

Метод погруженной границы

Введение, основные термины

Метод погруженной границы используется для описания систем «жидкость-препятствие», где эластичное препятствие погружено в вязкую несжимаемую жидкость. Впервые был предложен в работе [1] для моделирования механики сердечных клапанов и потока крови в них. Суть метода заключается в том, что при обтекании какого-либо тела жидкостью, она испытывает влияние сил по направлению нормали к поверхности тела [2]. Обтекаемое тело также испытывает влияние этих сил с противоположным знаком. Поэтому моделирование обтекания препятствия потоком жидкости возможно с помощью формирования соответствующего поля внешних массовых сил в уравнении Навье-Стокса. Это позволяет производить вычисления на простых прямоугольных сетках, которые могут не соответствовать геометрии расчетной области, что является одной из основных отличительных особенностей метода. При этом под термином «метод погруженной границы» обычно понимают как математическую формулировку, так и схему для численного решения полученной задачи. «Погруженной границей» в данном контексте обозначают любое гибкое препятствие, погруженнное в жидкость. В данной работе под этим будем подразумевать стенки кровеносного сосуда, а также лепестки клапана, расположенные внутри. Существует также множество модификаций этого метода (например, метод погруженного интерфейса, метод декартовых сеток, метод фиктивных ячеек, метод усеченных ячеек, см. [3]), но указанные методы не рассматриваются в данной работе.

Математическую формулировку этого метода и численную схему можно разделить на три раздела:

- Моделирование течения вязкой несжимаемой жидкости
- Моделирование деформации погруженной границы
- Моделирование взаимодействия между жидкостью и погруженной границей

Течение вязкой несжимаемой жидкости описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений Навье-Стокса в прямоугольной области $\tilde{\Omega}$, которая включает в себя расчетную область Ω . Погруженная граница представлена в виде набора упругих безмассовых волокон, имеющих «нейтральную плавучесть» [4], расположение которых описано в лагранжевых координатах, а эластичность описана в терминах функционала энергии деформации. Взаимодействие осуществляется исходя из того, что погруженная

граница движется под давлением жидкости с той же скоростью, что и сама жидкости, а внешние массовые силы в уравнении Навье-Стокса определяются поверхностным напряжением, возникшим в результате деформации погруженной границы. В следующих разделах эти задачи будут рассмотрены подробнее.

Моделирование течения вязкой несжимаемой жидкости

Для моделирования течения используется система дифференциальных уравнений Навье-Стокса:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \sigma + \vec{f} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (2)$$

с начальными и граничными условиями:

$$\vec{u}(\bar{x}, 0) = \vec{u}_0 \quad \vec{u}|_{\Gamma_1, \Gamma_4} = \vec{u}_b \quad u|_{\Gamma_2, \Gamma_3} = 0 \quad (3)$$

$$p_{\Gamma_2} = p_{in} \quad p_{\Gamma_3} = p_{out} \quad (4)$$

где $\bar{x} = (x, y, z) \in \Omega$, $\vec{u} = (u, v, w)$ - вектор скорости, u, v, w - x -, y -, z -компоненты вектора скорости, \vec{u}_b - скорость движения погруженной границы (стенок сосуда и лепестков клапана) при деформации, $\rho = \rho(\bar{x}, t)$ - плотность, $p = p(\bar{x}, t)$ - давление, $\sigma = \mu(\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T)$ - вязкий тензор напряжений, $\mu = \mu(\bar{x}, t)$ - вязкость жидкости, $\vec{f} = \vec{f}(\bar{x}, t)$ - вектор массовых сил. Область Ω представляет собой сосуд с границами $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, где Γ_1 - стенка кровеносного сосуда, Γ_2 and Γ_3 - область втекания/вытекания, Γ_4 - лепестки клапана (см Рис. 1).

