Lagrangiana

Edgard Macena Cabral

November 23, 2021

Contents

1 Resumo

Vimos nas aulas anteriores que a análise do princío de Hamilton fornecia as equações de movimento em qualquer coordenadas

Vimos ainda que para a equação

$$L = T - V \tag{1}$$

Obtemos, através de Euler-Lagrange

$$\frac{dL}{d\mathbf{r}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\mathbf{r}}}\right) = 0 \tag{2}$$

Nos fornece as equações do momento e força generalizados (angular e linear) Façamos um resumo sobre quando devemos usar multiplicadores de Lagrange no formalismo Lagrangiano

O ponto de partida deve ser observar que o formalismo de lagrange está baseado no princípio de Hamilton. Por sua vez, vimos que se não há vínculos entre as coordenadas e o movimento, podemos aplicar de maneira simples Euler Lagrange. Se houver vínculos

Portano, vemos que o uso de multiplicadores de Lagrange depende do funcional L (Lagrangiano) ser função de variáveis que tem vínculos entre si.

Podemos ainda generalizar o que vimos até agora para N párticulas

Tendo a revisão feita, vamos partir pra generalização para qualquer coordenada.

2 Coordenadas generalizadas e graus de liberdade

Dizemos que $q_1, q_2, ..., q_n$ é um conjunto de *coordenadas generalizadas* se a posição de toda partícula do sistema é uma função dessas variáveis

$$\mathbf{r_i} = \mathbf{r_i}(q_1, q_2, ..., q_n) \tag{3}$$

em que $\mathbf{r_i}$ é a i-ésima coordenada

- Pendulo simples $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y)$ $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta)$

  São ambas coordenadas generalizadas de $\mathbf{r}$

O número de graus de liberdade de um sistema é dado pelo número de coordenadas que podem variar independentemente

Se o número de coordenadas generalizadas é igual ao de graus de liberdade, o conjunto é chamado de próprio

2 Outras definições

- Sistema holonômico: Sistema no qual as equações de vínculo podem ser usadas pra eliminar algumas coordenadas, reduzindo-se o número total de coordenadas. Vinculos do tipo $g(\{q_i\}, t = 0)$ são holonômicos
- Sistema forçado Se a eliminação de coordenadas introduzir funções explícitoas do tempo, o sistema é dito forçado, se os vínculos são tais que que $\mathbf{r}$ não depende explicitamente de t, o sistema é dito **natural**

  Se o sistema for natural, T é a soma de das energias cinéticas devido as energias cinéticas generalizadas, apenas com termos quadráticos.

Vamos agora determinar as equações de movimento em termos de coordenadas generalizadas.

Se $\{q_i\}$ for um conjunto próprio, e o sistema tiver s graus de liberdade

$$equao \tag{4}$$

Obtivemos tal resultado considerando:

1. As forças consideradas até agora são todas conservativas ou de vínculo
2. Os vínculos usados até aqui são todos holonômicos

3 Leis de conservação

Observe que se uma coordenada própria não aparecer explicitamente na lagrangiana, equação para essa coordenada sera

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) = 0 \tag{5}$$

Temos então

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) = 0 \tag{6}$$

Que é uma constante do movimento

4 Forças não inerciais

Até o momento só trabalhamos com forças que fossem derivadas de funções energias potenciais, mas podemos fazer uma análise para casos em que a força generalizadas podem ser escritas como:

$$\boxed{F_\alpha = -\frac{\partial U}{\partial q_\alpha} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}\right)}$$

Nesses casos, podemos definir $L = T - U$, onde U é a "energia potencial efetiva do sistema". Nesse caso, a Lagrangiana pode ser escrita da equação de Lagrange.

Consideremos um sistema de 1 partícula sujeita a uma força resultante

$$I = \int_{t_1}^{t_2} T \mathrm{d}x = \int_{t_1}^{t_2} T(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)\mathrm{d}x$$

Note que $\delta T = \delta\left[\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\right]$

podemos integrar por partes

$$\delta I = m(\dot{x}\delta x + \dot{y}\delta y + \dot{z}\delta z)\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m(\ddot{x}\delta x + \ddot{y}\delta y + \ddot{z}\delta z)\mathrm{d}t \tag{7}$$

Note que o termo da derivada corresponde a integral do tabalho virtual (que é o trabalho para levar umaa partícula de um ponto a outro em um tempo instântaneo).recentlyused:/locations

$$\delta I = -\int_{t_1}^{t_2} \delta W \mathrm{d}t$$

Podemos escrever $\delta W = \sum_{\alpha=1}^{3} F_\alpha \delta q_\alpha$ (Essa é a definição de F_α).

Sabemos ainda que 2

$$\boxed{\delta I = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)}$$

Unindo os dois, temos pra cada termo α