Листок 3

Шустанин Егор

1.

а) $\rho = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{2\pi i/3}$ $\qquad \rho = -\frac{1}{\rho} \qquad \rho^3 = +1$

Рассмотрим преобразование $z \to -\frac{1}{z}$ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}$

$$f\left(-\frac{1}{\rho}\right) = \cancel{\left(-\frac{1}{\rho}\right)^4} \rho^4 f(\rho)$$

$$f(\rho) = \rho^4 f(\rho) \Rightarrow f(\rho) = \rho f(\rho)$$

$$\cancel{f(\rho) \neq}\ \rho \neq 1 \Rightarrow f(\rho) = 0$$

б) $\rho = i \qquad \rho^4 = i$

Рассмотрим это же преобразование

$$f\left(-\frac{1}{i}\right) = i^6 f(i) \Rightarrow f(i) = -f(i) \Rightarrow f(i) = 0$$

ЧТД

3. Рассмотрим преобразование

1) $z \to z+1$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$f(z) = f(z+1)$ – период функции $= 1$.

2) $z \to -\frac{1}{z}$: $f\left(-\frac{1}{z}\right) = z^k f(z)$

3. Ограниченность при $Im(z) \to +\infty$

f ~~φ~~ периодична, значит её поведение определяется в фундаментальной области, но вспомним $z \to -\frac{1}{z}$.

$\varphi(-\frac{1}{z})$ $f(z) = (cz+d)^{-k} f(-\frac{1}{z})$ должна быть ограничена при $Im(z) \to \infty$, но т.к. $k<0$, то значения будут расти в бесконечность так, что функция не ограничена :(.

4. Покажем, что ~~это~~ порядок произведения форм равен сумме порядков.

5. ~~Найдите~~ $\dim M_k$?

Найдём $k = 0, 2, 4, 6, 8, 10$

6. Докажем, что порядок произведения модулярных форм равен сумме порядков форм.

$$E_k = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n \geq 1} \sigma(n) e^{2\pi i n z}$$

6. Мы знаем, что порядок произведения форм равен форме из суммы порядков. Также из 3.4 (увы я не смог доказать) M_4, M_6, M_8, M_{10} имеет размерность 1. А значит оба равенства верны

7.

$$E_k(z) = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n$$

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k$$