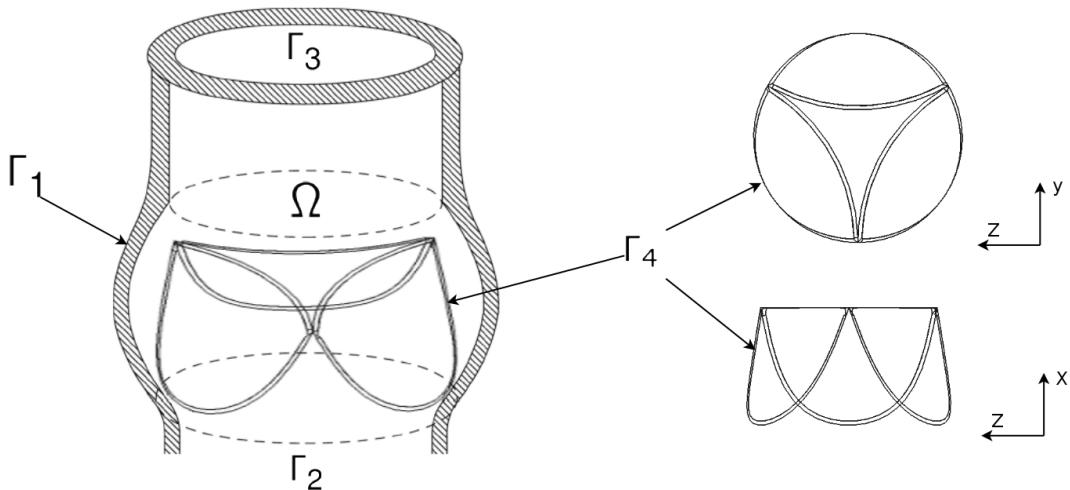


Рис. 1: Изображение границ расчетной области

Моделирование деформации погруженной границы

Опишем погруженную границу как гибкий несжимаемый материал, который расположен в области $\tilde{\Omega}$, где (q, r, s) - криволинейные координаты связанные с материалом так, что зафиксированное значение (q, r, s) обозначает одну точку этого материала. Пусть $X(q, r, s, t)$ - позиция в декартовых координатах точки, обозначенной (q, r, s) в момент времени t . Тогда обобщая, $X(q, r, s, t)$ описывает пространственную конфигурацию всей погруженной границы в момент времени t , которая определяет соответствующую энергию деформации $E[X(q, r, s, t)]$ в момент t . Рассмотрим возмущение $\delta X(q, r, s, t)$ конфигурации $X(q, r, s, t)$, где δ - оператор возмущения. Результирующая деформация упругой энергии, возникшая в результате этого возмущения, есть линейная функция от возмущения конфигурации, поэтому она может быть записана в форме:

$$\delta E[X(q, r, s, t)] = \int_{\tilde{\Omega}} (-F(q, r, s, t)) \cdot \delta X(q, r, s, t) dq dr ds \quad (5)$$

где $-F(q, r, s, t)$ - производная Фреше от E , вычисленная для конфигурации $X(q, r, s, t)$. Физически F можно интерпретировать, как плотность силы, которая создается путем деформирования погруженной границы.

Как было сказано выше, погруженная граница представлена набором волокон. Для того, чтобы определить E , удобно выбирать лагранжевые координаты (q, r, s) так, что каждое значение (q, r) параметрически задает какое-либо одно конкретное волокно $s \rightarrow X(q^0, r^0, s)$. В этом случае функционал упругой энергии E можно представить в виде $E = E_s + E_b$, где E_s - энергия растяжения волокна, E_b - энергия скручивания волокна, а силу F , созданную благодаря деформации, в виде $F = F_s + F_b$.

Как показано в [5], [6] функционал энергии растяжения можно записать в виде:

$$E_s = \int_{\tilde{\Omega}} \varepsilon_s \left(\left| \frac{\partial X}{\partial s} \right| \right) dq dr ds \quad (6)$$

а силу F_s :

$$F_s = \frac{\partial}{\partial s} \varepsilon_s \left(\left| \frac{\partial X}{\partial s} \right| \right) \tau \quad (7)$$

где ε_s - локальная энергия растяжения, τ - единичный тангенциальный вектор для выбранного волокна s . Т.к. напряжение растяжения $T = \varepsilon_s \left(\left| \frac{\partial X}{\partial s} \right| \right)$, то уравнение (7) можно переписать в виде, который соответствует обобщенному закону Гука:

$$F_s = \frac{\partial}{\partial s} T \tau \quad (8)$$

Т.к. площадь поперечного сечения сосудов достаточно мала по отношению к их длинне, для моделирования энергии напряжения и сил со противления скручиванию мы можем воспользоваться уравнением Эйлера-Бернулли [8]:

$$E_b = \frac{1}{2} \int_{\tilde{\Omega}} k \cdot \left| \frac{\partial^2 X^0}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 X}{\partial s^2} \right|^2 dq dr ds \quad (9)$$

$$F_b = \frac{\partial^2}{\partial s} \left(k \cdot \left(\frac{\partial^2 X^0}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 X}{\partial s^2} \right) \right) \quad (10)$$

где $k = E \cdot I$, E - модуль упругости, I - момент инерции поперечного сечения, $\frac{\partial^2 X^0}{\partial s^2}$, $\frac{\partial X}{\partial s^2}$ - отклонение погруженной границы от равновесного положения в начальный и текущий момент времени.

Таким образом, плотность силы F , создаваемая при деформации погруженной границы может быть выражена в виде:

$$F = \frac{\partial}{\partial s} T \tau + \frac{\partial^2}{\partial s} \left(k \cdot \left(\frac{\partial^2 X^0}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 X}{\partial s^2} \right) \right) \quad (11)$$

Моделирование взаимодействия

Сердечно-сосудистые заболевания являются одной из наиболее острых проблем современного общества. Во всех странах их количество существенно опережает остальные, поэтому трудно переоценить значимость исследований в этой области. В последние годы наблюдается резкий рост интереса к проблеме сердечно-сосудистых заболеваний, развиваются новые методики исследования, появляются все более точные измерительные приборы. Каждый год в мире проводится примерно 250 000 операций восстановлению или замене поврежденных сердечных клапанов¹ и ожидается, что в ближайшие годы это значение будет только увеличиваться². При этом многие сложности, связанные с созданием искусственных клапанов или протезированием сосудов, относятся к динамике течения крови внутри. Поэтому математическое моделирование данных явлений позволяет получить более глубокое понимание происходящих процессов и найти пути усовершенствования их конструкций.

