УДК 519.21

І. О. Литвиненко[1], аспірант

Оптимізація системи обслуговування з багатьма виконавцями та з рекурентним потоком

В статті досліджується система обслуговування з рекурентним потоком заявок, які обробляються декількома виконавцями. Кожна заявка потребує експоненціального часу виконання з параметром, що залежить від типу заявки.

В результаті, було описано спосіб знаходження стаціонарних ймовірностей системи обслуговування та наведено приклад оптимізації параметрів вхідних потоків процесу з метою ефективного завантаження наявних виконавців.

Ключові слова: система обслуговування, рекурентний потік, стаціонарні ймовірності.

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т Глушкова 4д
e-mail: igor@ert.org.ua

I. O. Lytvynenko[1], PhD student

Optimization of the queuing system with many servers and with recurrent flow

This paper considers a queuing system with recurrent flow of job and several servers. Every job requires exponential serving time with parameter depending on the type of the job.

As a result it was described a way to find the stationary probabilities of the service process. Finally, it was provided an example of input flow optimization problem in order to make servers to be loaded effectively.

Key Words: queuing system, recurrent flow, stationary probabilities.

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d
e-mail: igor@ert.org.ua

Статтю представив д. т. н. Гаращенко Ф. Г.

Розглянемо систему обслуговування з M виконавцями та одним потоком заявок, який є потоком відновлення, де інтервали часу між заявками мають функцію розподілу $F(x)$. Кожна заявка з ймовірністю p_i $(i = 1, 2, \dots, N)$ потребує для обробки одного виконавця на експоненціально розподілений час з параметром μ_i. Якщо всі M виконавців зайняті, заявка отримує відмову в обслуговуванні та губиться.

Випадок з одним типом заявок розглянуто в роботі [1]. Робота [2] описує випадок з різними заявками але з пуассонівським потоком на вході. Випадок з двома типами заявок розглянуто в роботі [3]. В даній роботі узагальнюється результат роботи [3] на випадок декількох типів заявок, що потребують різний середній час для обслуговування. Опишемо роботу цієї системи випадковим процесом

$$X(t) \in \left\{(x_1, \dots, x_N) : \sum_{i=1}^{N} x_i \le M,\ x_i \ge 0,\ x_i \in N\right\}$$

де $X_i(t)$ – кількість виконавців, зайнятих заявками i-го типу в момент часу $t \ge 0$.

Позначимо τ_n — час надходження n-ї заявки. Тоді $(\tau_{n+1} - \tau_n)$ має функцію розподілу $F(x)$.

Позначимо $\zeta_n = X(\tau_n - 0)$. Тобто $\zeta_n = (\zeta_n^1, \dots, \zeta_n^N)$ — це стан системи безпосередньо перед надходженням n-ї заявки.

Розглянемо

$$A^n_{r_1,\dots,r_N}(s) = \mathrm{E}\left\{e^{-s\tau_n} \prod_{i=1}^{N} \binom{\zeta_n^i}{r_i}\right\}$$

Для подальшого аналізу нам потрібні декілька допоміжних тверджень.

Лема 1 ([1])**.** Якщо $\xi(M, p)$ – випадкова величина розподілена біноміально з параметрами M та $p \in (0, 1)$, матимемо

$$\mathrm{E}\left\{\binom{M - \xi(M,p)}{r}\right\} = \mathrm{E}\left\{\binom{\xi(M, 1-p)}{r}\right\} = (1-p)^r \binom{M}{r}$$

Лема 2. Нехай $p_{k_1,\dots,k_N}$ – деякий розподіл ймовірностей:

$$p_{k_1,\dots,k_N} \ge 0, k_1, \dots, k_N = \overline{0, M},$$
$$\sum_{i=1}^{N} k_i \le M, \sum_{k_i : \sum_{i=1}^{N} k_i \le M} p_{k_1,\dots,k_N} = 1$$

Якщо

$$b_{r_1,\dots,r_N} = \sum_{k_i : k_i \ge r_i \wedge \sum_{i=1}^{N} k_i \le M} \prod_{i=1}^{N} \binom{k_i}{r_i} p_{k_1,\dots,k_n}$$

