

ANÁLISE ESPECTRAL POR TRANSFORMADAS DE FOURIER

Edgard Macena Cabral Nº 11820833

Março 2023

Nessa tarefa, buscamos analisar a Transformada Discreta de Fourier sem nenhuma aceleração. Criamos um programa que realiza a transformada e outro que realiza sua inversa. Observamos que, para alguns casos, essas operações são bem comportadas, e conseguimos recuperar o sinal sem dificuldades. Observamos também que, para outras sinais obtivemos um reflexo em torno da frequência de Nyquist, provando que a maior frequência que podemos obter com a transformada é $\frac{1}{2\Delta t}$. Por fim, vimos a relação entre o número N de pontos e o tempo de 50 execuções do programa, observando um padrão bastante quadrático.

Introdução

A transformada de Fourier é uma transformação que nos leva do espaço das amplitude de um sinal para um espaço de frequências. Para sinais contínuos, podemos escrever:

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{2\pi f it} dt \quad (1)$$

Porém, na física experimental, da análise da luminosidade de estrelas na busca de exoplanetas ao estudo do movimento de um pêndulo no laboratório de física I, trabalhamos essencialmente com dados discretos.

Para adequar a transformada aos dados laboratoriais, usamos as substituições $t_j = j\Delta t$, $f_k = \frac{k}{N\Delta t}$, que nos dão:

$$Y_k = \sum_{j=0}^{j < N/2} y_j e^{2\pi j k i / N} \quad (2)$$

Conseguimos também obter a inversa através de

$$y_j = \frac{1}{k} \sum_{k=0}^{k < N/2} Y_k e^{-2\pi j k i / N} \quad (3)$$

Nessas equações, a razão de írmos apenas até $k < N/2$ está ligada a frequência de Nyquist, que pode ser entendida como a frequência associada ao menor comprimento de onda que pode formar um modo fundamental entre pontos de data consecutivos.

Caso a frequência do sinal seja maior que a frequência de Nyquist, o gráfico, obtemos um pico relacionada à reflexão da verdadeira frequência do sinal com a de Nyquist.

$$f_{encontrada} = 2f_{Nyquist} - f_{verdadeira} \quad (4)$$

Como já dito, transformadas de Fourier são amplamente usadas na Física, então é importante que possamos tê-la eficientemente. Podemos estimar com facilidade a ordem do tempo de execução. Temos N termos, cada um dos quais é calculado com uma soma de $\frac{N}{2}$ termos. A ordem do tempo de execução é então da ordem de $\sim N^2$.

Geração de dados

Para gerar os dados, usamos a equação a seguir:

$$y_i = a_1 \cos(\omega_1 t_i) + a_2 \sin(\omega_2 t_i) \quad (5)$$
$$t_i = i \Delta t, \quad i = 1, \dots, N$$

Que foi executada no programa:

Listing 1: Código da tarefa-2: Geração dos sinais.

```
program gerarSinais
    implicit none
    real*8, parameter :: pi = 3.1415926537989
    ! (a) N = 200, Δt = 0.04, a1 = 2, a2 = 4, ω1 = 4πHz, ω2 = 2.5πHz
    ! (b) N = 200, Δt = 0.04, a1 = 3, a2 = 2, ω1 = 4πHz, ω2 = 2.5πHz
    ! (c) N = 200, Δt = 0.4, a1 = 2, a2 = 4, ω1 = 4πHz, ω2 = 0.2πHz
    ! (d) N = 200, Δt = 0.4, a1 = 3, a2 = 2, ω1 = 4πHz, ω2 = 0.2πHz

    call escreveSinal(200, 0.04d0, 2.d0, 4.d0, 4.d0*pi, 2.5d0, "a")
    call escreveSinal(200, 0.04d0, 3.d0, 2.d0, 4.d0*pi, 2.5d0, "b")
```

```

call escreveSinal(200, 0.4d0, 2.d0, 4.d0, 4.d0*pi, 0.2d0, "c")
call escreveSinal(200, 0.4d0, 3.d0, 2.d0, 4.d0*pi, 0.2d0, "d")
end program gerarSinais

