Дифракция волн над подвижным и неподвижным дном

Долгов Д.А.

Кемеровский Государственный Университет

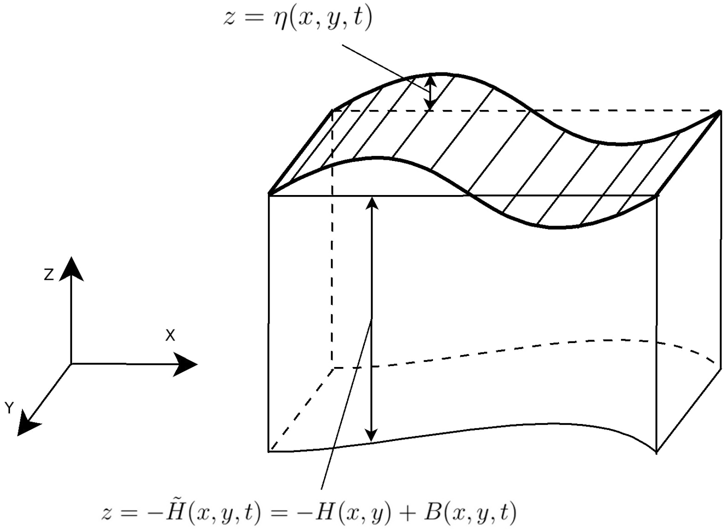
Научный руководитель: д.ф.-м.н Ю.Н. Захаров

2 июня 2012 г.

Цели

- Расчет движения волн на поверхности идеальной несжимаемой жидкости в однородном поле сил тяжести, определение влияния формы дна на движение.
- Сравнение расчетов, полученных для линейных и нелинейных уравнений.
- Проверка эффективности и устойчивости использования в данной задаче метода неполной аппроксимации минимальных невязок.

Постановка задачи



Постановка задачи

Уравнения мелкой воды

$$\frac{\partial U}{\partial t} + F_{lin} + F_{nonlin} = \frac{\partial B}{\partial t} \tag{1}$$

$$U = \begin{pmatrix} \eta \\ u \\ v \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} B(x,y,t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_0 = u(x,y,0) \; v_0 = v(x,y,0) \; \eta_0 = \eta(x,y,0) \tag{2}$$

$$u(x,y,t), v(x,y,t), \eta(x,y,t) \to 0, \;\; x^2 + y^2 \to \infty$$

Постановка задачи

$$F_{lin} = \begin{pmatrix} \frac{\partial((H-B)u)}{\partial x} + \frac{\partial((H-B)v)}{\partial y} \\ g\frac{\partial \eta}{\partial x} \\ g\frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$F_{nonlin} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial(u^2)}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial(v^2)}{\partial y} + u\frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} \tag{4}$$

Постановка задачи

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial((H-B)u)}{\partial x} + \frac{\partial((H-B)v)}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial(u^2)}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + g\frac{\partial \eta}{\partial x} &= 0 \\
\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial(v^2)}{\partial y} + u\frac{\partial v}{\partial x} + g\frac{\partial \eta}{\partial y} &= 0
\end{aligned} \tag{5}
$$

Метод решения

$$\frac{U_{ij}^{n+1} - U_{ij}^{n}}{\tau} + F_{lin}^{n+1} + F_{nonlin}^{n+1} = \frac{B_{ij}^{n+1} - B_{ij}^{n}}{\tau} \qquad (6)$$

$$u_{ij}^{0} = u_0(x_i, y_i) \; v_{ij}^{0} = v_0(x_i, y_i) \; \eta_{ij}^{0} = \eta_0(x_i, y_i) \qquad (7)$$

$$n = 0, 1 \ldots N \; i, j = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

Метод решения

$$F_{lin}^{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{(H_{i+1j}-B_{i+1j}^{n+1})u_{i+1j}^{n+1}-(H_{i-1j}-B_{i-1j}^{n+1})u_{i-1j}^{n+1}}{2h_x} + \\ \frac{(H_{ij+1}-B_{ij+1}^{n+1})v_{ij+1}^{n+1}-(H_{ij-1}-B_{ij-1}^{n+1})v_{ij-1}^{n+1}}{2h_y} \\ g\frac{\eta_{i+1j}^{n+1}-\eta_{i-1j}^{n+1}}{2h_x} \\ g\frac{\eta_{ij+1}^{n+1}-\eta_{ij-1}^{n+1}}{2h_y} \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$F_{nonlin}^{n+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_{ij}\frac{u_{ij+1}^{n+1}-u_{ij-1}^{n}}{2h_y} + \frac{1}{2}\frac{(u_{i+1j}^{n+1})^2-(u_{i-1j}^{n})^2}{2h_x} \\ u_{ij}\frac{v_{i+1j}^{n+1}-v_{i-1j}^{n}}{2h_x} + \frac{1}{2}\frac{(v_{ij+1}^{n+1})^2-(v_{ij-1}^{n})^2}{2h_y} \end{pmatrix} \quad (9)$$

Краевые условия

Для численного решения задачи (1)-(2) необходимо ограничить расчетную область. Существуют способы задания искусственных краевых условий которые в некоторых случаях позволяют выходить волнам из расчетной области без отражений и искажений. Но, к сожалению, они не являются универсальными.