© І. О. Литвиненко, 2014

$(r_1, \dots, r_N)$-й біноміальний момент цього розподілу, тоді

$$p_{k_1,\dots,k_n} = \sum_{r_i : r_i \ge k_i \wedge \sum_{i=1}^N r_i \le M} \prod_{i=1}^N (-1)^{r_i - k_i} \binom{r_i}{k_i} b_{r_1,\dots,r_n}$$

Доведення. Спочатку покажемо, що для довільних d_k та $0 \le r \le m$ з

$$c_r = \sum_{k=r}^m \binom{k}{r} d_k \tag{1}$$

випливає

$$d_k = \sum_{r=k}^m (-1)^{r-k} \binom{r}{k} c_r \tag{2}$$

Підставивши вираз для c_r в формулу для d_k, отримаємо

$$d_k = \sum_{r=k}^m (-1)^{r-k} \binom{r}{k} \sum_{i=r}^m \binom{i}{r} d_i = \sum_{i=k}^m d_i \sum_{r=k}^i (-1)^{r-k} \binom{r}{k} \binom{i}{r}$$

Для доведення (1)-(2) достатньо показати, що

$$\sum_{r=k}^i (-1)^{r-k} \binom{r}{k} \binom{i}{r} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i > k \end{cases}$$

Випадок $i = k$ є очевидним. Розглянемо випадок $i > k$.

$$\sum_{r=k}^i (-1)^{r-k} \binom{i}{r} \binom{r}{k} = \sum_{r=k}^i (-1)^{r-k} \binom{i}{k} \binom{i-k}{r-k} =$$
$$= \binom{i}{k} \sum_{r=0}^{i-k} (-1)^r \binom{i-k}{r} = \binom{i}{k} (1-1)^{i-k} = 0$$

Отже маємо (1)-(2) доведеним. Тепер до

$$b_{r_1,\dots,r_N} = \sum_{k_i : k_i \ge r_i \wedge \sum_{i=1}^N k_i \le M} \prod_{i=1}^N \binom{k_i}{r_i} p_{k_1,\dots,k_n} =$$
$$= \sum_{k_1=r_1}^{M-r_2-\dots-r_N} \binom{k_1}{r_1} \sum_{k_2=r_2}^{M-k_1-r_3-\dots-r_N} \binom{k_2}{r_2} \dots$$
$$\dots \sum_{k_{N-1}=r_{N-1}}^{M-k_1-\dots-k_{N-2}-r_N} \binom{k_{N-1}}{r_{N-1}} \sum_{k_N=r_N}^{M-k_1-\dots-k_{N-1}} \binom{k_N}{r_N} p_{k_1,k_2}$$

застосуємо N разів перетворення (1)-(2), з чого й отримаємо твердження леми. ∎

Лема 3 ([4, с. 212])**.** *Якщо для деякої послідовності x_n існує $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, тоді*

$$\lim_{w\to 1} (1-w) \sum_{i=0}^\infty x_i w^i = x$$

Теорема 1. $A^{n+1}_{r_1,\dots,r_N}(s)$ задовольняють наступним співвідношенням

$$A^n_{0,\dots,0}(s) = \left(\int_0^\infty e^{-sx}\, dF(x) \right)^n = \phi(s)^n$$

$$A^{n+1}_{r_1,\dots,r_N}(s) = \phi\left(s + \sum_{i=1}^N \mu_i r_i \right) \cdot$$
$$\cdot \sum_{k=1}^N p_k \left(A^n_{r_1,\dots,r_N}(s) + A^n_{r_1,\dots,r_k-1,\dots,r_N}(s) - \right.$$
$$\left. - \sum_{a_i : \sum_{i=1}^N a_i = M} \binom{a_k}{r_k - 1} \frac{\prod_{j=1}^N \binom{a_j}{r_j}}{\binom{a_k}{r_k}} A^n_{a_1,\dots,a_N}(s) \right)$$