При изучении подобных явлений методами математического моделирования зачастую удовлетворительные результаты можно получить с помощью модели вязкой несжимаемой жидкости, которая описывается системой дифференциальных уравнений Навье-Стокса, выписанных в форме естественных переменных «скорость-давление». Помимо этого требуется учесть,

¹ Yoganathan A.P., He Z.M., Jones S.C.: Fluid mechanics of heart valves. Annu. Rev. Biomed Eng 6:331–362 (2004)

² Yacoub N, Takkenberg J.: Will heart valve tissue engineering change the world? Nat Clin Pract Cardiovasc Med. 2:60–1 (2005)

что кровь является неоднородной по своей природе и состоит из плазмы и форменных элементов (лейкоциты, эритроциты и т.д.), а сосуды и клапаны являются гибкими и изменяют форму под воздействием различных параметров. Необходимость описывать взаимодействия гибких непроницаемых тканей с неоднородной жидкостью приводит к существенным трудностям при постановке задачи и ее численном решении, связанными с построением расчетной сетки и ее изменением в соответствии с движением лепестков клапана и деформацией сосуда.

Существует несколько устоявшихся подходов, для того, чтобы избежать эти трудности. В данном исследовании используется метод погруженной границы, который предназначен для моделирования тонких препятствий произвольной жесткости. Это позволяет численно решать прикладные задачи оптимизации структуры искусственного клапана.

Целью данной работы является разработка технологии решения нестационарной трехмерной задачи о движении створок искусственного клапана внутри крупных кровеносных сосудов с учетом неоднородной структуры крови, а также о движении примеси (форменных элементов) внутри сосуда. Для достижения этой цели был создан программный комплекс, с помощью которого можно моделировать работу клапана, деформацию стенок кровеносных сосудов и получать картины течения внутри них.

Диссертационная работа была выполнена в рамках проектной части госзадания 1.630.1.2014/К.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Технология численного решения задачи о течении вязкой несжимаемой неоднородной жидкости в канале с гибкими границами при заданном перепаде давления, включающая алгоритм взаимодействия жидкости с границей, а также способ расчета движения примесей.
2. Программный комплекс, предназначенный для моделирования движения вязкой несжимаемой неоднородной жидкости, вызванного перепадом давления, в каналах сложной формы с гибкими границами. Комплекс содержит библиотеку классов для решения задач в указанной постановке, модуль для подготовки геометрии расчетной области, модуль для анализа полученных данных и их визуализации.
3. Результаты расчетов трехмерных задач о работе искусственного сердечного клапана, а также течения вязкой несжимаемой неоднородной жидкости в крупных кровеносных сосудах.

Научная новизна:

- Предложена оригинальная технология решения трехмерной задачи о движении вязкой несжимаемой неоднородной жидкости в каналах сложной формы с гибкими границами.
- С помощью созданного программного комплекса впервые были решены трехмерные задачи о работе створок клапана, а также о деформации стенок крупных кровеносных сосудов с учетом неоднородной структуры крови.

Практическая значимость диссертационной работы заключается в возможности использования полученных методов и разработанного программного комплекса для оптимизации строения искусственных сердечных клапанов.

Достоверность изложенных в работе результатов обеспечивается использованием полностью консервативных схем для аппроксимации решаемой дифференциальной задачи, применением сходящихся итерационных методов для решения систем нелинейных алгебраических уравнений, а также совпадением полученных результатов методических расчетов с решениями, полученными другими авторами.

Представление работы. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях: Международной конференции «Информационно-вычислительные технологии и математическое моделирование (ИВТ&ММ)», Россия, Кемерово, 2013 г.; XIII Международной научно-практической конференции «Информационные технологии и математическое моделирование» им. А. Ф. Терпугова, Россия, Анжеро-Судженск, 2014 г.; Международной научной студенческой конференции, Россия, Новосибирск, 2015 г.; VIII Международной конференции, посвященной 115-летию со дня рождения академика Михаила Алексеевича Лаврентьева, Россия, Новосибирск, 2015 г.; International Conference «Computational and Informational Technologies in Science, Engineering and Education», Казахстан, Алматы, 2015 г.; III International Conference in memory of V.I.Zubov «Stability and Control Processes», Россия, Санкт-Петербург, 2015 г.;

Также, результаты работы докладывались на семинаре «Математические модели. Методы решения», Кемерово (под рук. проф. Ю.Н. Захарова).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 7 печатных изданиях, 1 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 2 – в прочих изданиях, 4 – в тезисах докладов.

Личный вклад. Результаты работы базируются на ряде фундаментальных исследований, которые относятся к методу погруженной границы³,

³ Peskin, C. S.: The immersed boundary method. Acta Numerica 11, 479–517 (2002).

который позволяет расчитывать движение сколь угодно тонких лепестков под давлением жидкости, а также подходам к решению задач о течении вязкой несжимаемой неоднородной жидкости под воздействием перепада давления⁴. В настоящей работе автор объединил эти подходы и реализовал программный комплекс для численного решения задачи о движении створок сердечного клапана, который использует эти методы.