```

```

subroutine escreveSinal(N, dt, a1, a2, w1, w2, label)
    real*8, intent(in) :: a1, a2, w1, w2, dt
    integer, intent(in) :: N
    character, intent(in) :: label
    real*8 :: calculaSinal
    integer :: i

    open(1, file="saida-2-//label)

    do i = 1, N
        write(1, *) i*dt, calculaSinal(i*dt, a1, a2, w1, w2)
    end do

    close(1)

end subroutine escreveSinal

function calculaSinal(t, a1, a2, w1, w2) result(retval)
    real*8, intent(in) :: a1, a2, w1, w2, t
    real*8 :: retval
    retval = a1*cos(w1*t) + a2*sin(w2*t)

end function calculaSinal

```

O programa foi executado sobre as séries de parâmetros

- (a) $N = 200, \Delta t = 0,04, a_1 = 2, a_2 = 4, \omega_1 = 4\pi Hz, \omega_2 = 2,5\pi Hz$
- (b) $N = 200, \Delta t = 0,04, a_1 = 3, a_2 = 2, \omega_1 = 4\pi Hz, \omega_2 = 2,5\pi Hz$
- (c) $N = 200, \Delta t = 0,4, a_1 = 2, a_2 = 4, \omega_1 = 4\pi Hz, \omega_2 = 0,25\pi Hz$
- (d) $N = 200, \Delta t = 0,4, a_1 = 2, a_2 = 4, \omega_1 = 4\pi Hz, \omega_2 = 2,5\pi Hz$

Os resultados estão no gráfico a seguir

Gráfico dos sinais produzidos na tarefa 2

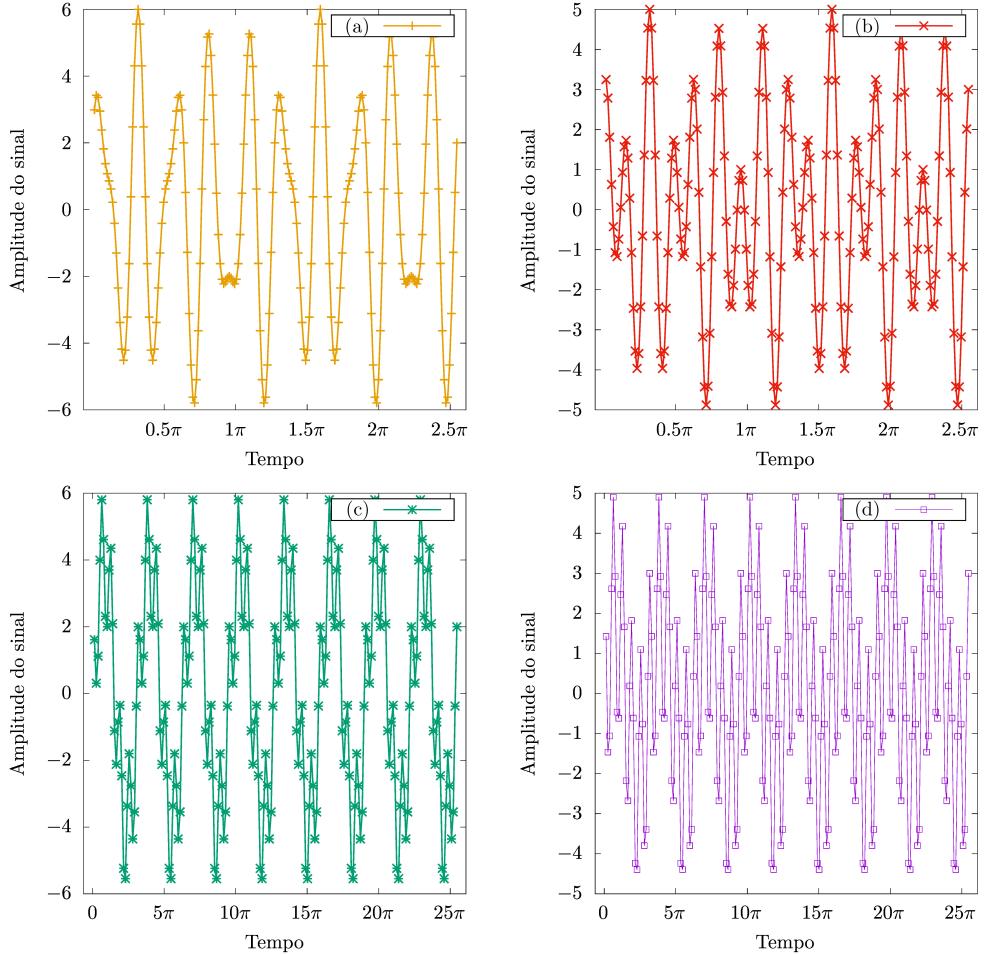


Figure 1: Sinais gerados para os testes seguintes.