Доведення. Розглянемо

$$\mathrm{E}\left\{ e^{-s\tau_{n+1}} \prod_{i=1}^N \binom{\zeta^i_{n+1}}{r_i} | \zeta_n = (a_1, \dots, a_N), \tau_{n+1} - \tau_n = x \right\} =$$

$$= e^{-sx} \mathrm{E}\{ e^{-s\tau_n} | \zeta_n = (a_1, \dots, a_N) \} \cdot$$
$$\cdot \mathrm{E}\left\{ \prod_{i=1}^N \binom{\zeta^i_{n+1}}{r_i} | \zeta_n = (a_1, \dots, a_N), \tau_{n+1} - \tau_n = x \right\} =$$

$$= e^{-sx} \mathrm{E}\{ e^{-s\tau_n} | \zeta_n = (a_1, \dots, a_N) \} \cdot$$
$$\cdot \sum_{k=1}^N p_k \mathrm{E}\left\{ \binom{\zeta^k_{n+1}}{r_k} \frac{\prod_{i=1}^N \binom{a_i - \xi(a_i, 1 - e^{-\mu_i x})}{r_i}}{\binom{a_k - \xi(a_k, 1 - e^{-\mu_k x})}{r_k}} \right.$$
$$\left. | \zeta_n = (a_1, \dots, a_N), \tau_{n+1} - \tau_n = x, n\text{-а заявка має тип } k \right\}$$

де $\xi(k, p)$ – випадкова величина розподілена біноміально з параметрами k та $p \in (0, 1)$.

Перетворимо останній вираз, використовуючи лему 1. Отримаємо

$$\mathrm{E}\left\{ e^{-s\tau_{n+1}} \prod_{i=1}^N \binom{\zeta^i_{n+1}}{r_i} | \zeta_n = (a_1, \dots, a_N), \tau_{n+1} - \tau_n = x \right\} =$$

$$= e^{-sx} \mathrm{E}\{ e^{-s\tau_n} | \zeta_n = (a_1, \dots, a_N) \} \cdot$$
$$\cdot \sum_{k=1}^N p_k \frac{\prod_{i=1}^N e^{-\mu_i x r_i} \binom{a_i}{r_i}}{e^{-\mu_k x r_k} \binom{a_k}{r_k}} e^{-\mu_k x r_k} d(a_k, r_k) =$$

$$= e^{-\left(s+\sum_{k=1}^{N}\mu_k r_k\right)} \mathrm{E}\left\{e^{-s\tau_n} | \zeta_n = (a_1,\dots,a_N)\right\} \cdot \cdot \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{\prod_{i=1}^{N}\binom{a_i}{r_i}}{\binom{a_k}{r_k}} d(a_k, r_k)$$

де

$$d(a_k, r_k) = \begin{cases} \binom{a_k+1}{r_k}, & \sum_{i=1}^{N} a_i < M \\ \binom{a_k}{r_k}, & \sum_{i=1}^{N} a_i = M \end{cases}$$

Якщо час очікування заявки має функцію розподілу $F(x)$ та $\phi(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dF(x)$, тоді

$$\mathrm{E}\left\{e^{-s\tau_{n+1}} \prod_{i=1}^{N}\binom{\zeta_{n+1}^i}{r_i} | \zeta_n = (a_1,\dots,a_N)\right\} = = \phi\left(s + \sum_{i=1}^{N}\mu_i r_i\right) \mathrm{E}\left\{e^{-s\tau_n} | \zeta_n = (a_1,\dots,a_N)\right\} \cdot \cdot \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{\prod_{i=1}^{N}\binom{a_i}{r_i}}{\binom{a_k}{r_k}} d(a_k, r_k)$$

Домножимо рівність на $\mathrm{P}\{\zeta_n = (a_1,\dots,a_N)\}$ та просумуємо по $(a_1,\dots,a_N)$: $\sum_{i=1}^{N} a_i \le M$. Матимемо

