

Lagrangianas

Edgard Macena Cabral

December 21, 2021

Contents

1	Resumo	1
2	Coordenadas generalizadas e graus de liberdade	2
2.1	Outras definições	2
3	Leis de conservação	3

1 Resumo

Vimos nas aulas anteriores que a análise do princípio de Hamilton fornecia as equações de movimento em qualquer coordenadas

Vimos ainda que para a equação

$$H = T - V \quad (1)$$

Obtemos, através de Euler-Lagrange

$$\frac{dH}{d\mathbf{r}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{dH}{d\dot{\mathbf{r}}} \right) = 0 \quad (2)$$

Nos fornece as equações do momento e força generalizados (angular e linear) Fazemos um resumo sobre quando devemos usar multiplicadores de Lagrange no formalismo Lagrangiano

O ponto de partida deve ser observar que o formalismo de lagrange está baseado no princípio de Hamilton. Por sua vez, vimos que se não há vínculos entre as coordenadas e o movimento, podemos aplicar de maneira simples Euler Lagrange. Se houver vínculos

Portanto, vemos que o uso de multiplicadores de Lagrange depende do funcional L (Lagrangiano) ser função de variáveis que tem vínculos entre si.

Podemos ainda generalizar o que vimos até agora para N partículas

Tendo a revisão feita, vamos partir pra generalização para qualquer coordenada.

2 Coordenadas generalizadas e graus de liberdade

Dizemos que q_1, q_2, \dots, q_n é um conjunto de *coordenadas generalizadas* se a posição de toda partícula do sistema é uma função dessas variáveis

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (3)$$

em que \mathbf{r}_i é a i -ésima coordenada

- Pendulo simples $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y)$ $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta)$

São ambas coordenadas generalizadas de \mathbf{r}

O número de graus de liberdade de um sistema é dado pelo número de coordenadas que podem variar independentemente

Se o número de coordenadas generalizadas é igual ao de graus de liberdade, o conjunto é chamado de próprio

2.1 Outras definições

- Sistema holonômico: Sistema no qual as equações de vínculo podem ser usadas pra eliminar algumas coordenadas, reduzindo-se o número total de coordenadas. Vínculos do tipo $g(\{q_i\}, t = 0)$ são holonômicos
- Sistema forçado Se a eliminação de coordenadas introduzir funções explícitas do tempo, o sistema é dito forçado, se os vínculos são tais que \mathbf{r} não depende explicitamente de t , o sistema é dito **natural**
Se o sistema for natural, T é a soma de das energias cinéticas devido as energias cinéticas generalizadas, apenas com termos quadráticos.

Vamos agora determinar as equações de movimento em termos de coordenadas generalizadas.

Se $\{q_i\}$ for um conjunto próprio, e o sistema tiver s graus de liberdade

$$equao \quad (4)$$

Obtivemos tal resultado considerando:

1. As forças consideradas até agora são todas conservativas ou de vínculo
2. Os vínculos usados até aqui são todos holonômicos

3 Leis de conservação

Observe que se uma coordenada própria não aparecer explicitamente na lagrangiana, equação para essa coordenada sera

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = 0 \quad (5)$$

Temos então

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = 0 \quad (6)$$

Que é uma constante do movimento