Notamos que as séries representam uma boa variedade de sinais. As séries **(a)** e **(b)** são parecidas em termos de frequências, mas as amplitudes diferentes implicam em formatos bastante diferentes, mesmo compartilhando alguns picos e vales, com algo parecido entre as séries **(c)** e **(d)**. Ao mesmo tempo **(a)** e **(c)** têm mesma amplitude, o que não chega a fazer uma série parecida, pelos picos e vales serem bastante distintos, com o mesmo ocorrendo entre a **(b)** e **(d)**

Transformada de Fourier

Para a Transformada de Fourier, usamos o programa a seguir:

Listing 2: Código da tarefa-1: Transformada de Fourier.

```

program gerarEspacoFrequencias
    implicit none
    real*8, dimension(200) :: y_t
    real*8 :: dt
    integer :: N
    call leTabela(dt, y_t, N)
    call escreveFrequencias(y_t, dt, N)
end program gerarEspacoFrequencias

subroutine leTabela(dt, y_t, N)
    real*8, dimension(200), intent(out) :: y_t
    real*8, intent(out) :: dt
    integer, intent(out) :: N
    real*8 :: ignorada
    integer :: i

    open(1, file="data.in")

    do i = 1, 200
        read(1,*, end=10) ignorada, y_t(i)
        if ( i == 1 ) then
            dt = ignorada
        end if
    10 end do
    close(1)

    N = i - 1

end subroutine leTabela

subroutine escreveFrequencias(y_t, dt, N)
    real*8, dimension(200), intent(in) :: y_t
    real*8, intent(in) :: dt
    integer :: k, N, M
    complex*16 :: Yk, currYk

    ! M é o maior natural < N/2
    M = floor((N-1)/2.d0)

    open(2, file="data.out")
    do k = 1, M
        currYk = Yk(k, y_t, N)
        write(2,*) k/(200*dt), real(currYk), aimag(currYk)
    end do
end subroutine escreveFrequencias

```

```

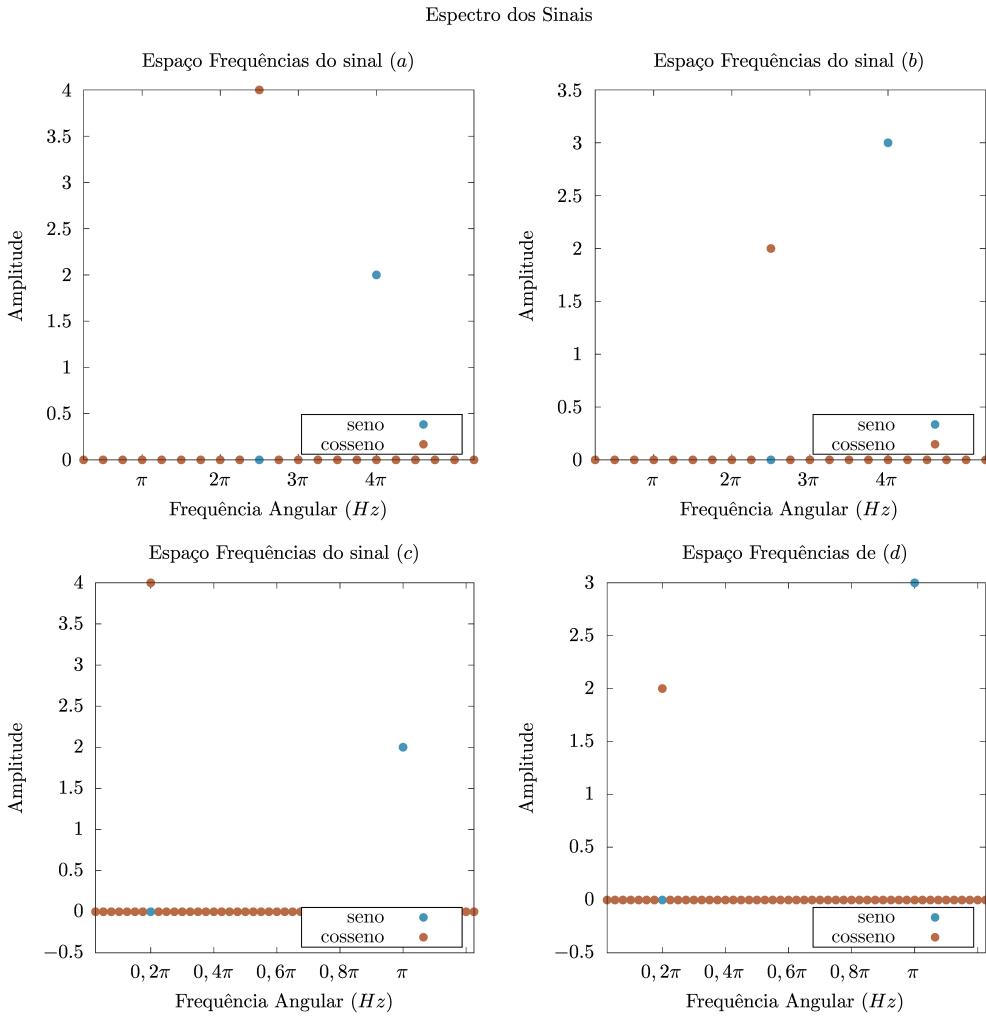
    end do
    close(2)
end subroutine escreveFrequencias

function Yk(k, y_t, N)
    integer, intent(in) :: k
    integer, intent(in) :: N
    real*8, dimension(200):: y_t
    complex*16 :: Yk, i = (0,1)
    real*8, parameter :: pi = 3.1415926537989
    integer :: j
    Yk = (0,0)
    somatoria : do j = 1, N
        Yk = Yk + y_t(j)*exp(2.d0*pi*i*j*k/N)
    end do somatoria

end function Yk

