

EQUACÕES DE ONDA II

Análise de Fourier

Edgard Macena Cabral Nº 11820833

Abril 2023

Introdução

Nesse projeto, estamos interessados em misturar o que fizemos nos dois projetos anteriores. Notoriamente, vamos usar a equação discretizada da onda, que, quando unida as condições de contorno, nos permite descrever ondas lineares. E observar o resultado para diferentes pontos iniciais da onda.

$$y(i, n + 1) = 2[1 - r^2]y(i, n) + r^2 [y(i + 1, n) + y(i - 1, n)] - y(i, n - 1) \quad (1)$$

e a transformada discretizada de Fourier

$$Y_k = \sum_{j=0}^{j < N/2} y_j e^{2\pi j k i / N} \quad (2)$$

Com o detalhe de que medimos o espectro de potências, isso é

$$P_k = \mathbb{I}(Y_k)^2 + \mathbb{R}(Y_k)^2$$

A questão principal se torna: como as frequências observadas em um ponto dependem da posição inicial da onda.

Como sabemos, séries de Fourier não são únicas e, pensando com cuidado, podemos nos lembrar que os harmônicos apresentam nós. Se posicionamos nossa observação em um ponto que, por azar, seja o nó de uma das frequências do sinal (alás!) não poderemos observá-la.

Isso que buscamos entender na prática nesse projeto.

Módulos usados

Buscamos modularizar os projetos anteriores de maneira a podermos reusá-los nesse. Os arquivos produzidos estão a seguir:

Módulo da transformada de Fourier

Listing 1: Módulo da Transformada de Fourier

```
module fourierMod
  implicit none
  public :: escreveFrequencias

contains

  subroutine escreveFrequencias(y_t, dt, N, file)
    real*8, intent(in) :: dt, y_t(:)
    real*8 :: frequencia
    integer :: k, N, M, file
    complex*16 :: currYk

    ! M é o maior natural < N/2
    M = floor((N-1)/2.d0)
    write(*,*) "M (M/2-1): ", M, "N :", N
    do k = 0, M
      currYk = Yk(k, y_t, N)
      frequencia = k/(N*dt)
      write(file,'(3000F20.8)') frequencia, &
        real(currYk)**2 + aimag(currYk)**2
    end do
  end subroutine escreveFrequencias

  complex*16 function Yk(k, y_t, N)
    integer, intent(in) :: k
    integer, intent(in) :: N
    real*8:: y_t(:)
    complex*16 :: i = (0,1)
    real*8, parameter :: pi = acos(-1.d0)
    integer :: j
    Yk = (0,0)
    somatoria : do j = 1, N
      Yk = Yk + y_t(j)*exp(2.d0*pi*i*j*k/N)
    end do somatoria
  end function Yk

end module fourierMod
```

Note aqui que não estamos diferenciando os senos dos cossenos, observando apenas a “potência” associada a frequência

