Modos normais

Edgard Macena Cabral

November 25, 2021

Contents

1 Uma introdução

Antes de estabelecer a base do problema geral de oscilações acopladas, façamos a análise de um exemplo simples.

Se x_1 e x_2 forem o deslocamentos do sistemam, sabemos que

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)$$

e

$$V = \frac{kx_1^2}{2} + \frac{kx_2^2}{2} + \frac{\kappa(x_1 - x_2)^2}{2}$$

Pela equações Lagrangiana, temos

$$M\ddot{x}_1 \tag{1}$$

$$M\ddot{x}_2 + kx_2 - \kappa(x_1 - x_2) \tag{2}$$

Façamos $x_j = \mathrm{Re}(z_j) = B_j e^{i\omega t}$ Temos:

$$\begin{cases} (k + \kappa - M\omega^2)B_1 - \kappa B_2 & = 0 \\ -\kappa B_1 + (k + \kappa - M\omega^2)B_2 & = 0 \end{cases}$$

Soluções não triviais implicam no determinante desse sistema ser diferente de 0. Para isso, temos

$$(k + \kappa - M\omega^2)^2 - \kappa^2 = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{k + \kappa \pm \kappa}{M} \tag{3}$$

$$\omega_a^2 = \frac{k + 2\kappa}{M} \text{ e } \omega_b^2 = \frac{k}{M} \tag{4}$$

Para $\omega = \omega_b \Rightarrow B_1 = B_2$ Já para $\omega = \omega_a \Rightarrow B_1 = -B_2$

$\boxed{\text{Nota: A nossas icógnitas aqui são } B_a^{\pm} \text{ e } B_b^{\pm}}$

E assim resolvemos nosso problema em termo de x_1 e x_2 e suas derivadas.

$$\begin{cases} M\ddot{z}_1 + (k+\kappa)z_1 - \kappa z_2 & = 0 \\ M\ddot{z}_2 + (k+\kappa)z_2 - \kappa z_1 & = 0 \end{cases}$$

Ao somar e subtrair ambas as equações

$M(\ddot{z}_1 \pm \ddot{z}_2) + (k+\kappa)(\ddot{z}_1 \pm \ddot{z}_2) - \kappa(z_2 \pm z_1)$

Fazendo

$$\gamma_a \equiv z_1 - z_2 \tag{5}$$

$$\gamma_b \equiv z_1 + z_2 \tag{6}$$

Assim:

$$\begin{cases} M\ddot{\gamma}_a + (k+2\kappa)\gamma_a = 0 \\ M\ddot{\gamma}_b + k\gamma_b = 0 \end{cases}$$

O que nos dá as equações desacopladas cujas equações são independentes

$$\gamma_a = C_1^+ e^{i\omega_a t} + C_1^- e^{-i\omega_a t} \tag{7}$$

$$\gamma_b = C_2^+ e^{i\omega_a t} + C_2^- e^{-i\omega_a t} \tag{8}$$

Embora isso seja *bemmmm* mais simples, ela tem a desvantagem de não ser a solução dos corpos separados. Perceba que $\gamma_a = 0$ para qualquer t, $x_1 = x_2$ e as distâncias entre as massas permanece a mesma, é simétrica. Já para $\gamma_b = 0$, $x_1 = -x_2$ e o movimento é anti-simétrico.

2 Generalizando o problema