```

Desse programa, produzimos, para os nossos sinais, os seguintes gráficos de espectro:



O gráfico mostrado aqui foi produzido de maneira a reforçar os pontos onde temos os dados são relevantes. Nele, podemos ver o que as frequências dos sinais (a) e (b) foram recuperados sem dificuldades. Já para série (c) e (d), vemos que não conseguimos recuperar a frequência angular de $4\pi Hz$ ($2Hz$ em frequência linear).

Isso ocorre pois essa frequência está bem acima da máxima que Nyquist. De fato, fazendo

$$f_{Nyquist} = \frac{1}{2 \cdot 0,4}$$

$$f_{Nyquist} = 1,25Hz$$

Podemos refletir nossa frequência $2Hz$ em torno de Nyquist através de (4) para obter

$$f_{encontrada} = 0,5\text{Hz}$$

Ou, em frequência, πHz . Como é visto no gráfico!!

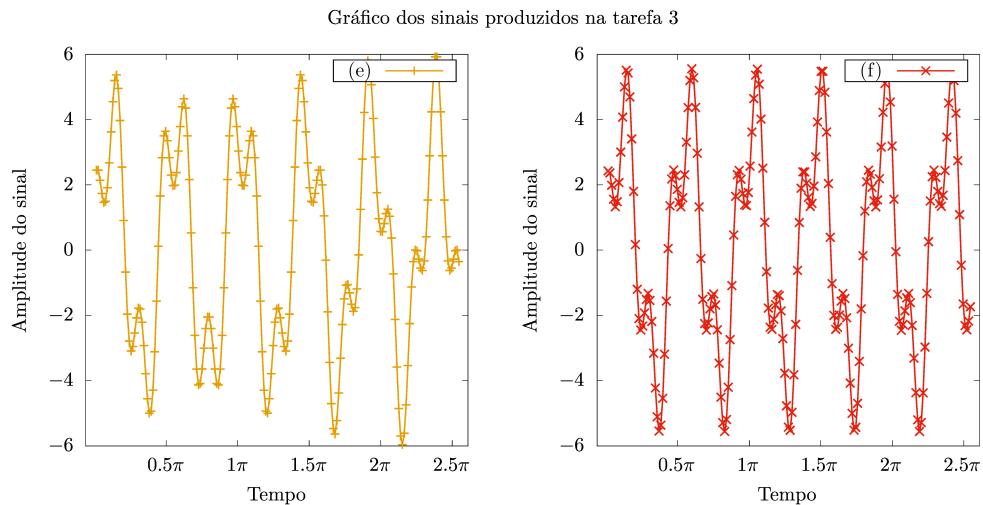
Outros Sinais

Pelo mesmo programa da [Geração de dados](#) geramos os sinais a seguir

(e) $N = 200, \Delta t = 0,04, a_1 = 2, a_2 = 4, \omega_1 = 4\pi\text{Hz}, \omega_2 = 1, \epsilon = 0.001$