$$A_{r_1,\dots,r_N}^{n+1}(s) = \phi\left(s + \sum_{i=1}^{N}\mu_i r_i\right) \sum_{k=1}^{N} p_k \cdot \cdot \left(\sum_{a_i: 1+\sum_{i=1}^{N} a_i \le M} \frac{\prod_{j=1}^{N}\binom{a_j}{r_j}}{\binom{a_k}{r_k}} \left(\binom{a_k}{r_k} + \binom{a_k}{r_k-1}\right) \cdot \cdot \mathrm{E}\left\{e^{-s\tau_n} | \zeta_n = (a_1,\dots,a_N)\right\} \mathrm{P}\{\zeta_n = (a_1,\dots,a_N)\} + + \sum_{a_i: 1+\sum_{i=1}^{N} a_i > M} \prod_{j=1}^{N}\binom{a_j}{r_j} \mathrm{E}\left\{e^{-s\tau_n} | \zeta_n = (a_1,\dots,a_N)\right\} \cdot \cdot \mathrm{P}\{\zeta_n = (a_1,\dots,a_N)\} \right)$$

Враховуючи, що

$$A_{r_1,\dots,r_N}^{n}(s) = \sum_{a_i: \sum_{i=1}^{N} a_i \le M} \prod_{i=1}^{N}\binom{a_i}{r_i} \cdot \cdot \mathrm{E}\left\{e^{-s\tau_n} | \zeta_n = (a_1,\dots,a_N)\right\} \mathrm{P}\{\zeta_n = (a_1,\dots,a_N)\}$$

та використавши лему 2, отримаємо твердження теореми. ∎

Наслідок 1. Генератрису для $A_{r_1,\dots,r_N}^{n}(s)$

$$\Phi_{r_1,\dots,r_N}(s,w) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{r_1,\dots,r_N}^{n}(s) w^n \qquad (3)$$

можна визначити наступними співвідношеннями

$$\Phi_{0,\dots,0}(s,w) = \frac{w\phi(s)}{1 - w\phi(s)}$$

$$\Phi_{r_1,\dots,r_N}(s,w) = \frac{w\phi\left(s + \sum_{i=1}^{N}\mu_i r_i\right)}{1 - w\phi\left(s + \sum_{i=1}^{N}\mu_i r_i\right)} \cdot \cdot \left(\prod_{i=1}^{N}\binom{j_0^i}{r_i} + \sum_{k=1}^{N} p_k \left[\Phi_{r_1,\dots,r_k-1,\dots,r_N}(s,w) - - \sum_{a_i: \sum_{i=1}^{N} a_i = M} \Phi_{a_1,\dots,a_N}(s,w) \binom{a_k}{r_k-1} \frac{\prod_{j=1}^{N}\binom{a_j}{r_j}}{\binom{a_k}{r_k}} \right]\right)$$

де j_0^i – кількість зайнятих виконавців в момент часу $t = 0$ заявками i-го типу.

Доведення.

$$\Phi_{0,\dots,0}(s,w) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{0,\dots,0}^{n}(s) w^n = = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(s)^n w^n = \frac{w\phi(s)}{1 - w\phi(s)}$$

Рекурентне співвідношення для $\Phi_{r_1,\dots,r_N}(s,w)$ отримується перетворенням відповідного рекурентного співвідношення для $A_{r_1,\dots,r_N}^{n}(s)$, отриманого в теоремі 1.

Враховуючи, що

$$A_{r_1,\dots,r_N}^{1}(s) = \int_0^\infty \mathrm{E}\left\{e^{-s\tau_1} \prod_{i=1}^{N}\binom{\zeta_1^i}{r_i} | \tau_1 = x\right\} dx = = \int_0^\infty e^{-sx} \mathrm{E}\left\{\prod_{i=1}^{N} e^{-\mu_i x r}\binom{\zeta_0^i}{r_i} | \tau_1 = x\right\} dx = = \phi\left(s + \sum_{i=1}^{N}\mu_i r_i\right) \prod_{i=1}^{N}\binom{j_0^i}{r_i}$$