Содержание работы

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и приложений. Во **введении** обосновывается актуальность выбранной темы диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, излагаются цели и задачи исследования, формулируются основные положения, выносимые на защиту.

Первая глава посвящена описанию используемой математической модели, применяемых методов решения, разностных схем, а также используемого программного комплекса. В **параграфе 1.1** рассматривается система дифференциальных уравнений Навье-Стокса, которая моделирует нестационарную задачу о течении вязкой неоднородной несжимаемой жидкости под воздействием перепада давления:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \sigma + \vec{f} \quad (12)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (13)$$

с начальными и краевыми условиями:

$$\vec{u}(\bar{x}, 0) = \vec{u}_0 \quad \vec{u}|_{\Gamma_1, \Gamma_4} = \vec{u}_b \quad u|_{\Gamma_2, \Gamma_3} = 0 \quad (14)$$

$$p_{\Gamma_2} = p_{in} \quad p_{\Gamma_3} = p_{out} \quad (15)$$

где $\bar{x} = (x, y, z) \in \Omega$, $\vec{u} = (u, v, w)$ - вектор скорости, \vec{u}_b - скорость, с которой двигаются стенки сосуда и створки клапана при деформации, $\rho = \rho(\bar{x}, t)$ - плотность, $p = p(\bar{x}, t)$ - давление, $\sigma = \mu(\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T)$ - вязкий тензор напряжений, $\mu = \mu(\bar{x}, t)$ - вязкость жидкости, $\vec{f} = \vec{f}(\bar{x}, t)$ - вектор массовых сил, который в дальнейшем используется для определения формы сосуда и створок клапана.

Область Ω изображена на рис. 2 и представляет собой сосуд с границей $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, где Γ_1 - стенка кровеносного сосуда, Γ_2 и Γ_3 - области втекания и вытекания, Γ_4 - створки клапана.

⁴ Gummel E.E., Milosevic H., Ragulin V.V., Zakharov Y.N., Zimin A.I.: Motion of viscous inhomogeneous incompressible fluid of variable viscosity. Zbornik radaova konferencije MIT 2013, Beograd, 267-274 (2014)

Одна из сложностей при численном решении подобных задач заключается в отсутствии одного компонента вектора скорости на границах Γ_2 , Γ_3 . Для того, чтобы решить эту проблему, в данной работе на указанных границах используется оригинальные уравнения (12) - (15), что позволяет определить недостающие компоненты.

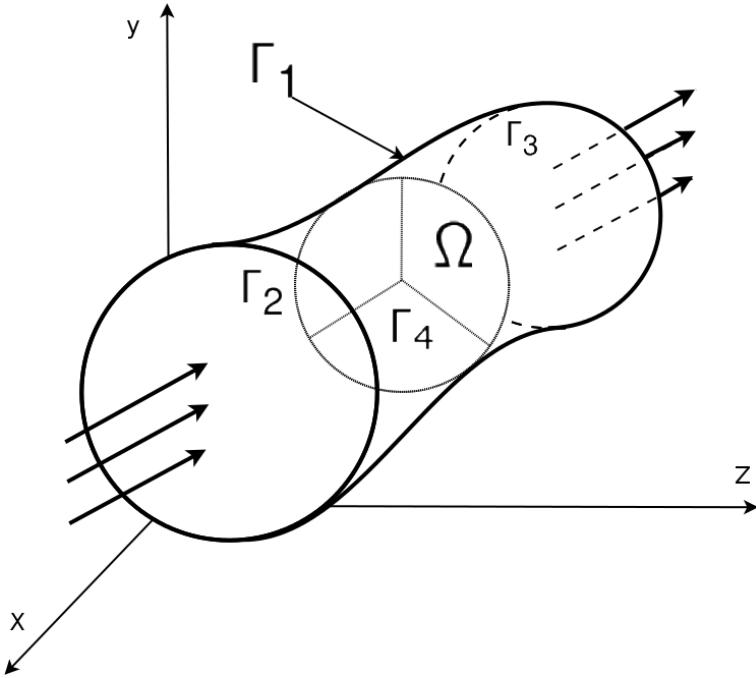


Рис. 2: Изображение границ расчетной области

В параграфе 1.2 рассматриваются уравнения, используемые для моделирования изменения плотности и вязкости жидкости, а также концентрации примесей. Плотность ρ и вязкость μ определяются следующими соотношениями:

$$\mu = c(\mu_2 - \mu_1) + \mu_1 \quad (16)$$

$$\rho = c(\rho_2 - \rho_1) + \rho_1 \quad (17)$$

где ρ_1 , μ_1 - плотность и вязкость жидкости (плазмы), ρ_2 , μ_2 - плотность и вязкость примеси (форменных элементов), c - концентрация примеси. Концентрация $c = c(\bar{x}, t)$, $c \in [0, 1]$ примеси определяется как решение уравнения:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla c = 0 \quad (18)$$

с начальными условиями и краевыми условиями на границе втекания:

$$c(\bar{x}, 0) = c_0(\bar{x}), \bar{x} \in \Omega \quad c(\bar{x}, t)|_{\Gamma_2} = c_s(\bar{x}, t) \quad (19)$$