Módulo de ondas

e

Listing 2: Módulo de Ondas

```
module ondasMod
  implicit none
  public :: Gaussiana, dancaDaCadeira, propagaPresoPreso, imprimeOnda

  contains

  function Gaussiana(i, dx, x0, sigma)
    real*8, intent(in) :: dx, x0, sigma
    integer, intent(in) :: i
    real*8 :: x, Gaussiana
    x = i*dx
    Gaussiana = exp(-1*((x-x0)/sigma)**2)
  end function Gaussiana

  subroutine propagaPresoPreso(ondaAnterior, ondaAtual, ondaPosterior, r, size_x)
    real*8, intent(in) :: ondaAnterior(:), ondaAtual(:), r
    integer, intent(in) :: size_x
    real*8, intent(out) :: ondaPosterior(:)

    !  $y_{n+1}(i) = 2(1-r^2)*y_n(i) - y_{n-1}(i) + r^2*y_n(i+1) + y_n(i-1)$ 
    ondaPosterior(2:size_x-1) = &
      2*(1-r**2)*ondaAtual(2:size_x-1) - ondaAnterior(2:size_x-1) &
      + (r**2)*(ondaAtual(3:size_x) + ondaAtual(1:size_x-2))
  end subroutine propagaPresoPreso

  subroutine propagaPresoLivre(ondaAnterior, ondaAtual, ondaPosterior, r, size_x)
    real*8, intent(in) :: ondaAnterior(:), ondaAtual(:), r
    integer, intent(in) :: size_x
    real*8, intent(out) :: ondaPosterior(:)
    ondaPosterior(2:size_x-1) = &
      2*(1-r**2)*ondaAtual(2:size_x-1) - ondaAnterior(2:size_x-1) &
      + (r**2)*(ondaAtual(3:size_x) + ondaAtual(1:size_x-2))

    ! Derivada na ponta livre é nula
    ondaPosterior(size_x) = ondaPosterior(size_x-1)
  end subroutine propagaPresoLivre

  subroutine dancaDaCadeira(ondaAnterior, ondaAtual, ondaPosterior)
    real*8, intent(inout) :: ondaAnterior(:), ondaAtual(:)
    real*8, intent(out) :: ondaPosterior(:)

    ondaAnterior(:) = ondaAtual(:)
    ondaAtual(:) = ondaPosterior(:)
```

```

end subroutine dancaDaCadeira

subroutine imprimeOnda(ondaAtual, file, size_x)
  real*8, intent(in) :: ondaAtual(:)
  integer :: size_x, file
  integer :: i
  write(file, '(3000F16.8)') (ondaAtual(i), i=1,size_x)
end subroutine imprimeOnda
end module ondasMod

```

Programa principal

Para realizar os estudos de frequências obtidas, usamos o programa a seguir, colocado no diretório da tarefa (a) e com a observação das frequências ocorrendo em torno de $L_{observado} = L/4$

Listing 3: Programa Principal

```

program tarefa_a
  use fourierMod
  use ondasMod
  implicit none

  real(8), parameter :: L = 1.d0, c = 300.d0
  real(8), parameter :: r = 1.d0, dx = 1.0/200.d0, dt = dx*r/c
  integer, parameter :: size_x = L/dx + 1, size_t = 1/(3*dt)
  real(8), dimension(size_x) :: ondaAnterior, ondaAtual, ondaPosterior
  real(8), dimension(size_t) :: pontoGravado ! y(L/4 ,t)
  integer :: i

  ! Ajustamos as condições iniciais
  ondaAtual = 0.d0
  do i = 2, size_x-1
    ondaAtual(i) = Gaussian(i-1, dx, L/2.d0, L/30.d0)
  end do
  ondaAnterior(:) = ondaAtual(:) ! Fazemos ponto inicial

  ondaPosterior = 0.d0
  pontoGravado(1) = ondaAnterior((size_x-1)/4+1) ! Iniciamos gravação de L/4

  do i = 2, size_t
    pontoGravado(i) = ondaAtual((size_x-1)/4+1)
    call propagaPresoPreso(ondaAnterior, ondaAtual, ondaPosterior, r, size_x)
  end do
end program tarefa_a

