Листочек 2 Шестеркин Егор М3338

2.3.

а) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})$ - расширение степени 3, т.к. мин. полином x^3-7.

$1, \sqrt[3]{7}, \sqrt[3]{7}^2$ - линейно независимы и целочисленны

$x^3-7=0$ - $\sqrt[3]{7}$

$x^3-49=0$ - $\sqrt[3]{7}^2$

Ответ: $\{1, \sqrt[3]{7}, \sqrt[3]{7}^2\}$

б) Базис расширения $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ - это $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}$ и он очевидно целочисленен x^2-2, x^2-3 и x^2-6 соответственно

Ответ: $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}$

2.4

а) $N(1-\omega) = (1-\omega)(1+\omega) = 1-\omega^2 = 15$.

$15 = 3 \cdot 5$.

~~Просто~~ Значит наш идеал раскладывается в произведение идеалов в норме 3 и 5.

$(3, 1-\omega)(5, 1-\omega) \stackrel{?}{=} 1-\omega$

$1-\omega = 15 - 3(1-\omega) + (1-\omega)^2 \subset (3, 1-\omega)(5, 1-\omega)$

И т.к. нормы совпадают, то это наш ответ.

б) ~~$(11-\omega, 2-\omega) \to (9, 2-\omega)$~~

~~$N(2-\omega, 9) =$~~

$(11-\omega, 2-\omega) \to (9, 2-\omega)$

$N(2-\omega) = 4 + \omega^2 = 18$

$N(9) = 81$

$N((2-\omega, 9)) = НОД(18, 81) = 9$

$9 = 3^2$

$(3, 2-\omega)^2 \overset{?}{=} I$

$2-\omega = 2 \cdot 9 - 3(2-\omega) + (2-\omega)^2$

и очевидно, что $(3, 2-\omega)^2$ порождает $I \Rightarrow$

$I = (3, 2-\omega)^2$

Ответ: а) $(3, 1-\omega)(5, 1-\omega)$

б) $(3, 2-\omega)^2$

в) Докажем, что группа

1) I и J - обратимые идеалы

$II^{-1} = R \qquad JJ^{-1} = R$

$(IJ)(J^{-1}I^{-1}) = R$ - замкнуто относительно умножения

2) идеалы ассоциативны по определению

3) единичный элемент - само кольцо

$$RI = I$$

4) существует обратный элемент по определению обратного идеала.

ЧТД $\triangle$.

~~2.5.~~

$D = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ было доказано в прошлом листочке

~~2.8.~~

~~$y^2 = x^3 - 5$~~

2.7.

$y^2 = x^3 - 5$ Рассмотрим mod 4

1)

y	y^2
0	0
1	1
2	0
3	1

x	x^3-1
0	3
1	0
2	3
3	2

$\Rightarrow$ y - чётное

x - нечётное

2) $y^2+5=x^3$

$(y+\sqrt{-5})(y-\sqrt{-5})=x^3$

покажем, что идеалы $y+\sqrt{-5}$ и $y-\sqrt{-5}$ взаимнопросты.

Пусть есть простой идеал, который делит оба, это будет означать, что он делит $2y$ и $2\sqrt{-5}$, но x^3 — нечёт, значит не может содержать 2.

Значит $y+\sqrt{-5}$ и $y-\sqrt{-5}$ взаимнопросты $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ каждый является кубом какого-то идеала

ЧТД.

3)

$$y+\sqrt{-5}=(a+b\sqrt{-5})^3$$

$$a^3+3a^2b\sqrt{-5}-15ab^2-5b^3\sqrt{-5}=y+\sqrt{-5}$$

$$\begin{cases} a^3-15ab^2=y \\ 3a^2b-5b^3=1 \end{cases}$$

$b(3a^2-5b^2)=1 \Rightarrow b=\pm 1$

$b=1$: $a^2=2$ — нет

$b=-1$: $a^2=\frac{4}{3}$ — нет

Противоречие. :(