В параграфе 1.3 рассматривается задача моделирования движения стенок сосуда и лепестков клапана, а также их взаимодействия с течением

жидкости. Деформация $\Gamma_1 \cup \Gamma_4$ под воздействием давления жидкости определяется силами, которые возвращают их в равновесное состояние. При этом створки клапана Γ_4 могут деформироваться гораздо сильнее, чем стенки сосуда Γ_1 . Для описания сил, возникающих при деформации клапана, мы используем следующую формулу:

$$F = \frac{\partial}{\partial s}(T\tau) + \frac{\partial^2}{\partial s^2}(E \cdot I \frac{\partial^2}{\partial s^2}X) \quad (20)$$

где $\bar{q} = (q, r, s) \in \Gamma_4$, $X(\bar{q})$ - функция, описывающая поверхность створок клапана в момент времени t , координаты q, r, s мы выбираем так, чтобы поверхность X была представлена набором параметрических линий $s \rightarrow X(q^0, r^0, s)$, T - напряжение, возникающее при растяжении вдоль s , τ - единичный вектор, касательный к поверхности клапана, E - модуль Юнга, I - момент инерции поперечного сечения. Формула (20) позволяет учитывать любые изменения формы створок клапана. Для вычисления сил, возникающих при изменении формы сосуда, мы используем другую формулу, которая позволяет учитывать только небольшие изменения формы:

$$F = k \|X - X_0\| \quad (21)$$

где $\bar{q} = (q, r, s, t) \in \Gamma_1$, $X(\bar{q}, t)$, $X_0(\bar{q}, 0)$ - функции, которые описывают поверхность сосуда в момент времени t и в начальный момент времени, k - коэффициент жесткости.

Для того, чтобы учитывать взаимодействие стенок сосуда и створок клапана с течением жидкости, необходимо на основе силы F вычислить поле внешних сил f в уравнении Навье-Стокса и исходя из поля скоростей жидкости $\vec{u}(\bar{x}, t)$ определить текущую форму $X(\bar{q}, t)$ сосуда и клапана. Это делается с помощью следующих уравнений:

$$\frac{\partial X}{\partial t}(\bar{q}, t) = \int_{\Omega} \vec{u}(\bar{x}, t) \cdot \delta(x - X(\bar{q}, t)) dx dy dz \quad (22)$$

$$\vec{f}(\bar{x}, t) = \int_{\Gamma} \vec{F}(\bar{q}, t) \cdot \delta(x - X(\bar{q}, t)) dq dr ds \quad (23)$$

где $\bar{q} = (q, r, s) \in \Gamma$ - точка поверхности сосуда или клапана, $X = X(\bar{q}, t)$ - функция, описывающая поверхность сосуда и клапана в момент времени t , $F = F(\bar{q}, t)$ - сила сопротивления деформации в данной точке, $\vec{u}(\bar{x}, t)$ - вектор скорости течения, $\vec{f}(\bar{x}, t)$ - вектор массовых сил, δ - дельта-функция Дирака.

В параграфе 1.4 рассматриваются методы, используемые для решения поставленной задачи, приводятся известные теоремы о существовании и единственности решения.

Для решения поставленных краевых задач используется метод погруженной границы, который основывается на том, что при обтекании какого-либо тела жидкостью, она испытывает влияние силы, действующие по направлению нормали к поверхности тела, а также сдвиговые силы, если на границе тела поставлено условие прилипания. Поверхность тела также испытывает влияние тех же сил с противоположным знаком. Поэтому моделирование обтекания тела возможно с помощью формирования соответствующего поля внешних массовых сил. В результате поставленная задача разбивается на несколько более мелких. Вводятся новые области $\tilde{\Omega}$, которая представляет собой параллелипед, содержащий в себе Ω , а также Γ с лагранжевой системой координат, которая соотносится со стенками сосуда и лепестками клапана. Помимо этого вводятся две сетки $\tilde{\Omega}_h$ с шагами h_x, h_y, h_z , и $\tilde{\Gamma}_h$, с шагами h_q, h_r, h_s . $\tilde{\Omega}_h$ является обычной декартовой сеткой и предназначена для расчет течения жидкости, $\tilde{\Gamma}_h$ - для расчета деформации стенок сосуда и клапана.

В параграфе 1.5 описывается численное решение задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости с помощью схемы расщепления по физическим факторам:

$$\frac{u^* - u^n}{\Delta t} = -(u^n \cdot \nabla) u^* - \frac{1}{\rho} \nabla \sigma + f^n \quad (24)$$

$$\rho \Delta p^{n+1} - \nabla \rho \cdot p^{n+1} = \frac{\rho^2 \nabla u^*}{\Delta t} \quad (25)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \Delta p^{n+1} \quad (26)$$

Численная реализация этой схемы состоит из трех шагов. Вначале вычисляется промежуточное поле скоростей u^* , для этого методом стабилизирующей поправки решается уравнение (24). После этого с помощью метода бисопряженных градиентов из уравнения (25) определяется новое поле давления и по формулам (25) рассчитывается итоговое поле скоростей.