```

```

    call dancaDaCadeira(ondaAnterior, ondaAtual, ondaPosterior)
end do

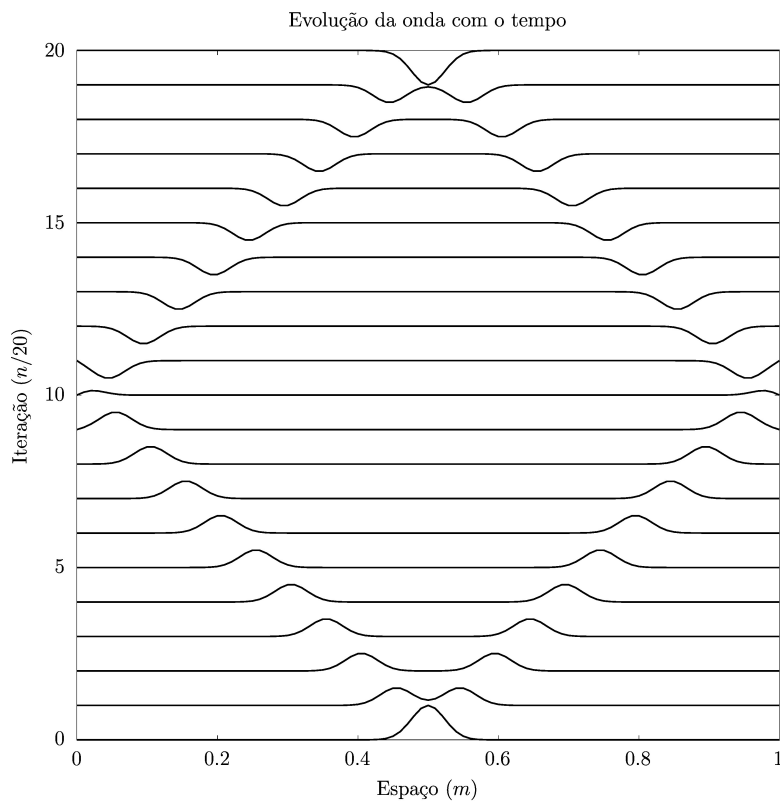
open(1, file="saida")
call escreveFrequencias(pontoGravado, dt, size_t, 1)
close(1)
end program tarefa_a

```

onde apenas alteramos as condições iniciais ou a propagação conforme o necessário.

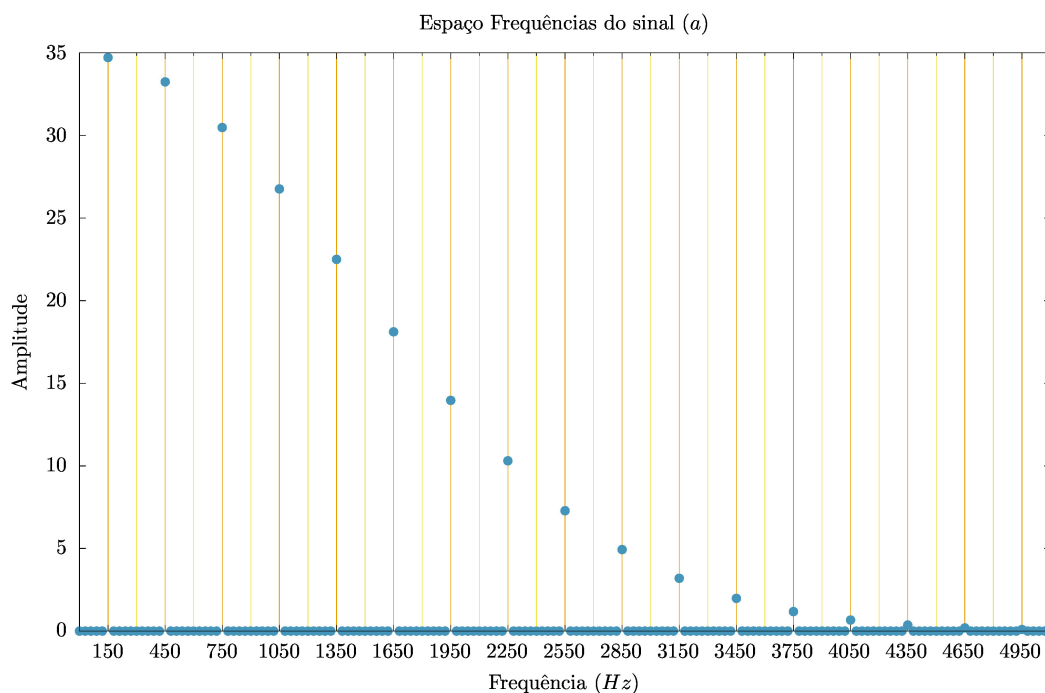
Tarefa a ($L_0 = L/2$)

Condições e resultados



Para a tarefa (a), usamos o pacote gaussiano, com nós fixos, centrada em torno de $L_0 = \frac{L}{2}$, com $\sigma = \frac{L}{30}$.