матимемо

$$\Phi_{r_1,\dots,r_N}(s,w) - w\phi\left(s + \sum_{i=1}^{N}\mu_i r_i\right) \prod_{i=1}^{N}\binom{j_0^i}{r_i} = = w\phi\left(s + \sum_{i=1}^{N}\mu_i r_i\right) \sum_{k=1}^{N} p_k \left(\Phi_{r_1,\dots,r_N}(s,w) + + \Phi_{r_1,\dots,r_k-1,\dots,r_N}(s,w) - - \sum_{a_i: \sum_{i=1}^{N} a_i = M} \binom{a_k}{r_k-1} \frac{\prod_{j=1}^{N}\binom{a_j}{r_j}}{\binom{a_k}{r_k}} \Phi_{a_1,\dots,a_N}(s,w) \right)$$

$$\Phi_{r_1,\dots,r_N}(s,w)=\frac{w\phi\left(s+\sum_{i=1}^N\mu_ir_i\right)}{1-w\phi\left(s+\sum_{i=1}^N\mu_ir_i\right)}\cdot \cdot\left(\prod_{i=1}^N\binom{j_0^i}{r_i}+\sum_{k=1}^N p_k\left[\Phi_{r_1,\dots,r_k-1,\dots,r_N}(s,w)- -\sum_{a_i:n_k+\sum_{i=1}^N a_i>M}\binom{a_k}{r_k-1}\frac{\prod_{j=1}^N\binom{a_j}{r_j}}{\binom{a_k}{r_k}}\Phi_{a_1,\dots,a_N}(s,w)\right]\right)$$

$$\Phi_{r_1,\dots,r_N}(s,w)=\frac{w\phi\left(s+\sum_{i=1}^N\mu_ir_i\right)}{1-w\phi\left(s+\sum_{i=1}^N\mu_ir_i\right)}\cdot \cdot\left(\prod_{i=1}^N\binom{j_0^i}{r_i}+\sum_{k=1}^N p_k\left[\Phi_{r_1,\dots,r_k-1,\dots,r_N}(s,w)- -\sum_{a_j:\sum_{j=1}^N a_j=M}\Phi_{a_1,\dots,a_N}(s,w)\binom{a_k}{r_k-1}\frac{\prod_{j=1}^N\binom{a_j}{r_j}}{\binom{a_k}{r_k}}\right]\right)$$

Що і треба було довести. ■

Теорема 2. Біноміальні моменти

$$B_{r_1,\dots,r_N}=\sum_{a_i:\sum_{i=1}^N a_i\le M}\prod_{i=1}^N\binom{a_i}{r_i}P_{a_1,\dots,a_N}$$

стаціонарного розподілу

$$P_{a_1,\dots,a_N}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\{\zeta_n=(a_1,\dots,a_N)\}$$

процесу $\zeta_n=(\zeta_n^1,\dots,\zeta_n^N)$ задовольняють наступним співвідношенням:

$$B_{0,\dots,0}=1$$

$$B_{r_1,\dots,r_N}=\frac{\phi\left(\sum_{i=1}^N\mu_ir_i\right)}{1-\phi\left(\sum_{i=1}^N\mu_ir_i\right)}\cdot \cdot\left(\sum_{k=1}^N p_k\left[B_{r_1,\dots,r_k-1,\dots,r_N}- -\sum_{a_j:\sum_{j=1}^N a_j=M}B_{a_1,\dots,a_N}\binom{a_k}{r_k-1}\frac{\prod_{j=1}^N\binom{a_j}{r_j}}{\binom{a_k}{r_k}}\right]\right)$$

Доведення. Використовуючи лему 3, маємо

$$B_{r_1,\dots,r_N}=\lim_{n\to\infty}B^n_{r_1,\dots,r_N}= =\lim_{w\to1}(1-w)\sum_{i=1}^\infty B^i_{r_1,\dots,r_N}w^i=\lim_{w\to1}(1-w)\Phi_{r_1,\dots,r_N}(0,w)$$

Використовуючи рекурентне співвідношення для $\Phi_{r_1,\dots,r_N}(0,w)$ з наслідку 1, маємо

$$\lim_{w\to1}(1-w)\Phi_{r_1,\dots,r_N}(w)=\frac{\phi\left(\sum_{i=1}^N\mu_ir_i\right)}{1-\phi\left(\sum_{i=1}^N\mu_ir_i\right)}\cdot \cdot\left(\sum_{k=1}^N p_k\left[\lim_{w\to1}(1-w)\Phi_{r_1,\dots,r_k-1,\dots,r_N}(w)- -\sum_{a_j:\sum_{j=1}^N a_j=M}\lim_{w\to1}(1-w)\Phi_{a_1,\dots,a_N}(w)\cdot \cdot\binom{a_k}{r_k-1}\frac{\prod_{j=1}^N\binom{a_j}{r_j}}{\binom{a_k}{r_k}}\right]\right)$$

звідки отримуємо рекурентне співвідношення для $B_{r_1,\dots,r_N}$.