Замыкание системы уравнений

Т.к. границы конечной области ей же и принадлежат, следовательно на них выполняется система (1)-(2). И тогда для замыкания разностной задачи (6)-(7) на границах аппроксимируем систему (1)-(2) внутрь расчетной области.

Пример аппроксимации на $\Gamma_1 = \{x = 0, y \in [0,1]\}$

$$F_{lin}^{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{(H_{1j}-B_{1j}^{n+1})u_{1j}^{n+1}-(H_{0j}-B_{0j}^{n+1})u_{0j}^{n+1}}{2h_x} + \\ \frac{(H_{0j+1}-B_{0j+1}^{n+1})v_{0j+1}^{n+1}-(H_{0j-1}-B_{0j-1}^{n+1})v_{0j-1}^{n+1}}{2h_y} \\ g\frac{\eta_{1j}^{n+1}-\eta_{0j}^{n+1}}{2h_x} \\ g\frac{\eta_{0j+1}^{n+1}-\eta_{0j-1}^{n+1}}{2h_y} \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$F_{nonlin}^{n+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_{0j}\frac{u_{0j+1}^{n+1}-u_{0j-1}^{n}}{2h_y} + \frac{1}{2}\frac{(u_{1j}^{n+1})^2-(u_{0j}^{n})^2}{2h_x} \\ u_{0j}\frac{v_{1j}^{n+1}-v_{0j}^{n}}{2h_x} + \frac{1}{2}\frac{(v_{0j+1}^{n+1})^2-(v_{0j-1}^{n})^2}{2h_y} \end{pmatrix} \quad (11)$$

Система уравнений

В итоге задача (6)-(7) с замыканием на границе представляет собой систему нелинейных алгебраических уравнений

$$(A_{lin} + A_{nonlin}) \cdot u = f \qquad (12)$$

Матрица полученной системы уравнений является не самосопряженной, не обладает свойством диагонального преобладания и может быть не знакоопределенной.

Метод неполной аппроксимации

Для решения системы (12) использовался итерационный метод неполной аппроксимации минимальных невязок

$$u^{k+\frac{1}{2}} = u^k - \tau_{k+1} r^k \tag{13}$$

$$u^{k+1} = u^{k+\frac{1}{2}} - \alpha_{k+1} z_k \tag{14}$$

где τ-итерационный параметр,z^k - заданный вектор,α-матрица итерационных параметров

Алгоритм решения

Т.о. для решения задачи (1)-(2) на каждом временном шаге по известному вектору $\{u_{ij}^n, v_{ij}^n, \eta_{ij}^n\}$ с помощью схемы (13)-(14) находится приближенное решение системы (12), которое принимается за решение схемы (6)-(7) на n+1 слое.

Результаты расчетов

Нелинейные уравнения

- Движение и накладывание нескольких волн
- Движение волны с пересечением препятствия в виде усеченного конуса
- Движение волны с пересечением препятствия в виде усеченного конуса(проекция сверху)
- Движение волны с пересечением препятствия в виде экспоненциального подъема

Результаты расчетов

Сравнение линейных и нелинейных уравнений при движении над постоянным дном простой формы

- Движение для линейного случая
- Движение для нелинейного случая
- Динамика разности

Результаты расчетов

Сравнение линейных и нелинейных уравнений при движении над постоянным дном с преятствием на границе

- Движение для линейного случая
- Движение для нелинейного случая
- Динамика разности(с линиями уровня)

Выводы

- Проведены расчеты, демонстрирующие влияние формы дна на движение волны.
- Предлагаемый подход решения задачи (1)-(2) с использованием неявных схем и аппроксимации исходной системы уравнений на границе конечной области позволяет находить решение в ней без отражений, как в линейном, так и нелинейном случае.
- Нелинейность в (1)-(2) приводит к изменению формы движущихся волн, делает их более ассиметричными.

Конференции

- Одиннадцатая всероссийская конференция «Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики»
- Всероссийская научно-практическая конференция «Научное творчество молодежи»
- X Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием «Информационные технологии и математическое моделирование»