Os resultados obtidos estão a seguir



Onde observamos que as frequências de forma $2n \cdot 150Hz$ estão faltando.

Conclusão sobre os resultados

A ausência de modos normais pares esperado!

Considerando o caráter da onda, com uma subida bem definida e simétrica em torno de $x = L_0$, seria estranho esperar encontrar modos pares, que estariam agindo construtivamente de um lado e destrutivamente de outro justo no ponto de maior simetria local da onda.

Por causa disso, não conseguimos notar nenhuma obscuração de frequências resultante da posição que estamos observando, que deve ocorrer apenas com modos normais múltiplos de 4.

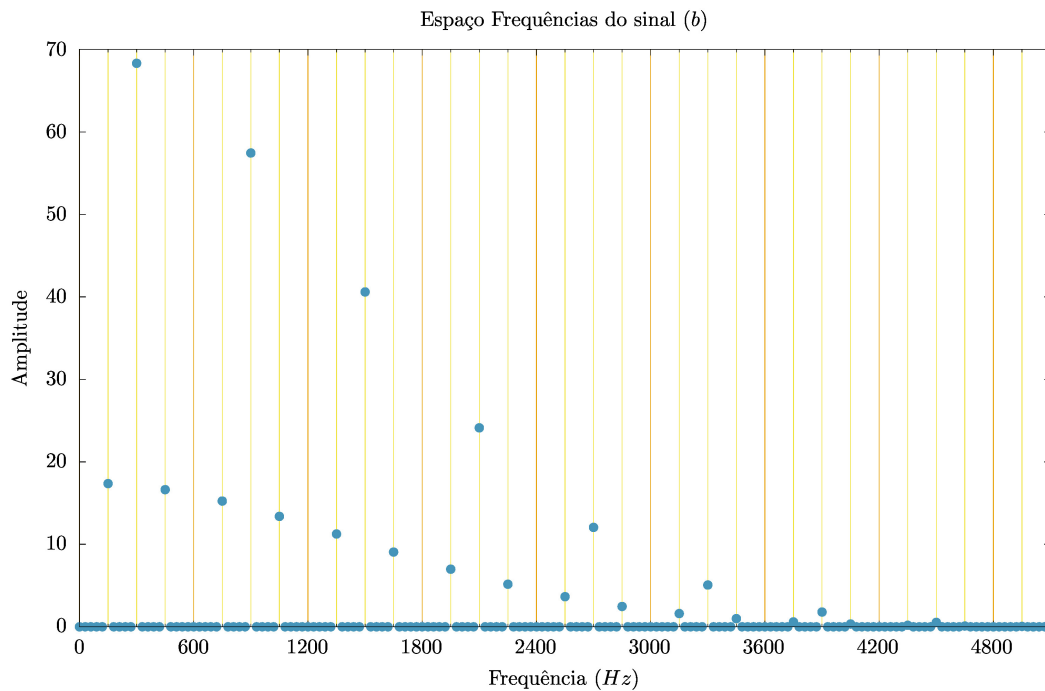
O modo fundamental observado, $f_{fundamental} = 150Hz$, também nos é esperado! Já sabemos do projeto anterior que o comprimento de onda desse sinal é $\lambda = 2m$ e a velocidade foi explicitada no código como $v = 300m/s$. Nada mais esperado que a nossa frequência fundamental obtida.