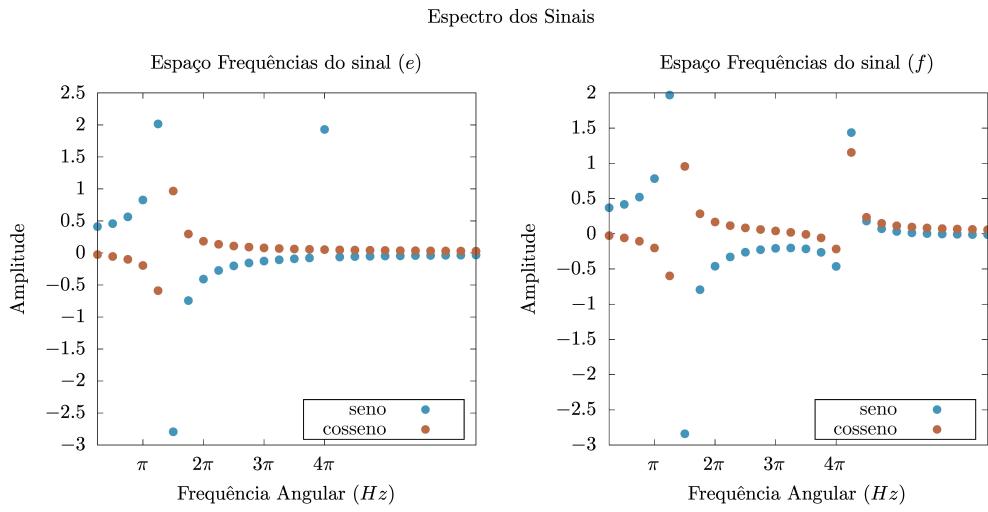
(f) $N = 200, \Delta t = 0,04, a_1 = 2, a_2 = 4, \omega_1 = 4, 2\pi\text{Hz}, \omega_2 = 1, \epsilon = 0.001$

Os gráficos desses dois sinais são os seguintes:



Gráficos bastante normais, mas com dois detalhes importantes: As frequências, bastante próximas por sinal, não estão em harmonia com a frequência de sampleamento $\omega_{Nyquist} = 25\pi\text{Hz}$. Ademais, as frequências de (f) estão em harmonia entre si!

É natural de se esperar que essa harmonia e dissonância interfira na capacidade de um método discreto de samplear as frequências. Podemos ver isso no gráfico da transformada para essas funções:



Não temos mais a recuperação analiticamente perfeita que tínhamos nas séries anteriores, pois a dissonância entre os sinais e o sampleamento faz com que outras frequências representem perfeitamente o sinal no intervalo analisado.

É importante dizer que isso não deveria surpreender. Séries de Fourier analíticas também não tem representação única, e o intervalo tem uma influência sobre o resultado que obtemos.

Transformada Inversa

Usamos, seguindo a (3), o programa:

Listing 3: Código da tarefa-4: Transformada Inversa de Fourier

```
program gerarEspacoAmplitude
    implicit none
    complex*16, dimension(100) :: Yk
    integer :: N

    call leTabela(N, Yk)
    call escreveAmplitude(Yk, N)

end program gerarEspacoAmplitude
```

```
subroutine leTabela(N, Yk)
    real*8 :: ignorada, Yk_real, Yk_imaginaria
```

```

complex*16, dimension(100), intent(out) :: Yk
integer, intent(out) :: N
integer :: i

open(1, file="../tarefa-1/data.out")

do i = 1, 100
    read(1,*, end=10) ignorada, Yk_real, Yk_imaginaria
    Yk(i) = complex(Yk_real, Yk_imaginaria)
10 end do
N = i - character :: label
1
end subroutine leTabela

subroutine escreveAmplitude(Yk, N)
complex*16, dimension(100), intent(in) :: Yk
! Aqui não temos como obter o
! dt de maneira mais orgânica
real*8 :: dt = 0.04d0
integer :: j
complex*16 :: y_j, curr_y_j

open(1, file="saida-4-11820833")
do j = 1, 2*N
    curr_y_j = y_j(j, N, Yk)
    write(1,*) j*dt, real(curr_y_j)
end do
close(1)

end subroutine escreveAmplitude

function y_j(j, N, Yk)
integer, intent(in) :: j
complex*16, dimension(100), intent(in):: Yk
integer, intent(in) :: N
complex*16:: i = (0,1)
complex*16 :: y_j
real*8, parameter :: pi = 3.1415926537989
integer :: k

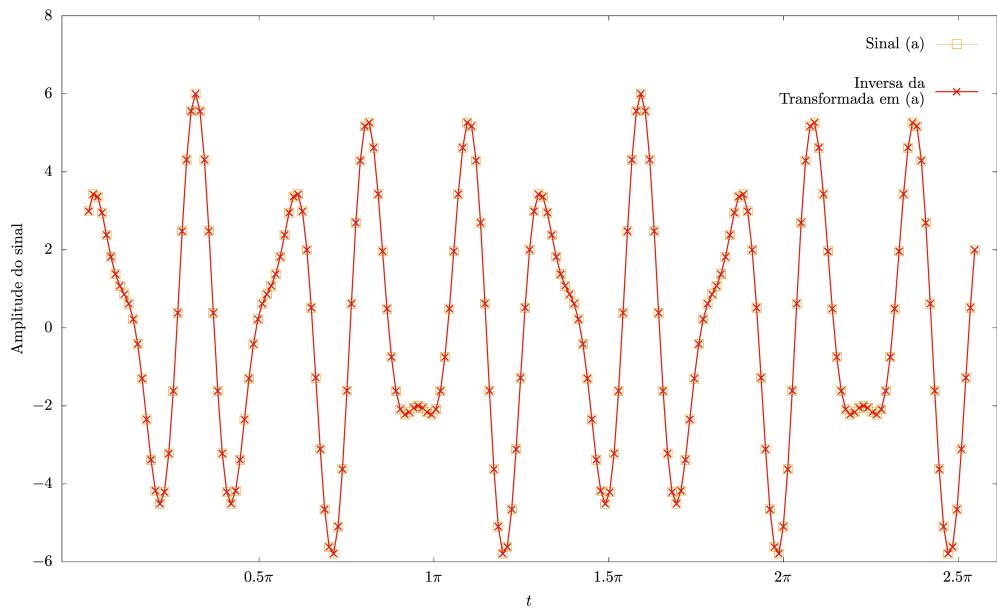
somatoria : do k = 1, 100
    y_j = y_j + Yk(k)*exp(-2.d0*pi*i*j*k/(2*(N+1)))
end do somatoria

```

$$y_j = y_j/N$$

end function *y_j*

Obtivemos, para a série (a), o gráfico a seguir



Nele, observamos uma ótima sobreposição entre a nossa série original e a recuperada pela nossa inversa, demonstrando a precisão do Método de Fourier.

Ficou até um pouco difícil fazer o gráfico das duas linhas de uma maneira que as duas linhas fossem visíveis!

Tempo de Execução

Como comentando na introdução, é esperado que o tempo de execução seja da ordem de N^2 . Para comprovarmos isso, fizemos um programa que executa a Transformada de Fourier sobre o sinal

$$\Delta t = 0,04, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 4, \quad \omega_1 = 4\pi Hz, \quad \omega_2 = 2,5\pi Hz \quad (6)$$

Para $N = 50, 100, 200, 400$.

Para monitorarmos o tempo de execução de cada N , usamos o módulo

de cpu_{time} sobre 20 execuções da transformada para cada N , e depois tiramos a média aritmética. O código foi basicamente o do programa de Transformada, com as alterações girando em torno da contagem de tempo e das saídas:

