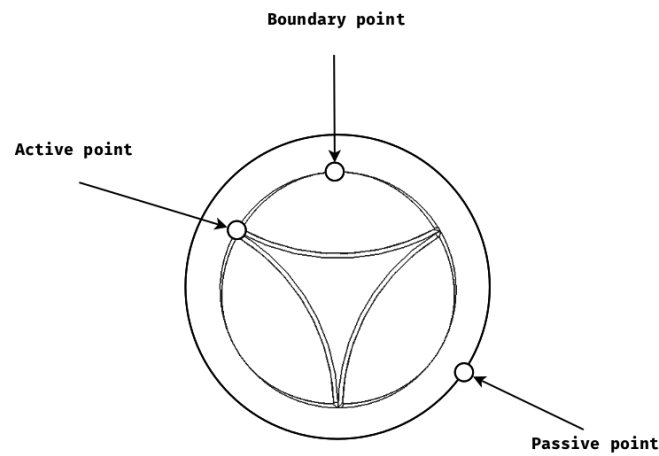


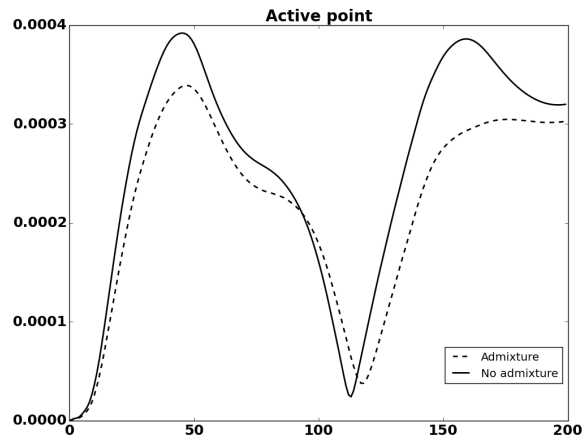
Рис. 10: Схема расположения точек на фиброзном кольце

На рис. 11 показано графики зависимости поверхностного напряжения от времени для трех точек в разных частях фиброзного кольца для случаев с постоянной $\rho_1 = \rho_2 = 1, \mu_1 = \mu_2 = 1 \cdot 10^{-2}$ и переменной $\rho_1 = 1, \rho_2 = 2, \mu_1 = 1 \cdot 10^{-2}, \mu_2 = 2 \cdot 10^{-2}$ вязкостью. (см. рис. 10).

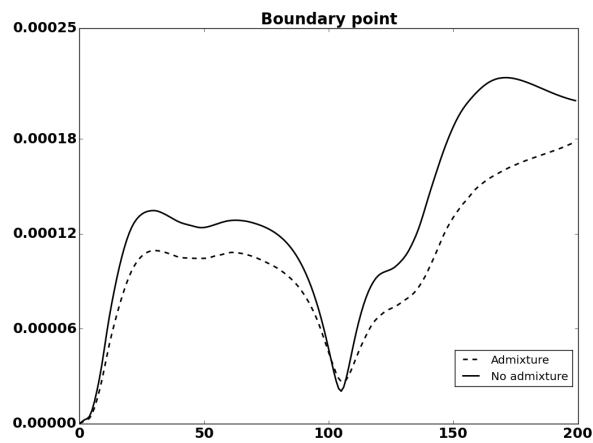
Как видно из рис. 11, качественно величина напряжения для каждой точки демонстрирует схожую динамику изменения, но при этом в области крепления и рядом с осями, если мы рассматриваем однородную жидкость и постоянную вязкость, возникают бóльшие напряжения, чем в случае использования модели течения с переменной плотностью и вязкостью.