Tarefa b ($L_0 = L/4$)

Condições e resultados

Para tarefa (b), apenas alteramos L_0 para $\frac{L}{4}$

O resultado obtido está a seguir



Obseamos que os modos normais associados a 4 vezes a frequência inicial estão ausentes. Ademais as frequências pares restantes são muito mais potentes que as frequências ímpares.

Conclusão sobre os resultados

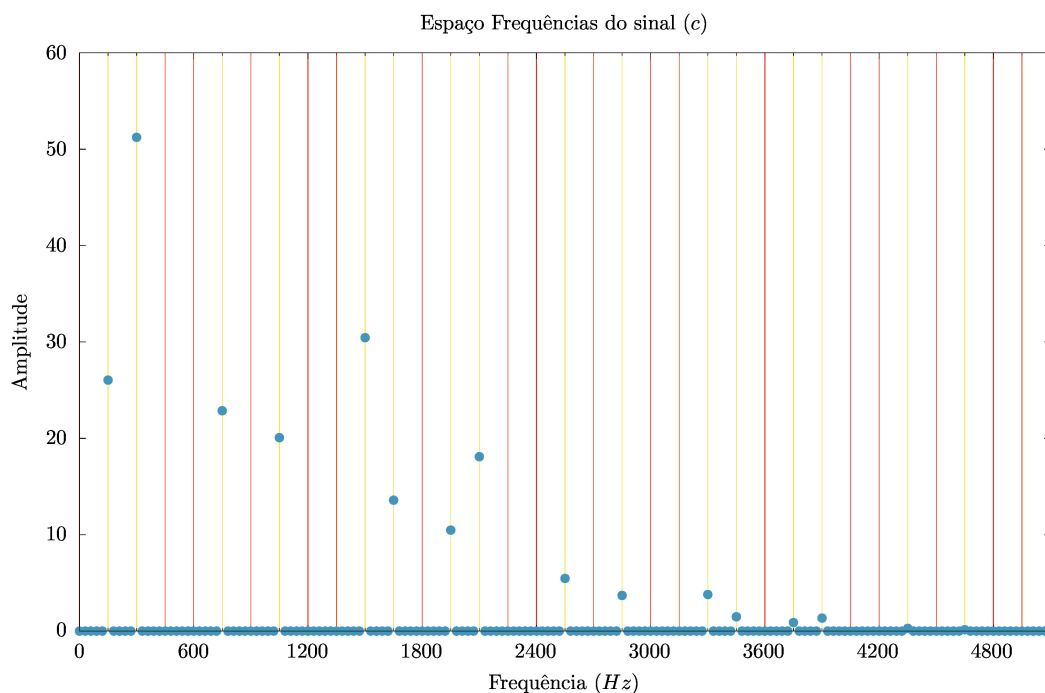
O fato das frequências pares serem muito mais fortes que as frequências ímpares está relacionado com a ausência dos modos múltiplos de 4, como também será observado na tarefa c.

Tarefa c ($L_0 = L/3$)

Condições e resultados

Para tarefa (c), alteramos L_0 para $\frac{L}{3}$

O resultado obtido está a seguir



Álas! Os modos normais ausentes dessa parecem bem mais patológicos.