Розглянемо випадок $B_{0,0}$ окремо.

$$\lim_{w\to1}(1-w)\Phi_{0,\dots,0}(w)=\lim_{w\to1}\frac{(1-w)w\phi(0)}{1-w\phi(0)}= =\lim_{w\to1}\frac{(1-w)w\int_0^\infty e^{-0x}\,dF(x)}{1-w\int_0^\infty e^{-0x}\,dF(x)}=\lim_{w\to1}\frac{(1-w)w}{1-w}= =\lim_{w\to1}w=1$$

Теорему доведено. ■

Лема 4. Якщо $f(0,\dots,0)=0$, то розв'язок рекурентного співвідношення

$$b_{r_1,\dots,r_N}=c(r_1,\dots,r_N)\cdot \cdot\sum_{i=1}^N c_ib_{r_1,\dots,r_i-1,\dots,r_N}+f(r_1,\dots,r_N)$$

можна подати у вигляді

$$b_{r_1,\dots,r_N}=d_{0,\dots,0,r_1,\dots,r_N}c_1^{r_1}\cdots c_N^{r_N}b_{0,\dots,0}\cdot \cdot\sum_{a_1=0}^{r_1}\cdots\sum_{a_N=0}^{r_N}d_{a_1,\dots,a_N,r_1,\dots,r_N}f(a_1,\dots,a_N)\cdot \cdot c_1^{r_1-a_1}\cdots c_N^{r_N-a_N} \quad (4)$$

де

$$d_{a_1,\ldots,a_N,r_1,\ldots,r_N} = \\ = \begin{cases} c(r_1,\ldots,r_N)\cdot \\ \cdot\sum_{i=1}^N d_{a_1,\ldots,a_N,r_1,\ldots,r_i-1,\ldots,r_N}, & a_i,r_i \geq 0, i=\overline{1,N} \\ 1, & a_i = r_i, i=\overline{1,N} \\ 0, & else \end{cases}$$

тобто

$$d_{a_1,\ldots,a_N,r_1,\ldots,r_N} = \sum_{\substack{\text{по всім шляхам } \pi \\ \text{з } (a_1,\ldots,a_N) \text{ в } (r_1,\ldots,r_N)}} \prod_{\substack{\text{по всіх клітинках } (b_1,\ldots,b_N) \\ \text{шляху } \pi \text{ крім } (a_1,\ldots,a_N)}} c(b_1,\ldots,b_N)$$

Доведення.

Доведення леми можна отримати підстановкою (4) у рекурентне співвідношення для $b_{r_1,\ldots,r_N}$.

$$d_{0,\ldots,0,r_1,\ldots,r_N} c_1^{r_1}\cdots c_N^{r_N} b_{0,\ldots,0} + \\ + \sum_{a_1=0}^{r_1}\cdots\sum_{a_N=0}^{r_N} d_{a_1,\ldots,a_N,r_1,\ldots,r_N} f(a_1,\ldots,a_N)\cdot \\ \cdot c_1^{r_1-a_1}\cdots c_N^{r_N-a_N} =$$

$$= f(r_1,\ldots,r_N) + \Big(c_1^{r_1}\cdots c_N^{r_N} b_{0,\ldots,0} c(r_1,\ldots,r_N)\cdot \\ \cdot\sum_{i=1}^N d_{0,\ldots,0,r_1,\ldots,r_i-1,\ldots,r_N} + \\ + \sum_{i=1}^N\sum_{a_1=0}^{r_1}\cdots\sum_{a_i=0}^{r_i-1}\cdots\sum_{a_N=0}^{r_N} c(r_1,\ldots,r_N)\cdot \\ \cdot d_{a_1,\ldots,a_N,r_1,\ldots,r_i-1,\ldots,r_N} f(a_1,\ldots,a_N) c_1^{r_1-a_1}\cdots c_N^{r_N-a_N}\Big)$$