В параграфе 1.6 рассматривается численное решение уравнения переноса примесей, а также способ расчета вязкости и плотности жидкости. Для этого методом стабилизирующей поправки решается следующее уравнение:

$$\frac{c^{n+1} - c^n}{\Delta t} + u^n \cdot \nabla c^{n+1} = 0 \quad (27)$$

после чего по явным формулам (16), (17) вычисляются значения μ_{n+1}, ρ_{n+1} .

В параграфе 1.7 описывается метод численного решения задачи деформации гибких лепестков клапана, а также взаимодействия "жидкость-клапан". Деформация определяется по явным формулам (20),(21) исходя из

формы сосуда в текущий X_n и предыдущий X_{n-1} шаг по времени. Взаимодействие "жидкость-клапан"расчитывается с помощью формул (22), (23) в конечно-разностном виде, где интегралы вычислены с помощью квадратурной формулы прямоугольников:

$$U_n = \sum_{ijk} u_{ijk} \cdot D(x_{ijk} - x_n) h_{ijk}^3 \quad (28)$$

$$f_{ijk} = \sum_n F_n \cdot D(x_{ijk} - x_n) h_n^2 \quad (29)$$

где U_n , F_n - скорость движения лепестков клапана под воздействием давления жидкости и сила сопротивления деформации, u_n , f_n - скорость движения жидкости и массовые силы в уравнении (12), D - конечно-разностный аналог функции Дирихле, который в данной работе представлен следующим соотношением:

$$\begin{cases} D(r) = \frac{1}{4h}(1 + \cos(\frac{\pi r}{2h})) & |r| < 2h \\ D(r) = 0 & |r| > 2h \end{cases} \quad (30)$$

В параграфе 1.8 дается описание программного комплекса, предназначенного для моделирования работы створок клапана под воздействием давления жидкости. Он является модулем для комплекса «XFlow» и содержит библиотеки классов, реализующих описанный выше алгоритм, а также компоненты пред- и постобработки. Эти компоненты предоставляют возможность использовать для расчета CAD модели реальных объектов, полученных путем сканирования, задавать их внутреннюю структуру, т.е. связи между отдельными узлами, а также проводить визуализацию и анализ полученных результатов с помощью ParaView и Matplotlib.

Вторая глава посвящена тестированию предложенной технологии решения задачи обтекания гибких препятствий, помещенных в поток вязкой несжимаемой неоднородной жидкости, а также решению задачи о развитии аневризмы на стенке кровеносного сосуда.

В параграфе 2.1 представлено решение тестовой задачи о течении вязкой несжимаемой однородной жидкости под воздействием перепада давления внутри канала цилиндрической формы. Приведены результаты расчетов для разных параметров сетки, на Рис. 3 показано сравнение рассчитанной скорости в центре канала с соответствующим аналитическим решением.

В параграфе 2.2 представлено решение тестовой задачи об обтекании сферы вязкой несжимаемой однородной жидкостью.

В параграфе 2.3 описаны результаты решения задачи о моделировании возникновения аневризмы на стенках кровеносного сосуда. Постановка

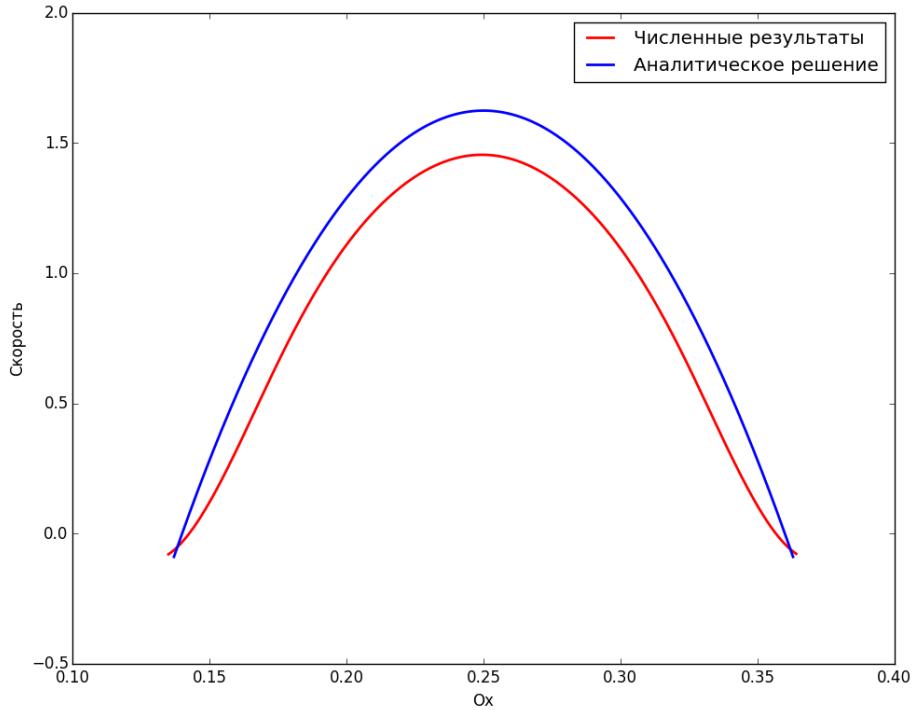


Рис. 3: Сравнение профиля скорости, полученной в расчетах, с аналитическим решением

задачи аналогична описанной в **главе 1**, но т.к. исследуется явление аневризмы, в сосуде отсутствует клапан (см. Рис. 4). На стенках сосуда выделена область Γ_5 , на которой жесткость задана меньше, чем для остальной части сосуда. Это позволяет моделировать истончение стенки сосуда и возникновение аневризмы под воздействием давления жидкости.