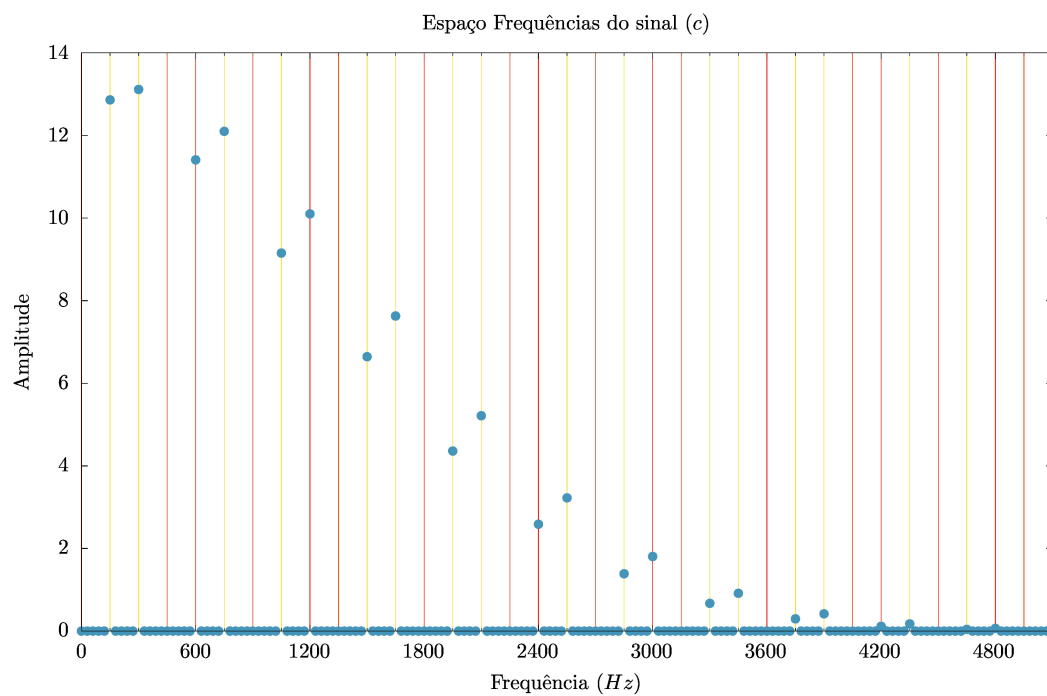
A ordem, bonita, esconde um padrão simples: Faltam os modos normais múltiplos de 3 e 4, o que é ressaltado nas linhas vermelhas da imagem.

Conclusão sobre os resultados

As frequências $3n \cdot 150\text{Hz}$ estarem ausentes não surpreendem. Seus senos, em $t = 0$ colaboram positivamente de um lado e negativamente de outro do máximo de nossa onda. Um comportamento que certamente faria delas um deserviço a nossa representação.

Os máximos mais elevados são os modos normais pares. Isso se dá porque os modos pares que restam tem que absorver a potência dos múltiplos de 4.

Para referência, um gráfico absorvendo as frequências de tipo $4n \cdot 150\text{Hz}$ está a seguir



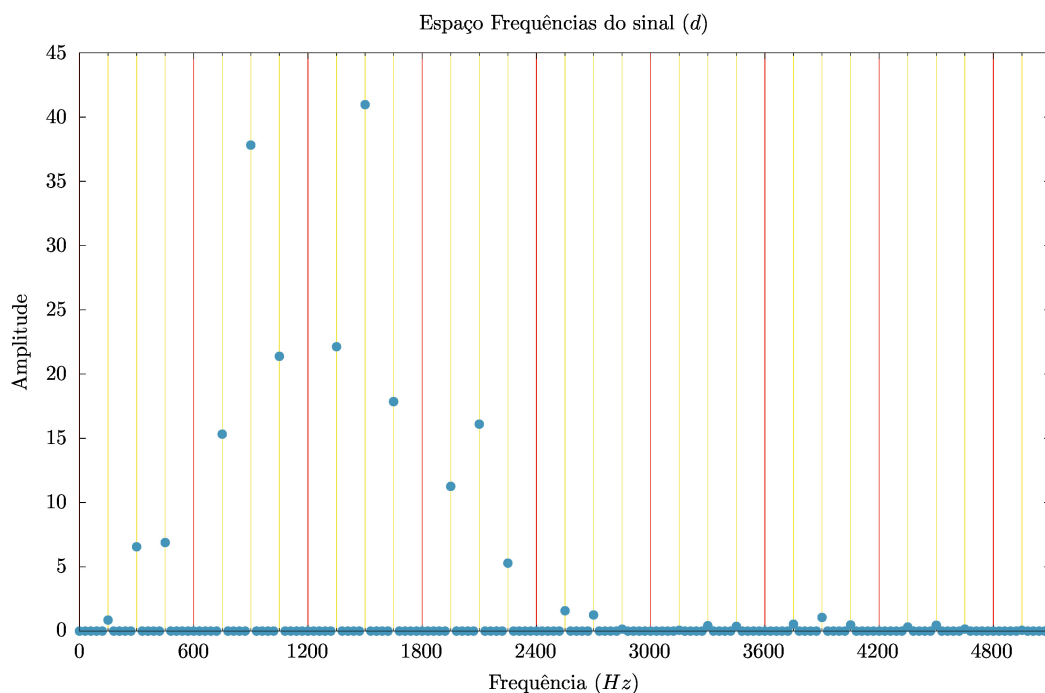
Esse efeito é o mesmo que tornou os modos pares (muito) mais potentes na tarefa b