Залишається довести тотожність

$$\sum_{a_1=0}^{r_1}\cdots\sum_{a_N=0}^{r_N} d_{a_1,\ldots,a_N,r_1,\ldots,r_N} f(a_1,\ldots,a_N)\cdot \\ \cdot c_1^{r_1-a_1}\cdots c_N^{r_N-a_N} =$$

$$= f(r_1,\ldots,r_N) + \sum_{i=1}^N\sum_{a_1=0}^{r_1}\cdots\sum_{a_i=0}^{r_i-1}\cdots\sum_{a_N=0}^{r_N} c(r_1,\ldots,r_N)\cdot \\ \cdot d_{a_1,\ldots,a_N,r_1,\ldots,r_i-1,\ldots,r_N} f(a_1,\ldots,a_N) c_1^{r_1-a_1}\cdots c_N^{r_N-a_N}$$

Зауважимо, що з означення можна показати

$$d_{a_1,\ldots,a_N,r_1,\ldots,r_N} = 0, \text{якщо існує } i : a_i > r_i$$

Тому, додаючи необхідні нульові доданки та знаючи, що $d_{r_1,\ldots,r_N,r_1,\ldots,r_N} = 1$, матимемо

$$f(r_1,\ldots,r_N) + \sum_{i=1}^N\sum_{a_1=0}^{r_1}\cdots\sum_{a_i=0}^{r_i-1}\cdots\sum_{a_N=0}^{r_N} c(r_1,\ldots,r_N)\cdot \\ \cdot d_{a_1,\ldots,a_N,r_1,\ldots,r_i-1,\ldots,r_N}\cdot \\ \cdot f(a_1,\ldots,a_N) c_1^{r_1-a_1}\cdots c_N^{r_N-a_N} =$$

$$= \sum_{a_1=0}^{r_1}\cdots\sum_{a_N=0}^{r_N}\sum_{i=1}^N c(r_1,\ldots,r_N)\cdot \\ \cdot d_{a_1,\ldots,a_N,r_1,\ldots,r_i-1,\ldots,r_N}\cdot \\ \cdot f(a_1,\ldots,a_N) c_1^{r_1-a_1}\cdots c_N^{r_N-a_N} =$$

$$= \sum_{a_1=0}^{r_1}\cdots\sum_{a_N=0}^{r_N} d_{a_1,\ldots,a_N,r_1,\ldots,r_N} f(a_1,\ldots,a_N)\cdot \\ \cdot c_1^{r_1-a_1}\cdots c_N^{r_N-a_N}$$

Що і треба було довести.

■

Наслідок 2. Біноміальні моменти

$$B_{r_1,\ldots,r_N} = \sum_{a_i:\sum_{i=1}^N a_i\leq M}\prod_{i=1}^N\binom{a_i}{r_i}P_{a_1,\ldots,a_N}$$

стаціонарного розподілу

$$P_{a_1,\ldots,a_N} = \lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\{\zeta_n = (a_1,\ldots,a_N)\}$$

процесу $\zeta_n = (\zeta_n^1,\ldots,\zeta_n^N)$ можна подати у вигляді:

$$B_{r_1,\ldots,r_N} = d_{0,\ldots,0,r_1,\ldots,r_N} p_1^{r_1}\cdots p_N^{r_N} - \\ - \sum_{b_1=0}^{r_1}\cdots\sum_{b_N=0}^{r_N} d_{b_1,\ldots,b_N,r_1,\ldots,r_N} p_1^{r_1-a_1}\cdots p_N^{r_N-a_N}\cdot \\ \cdot c(b_1,\ldots,b_N)\sum_{a_j:\sum_{j=1}^N a_j=M}\sum_{k=1}^N p_k B_{a_1,\ldots,a_N}\cdot \\ \cdot\binom{a_k}{r_k-1}\frac{\prod_{j=1}^N\binom{a_j}{r_j}}{\binom{a_k}{r_k}}$$

де d_{b_1,b_2,r_1,r_2} визначені як в лемі 4 при

$$c(r_1,\ldots,r_N) = \frac{\phi\left(\sum_{i=1}^N \mu_i r_i\right)}{1-\phi\left(\sum_{i=1}^N \mu_i r_i\right)}$$

та $B_{a_1,\ldots,a_N}$ для $a_j : \sum_{j=1}^N a_j = M$ визначені системою відповідних рівнянь (2) (якщо її розв'язок існує).