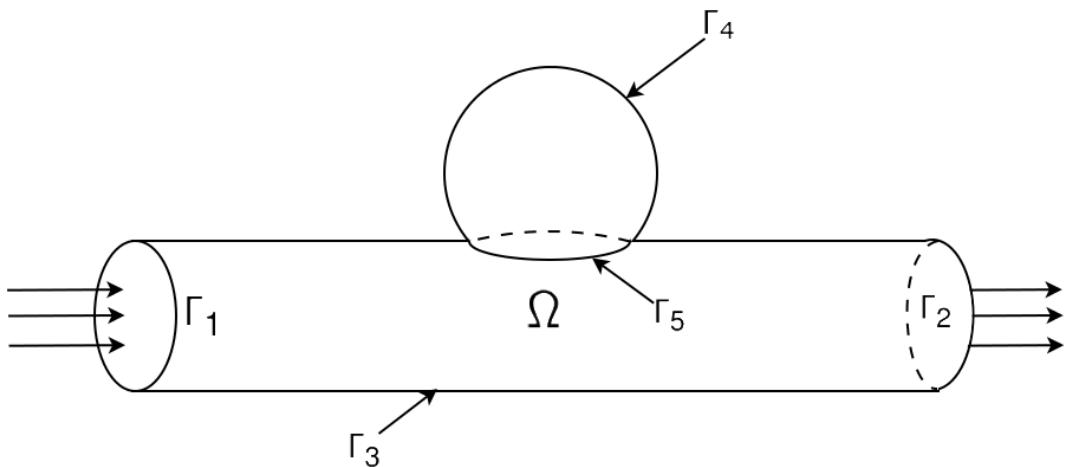


Рис. 4: Изображение границ расчетной области

Третья глава посвящена решению задачи о движении лепестков искусственного сердечного клапана под воздействием давления вязкой несжимаемой неоднородной жидкости, а также верификации описанной модели.

Приводятся результаты расчетов работы клапана, их сравнение с экспериментальными данными, а также сравнение с результатами, полученными в других работах. Постановка задачи аналогична описанной в **главе 1**, где поверхность сосуда является твердой стенкой. Схема расположения клапана изображена на Рис. 1

В **параграфе 3.1** представлены результаты решения задачи динамики искусственного сердечного клапана для случая однородной жидкости (см. Рис 6).

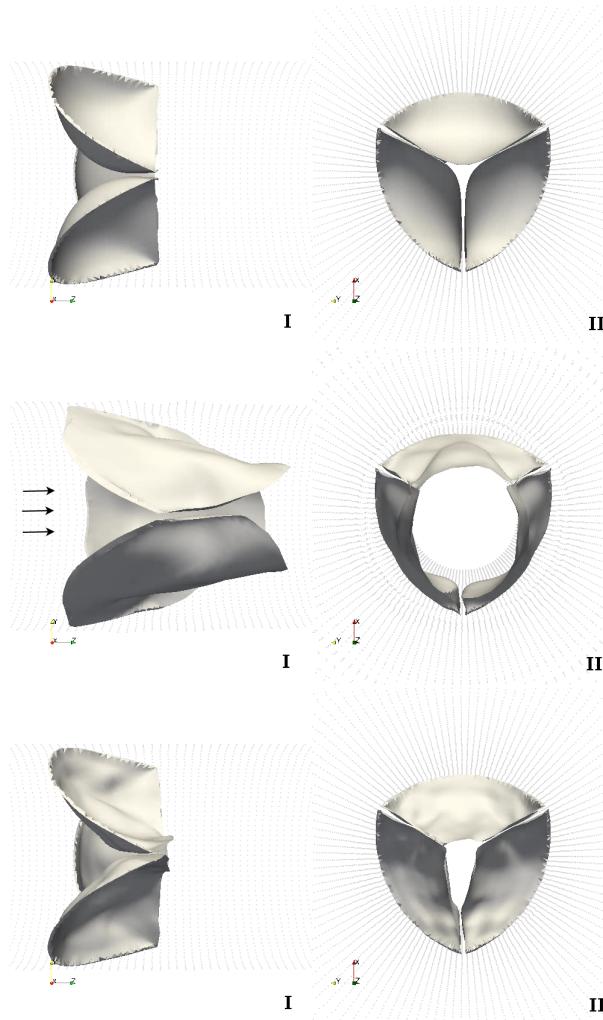


Рис. 5: Динамика деформации лепестков клапана

В **параграфе 3.2** описаны результаты решения задачи динамики искусственного сердечного клапана для случая неоднородной жидкости (см. Рис 6).