Tarefa d ($L_0 = L/20$)

Condições e resultados

Para tarefa (d), alteramos L_0 para $\frac{L}{20}$

O resultado obtido está a seguir



Um resultado bonito! Vemos duas sequências de amplitudes associadas as frequências, ambas com aparência de gaussiana.

Conclusão sobre os resultados

Novamente as amplitudes elevadas estão relacionadas as frequências pares, que precisam absorver as amplitudes faltantes de $4n \cdot 150Hz$.

Ademais, observamos uma aversão a frequências mais baixas, que eram mais potentes até agora. Ao contrário, as frequências médias são as protagonistas. Isso é especialmente notável em $f = 2 \cdot 150Hz$, muito baixa, enquanto $6 \cdot 150Hz$ explode. Isso se deve ao pico elevado já no início da corda em $t = 0$.

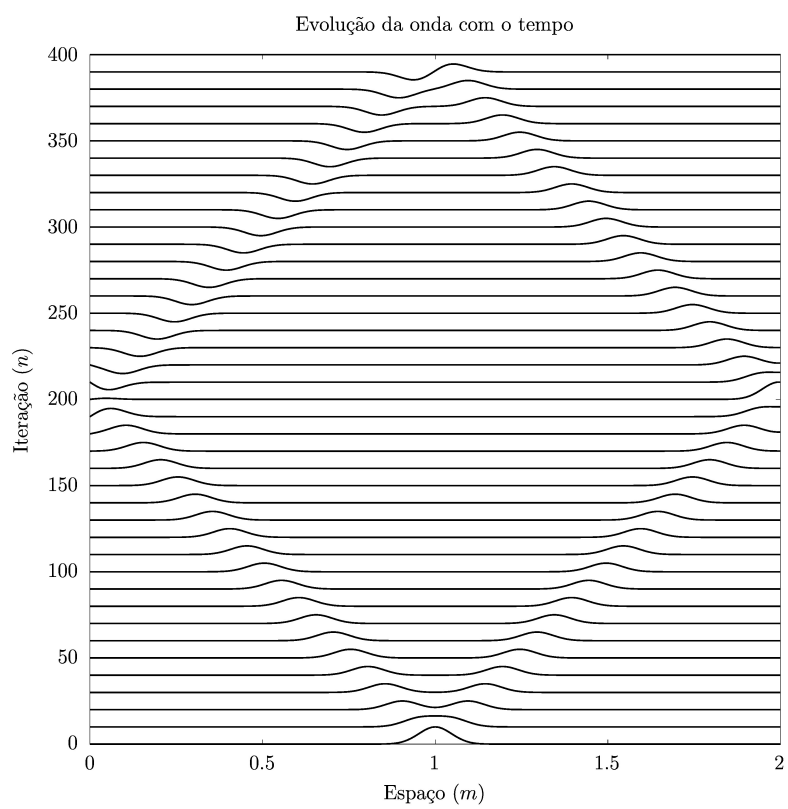
Tarefa e (Nós livres)