5 Заключение

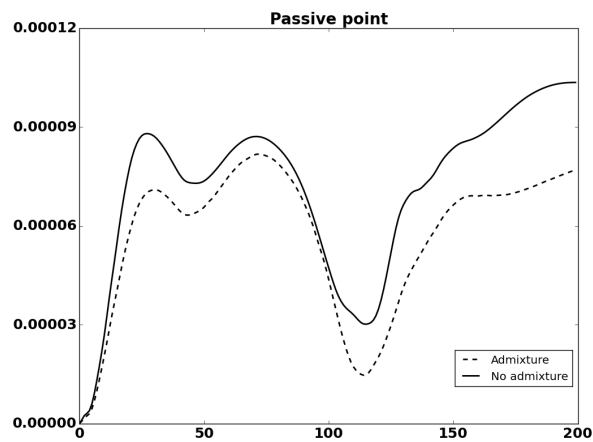
Построенная модель работы искусственного сердечного клапана и метод её реализации, учитывающая течения крови с перемен-



a



b



c

Рис. 11: Зависимость напряжения от времени для трех точек на фиброзном кольце для случаев без примеси (непрерывная линия) и с примесью (штриховая линия). На первом графике (a) изображена зависимость для "Активной точки" на втором (b) - для "Точки на границе" на третьем (c) - для "Пассивной точки"

ной плотностью и вязкостью, позволяет получать картины движения створок клапана для разных геометрий, изменение структуры жидкости при взаимодействии со створками, анализировать величину напряжений, возникающие при их движения.

Funding: Работа проводится в рамках проектной части госзадания 1.630.1.2014/К

Список литературы

- [1] Association A.H., *Heart disease and stroke statistics* https://www.heart.org/idc/groups/ahamah-public/@wcm/@sop/@smd/documents/downloadable/ucm_470704.pdf, 2015
- [2] Institute D.C.R. *Adult cardiac surgery database, executive summary* http://www.sts.org/sites/default/files/documents/2015Harvest2_ExecutiveSummary.pdf, 2015.
- [3] Бокерия Л.А., Скопин И.И., Сазонов М.А., Тумаев Е.Н., Механическое напряжение в створках митрального клапана и биопротеза в митральной позиции. влияние геометрии фиброзного кольца на величину напряжения створок. *Клиническая физиология кровообращения. Научный центр сердечно-сосудистой хирургии им. АН Бакулева РАМН* **2** (2008), 73–80.
- [4] Kim H.S. Nonlinear multi-scale anisotropic material and structural models for prosthetic and native aortic heart valves. *Georgia Institute of Technology*, 2009.
- [5] Taylor C.A., Hughes T.J., Zarins C.K. Finite element modeling of blood flow in arteries. *Computer methods in applied mechanics and engineering* **158** (1998), 155–196.
- [6] Zhang Y., Bajaj C. *Finite element meshing for cardiac analysis* Univ. of Texas at Austin: ICES Technical Report, 2004
- [7] Black M. et al. A three-dimensional analysis of a bioprosthetic heart valve *Journal of Biomechanics* **24** (1991), 793–801.
- [8] Peskin C.S. The immersed boundary method *Acta numerica* **11** (2002), 479–517.
- [9] Griffith B.E. Immersed boundary model of aortic heart valve dynamics with physiological driving and loading conditions *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering* **28** (2012), 317–345.
- [10] Ma X. et al. Image-based fluid–structure interaction model of the human mitral valve *Computers & Fluids* **71** (2013), 417–425.

- [11] Gummel E.E, Milosevic H., Raguling V.V., Zakharov Y.N., Zimin A.I., Motion of viscous inhomogeneous incompressible fluid of variable viscosity *Zbornik radova konferencije MIT* (2013) 2013–2014.
- [12] Долгов Д.А., Захаров Ю.Н. Моделирование движения вязкой неоднородной жидкости в крупных кровеносных сосудах *Вестник КемГУ* **62** (2015), 30–34.
- [13] Dolgov D., Zakharov Y. Mathematical modelling of artificial heart valve performance "*Stability and control processes*" in memory of *vI zubov (sCP)* (2015), 518–521.
- [14] Каро К., *Механика кровообращения*. Мир, Москва, 1978.
- [15] Whitmore R.L. *Rheology of the circulation*. Pergamon, 1968.
- [16] Белоцерковский О.М. *Численное моделирование в механике сплошных сред*. Наука, Москва, 1984.
- [17] Яненко Н.Н. *Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики.* "Наука", Новосибирск, 1967.
- [18] Клышников К.Ю., Овчаренко Е.А., Мальцев Д.А., Журавлева И.Ю., Сравнительная характеристика гидродинамических показателей биопротезов клапанов сердца Юнилайн и Перикор *Клиническая физиология кровообращения* (2013) 45–51.