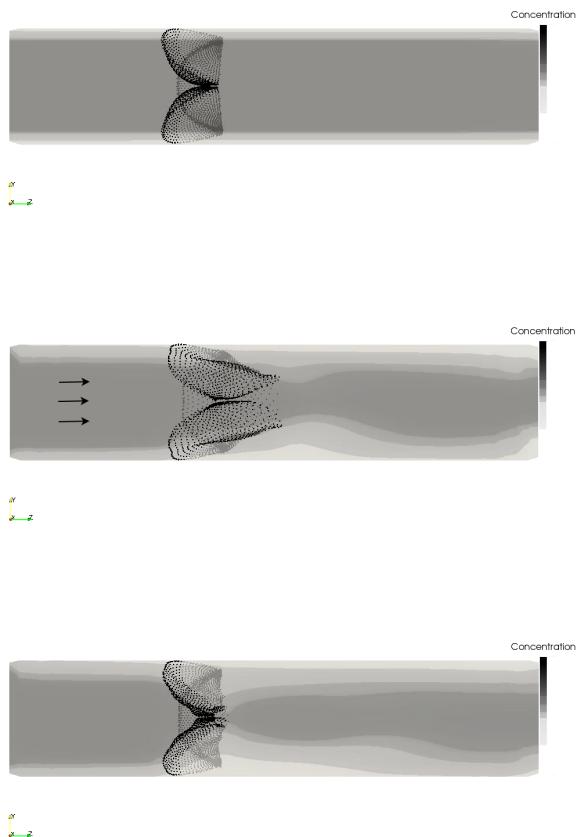


Рис. 6: Динамика деформации лепестков клапана

В параграфе 3.3 приведены результаты распределения напряжения по поверхности клапана и фиброзного кольца в процессе деформации.

В параграфе 3.4 приводятся сравнения полученных результатов с работами других авторов⁵ и экспериментальными данными.

В **заключении** кратко приводятся основные результаты работы:

1. Предложенный в работе подход позволяет успешно решать трехмерные задачи о течении вязкой неоднородной несжимаемой жидкости в сосудах с деформируемыми стенками и тонкими гибкими препятствиями.
2. Разработанный программный комплекс может применяться для моделирования широкого круга задач, связанных с работой сердечного клапана и течением крови в сосудах.

⁵ Griffith B.E., Immersed boundary model of aortic heart valve dynamics with physiological driving and loading conditions. // Int J Numer Meth Biomed Eng, 28:317-345, 2012

Публикации автора по теме диссертации

1. *Peskin Charles S.* Flow patterns around heart valves: a numerical method // *Journal of computational physics.* — 1972. — Vol. 10, no. 2. — Pp. 252–271.
2. *Goldstein D, Handler R, Sirovich L.* Modeling a no-slip flow boundary with an external force field // *Journal of Computational Physics.* — 1993. — Vol. 105, no. 2. — Pp. 354–366.
3. *Mittal Rajat, Iaccarino Gianluca.* Immersed boundary methods // *Annu. Rev. Fluid Mech.* — 2005. — Vol. 37. — Pp. 239–261.
4. *Griffith Boyce E.* Immersed boundary model of aortic heart valve dynamics with physiological driving and loading conditions // *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering.* — 2012. — Vol. 28, no. 3. — Pp. 317–345.
5. *Peskin Charles S.* The immersed boundary method // *Acta numerica.* — 2002. — Vol. 11. — Pp. 479–517.
6. Simulating the fluid dynamics of natural and prosthetic heart valves using the immersed boundary method / Boyce E Griffith, Xiaoyu Luo, David M McQueen, Charles S Peskin // *International Journal of Applied Mechanics.* — 2009. — Vol. 1, no. 01. — Pp. 137–177.
7. *Gere J.M., Timoshenko S.P.* Mechanics of materials. General Engineering Series. — PWS Pub Co., 1997.
8. *Peskin Charles S, McQueen David M.* A three-dimensional computational method for blood flow in the heart I. Immersed elastic fibers in a viscous incompressible fluid // *Journal of Computational Physics.* — 1989. — Vol. 81, no. 2. — Pp. 372–405.
9. *Долгов Д.А.* Численное моделирование динамики жидкости в крупных кровеносных сосудах // Материалы XIII Международной научно-практической конференции имени А.Ф. Терпугова. — Томск: 2014. — С. 31–35.
10. *Долгов Д.А. Захаров Ю.Н.* Моделирование движения вязкой неоднородной жидкости в крупных кровеносных сосудах // *Вестник Кемеровского Государственного Университета.* — 2015. — Т. 1, № 2 (62). — С. 30–35.
11. *Долгов Д.А.* Моделирование движения вязкой неоднородной жидкости в крупных кровеносных сосудах // Материалы 53-й международной научной студенческой конференции. — Новосибирск: 2015. — С. 212.

12. Долгов Д.А. Захаров Ю.Н. Моделирование движения вязкой неоднородной жидкости в искусственном сердечном клапане // VIII Международная конференция Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике. — Новосибирск: 2015. — С. 104.
13. Dolgov D.A. Zakharov Y.N. Numerical modeling of artificial heart valve // 8th International Conference CiTech 2015. — Almaty, Kazakhstan: 2015. — Pp. 33–43.