Доведення. Застосовуємо лему 4 до результату теореми 2. ■

Лема 5. Якщо $P_{r_1,\dots,r_N}$ стаціонарні ймовірності для процесу ζ_n. Тоді стаціонарні ймовірності $\overline{P}_{r_1,\dots,r_N}$ процесу $X(\tau_n)$, $n = 0, 1, \dots$ дорівнюють

$$\overline{P}_{r_1,\dots,r_N} = \\ = \begin{cases} \sum_{i=1}^N P_{r_1,\dots,r_i-1,\dots,r_2} p_i, & \sum_{i=1}^N r_i < M, \\ \sum_{i=1}^N P_{r_1,\dots,r_i-1,\dots,r_2} p_i + P_{r_1,\dots,r_N}, & \sum_{i=1}^N r_i = M. \end{cases} \quad (5)$$

Розглянемо задачу оптимізації параметрів $p_1, \dots, p_N$ вхідного потоку

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N c_i \mathrm{E}\{X^i\} \to max, \\ \sum_{i=1}^N p_i = 1, \end{cases}$$

де розподіл вектора $(X^1, \dots, X^N)$ співпадає з (5).

$$\mathrm{E}\{X^i\} = \sum_{a: a_1+\dots+a_n \le M} \overline{P}_{a_1,\dots,a_N}(p_1, \dots, p_n) a_i$$

Матимемо

$$\begin{cases} \sum_{a: a_1+\dots+a_n \le M} \overline{P}_{a_1,\dots,a_N}(p_1, \dots, p_n) \sum_{i=1}^N c_i a_i \to max, \\ \sum_{i=1}^N p_i = 1, \end{cases}$$

Дану задачу оптимізації можна розв'язати чисельно. Розглянемо, для прикладу, випадок системи з параметрами $\mu = (0.34, 0.68, 0.136)$ та $c = (260, 311, 400)$, якщо час між надходженнями заявок розподілений згідно гамма розподілу з параметрами 2 та $1/3$.

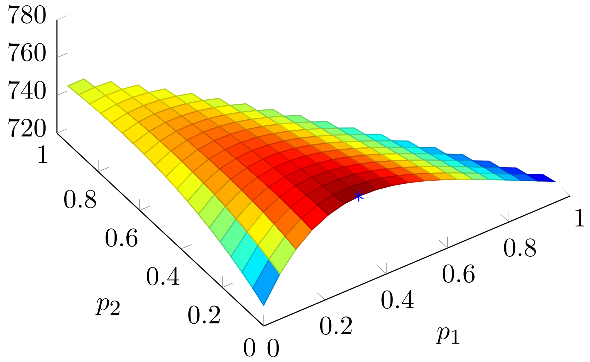

Рис. 1. Функція $\sum_{i=1}^N c_i \mathrm{E}\{X^i\}$ в залежності від p.

Таким чином оптимальними значеннями керуючих ймовірностей розглянутої стохастичної системи для обраних параметрів будуть $p = (0.3101, 0, 0.6898)$.

Список використаних джерел

[1] Takács Lajos. Introduction to the Theory of Queues. — Oxford University Press, 1962. — P. 268.

[2] Lebedev Eugene, Ponomarchuk Oleg. On queuing systems with failures and several types of input flows // Top. — 1999. — Vol. 7, no. 2. — P. 323–332.

[3] Lytvynenko I. O., Lebedev E. O. Optimization of the queuing system with many servers and with recurrent flow of jobs of different types // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. — 2013. — no. 4. — P. 126–129.

[4] Klimov G. P. Stochastic service system. — Nauka, 1966. — P. 243. — (in Russian).

Надійшла до редколегії 09.01.14