Colle n°18: exo-types

Exercice 1. Commutant d'une matrice (d'après CC-INP n°73)

Soit $C(A)$ l'ensemble des matrices de $M_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

1. *Montrer que $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.*

   - $\boxed{C(A) \subset M_2(\mathbb{R})}$ car les matrices qui commutent avec A sont de format $(2, 2)$.
   - $A \times 0_2 = 0_2 \times A = 0_2$ donc $0_2 \in C(A)$
     Donc $\boxed{C(A) \neq \varnothing}$
   - Soit $(P, Q) \in C(A)^2, \lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda P + Q \in C(A)$:

     $$\begin{aligned}(\lambda P + Q)A &= \lambda PA + QA \\ &= \lambda AP + AQ \quad (\text{car } (P, Q) \in C(A)^2)\end{aligned}$$

     et

     $$A(\lambda P + Q) = \lambda AP + AQ$$

     Donc $\lambda P + Q$ commute avec A. $\boxed{\lambda P + Q \in C(A)}$

   <u>Donc $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$</u>

2. *On note $V(A)$ le sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$ engendré par les puissance de A : $V(A) =$ Vect$(A^k, k \in \mathbb{N})$. Montrer que $V(A)$ est un sous-espace vectoriel de $C(A)$.*

   - <u>Montrons que $V(A) \subset C(A)$:</u>
     Soit $B \in V(A)$. B est une combinaison linéaire finie de $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$.
     Donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $B = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i A^i$, avec $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$.
     Alors $AB = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i A^{i+1}$ et $BA = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i A^{i+1}$.
     Donc $\boxed{AB = BA \text{ et } B \in C(A)}$
   - <u>Montrons que $V(A) \neq \varnothing$:</u>
     $A^0 = I$ et $0 \times I \in \text{Vect}((A^k)_{k \in \mathbb{N}})$.
     Donc $0_2 \in V(A)$ et $\boxed{V(A) \neq \varnothing}$
   - <u>Montrons que $V(A)$ est stable par combinaison linéaire :</u>
     Soit $(B, C) \in V(A)^2, \lambda \in \mathbb{R}$:
     Alors :
     — $\exists n \in \mathbb{N}, B = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_k A^k, (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$
     — $\exists p \in \mathbb{N}, C = \sum\limits_{i=1}^{p} \mu_k A^k, (\mu_1, \ldots, \mu_p) \in \mathbb{R}^p$
     Donc $\lambda B + C$ est combinaison linéaire de A^k.
     Donc $\boxed{\lambda B + C \in V(A)}$

3. *Montrer que A^2 est combiansion linéaire de A et I. Que peut-on en déduire sur $V(A)$?*

On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = A + 6I$$

Montrons que $V(A) = \text{Vect}(A, I)$:

- $\boxed{\supset}$: Soit $M \in \text{Vect}(I, A)$. Alors il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M = aI + bA$.
  Donc M est une combinaison linéaire finie de $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$.
  Donc $\boxed{\text{Vect}(I, A) \subset \text{Vect}((A^k)_{k\in\mathbb{N}}) = V(A)}$
- $\boxed{\subset}$: Soit $M \in V(A)$.
  Donc il existe $n \in \mathbb{N}, M = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_k A^k, (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.
  On veut montrer *par récurrence*, $\forall k \in \mathbb{N}, H(k)$: "A^kest combinaison linéaire de(A, I)" :
  — Initialisation : $k = 0$:

  $$A^0 = I = 0A + I$$

  Donc $\boxed{H(0) \text{ est vraie.}}$

  — Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$: On suppose $H(k)$vraie, montrons que $H(k + 1)$ est vraie.

  $$\begin{aligned} A^{k+1} &= A \times A^k \\ &= A(aI + bA) \quad \text{par hypothèse de récurrence avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2 \\ &= aA + bA^2 \\ &= aA + b(A + 6I) \\ A^{k+1} &= \boxed{(a + b)A + 6bI} \end{aligned}$$

  Donc $H(k + 1)$ est vraie.

  — Bilan : $\forall k \in \mathbb{N}$, A^k est combinaison linéaire de I et A.

  Or $\text{Vect}(I, A)$ est un espace vectoriel, donc $\text{Vect}((A^k)_{k\in\mathbb{N}}) \subset \text{Vect}(I, A)$

Donc $\boxed{\text{Vect}(I, A) = \text{Vect}((A^k)_{k\in\mathbb{N}})}$

4. *Déterminer une base de $C(A)$. A-t-on $C(A) = V(A)$?*

On cherche les matrices M qui vérifient : $MA = AM$.

On pose $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$

On obtient :

$$AM = \begin{pmatrix} 2a + c & 2b + d \\ 4a - c & 4b - d \end{pmatrix}$$

$$MA = \begin{pmatrix} 2a + 4b & a - b \\ 2c + 4d & c - d \end{pmatrix}$$

Il faut donc résoudre le système $AM = MA$.

On obtient $C(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 3b + d & b \\ 4b & d \end{pmatrix}, (b, d) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

Donc $C(A) = \text{Vect}\,(B, I)\,$, avec $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

Montrons que $C(A) = V(A)$:

- $\boxed{\supset}$: Déjà vu dans (2)
- $\boxed{\subset}$:
  - $V(A)$ est un espace vectoriel
  - $\begin{cases} I \in V(A) \\ B = I + A \in V(A) \end{cases}$
  - Donc $C(A) \subset V(A)$

  Bilan : $V(A) = Vect(I, B) = C(A)$

Montrons que (I, A) est une base de $C(A)$:

- $\boxed{(I, A) \text{ engendre } C(A)}$ (car $C(A) = \mathrm{Vect}(I, A)$)
- Montrons que (I, A) est une famille libre :

  Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $aI + bA = 0_2$, montrons que $a = b = 0$:

$$aI + bA = \begin{pmatrix} a+2b & b \\ 4b & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  On a $b = 0$ et par substitution on trouve $a = 0$, donc $\boxed{(I, A) \text{ est une famille libre}}$

Donc (I, A) est une base de $C(A)$

Exercice 2. Application de la décomposition en éléments simples

1. ***Cours :*** *Soit $F = \frac{P}{Q}$ sous forme irréductible. Si α est un pôle simple de F, déterminer sa partie polaire (deux formules et preuves attendues)*

   On cherche F sous la forme $F = \dfrac{a}{X - \alpha} + F_1(X)$, avec α qui n'est pas pôle de F_1

   Formule 1 : $a = \lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{(X - \alpha)P(X)}{Q(X)}$

   Preuve : On cherche a tel que :

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{a}{X - \alpha} + F_1(X)$$

$$\iff (X - \alpha)\frac{P(X)}{Q(X)} = a + (X - \alpha)F_1(X)$$

   Or $\lim\limits_{x \to \alpha} a + (x - \alpha)F_1(x) = a$ (car α n'est pas pôle de F_1).

   Donc par *unicité de la limite* : $\boxed{\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{(x - \alpha)P(x)}{Q(x)} = a}$

   Formule 2 : $a = \dfrac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$

   Q peut s'écrire sous la forme $Q(X) = (X - \alpha)R(X)$, avec $R(\alpha) \neq 0$ (α est pôle simple de F).

   Donc $Q'(X) = R(X) + (X - \alpha)R'(X)$. Évalué en α, $Q'(\alpha) = R(\alpha) = \frac{Q(\alpha)}{(X - \alpha)}$

   Donc $\dfrac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)} = \dfrac{(X - \alpha)P(\alpha)}{Q(\alpha)}$