Condições e resultados

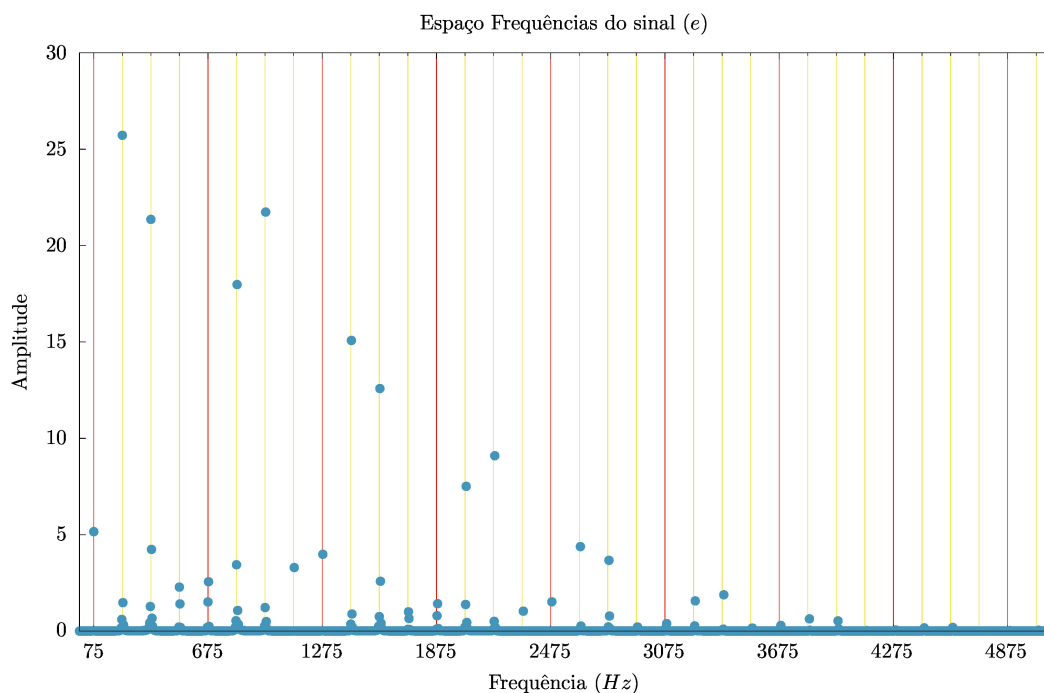
Para tarefa (e), tivemos uma alteração significativa: Passamos a considerar uma das pontas como soltas.

A mudança se resumiu a modar a chamada da `propagaPresoPreso` para `propagaPresoLivre`. Mas a diferença no resultado foi significativa.

A onda obtida está a seguir:



Onde a onda em $n = 400$ está representada !! Ela é plana até aonde a vista alcança.



Onde se destaca o fato de as frequências passarem a assumir a forma $f_n = (75 + 150n)Hz$, com uma pequena diferença para frequências muito grandes.

Nota-se que aqui obtemos uma distribuição de frequências muito mais espalhadas. A ponta solta aumenta consideravelmente sua complexidade harmônica.

Conclusão sobre os resultados

A forma das frequências é facilmente explicável pelo fato de que os senos precisam poder apresentar um máximo em $x = L$, então você precisa adicionar $1/2\pi$ a fase, que é justamente o que esse $75Hz$ está fazendo.

Notamos que as frequências aparecem para todos os ns . Em especial, aparecem as frequências que tem nós nos máximos da onda em $t = 0$. Essas frequências não apareciam para pontas presos.

Isso deve se dar pelas condições da onda em $n = 390$ no gráfico. Temos um perfil de onda que parece justamente o seno em torno de um nó. As frequências aparecem para formar esse perfil.

Mas elas são contraproduativas para onda em $t = 0$, então precisamos adicionar mais frequências para corrigir a onda nesse instante. Isso dá o perfil errático da onda.