Listing 4: Código da tarefa-5: Cálculo do tempo médio de execução das Transformadas para diferentes N

```
program tempoPorN
    implicit none
    real*8 :: t_inicio, t_fim, delta_t
    integer :: i, j, N = 50
    character*22, dimension(4) :: files
    files(1) = "entrega-5-050-11820833"
    files(2) = "entrega-5-100-11820833"
    files(3) = "entrega-5-200-11820833"
    files(4) = "entrega-5-400-11820833"

    open(2, file="../saida-5-11820833")
    do i = 1, 4
        call cpu_time(t_inicio)
        do j = 1, 20
            call gerarEspacoFrequencias(files(i))
        end do
        call cpu_time(t_fim)
        delta_t = (t_fim - t_inicio)/10.d0
        write(2, *) N, delta_t, sqrt(delta_t)
        N = N*2
    end do
end program tempoPorN

subroutine gerarEspacoFrequencias(fileName)
    implicit none
    real*8, dimension(400) :: y_t
    character*22 :: fileName
    integer :: N
    call leTabela(fileName, y_t, N)
    call calculaFrequencias(y_t, N)

end subroutine gerarEspacoFrequencias

subroutine leTabela(fileName, y_t, N)
    character*22, intent(in) :: fileName
    real*8, dimension(400), intent(out) :: y_t
```

```

integer, intent(out) :: N
real*8 :: ignorada
integer :: i

open(1, file=fileName)

do i = 1, 400
    read(1,*, end=1) ignorada, y_t(i)
    if ( i == 1 ) then
        end if
    end do

1 close(1)

N = i - 1
end subroutine leTabela

subroutine calculaFrequencias(y_t, N)
    real*8, dimension(400), intent(in) :: y_t
    integer :: k, N, M
    complex*16 :: Yk, currYk
    M = floor((N-1)/2.d0)

    do k = 1, M
        currYk = Yk(k, y_t, N)
    end do
end subroutine calculaFrequencias

function Yk(k, y_t, N)
    integer, intent(in) :: k
    integer, intent(in) :: N
    real*8, dimension(400):: y_t
    complex*16 :: Yk, i = (0,1)
    real*8, parameter :: pi = 3.1415926537989
    integer :: j
    Yk = (0,0)
    somatoria : do j = 1, N
        Yk = Yk + y_t(j)*exp(2.d0*pi*i*j*k/N)
    end do somatoria

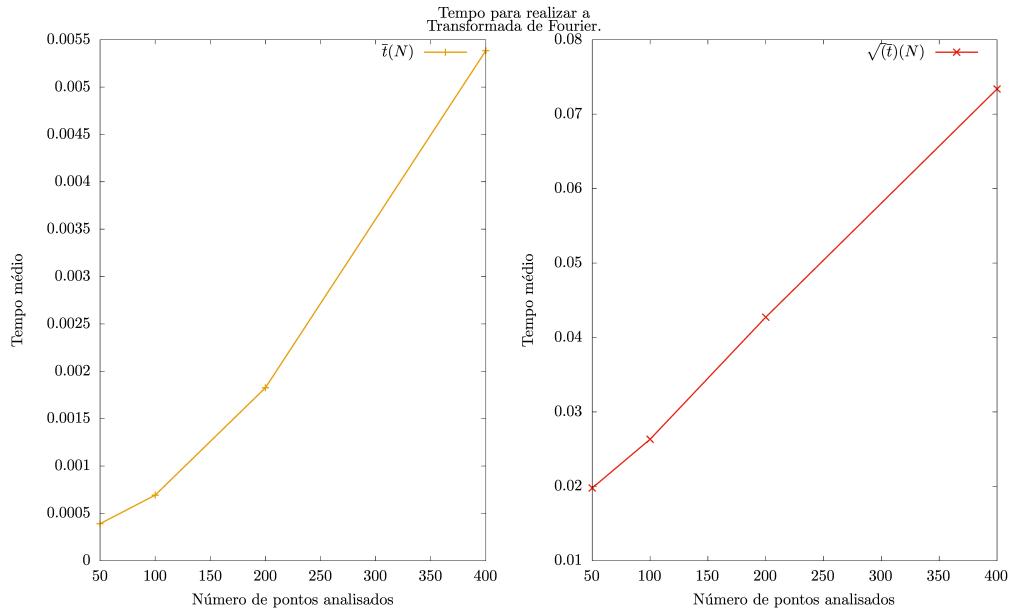
end function Yk

```

O resultado dos tempos médios está na tabela a seguir

N	Tempo médio (s)	Raiz do tempo médio (s^{-2})
50	$3,91 \cdot 10^{-4}$	$1.97 \cdot 10^{-2}$
100	$6,92 \cdot 10^{-4}$	$2.63 \cdot 10^{-2}$
200	$1,82 \cdot 10^{-3}$	$4,27 \cdot 10^{-2}$
400	$5.38 \cdot 10^{-3}$	$7.33 \cdot 10^{-2}$

Que podemos observar no gráfico a seguir



Uma relação bem quadrática, de fato!!